

Fakulteta za elektrotehniko, UL

# Odgovori na izpitna vprašanja iz matematike IV

Matej Kus  
21.8.2014

## 1. Vsebina

1.	Integralske transformacije.....	5
1.1.	Fourierova transformacija.....	5
1.	Kako je definirana Fourierova transformacija? Kdaj obstaja? .....	5
2.	Naštejte nekaj lastnosti Fourierove transformacije!.....	5
3.	Pokažite čemu je enako $\mathcal{F}[f(t - a)]$ in $\mathcal{F}[e^{iat}f(t)]$ ! .....	5
4.	Odvajanje pri Fourierovi transformaciji (odvajanje v prostoru $t$ in prostoru $\omega$ ).....	5
5.	Ali lahko na funkciji $e_+^{-t} = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ uporabite izrek $\mathcal{F}[f'(t)] = -i\omega \mathcal{F}[f(t)]$ ? Utemeljite! .....	6
6.	Inverzna Fourierova transformacija. ....	6
7.	Konvolucija in njene lastnosti.....	6
8.	Parsevalova enačba.....	7
9.	Fourierova sinusna transformacija in njene lastnosti. ....	7
10.	Fourierova kosinusna transformacija in njene lastnosti. ....	8
11.	Določite kosinusno Fourierovo transformacijo funkcije $e_+^{-t}$ ! .....	8
1.2.	Laplaceova transformacija .....	8
12.	Definicija Laplaceove transformacije. Kdaj obstaja?.....	8
13.	Čemu je enako $\mathcal{L}[e^{at}f(t)]$ ? .....	8
14.	Navedite zadostne pogoje za eksistenco Laplaceove transformacije! Ali poznate kakšno funkcijo, za katero Laplaceova transformacija ne obstaja? .....	8
15.	Laplaceova transformacija odvoda in integrala. ....	9
16.	Kompleksna inverzna formula za Laplaceovo transformacijo.....	9
17.	Kako izračunamo Laplaceovo transformacijo s pomočjo residuumov? .....	10
18.	Izračunajte $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right]$ s pomočjo residuumov! .....	10
19.	Kako rešujemo navadne diferencialne enačbe s pomočjo Laplaceove transformacije? Primer: $y'' + \omega^2 y = r(t)$ ; $y(0) = y_0$ ; $y'(0) = y'_0$ .....	10
20.	Opišite iskanje inverzne Laplaceove transformacije s pomočjo razcepa na parcialne ulomke.....	10
21.	Reševanje sistemov diferencialnih enačb s pomočjo Laplaceove transformacije. ....	11
22.	Odvajanje in integriranje Laplaceovih transformacij. ....	11
23.	Z Laplaceovo transformacijo rešite enačbo $t\dot{x}(t) + x(t) = 2t$ .....	11
24.	Konvolucija in Laplaceova transformacija. ....	12
25.	Čemu je enako $\mathcal{L}[f(t - a) u_a(t)]$ ? .....	12
26.	Zapišite analitično funkcijo in poiščite njeno Laplaceovo transformacijo! .....	12

27.	Laplaceova transformacija in periodične funkcije.....	12
2.	Specialne funkcije.....	13
2.1.	Gama, beta funkcija.....	13
28.	Gama funkcija: definicija in lastnosti.....	13
29.	Pokažite, da je $\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x)$ !.....	13
30.	Izračunajte $\int_0^\infty e^{-x^n} dx$ !.....	13
31.	Funkcija beta. ....	13
2.2.	Metoda s potenčnimi vrstami .....	13
32.	Kako rešujemo diferencialne enačbe s pomočjo vrst?.....	13
33.	Rešite enačbo $xy' - y = 0$ s pomočjo vrst!.....	14
2.3.	Legendrova diferencialna enačba .....	14
34.	Legendrova diferencialna enačba in njene rešitve.....	14
2.4.	Besselova diferencialna enačba .....	15
35.	Besselova enačba in njene rešitve.....	15
36.	Lastnosti Besselovih funkcij.....	15
2.5.	Ortogonalen sistem funkcij .....	15
37.	Ortogonalni sistemi funkcij. ....	15
38.	Kako je z ortogonalnostjo Legendrovih polinomov in Besselovih funkcij? .....	16
39.	Polinomi Čebiševa. ....	16
40.	Laguerrovi polinomi.....	16
41.	Hermitovi polinomi.....	17
42.	Poiščite Hermitov polinom $H_1(x)$ , če veste, da je $H_0(x) = 1$ , $H_0(x)$ in $H_1(x)$ pa sta ortogonalna z ustrežno utežjo! .....	17
3.	Variacijski račun.....	17
3.1.	Naloge variacijskega računa .....	17
43.	Problem brahistohrone .....	17
44.	Pojem funkcionala .....	18
45.	Kako je definiran lokalni ekstrem funkcionala? .....	18
46.	Funkcionalni za funkcije dveh spremenljivk. ....	18
47.	Kako izgleda izoperimetričen problem?.....	18
48.	Osnovni izrek variacijskega računa.....	19
3.2.	Eulerjeva enačba .....	19
49.	Eulerjeva diferencialna enačba. ....	19
50.	Integracija Eulerjeve diferencialne enačbe. ....	19
51.	Eulerjeva diferencialna enačba, ko je $f = f(x, y')$ .....	19

