



2.2.3.3 *Gaussova ali normalna porazdelitev*

Pri zelo **velikem številu meritev** ($n \Rightarrow \infty$) in manjšanju širine razreda ($\Delta x \Rightarrow 0$) dobi **histogram zvezni značaj**.

- merjena veličina lahko zavzame **katerikoli** vrednost,
- **verjetnost**, da zavzame neko določeno vrednost med neskončno možnostmi, **gre proti 0**.

Namesto verjetnosti vpeljemo **gostoto vejetnosti**:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_i < x < x_i + \Delta x)}{\Delta x} - \text{gostota relativne frekvence}$$

- **števec** je enak **verjetnosti**, da merjena veličina **leži v intervalu Δx** - ustreza **relativni frekvenci**.

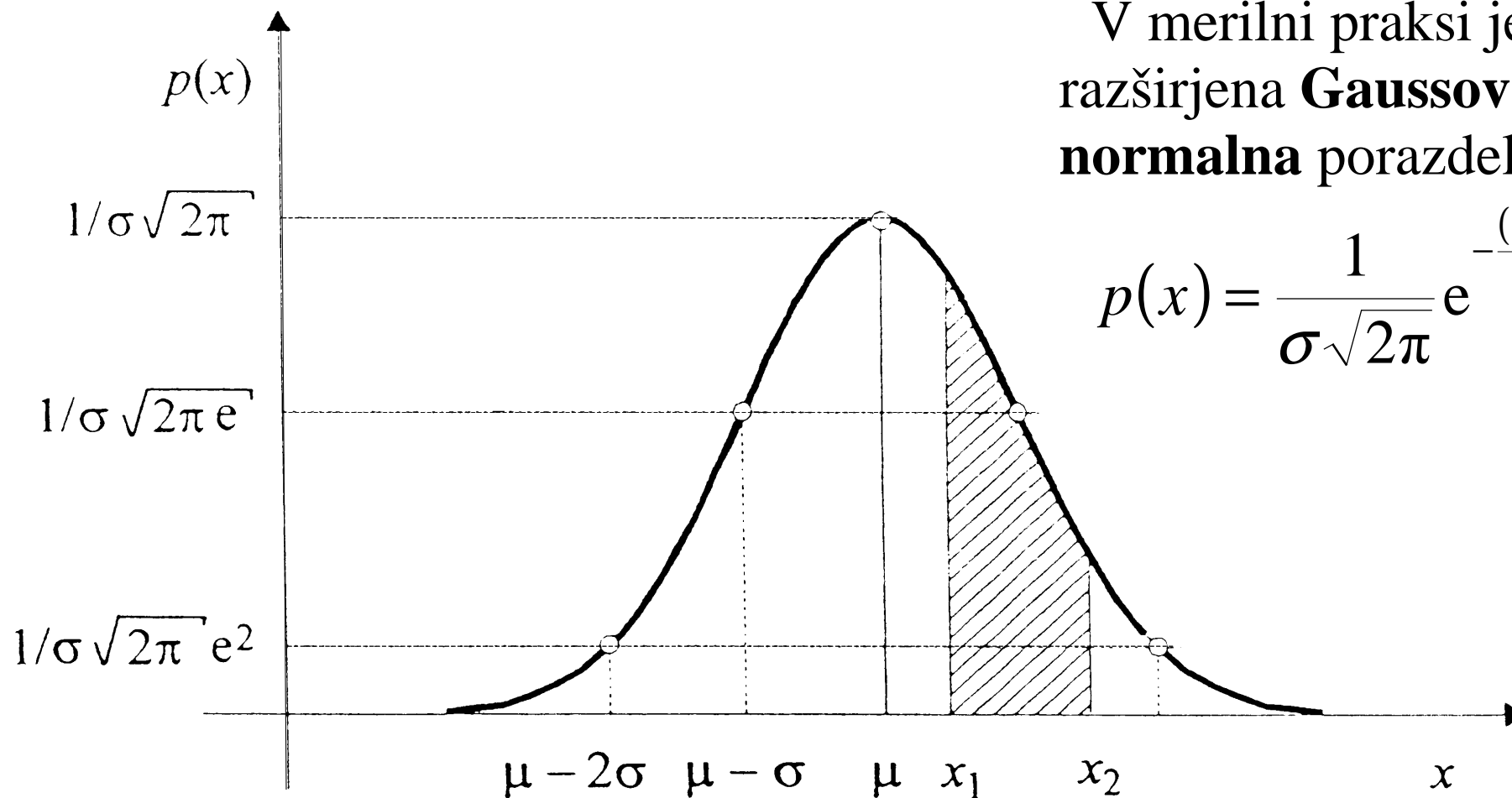




Gostota verjetnosti je pogosto kopaste oblike.