52.	Eulerjeva diferencialna enačba, ko je $f = f(y, y')$ .....	19
53.	Rotacijska ploskev z najmanjšo površino. ....	20
54.	Variacijski problem za več funkcij.....	20
55.	Reševanje izoperimetričnega problema.....	20
3.3.	Direktne metode .....	21
56.	Direktne metode variacijskega računa.....	21
57.	Poiščite krivuljo, ki veže dve točki in ima najmanjšo dolžino. ....	21
58.	Opišite definicijsko območje funkcionala $I[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y')dx$ . ....	22
59.	Kaj je $\varepsilon$ okolica funkcije $y(x)$ ?.....	22
60.	Kako izgleda kvadratni funkcional? .....	22
61.	Rešite variacijski problem za funkcional $I = \int_0^1 (y^2 + 2xy')dx$ ; $y(0) = 0, y(1) = 1$ . ....	22
4.	Parcialne diferencialne enačbe .....	22
4.1.	Uvodni pojmi in klasifikacija .....	22
62.	Kaj je parcialna diferencialna enačba? Navedite nekaj primerov!.....	22
63.	Zapišite splošno linearno parcialno diferencialno enačbo drugega reda za $u = u(x, y)$ ! .	23
64.	Napišite parcialne diferencialne enačbe elektromagnetnega polja! .....	23
65.	Klasificirajte linearne parcialne diferencialne enačbe drugega reda! .....	23
66.	Kakšne dodatne pogoje je treba predpisati pri enačbah posameznega tipa, da je rešitev enolično določena? .....	24
4.2.	Enačbe valovanja in difuzije .....	24
67.	Enačba nihanja strune. Rešite jo z metodo separacije spremenljivk!.....	24
68.	Kaj so stojni valovi, lastne vrednosti in lastne funkcije strune? .....	25
69.	d'Alambertova rešitev enačbe za nihanje strune.....	25
70.	Enačba za prevajanje toplote – kako izgleda in kakšne vrste dodatnih pogojev moramo podati?.....	26
71.	Rešite enačbo za prevajanje toplote skozi tanko palico – z metodo separacije spremenljivk!.....	26
72.	Enačba za prenos toplote v neskončnem sredstvu – rešite jo s pomočjo Fourierovega integrala! .....	27
73.	Dvodimenzionalna valovna enačba – kako jo rešimo s separacijo spremenljivk? .....	28
74.	Reševanje telegrafске enačbe z metodo separacije spremenljivk.....	30
75.	Enačba za nihanje okrogle membrane. ....	31
4.3.	Laplaceova enačba .....	32
76.	Laplaceova enačba – kako izgleda? Pri kakšnih dodatnih pogojih jo rešujemo? .....	32
77.	Rešite Laplaceovo enačbo za notranjost kroga!.....	33

4.4.	Reševanje z Laplaceovo transformacijo .....	34
78.	Reševanje valovne enačbe s pomočjo Laplaceove transformacije. ....	34
79.	Reševanje enačbe za prenos toplote s pomočjo Laplaceove transformacije. ....	34
80.	Rešite Laplaceovo enačbo v krogelnem koordinatnem sistemu! Poiščite le $u = u(r, \varphi)$ !	35
81.	Reševanje Laplaceove enačbe v pravokotnih koordinatah. ....	36
4.5.	Nehomogene enačbe .....	37
82.	Reševanje nehomogene valovne enačbe. ....	37
83.	Reševanje parcialnih diferencialnih enačb z nehomogenimi robnimi pogoji. ....	38

# 1. Integralske transformacije

## 1.1. Fourierova transformacija

### 1. Kako je definirana Fourierova transformacija? Kdaj obstaja?

Fourierova transformacija je nek operator, ki preslika funkcijo  $f(t)$ , definirano v časovnem prostoru, na funkcijo  $F(\omega)$ , definirano v frekvenčnem prostoru.

Naj bo  $f(t)$  v splošnem kompleksna funkcija definirana na vsej osi in  $F(\omega)$  njena transformiranka podana s funkcijo:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Fourierova transformacija obstaja, če je transformiranka absolutno integrabilna:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Za tako funkcijo pravimo, da je razreda  $L(-\infty, \infty)$  oziroma, da je odsekoma zvezna.

Nato lahko ocenimo:

$$|F(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

### 2. Naštejte nekaj lastnosti Fourierove transformacije!

$$1. \quad \mathcal{F}[a f(t) + b g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [a f(t) + b g(t)] e^{i\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\omega t} dt \\ = a \mathcal{F}[f(t)] + b \mathcal{F}[g(t)]$$

$$2. \quad \mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\frac{\omega}{a}u} du = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Pri reševanju tega integrala smo uporabili zamenjavo:  $u = at; a \neq 0$

$$3. \quad \mathcal{F}[\overline{f(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{e^{i\omega t}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \overline{F(-\omega)}$$

$$4. \quad \mathcal{F}[f(t-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega(u+a)} du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u} e^{i\omega a} du \\ = e^{i\omega a} F(\omega)$$

$$5. \quad \mathcal{F}[e^{iat} f(t)] = e^{iat} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i(\omega+a)t} dt = F(\omega + a)$$

### 3. Pokažite čemu je enako $\mathcal{F}[f(t-a)]$ in $\mathcal{F}[e^{iat} f(t)]$ !

Odgovor na vprašanje 2, točki 4 in 5.

### 4. Odvajanje pri Fourierovi transformaciji (odvajanje v prostoru $t$ in prostoru $\omega$ ).

Funkciji  $f(t)$  in  $tf(t)$  sta absolutno integrabilni in odsekovo zvezni.

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) it e^{i\omega t} dt = \mathcal{F}[it f(t)] \\ F^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}[(it)^n f(t)]$$

Naj bo funkcija  $f(t)$  zvezna, odsekoma zvezna ter zvezno odvedljiva,  $f'(t)$  pa le odsekoma zvezna.

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{i\omega t} dt = e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = -i\omega \mathcal{F}[f(t)]$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (-i\omega)^n \mathcal{F}[f(t)]$$

5. Ali lahko na funkciji  $e_+^{-t} = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$  uporabite izrek  $\mathcal{F}[f'(t)] = -i\omega \mathcal{F}[f(t)]$ ? Utemeljite!

$$\mathcal{F}[e_+^{-t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e_+^{-t} e^{i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{i\omega - 1} e^{t(i\omega - 1)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1 - i\omega}$$

$$\mathcal{F}[(e_+^{-t})'] = -i\omega \mathcal{F}[e_+^{-t}] = \frac{i\omega}{i\omega - 1}$$

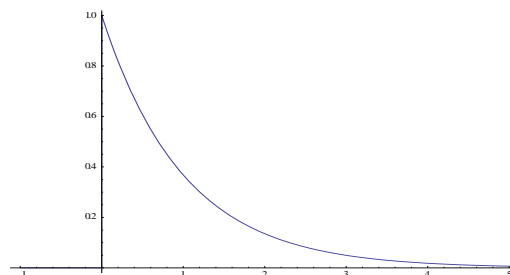
$$(e_+^{-t})' = \begin{cases} -e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[(e_+^{-t})'] = \int_{-\infty}^{\infty} (e_+^{-t})' e^{i\omega t} dt = - \int_0^{\infty} e^{-t} e^{i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{1 - i\omega} e^{t(i\omega - 1)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{i\omega - 1}$$

$$\frac{i\omega}{i\omega - 1} \neq \frac{1}{i\omega - 1}$$

$$e_+^{-t} = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$



Pri tej funkciji tega izreka ne smemo uporabiti, saj funkcija  $e_+^{-t}$  ni zvezna!

## 6. Inverzna Fourierova transformacija.

Za funkcije  $f(t)$ , ki so odsekoma zvezne, velja inverzna funkcija:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(\omega) d\omega$$

Seveda Fourierova transformiranka  $F(\omega)$  ni nujno absolutno integrabilna, zato ta integral ne eksistira vedno in so potrebni še neki dodatni pogoji.

## 7. Konvolucija in njene lastnosti.

Funkcijo  $h(t)$  definiramo z integralom:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) g(u) du = f * g$$

in jo imenujemo konvolucija funkcij  $f(t)$  in  $g(t)$ . Konvolucija ima naslednje lastnosti:

1.  $[a f(t)] * g(t) = a[f(t) * g(t)]$

---

2.  $f(t) * [g(t) + k(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * k(t)$

---

3.  $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

---

4.  $f(t) * [g(t) * k(t)] = [f(t) * g(t)] * k(t)$

Za dokaze vstavi zgornjih lastnosti vstavi njihove nastavke v integralsko definicijo konvolucije.

$$\begin{aligned}
 5. \quad \mathcal{F}[h(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) g(u) du \right] dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) e^{i\omega t} dt \right] du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i\omega u} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{i\omega v} dv \right] du = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[g(t)]
 \end{aligned}$$

### 8. Parsevalova enačba.

Naj bosta  $f(t)$  in  $F(\omega)$  odsekoma zvezni, potem velja Parsevalova enačba:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

**Dokaz:**

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \overline{F(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right] d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt
 \end{aligned}$$

### 9. Fourierova sinusna transformacija in njene lastnosti.

Naj bo  $f(t)$  liha funkcija:  $f(-t) = -f(t)$

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(-u) e^{-i\omega u} du + \int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_0^{\infty} [f(-t) e^{-i\omega t} + f(t) e^{i\omega t}] dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(t) [e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] dt = 2i \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt
 \end{aligned}$$

**Definicija:** Sinusna Fourierova transformacija je:

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

In inverzna transformacija:

$$\mathcal{F}^{-1}[F_s(\omega)] = f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