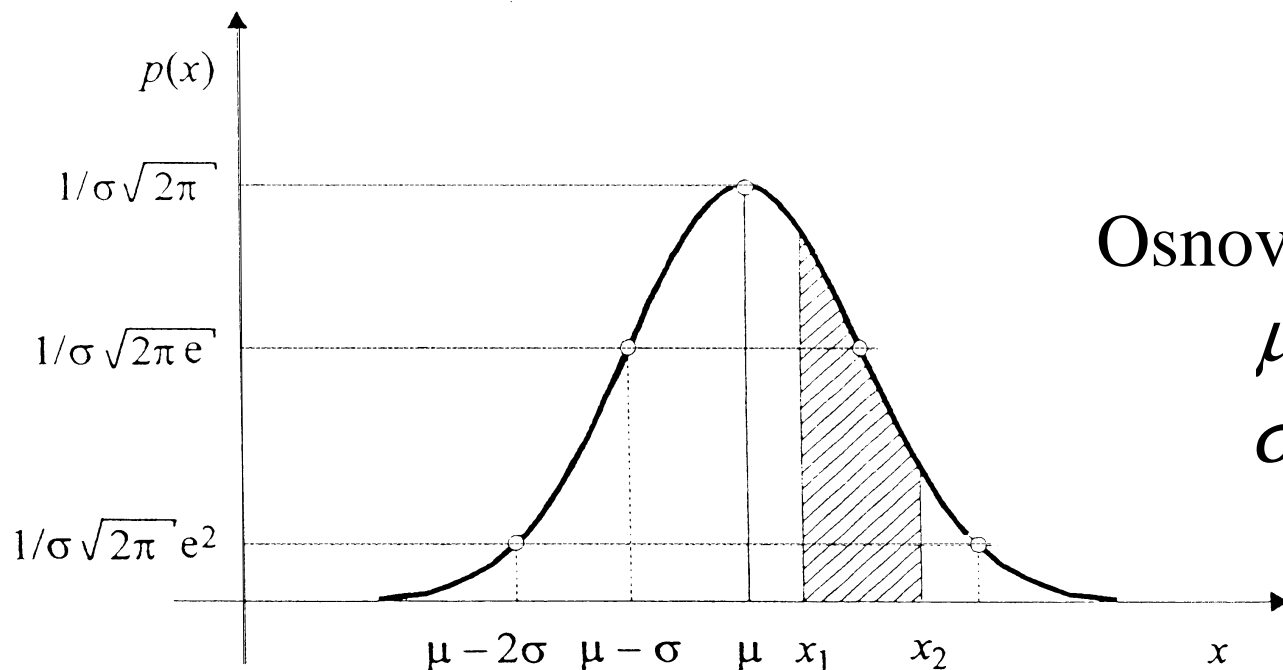
V merilni praksi je najbolj razširjena **Gaussova** ali **normalna** porazdelitev:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Slika 2.6 Gostota verjetnosti pri Gaussovi ali normalni porazdelitvi





Osnovna parametra populacije:
 μ - aritmetična sredina
 σ - standardna deviacija

Verjetnost, da se vrednost nahaja med x_1 in x_2 :

$$P_{12} = P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

Verjetnost, da se vrednost nahaja med $-\infty$ in $+\infty$:

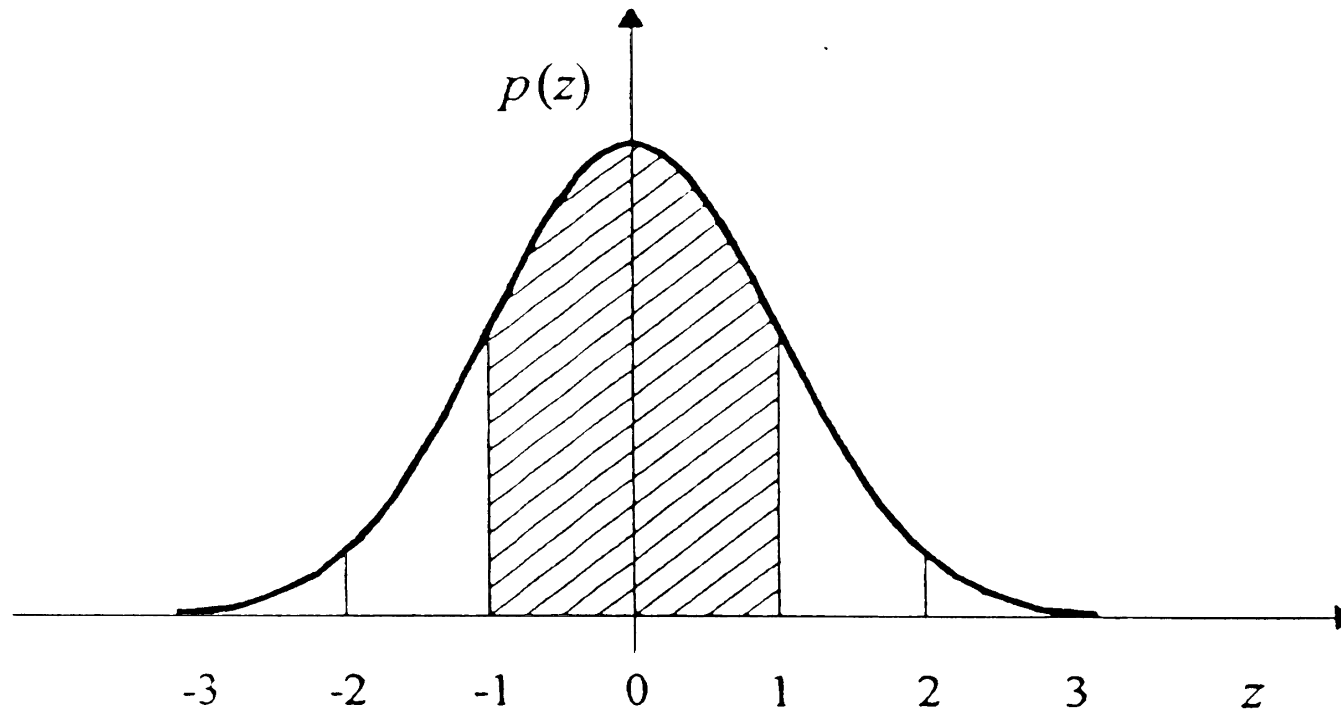
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (100\%)$$