**Lastnosti sinusne in kosinusne Fourierove transformacije:**

1.  $\mathcal{F}_c[f'(t)] = -f(0) + \omega \mathcal{F}_s[f(t)]$

---

2.  $\mathcal{F}_s[f'(t)] = -\omega \mathcal{F}_c[f(t)]$

---

3.  $\mathcal{F}_c[f''(t)] = -f'(0) - \omega^2 \mathcal{F}_c[f(t)]$

---

4.  $\mathcal{F}_s[f''(t)] = \omega f(0) - \omega^2 \mathcal{F}_s[f(t)]$

### 10. Fourierova kosinusna transformacija in njene lastnosti.

Naj bo  $f(t)$  soda funkcija:  $f(-t) = f(t)$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(-u) e^{-i\omega u} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_0^{\infty} [f(-t) e^{-i\omega t} + f(t) e^{i\omega t}] dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \end{aligned}$$

**Definicija:** Kosinusna Fourierova transformacija je:

$$\mathcal{F}_c[f(t)] = F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

In inverzna transformacija:

$$\mathcal{F}^{-1}[F_c(\omega)] = f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

**Lastnosti** kosinusne Fourierove transformacije so naštetje pri odgovoru na vprašanje 9.

### 11. Določite kosinusno Fourierovo transformacijo funkcije $e_+^{-t}$ !

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e_+^{-t}] &= \int_0^{\infty} e^{-t} e^{i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{t(i\omega-1)} dt = \frac{1}{i\omega-1} e^{t(i\omega-1)} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{i\omega-1} = \frac{1}{1+\omega^2} + \frac{i\omega}{1+\omega^2} \\ \mathcal{F}[e_+^{-t}] &= \mathcal{F}_c[e_+^{-t}] + i\mathcal{F}_s[e_+^{-t}] = \frac{1}{1+\omega^2} + \frac{i\omega}{1+\omega^2} \rightarrow \mathcal{F}_c[e_+^{-t}] = \frac{1}{1+\omega^2} \end{aligned}$$

## 1.2. Laplaceova transformacija

### 12. Definicija Laplaceove transformacije. Kdaj obstaja?

**Definicija:** Naj bo  $f(t)$  dana funkcija, definirana za vse  $t \geq 0$ . Funkcijo  $F(s)$ ,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Imenujemo Laplaceovo transformiranko funkcije  $f(t)$ , seveda, če integral eksistira za kompleksna števila  $s$  iz kakšnega območja kompleksne ravnine.

Pogoja za eksistenco Laplaceove transformiranke sta, da je funkcija  $f$  po delih zvezna in da  $|f|$  ne narašča prehitro, ko gre  $t \rightarrow \infty$ .

### 13. Čemu je enako $\mathcal{L}[e^{at} f(t)]$ ?

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t(s-a)} f(t) dt = F(s-a)$$

### 14. Navedite zadostne pogoje za eksistenco Laplaceove transformacije! Ali poznate kakšno funkcijo, za katero Laplaceova transformacija ne obstaja?

**Izrek:** Naj bo  $f(t)$  odsekoma zvezna na vsakem končnem intervalu na področju  $t \geq 0$  in naj ustreza pogoju

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

za vse  $t \geq 0$  in neki konstanti  $\alpha$  in  $M$ . Potem Laplaceova transformiranka funkcije  $f(t)$  eksistira za vse  $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ .

**Dokaz:** Ker je  $f(t)$  odsekoma zvezna, je  $e^{-st}f(t)$  integrabilna funkcija na poljubnem intervalu na  $t$  osi. Sledi:

$$|\mathcal{L}[f(t)]| = \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{\alpha t} dt = \frac{M}{\alpha - s} e^{t(\alpha-s)} \Big|_0^{\infty},$$

Funkcija  $e^{\infty(\alpha-s)}$  mora iti proti nič za obstoj transformacije, torej  $\operatorname{Re}(s) > \alpha$

Funkcija  $f(t) = e^{t^2}$  nima Laplaceove transformiranke, saj prej omenjeni pogoj ne more držati za katera koli izbrana parametra  $\alpha$  in  $M$ .

### 15. Laplaceova transformacija odvoda in integrala.

**Izrek:** Predpostavimo, da je  $f(t)$  zvezna funkcija za  $t \geq 0$ , ki ustreza pogoju  $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$  za neki konstanti  $M$  in  $\alpha$  in da ima odsekoma zvezan odvod  $f'(t)$  na vsakem intervalu področja  $t \geq 0$ . Potem obstaja Laplaceova transformiranka odvoda  $f'(t)$  in se glasi:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

**Dokaz:**

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

Podobno lahko dokažemo tudi za višje odvode in dobimo:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

**Izrek:** Če je  $f(t)$  odsekoma zvezna in ustreza pogoju  $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ , potem je:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[g(t)] = \frac{F(s)}{s}$$

**Dokaz:** Integral  $\int_0^t f(\tau) d\tau = g(t)$  je zvezna funkcija:

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau \leq \int_0^t M e^{\alpha \tau} d\tau = \frac{M}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1)$$

Seveda je  $g'(t) = f(t)$ , razen v točkah, v katerih je  $f(t)$  nezvezna. Ker je  $g'(t)$  odsekoma zvezna na vsakem končnem intervalu, dobimo:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0)$$

Ker je  $g(0) = 0$ , sledi:

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] = \frac{F(s)}{s}$$

### 16. Kompleksna inverzna formula za Laplaceovo transformacijo.

Če je  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ , potem je originalna funkcija  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$  dana tako:

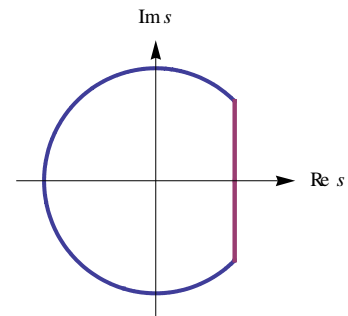
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad t > 0$$

in  $f(t) = 0$  za  $t < 0$ . Temu integralu rečemo kompleksna inverzna ali Bromwicheva integralska formula. Po tej formuli dobimo na direkten način inverzno Laplaceovo transformiranko  $f(t)$ .

Integracija poteka vzdolž premice  $s = \gamma + i\omega$  v kompleksni ravnini.

Realno število  $\gamma$  je izbrano tako, da premica  $s = \gamma$  leži desno vseh singularnosti (v naših primerih so to največkrat poli), sicer je  $\gamma$  poljuben. Zgornji integral izračunamo kot krivuljni integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} F(s) ds = \sum \operatorname{Res} e^{st} F(s)$$



17. Kako izračunamo Laplaceovo transformacijo s pomočjo residuumov?

Glej odgovor na vprašanje 16.

18. Izračunajte  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right]$  s pomočjo residuumov!

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right] = \sum \text{Res} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2},$$

Pri polih  $s_1 = -1$  in  $s_2 = 2$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s=-1} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} = \frac{e^{-t}}{9} \\ \text{Res}_{s=2} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} &= \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} \left[ (s-2)^2 \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{t e^{st}(s+1) - e^{st}}{(s+1)^2} \\ &= \frac{e^{2t}(3t-1)}{9} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right] &= \frac{1}{9} [e^{2t}(3t-1) + e^{-t}] \end{aligned}$$

19. Kako rešujemo navadne diferencialne enačbe s pomočjo Laplaceove transformacije? Primer:  $y'' + \omega^2 y = r(t)$ ;  $y(0) = y_0$ ;  $y'(0) = y'_0$

Najprej diferencialno enačbo celotno transformiramo. Ko transformiranke uredimo dobimo algebraično enačbo.

Določimo:  $\mathcal{L}[y] = Y(s)$  in  $\mathcal{L}[r(t)] = R(s)$

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - s y'(0) - y(0) + \omega^2 Y(s) &= R(s) \\ Y(s) &= \frac{R(s) + s y'_0 + y_0}{s^2 + \omega^2} = \frac{R(s)}{s^2 + \omega^2} + \frac{s y'_0}{s^2 + \omega^2} + \frac{y_0}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Preostane le še inverzna transformacija, ki se jo lotimo s pomočjo tabele transformacij. Rešitev bi bila kombinacija kosinusnih in sinusnih funkcij.

20. Opišite iskanje inverzne Laplaceove transformacije s pomočjo razcepa na parcialne ulomke.

Pogosto je Laplaceova transformacija racionalna funkcija ene spremenljivke  $s$ . Racionalne funkcije pa je zmeraj moč razcepiti na parcialne ulomke. Ker so te funkcije lahko različne, obstajajo tudi različni načini razcepa, ki se ločijo po številu polov (ničel polinoma v imenovalcu). Določimo:

	$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$
1. Enkraten pol	$F(s) = \frac{A}{s - s_0}$
2. En večkraten pol	$F(s) = \frac{A_m}{(s - s_0)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s - s_0)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{s - s_0}$
3. Enkraten par konjugirano kompleksnih polov	$F(s) = \frac{B}{s - s_0} + \frac{\bar{B}}{s - \bar{s}_0}$
4. Večkraten par konjugirano kompleksnih polov	$F(s) = \frac{B_m}{(s - s_0)^m} + \frac{B_{m-1}}{(s - s_0)^{m-1}} + \dots + \frac{B_1}{s - s_0} + \frac{\bar{B}_m}{(s - \bar{s}_0)^m} + \frac{\bar{B}_{m-1}}{(s - \bar{s}_0)^{m-1}} + \dots + \frac{\bar{B}_1}{s - \bar{s}_0}$

Koeficiente  $A$  in  $B$  določimo z metodo nedoločenih koeficientov. Dobljene parcialne ulomke pa preprosto inverzno transformiramo s pomočjo tabel Laplaceovih transformacij.