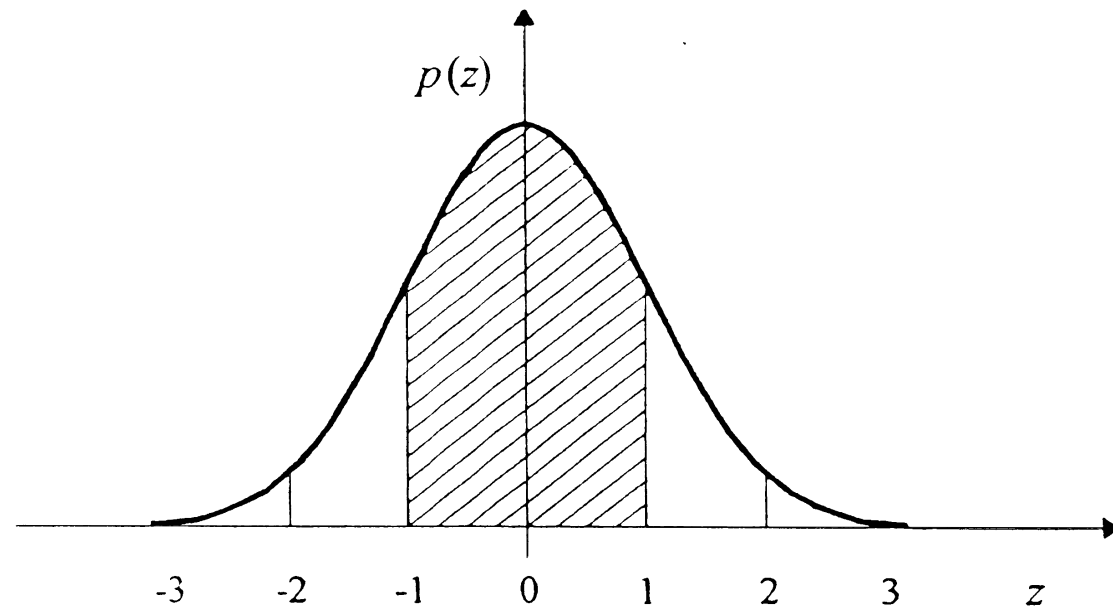
Če **normiramo** spremenljivko x z osnovnima parametroma μ in σ , dobimo **standardizirano normalno porazdelitev**:

$$z = (x - \mu) / \sigma \quad \Rightarrow \quad p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$



Slika 2.7 Standardizirana normalna porazdelitev





Osnovna parametra:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_1^n (x - \mu) / \sigma = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{n} \sum_1^n (x - \mu) \right) = 0$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (z - \bar{z})^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n z^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (x - \mu)^2 / \sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_1^n (x - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Verjetnost, da leži spremenljivka med $z_1 = -1$ in $z_2 = +1$:

$$P_{12} = 0,683 \quad (P_{12} = 68,3\%)$$

- 683 izmerkov od tisoč leži med $x_1 = \mu - \sigma$ in $x_2 = \mu + \sigma$





Tabela 2.3 Verjetnosti pri standardizirani normalni porazdelitvi

spodnja meja z_1	zgornja meja z_2	verjetnost, da se x nahaja v mejah	verjetnost, da se x nahaja izven meja
-0,675	+0,675	0,5	0,5
-1	+1	0,6826	0,3174
-1,96	+1,96	0,95	0,05
-2	+2	0,9543	0,0457
-2,58	+2,58	0,99	0,01
-3	+3	0,9973	0,0027
-3,9	+3,9	0,9999	0,0001





Zgled:

- Imamo oceno celotne populacije: $\mu = 220$, $\sigma = 3$;
- Kolikšna je verjetnost, da pogrešek pri merjenju ne bo večji od ± 2 ? ($220 \pm 2 = 218 \div 222$)

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{218 - 220}{3} \approx -0,67$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{222 - 220}{3} \approx +0,67 \quad \Rightarrow \quad P_{12} = 50\%$$



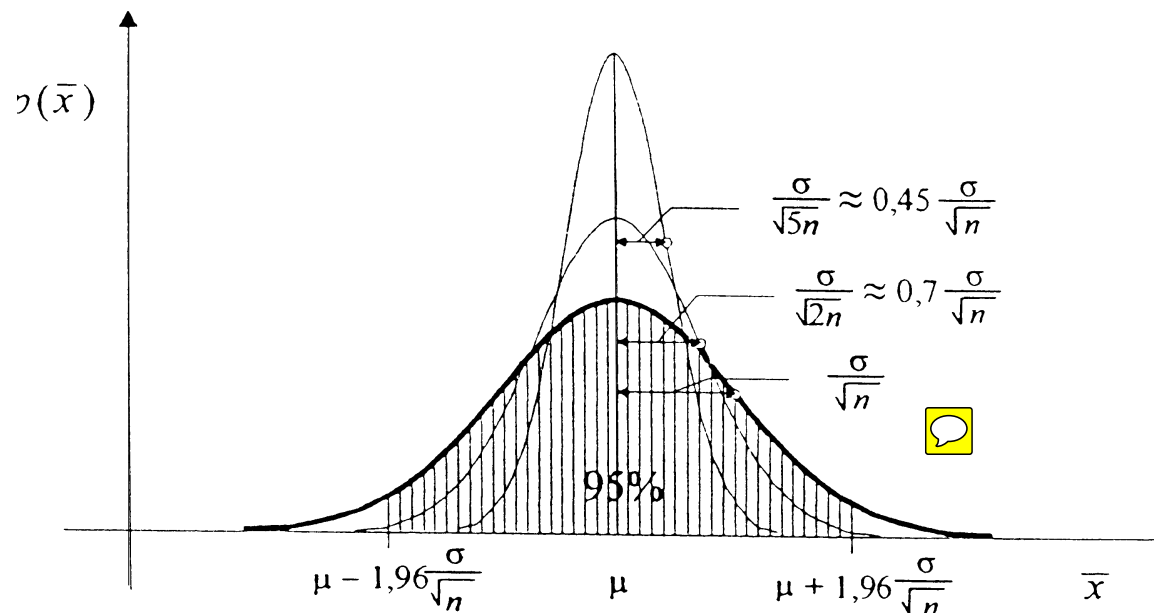


2.2.3.4 Standardni odklon aritmetične sredine in interval zaupanja

Če naredimo več (r) serij meritev z isto merilno opremo pod enakimi pogoji,

- je razpršenost **aritmetičnih sredin** $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ manjša od razpršenosti posameznih meritev.