## 21. Reševanje sistemov diferencialnih enačb s pomočjo Laplaceove transformacije.

Primer:

$$\begin{aligned} \dot{x} + x &= 0; & x(0) &= 0 \\ \dot{y} + 2y &= r(t); & y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Sistem enačb s pomočjo Laplaceove transformacije transformiramo. S tem dobimo linearen sistem algebrskih enačb za neznane transformiranke, ki ga lahko rešimo. Tako dobljene transformiranke le še inverzno transformiramo.

Določimo:  $\mathcal{L}[x] = X(s)$ ,  $\mathcal{L}[y] = Y(s)$  in  $\mathcal{L}[r(t)] = R(s)$

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) + X(s) &= 0 \\ sY(s) - y(0) + 2Y(s) &= R(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(s) = 0 &\rightarrow x(t) = 0 \\ Y(s) &= R(s) \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= r(t) * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = r(t) * e^{-2t} \\ y(t) &= \int_0^t r(u) e^{-2(t-u)} du \end{aligned}$$

## 22. Odvajanje in integriranje Laplaceovih transformacij.

Če je funkcija  $f(t)$  odsekoma zvezna in ustreza pogoju  $|f(t)| \leq Me^{at}$ , obstaja tudi transformiranka  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ . Če transformiranko po definiciji odvajamo, se ta odvod izraža:

$$\frac{dF(s)}{ds} = F'(s) = -\mathcal{L}[t f(t)]$$

Če na tej funkciji  $f(t)$  obstaja  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ , lahko transformiranko integriramo:

$$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

## 23. Z Laplaceovo transformacijo rešite enačbo $t\dot{x}(t) + x(t) = 2t$

Določimo:  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$

$$\mathcal{L}[t\dot{x}(t)] = -\frac{d}{ds}[sX(s) - x(0)] = -X(s) - sX'(s)$$

$$-X(s) - sX'(s) + X(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$X'(s) = -\frac{2}{s^3}$$

$$\int dX(s) = -2 \int \frac{ds}{s^3}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2} + C$$

$$x(t) = t + C\mathcal{L}^{-1}[1]$$

$\mathcal{L}^{-1}[1]$  je tako imenovana funkcija delta  $\delta(t)$ :

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u_0(t)$$

## 24. Konvolucija in Laplaceova transformacija.

Funkciji  $f(t)$  in  $g(t)$  naj bosta odsekoma zvezni in naj ustrezata pogoju  $|f(t)| \leq Me^{at}$  oziroma  $|g(t)| \leq Me^{at}$ . Sledi, da obstajata transformiranki  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  in  $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ . Naj bo  $h(t) = f(t) * g(t)$ . Sledi:

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$$

Dokaz je preprost s pomočjo definicije Laplaceove transformacije in konvolucije.

## 25. Čemu je enako $\mathcal{L}[f(t-a)u_a(t)]$ ?

$$f(t-a)u_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t-a), & t \geq a \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f(t-a)u_a(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a)u_a(t) dt = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(u+a)} f(u) du$$

$$= e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-as} F(s)$$

## 26. Zapišite analitično funkcijo in poiščite njeno Laplaceovo transformacijo!

$$\mathcal{L}[(u_0 - u_a)t + u_b a]$$

$$= \mathcal{L}[u_0 t] - \mathcal{L}[u_a t] + \mathcal{L}[u_b a]$$

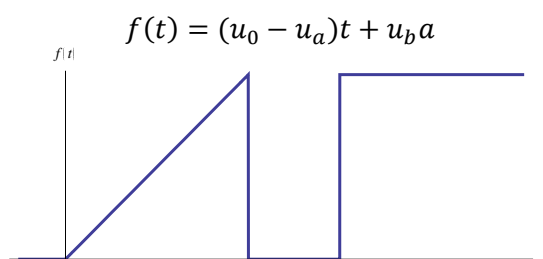
$$\mathcal{L}[u_0 t] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[u_0] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[u_a t] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[u_a] = -\frac{d}{ds} \frac{e^{-as}}{s}$$

$$= \frac{e^{-as}(as+1)}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[u_b a] = a \mathcal{L}[u_b] = a \frac{e^{-bs}}{s}$$

$$\mathcal{L}[(u_0 - u_a)t + u_b a] = \frac{1 - e^{-as}(as+1)}{s^2} + a \frac{e^{-bs}}{s}$$



## 27. Laplaceova transformacija in periodične funkcije.

**Izrek:** Naj bo  $f(t)$  definirana na področju  $t > 0$  in naj ima periodo  $p$ :  $f(t+p) = f(t)$ . Naj bo funkcija tudi odsekoma zvezna na intervalu dolžine  $p$ . Laplaceova transformacija take funkcije je:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt, \quad s > 0$$

**Dokaz:**

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t) dt + \int_{2p}^{3p} e^{-st} f(t) dt + \dots$$

$$= \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + \int_0^p e^{-s(\tau+p)} f(\tau) d\tau + \int_0^p e^{-s(\tau+2p)} f(\tau) d\tau + \dots$$

$$= [1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + \dots] \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau) d\tau$$

## 2. Specialne funkcije

### 2.1. Gama, beta funkcija

28. Gama funkcija: definicija in lastnosti.

**Definicija:** Gama funkcija je definirana z integralom:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

**Lastnosti** te funkcije so, da je zvezna, poljubno mnogokrat odvedljiva in enakomerno konvergenten.

1.  $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$

2.  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$

3.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

4.  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

29. Pokažite, da je  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ !

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \frac{e^{-t} t^x}{x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^x}{x} dt = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

30. Izračunajte  $\int_0^{\infty} e^{-x^n} dx$ !

Vpeljemo novo spremenljivko:  $x^n = u$

$$x = u^{\frac{1}{n}} \rightarrow dx = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

31. Funkcija beta.

**Definicija:** Beta funkcija je funkcija podana z integralom:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, y > 0$$

**Lastnosti:**

1.  $B(x, y) = B(y, x)$

2.  $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

### 2.2. Metoda s potenčnimi vrstami

32. Kako rešujemo diferencialne enačbe s pomočjo vrst?

Ena od metod za reševanje diferencialnih enačb je iskanje rešitev v obliki neskončne potenčne vrste:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

V posebnih primerih, ko razvijamo vrsto okoli ničle je  $a = 0$ :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Dana diferencialna enačba je podana kot  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  in lahko predpostavimo, da njena rešitev v obliki potenčne vrste:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Ker koeficientov  $c_m$  ne poznamo, jih moramo določiti tako, da v enačbo vstavimo nastavek rešitve in njegove odvode:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$y^{(m)} = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) c_n x^{n-m}$$

V kolikor v diferencialni enačbi nastopajo tudi koeficienti, ki so funkcije spremenljivke  $x$  (na primer:  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ), se dajo tudi ti razviti v potenčne vrste, s pomočjo katerih zaporedno izračunamo koeficiente  $c_m$ .

### 33. Rešite enačbo $xy' - y = 0$ s pomočjo vrst!

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n - c_0 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n (n-1) - c_0 = 0$$

$$-c_0 + 0 \cdot c_1 x + 1 \cdot c_2 x^2 + 2 \cdot c_3 x^3 + \dots = 0$$

$$c_1 \in \mathbb{R}; \quad c_n = 0, \quad n = 0, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$y = c_1 x$$

## 2.3. Legendrova diferencialna enačba

### 34. Legendrova diferencialna enačba in njene rešitve.

Legendrova diferencialna enačba je oblike:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n-1)y = 0$$

Njene rešitve so tako imenovane Legendrove funkcije. Te rešitve iščemo s pomočjo potenčnih vrst:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Reševanje nadaljujemo običajno. Na koncu pridemo do rešitve:

$$y = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$$

Polinom  $y_1(x)$  je sestavljen iz lihih potenc,  $y_2(x)$  pa iz sodih. Ti dve funkciji sta alternirajoči vrsti in konvergirata za  $|x| < 1$ . Rešitve Legendrove diferencialne enačbe imenujemo Legendrovi polinomi in jih označujemo z  $P_n(x)$ .

## 2.4. Besselova diferencialna enačba

### 35. Besselova enačba in njene rešitve.

Besselova diferencialna enačba je oblike:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Tu je parameter  $\nu$  nenegativno realno število. Rešitev Besselove diferencialne enačbe iščemo s pomočjo potenčnih vrst in sicer z nastavkom

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r},$$

kjer je eksponent  $r$  poljuben, vendar izbran tako, da  $c_0 \neq 0$ . Če  $\nu$  ni celo število, se splošna rešitev za vsak  $x \neq 0$  glasi:

$$y(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 J_{-\nu}(x)$$

Če je  $\nu = n \in \mathbb{N}$ , sta funkciji  $J_n(x)$  in  $J_{-n}(x)$  linearno odvisni in velja zveza  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ . Splošna rešitev za vse vrednosti  $\nu$  je potem

$$y(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 Y_\nu(x),$$

kjer je  $J_\nu(x)$  Besselova funkcija  $\nu$ -tega reda,  $Y_\nu(x)$  pa Neumannova funkcija  $\nu$ -tega reda.

### 36. Lastnosti Besselovih funkcij.

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m + \nu + 1)}$$

Besselove funkcije so rešitve Besselove diferencialne enačbe. Če parameter  $\nu$  ni naravno število, je rešitev diferencialne enačbe sestavljena iz dveh Besselovih funkcij prve vrste. Če pa je  $\nu$  naravno število, bi bile ti dve funkciji linearno odvisni in je zato rešitev sestavljena iz ene Besselove funkcije prve vrste in ene druge vrste ali tako imenovane Neumannove funkcije.

$$1. \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$2. \quad \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)$$

$$3. \quad J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$4. \quad J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$5. \quad \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