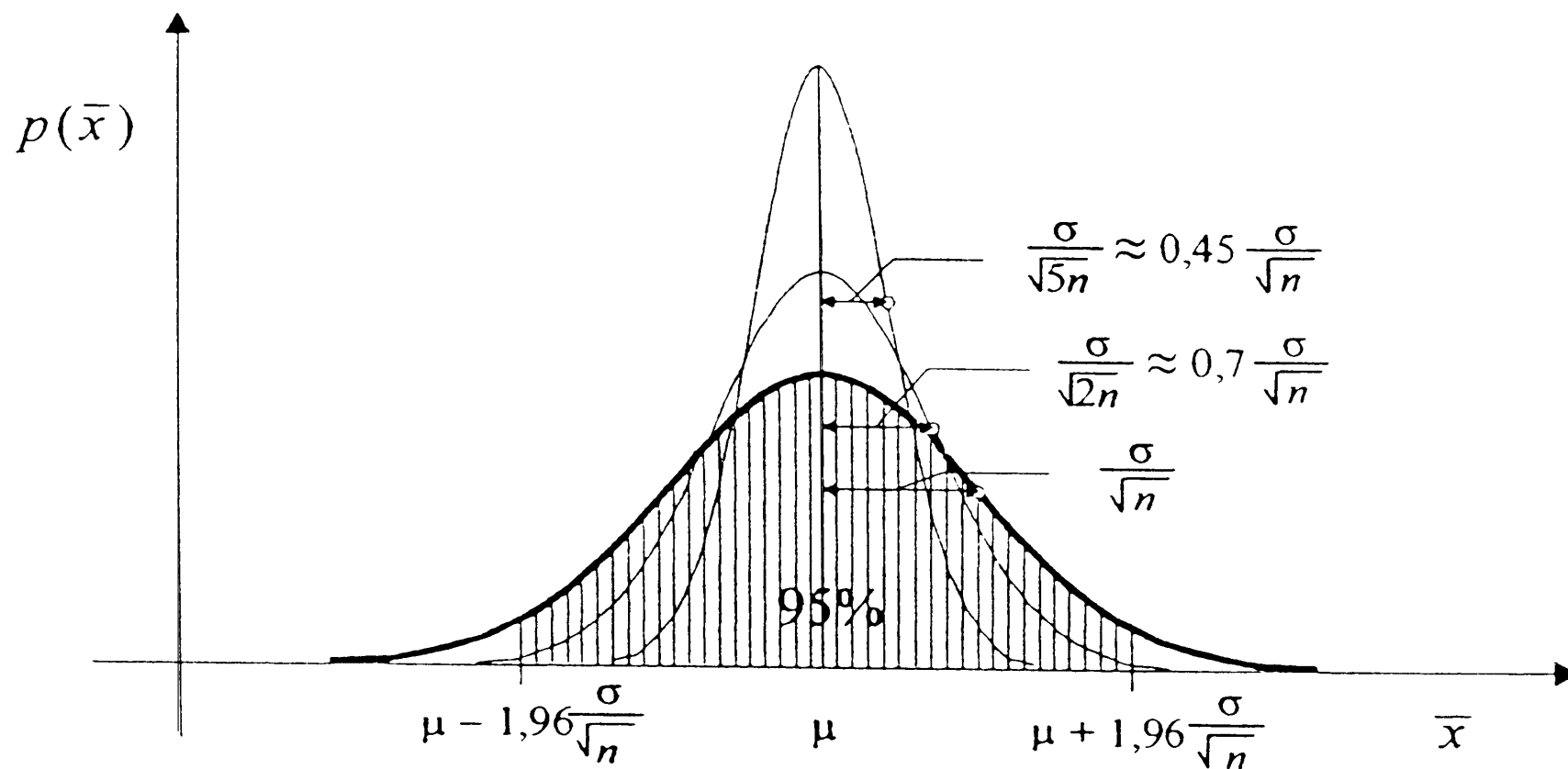
- Porazdelitev je **normalna!**





Standardni odklon aritmetične sredine: $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- odvisen od velikosti vzorca n



Slika 2.8 Gostota verjetnosti za aritmetične sredine za tri velikosti vzorcev





Tudi to porazdelitev lahko **standardiziramo** z:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma(\bar{x})} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Integral $P_{12} = \int_{z_1}^{z_2} p(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ **ni elementaren,**

- podan je **tabelarično.**

Iz obeh enačb lahko določimo interval, kjer se nahaja aritmetična sredina – **interval zaupanja:**

$$\mu = \bar{x} \pm z\sigma(\bar{x}) = \bar{x} \pm z\sigma/\sqrt{n}$$

- **spodnja meja:** $\mu = \bar{x} - z\sigma/\sqrt{n}$
- **zgornja meja:** $\mu = \bar{x} + z\sigma/\sqrt{n}$





Verjetnost za interval se imenuje stopnja ali raven zaupanja

- **Primer:** stopnja zaupanja je 95%
 - spodnja meja: $\mu = \bar{x} - 1,96 \sigma / \sqrt{n}$
 - zgornja meja: $\mu = \bar{x} + 1,96 \sigma / \sqrt{n}$

V praksi standardni odklon populacije σ nadomestimo z **eksperimentalnim standardnim odklonom** $s(x)$ in posledično tudi **eksperimentalnim standardnim odklon aritmetične sredine:**

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} \quad - \quad \text{tudi standardni pogrešek}$$





2.2.3.5 Studentova ali t -porazdelitev

Pri končnem številu meritev uporabljamo **Studentovo** ali **t -porazdelitev** (po Gossetu)

- simetrična in zvončaste oblike,
- z večanjem števila izmerkov **prehaja v normalno** porazdelitev
 - interval zaupanja: $\mu = \bar{x} \pm t s(\bar{x}) = \bar{x} \pm t s(x)/\sqrt{n}$
 - spodnja meja: $\mu = \bar{x} - t s(x)/\sqrt{n}$
 - zgornja meja: $\mu = \bar{x} + t s(x)/\sqrt{n}$
- t je parameter (podobno kot z pri Gaussni porazd.)
- odvisen od **stopnje zaupanja** p in **števila** izmerkov n (oz. števila **prostostnih stopenj** $\nu = n - 1!$)





Tabela 2.4 Vrednosti $t_p(\nu)$ za Studentovo porazdelitev za raven zaupanja p in ν prostostnih stopenj

število prostostnih stopenj ν	vrednosti za $t_p(\nu)$		število prostostnih stopenj ν	vrednosti za $t_p(\nu)$	
	$p = 95\%$	$p = 99\%$		$p = 95\%$	$p = 99\%$
1	12,71	63,66	12	2,18	3,05
2	4,3	9,92	14	2,14	2,98
3	3,18	5,84	16	2,12	2,92
4	2,78	4,60	18	2,10	2,88
5	2,57	4,03	20	2,09	2,85
6	2,45	3,71	30	2,04	2,75
7	2,36	3,50	40	2,02	2,70
8	2,31	3,36	50	2,01	2,68
9	2,26	3,25	100	1,98	2,63
10	2,23	3,17	∞	1,96	2,58





Zgled:

Kolikšen je interval zaupanja za $p = 95\%$ stopnjo zaupanja?

$$x_i : 273, 268, 275, 281, 286$$

- aritmetična sredina je:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j} = \frac{1}{5} (273 + 268 + 275 + 281 + 286) = 276,6$$

- eksperimentalni standardni odklon je:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(273 - 276,6)^2 + (268 - 276,6)^2 + \dots + (286 - 276,6)^2}{5-1}} = 7,02$$





- parameter Studentove porazdelitve je za:

$$\nu = n - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$p = 95\% \quad \Rightarrow \quad t_p(\nu) = t_{0,95}(4) = 2,78$$

- interval zaupanja:

$$\mu = \bar{x} \pm t s(x) / \sqrt{n} = 276,6 \pm 2,78 \cdot 7,02 / \sqrt{5} = 276,6 \pm 8,8$$

$$\text{ali} \quad 267,8 \leq \mu \leq 285,4$$





2.3 Pogreški merilnih instrumentov in njihove mejne vrednosti

Rezultat merjenja je območje vrednosti (ne ena sama vrednost!).

Prispevki k nedoločenosti merjenja pri **eni sami meritvi** imajo bolj **systematično naravo**:

- **lastni pogrešek** merilnega instrumenta,
- **spremembo kazanja**, če nimamo referenčnih pogojev,
- **ločljivost**,
- odstopanje etalonov od nazivnih vrednosti,
- ne dovolj točen matematični model...
 - ti prispevki so dani **z mejnimi vrednostmi**.





2.3.1 Meja (lastnega) pogreška

Pogrešek instrumenta **ne sme preseči določene vrednosti v mejah merilnega območja in pod referenčnimi pogoji.**

Lastni ali temeljni pogrešek je posledica **notranjih lastnosti** instrumenta.

- Je **sistematični** pogrešek, ki ga povzročajo:
 - **staranje** vgrajenih preduporov, souporov in elektronskih sestavnih delov,
 - **preostala napetost,**
 - nezadostna temperaturna kompenzacija,
 - nenatančna graduacija skale,
 - trenje v ležajih,
 - necentrična namestitvev, itn.





Če je instrument brezhiben **ne sme preseči** določene vrednosti – **meje pogreška**, ki je podana z **razredom točnosti** r in dogovorjeno **referenčno vrednostjo** x_r .

$$M_x = \pm \frac{r}{100} x_r$$

Referenčna vrednost x_r je lahko:

- a - **merilni doseg** x_D ,
- b – **vsakokratna izmerjena vrednost** x_i ,
- c - **merilni razpon** x_R ,
- d – **dolžina skale** l_D (se opušča).





a) Največkrat je referenčna vrednost **merilni doseg** (praviloma zgornja meja merilnega območja): $M_x = \pm \frac{r}{100} x_D$ - konstanta

b) Meja pogreška **z izmerjeno vrednostjo** kot referenčno vrednostjo **linearno narašča**: $M_x = \pm \frac{r}{100} x_i$

c) Pri **merilnem razponu** – razlika zgornje in spodnje meje merilnega območja – imamo: $M_x = \pm \frac{r}{100} x_R$

d) Pri starejših instrumentih se uporablja tudi **dolžina skale**, kjer nastopa **občutljivost**: $M_x = \pm \frac{r}{100} \frac{l_D}{S}$





Absolutna meja pogreška: M_x

Relativna meja pogreška: $m_x = \frac{M_x}{x_i}$

- Če je referenčna vrednost **merilni doseg**, se **relativna meja spreminja**:

$$m_x = \pm \frac{r}{100} \frac{x_D}{x_i}$$

- Če je referenčna vrednost **vsakokratna izmerjena vrednost**, se **relativna meja ne spreminja**:

$$m_x = \frac{M_x}{x_i} = \pm \frac{r}{100} \frac{x_i}{x_i} = \pm \frac{r}{100}$$





Zgled:

- voltmeter: $r = 0,5$; $U_D = 100 \text{ V}$; $U_{i1} = 15,5 \text{ V}$;
 $U_{i2} = 92,4 \text{ V}$
- absolutna meja pogreška:

$$M_U = \pm \frac{r}{100} U_D = \pm \frac{0,5}{100} 100 \text{ V} = \pm 0,50 \text{ V}$$

- relativna meja pogreška:

$$m_{U_1} = \pm \frac{r}{100} \frac{U_D}{U_{i1}} = \pm \frac{0,5}{100} \cdot \frac{100 \text{ V}}{15,5 \text{ V}} = \pm 3,2 \cdot 10^{-2} = \pm 3,2 \%$$

$$m_{U_2} = \pm \frac{M_U}{U_{i2}} = \pm \frac{0,5 \text{ V}}{92,4 \text{ V}} = \pm 5,4 \cdot 10^{-3} = \pm 0,54 \%$$





Pri **digitalnih** merilnih instrumentih je **meja** pogreška sestavljena **iz dveh delov** (iz dosega in izmerjene vrednosti):

$$M_x = \pm(a x_i + b x_D) \quad m_x = \pm \left(a + b \frac{x_D}{x_i} \right)$$

Primer:

- voltmeter: $U_D = 2 \text{ V}$; $U_i = 1,2040 \text{ V}$;
 $M_U = \pm(0,05 \% U_i + 0,02 \% U_D)$

$$M_U = \pm \left(\frac{0,05}{100} 1,2040 \text{ V} + \frac{0,02}{100} 2 \text{ V} \right) = \pm(0,6 \text{ mV} + 0,4 \text{ mV}) = \pm 1,0 \text{ mV}$$

$$m_U = \frac{M_U}{U_i} = \frac{\pm 1,0 \text{ mV}}{1,2040 \text{ V}} = \pm 8,4 \cdot 10^{-4} = \pm 0,084 \%$$





Včasih je delež z dosegom izražen v digitih (en **digit** – mesto **z** najmanjšo vrednostjo).

Primer: $M_U = \pm(0,5\% U_i + 2 \text{ dig}); \quad U_i = 1,347 \text{ V}$
 $1 \text{ dig} = 0,001 \text{ V}$

$$M_U = \pm \left(\frac{0,5}{100} 1,347 \text{ V} + 2 \cdot 0,001 \text{ V} \right) = \pm 8,8 \text{ mV}$$

$$m_U = \frac{M_U}{U_i} = \frac{\pm 8,8 \text{ mV}}{1,347 \text{ V}} = \pm 6,5 \cdot 10^{-3} = \pm 0,65\%$$

Meja pogreška je lahko izražena še z več deli:

$$M_U = \pm(0,05\% U_i + 0,03\% U_D + 2 \text{ dig} + 10 \mu\text{V})$$





2.3.2 Meja spremembe kazanja

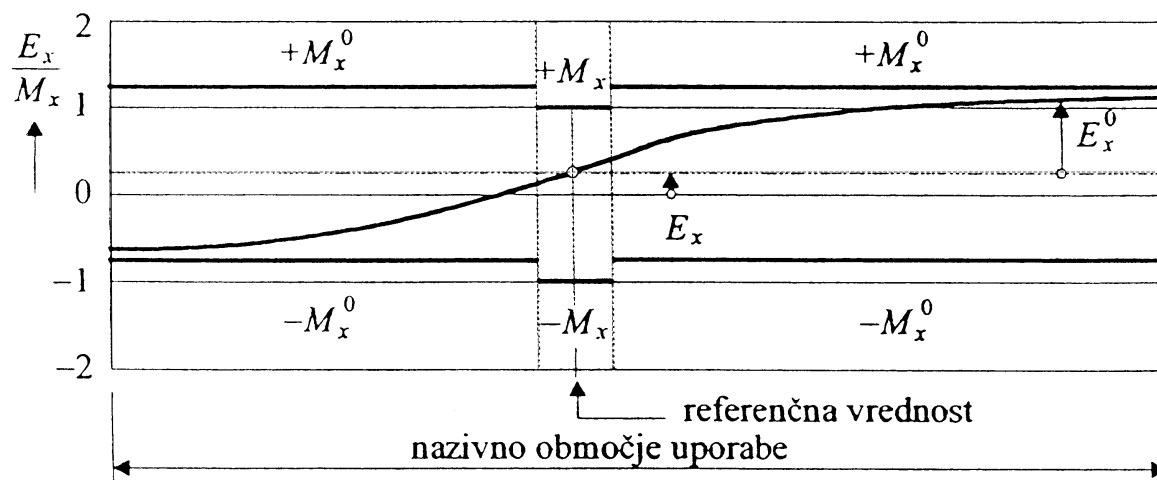
Kadar ena vplivna veličina ni v referenčnih pogojih (ostale vplivne veličine pa so) sprememba kazanja E_x^0 ne sme preseči meje spremembe kazanja M_x^0 :

$$M_x^0 = a \% M_x \quad - \quad \text{delež meje lastnega pogreška} \quad (a = 100)$$

Meja spremembe kazanja je določena na dva načina:

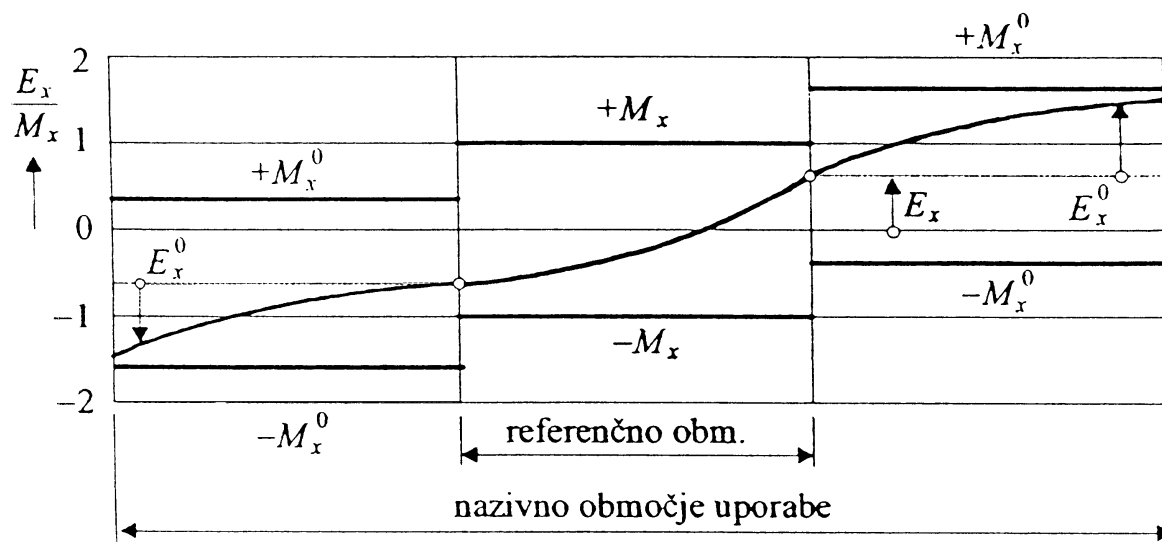
- z referenčno vrednostjo,
- z referenčnim območjem.





os, od katere se računa sprememba kovanja E_x^0

← Z referenčno vrednostjo



os, od katere se računa sprememba kovanja E_x^0

← Z referenčnim območjem

Slika 2.9 Meja pogreška in meja spremembe kovanja ($a = 100$)





Meja spremembe kazanja je praviloma **odvisna od oddaljenosti** od referenčnih pogojev.

Primer:

- voltmeter ima od 0°C do 20°C in od 30°C do 50°C
temperaturni koeficient : $\pm (0,03\% U_i + 0,05\% U_D) / ^\circ\text{C}$

$$U_i = 123,4 \text{ V}; U_D = 200 \text{ V} \quad \text{pri temperaturi: } t = 5^\circ\text{C}$$

- meja spremembe kazanja:

$$M_U^0 = \pm \left(\frac{0,03}{100} 123,4 \text{ V} + \frac{0,05}{100} 200 \text{ V} \right) (5^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) / ^\circ\text{C} = \pm 2,06 \text{ V}$$

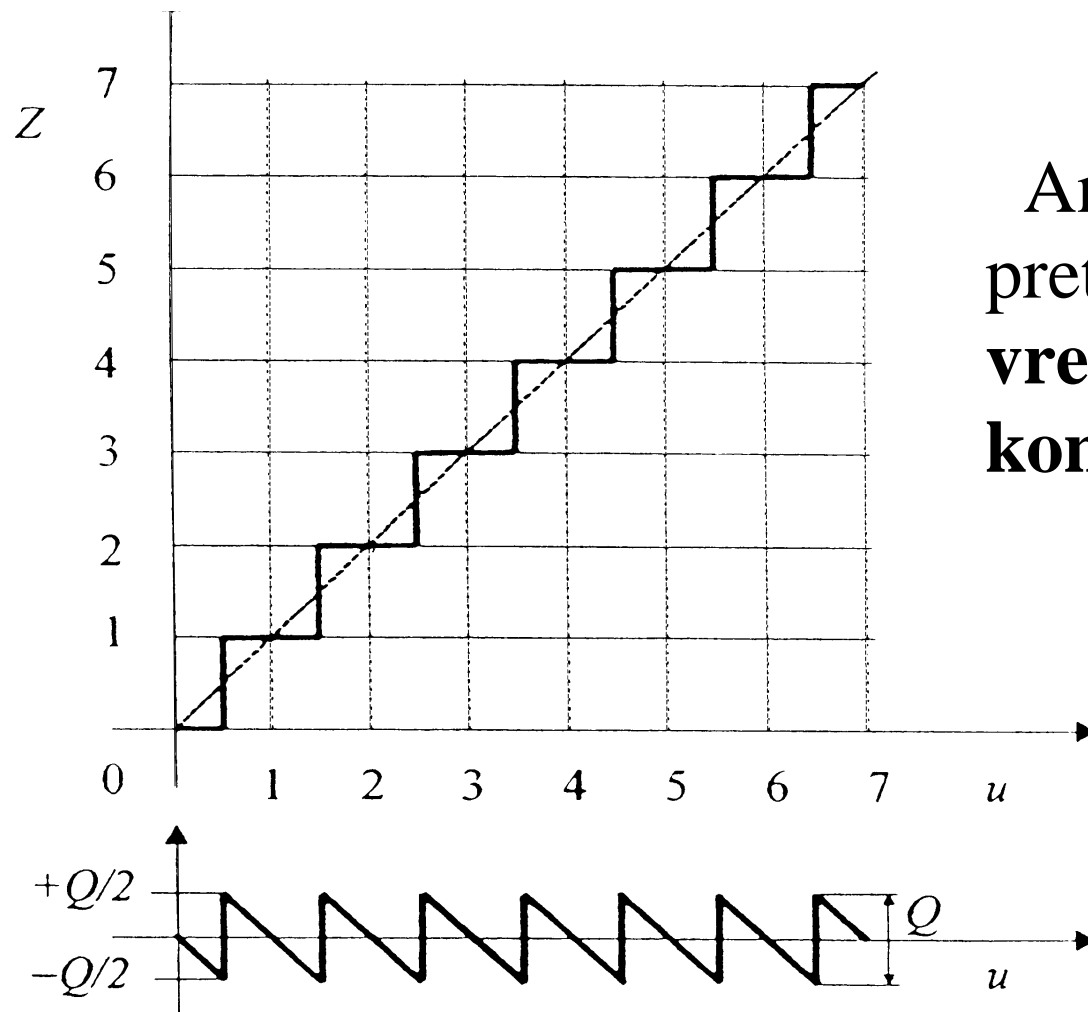
V referenčnih pogojih (npr.: od 20°C do 30°C) nas zanima **meja pogreška** M_x , **zunaj** pa tudi **meja spremembe kazanja**.

$$M_x^0 = a\% M_x$$





2.3.3 Mejni kvantizacijski pogrešek digitalnih instrumentov



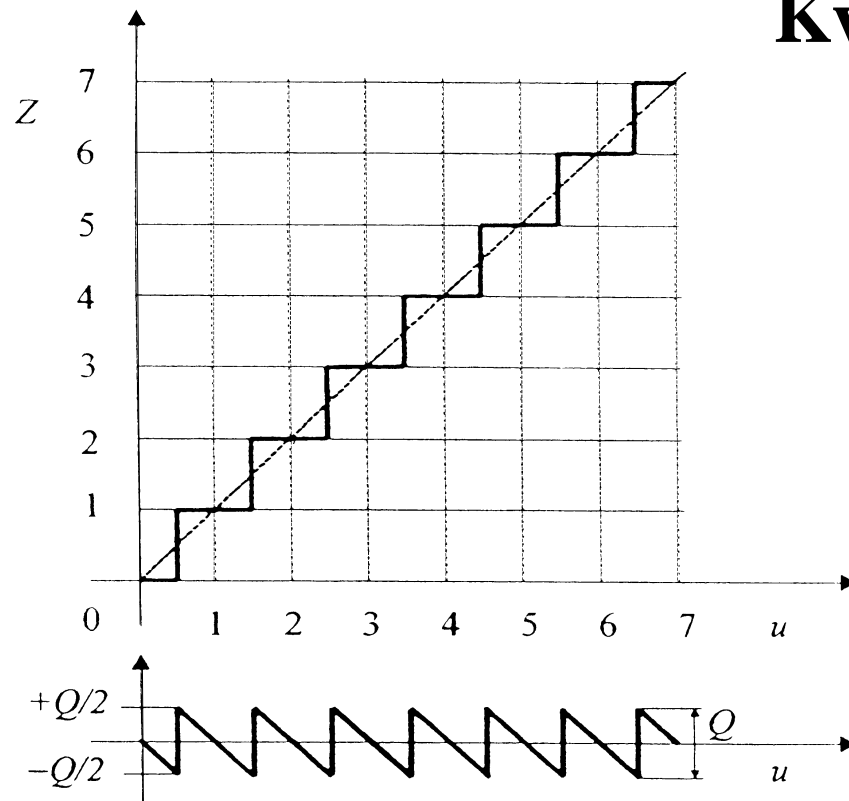
Analogno-digitalni pretvornik pretvori **neskončno število vrednosti** zveznega signala v **končno število** diskretnih.

Slika 2.10 Kvantizacijska karakteristika in kvantizacijski pogrešek





Kvantizacijska karakteristika:



- korak Q je ločljivost digitalnega merilnega instrumenta.
- pogrešek kvantizacije je v mejah $-Q/2$ in $+Q/2$,
- mejni kvantizacijski pogrešek: $\pm Q/2$

Primer: - voltmeter: $U_D = 2 \text{ V}$; $4 \frac{1}{2}$ - mestni prikazovalnik
 $U_i = 1,2040 \text{ V}$;

\Rightarrow ločljivost $100 \mu\text{V}$;

mejni kvantizacijski pogrešek $\pm 50 \mu\text{V}$





2.3.4 *Mejni pogrešek odčitavanja analognih instrumentov*

Pri analognih instrumentih **moramo sami** določiti številsko vrednost (**kvantizirati**).

- izhodna veličina instrumenta je dolžina l (položaj kazalca,
- **človeško oko loči** spremembe ene kotne **minute**,
 - pri razdalji 25 cm ustreza to $\Delta l \approx 0,07$ mm,

- ločljivost analognega instrumenta (+človek):

$$\Delta G = \Delta l / S \quad S = \Delta l / \Delta G - \text{občutljivost}$$

- pogrešek odčitavanja je **porazdeljen z enako verjetnostjo** od $-\Delta G/2$ do $+\Delta G/2$,
 - **mejni pogrešek odčitavanja je $\pm \Delta G/2$**





Primer: Če moremo odčitati vrednosti:

...52,6 mA, 52,7 mA, 52,8 mA, 52,9 mA, ...

⇒ - ločljivost je: 0,1 mA

- mejni pogrešek odčitavanja: $\pm 0,05$ mA

Odčitajmo vedno vsa mesta, ki jih omogoča skala instrumenta

in:

- **ne podajajmo številske vrednost bolj natančno, kot je ločljivost instrumenta – ni možno dokazati!**