## 2.5. Ortogonalen sistem funkcij

### 37. Ortogonalni sistemi funkcij.

Naj bosta  $g(x)$  in  $h(x)$  dve realni funkciji definirani na intervalu  $[a, b]$ . Integral produkta  $g(x) h(x)$  nad tem intervalom naj eksistira, zaznamujemo ga  $(g, h)$ :

$$\int_a^b g(x) h(x) dx = (g, h)$$

Ta integral imenujemo tudi skalarni produkt funkcij  $g(x)$  in  $h(x)$ . Za ti dve funkciji pravimo, da sta ortogonalni, če drži:

$$(g, h) = 0$$

Norma funkcije  $g(x)$ , ki jo zaznamujemo z  $\|g\|$ , je definirana kot:

$$\|g\| = \sqrt{(g(x), g(x))} = \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

Ortogonalen sistem funkcij  $g_1(x), g_2(x), \dots$  na intervalu  $[a, b]$ , katerega funkcije imajo normo 1, torej

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

Imenujemo ortonormiran sistem funkcij na intervalu  $[a, b]$ .

### 38. Kako je z ortogonalnostjo Legendrovih polinomov in Besselovih funkcij?

Legendrovi polinomi  $P_n(x)$  sestavljajo na intervalu  $[-1, 1]$  ortogonalen sistem z utežjo  $p(x) = 1$ .

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

Norma Legendrovih polinomov pa je:

$$\|P_n\| = \sqrt{\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Besselove funkcije  $J_n(k_{1n}x), J_n(k_{2n}x), \dots$  prav tako sestavljajo ortogonalen sistem funkcij na intervalu  $[0, R]$  glede na utežno funkcijo  $p(x) = x$ :

$$\int_0^R x J_n(k_{mn}x) J_n(k_{jn}x) dx = 0, \quad m \neq j$$

Kjer so člani  $k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$  in  $\alpha_{mn}$  ničle ustrezne Besselove funkcije.

### 39. Polinomi Čebiševa.

Čebiševi polinomi so definirani kot:

$$T_n = \cos(n \arccos x), \quad U_n = \sin(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Polinome  $T_n$  imenujemo prve vrste,  $U_n$  pa druge vrste. Polinome prve vrste lahko podajamo tudi kot:

$$T_n = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$$

Zapišimo nekaj prvih Čebiševih polinomov:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, & T_1 &= x, & T_2 &= 2x^2 - 1, & T_3 &= 4x^3 - 3x, \dots \\ U_0 &= 1, & U_1 &= 2x, & U_2 &= 4x^2 - 1, & U_3 &= 8x^3 - 4x, \dots \end{aligned}$$

Polinomi Čebiševa sestavljajo ortogonalen sistem na intervalu  $[-1, 1]$  glede na utež  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Ti polinomi so hkrati tudi rešitev diferencialne enačbe:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

### 40. Laguerrovi polinomi.

Laguerrovi polinomi so definirani kot:

$$L_0 = 1, \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Zapišimo nekaj prvih Laguerrovih polinomov:

$$L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}, \quad L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \dots$$

Laguerrovi polinomi sestavljajo ortogonalen sistem na intervalu  $[0, \infty)$  z utežjo  $p(x) = e^{-x}$ .

Polinomi Laguerrova  $L_n(x)$  so hkrati tudi rešitev Laguerrove diferencialne enačbe:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

#### 41. Hermitovi polinomi.

Hermitovi polinomi so definirani kot:

$$H_0 = 1, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Zapišimo nekaj prvih Hermitovih polinomov:

$$H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1, \quad H_3(x) = x^3 - 3x, \quad H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, \dots$$

Med Hermitovimi polinomi obstajata zvezi:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= xH_n(x) - H'_n(x) \\ H'_n(x) &= n H_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Hermitovi polinomi sestavljajo ortogonalen sistem na intervalu  $(-\infty, \infty)$  z utežjo  $p(x) = e^{-x^2/2}$ . Hermitovi polinomi so hkrati tudi rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' - y' + ny = 0$$

#### 42. Poiščite Hermitov polinom $H_1(x)$ , če veste, da je $H_0(x) = 1$ , $H_0(x)$ in $H_1(x)$ pa sta ortogonalna z ustrežno utežjo!

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_0(x) H_1(x) dx = 0$$

Ker je  $H_1(x)$  polinom prvega reda, velja:  $H_1(x) = ax + b$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_1(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} [ax + b] dx = 0 \\ a \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2} dx + b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx &= 0 \end{aligned}$$

V prvem integralu je liha funkcija, zato je vrednost integrala 0.

$$b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 0 \rightarrow b = 0$$

$$H_1(x) = ax$$

Poznamo povezavo  $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$ . Sledi:

$$H'_1(x) = a = H_0(x) = 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow H_1 = x$$

## 3. Variacijski račun

### 3.1. Naloge variacijskega računa

#### 43. Problem brahistohrone

V navpični ravnini naj bosta dani dve točki  $T_1$  in  $T_2$ , ki ne ležita na isti navpični premici. Točka  $T_2$  leži nižje kot točka  $T_1$ . Najti je treba tisto krivuljo, ki veže obe točki in ima lastnost, da točkasta masa, podvržena težnosti po njej zdrsne iz  $T_1$  v  $T_2$  v najmanjšem možnem času. Trenje pri tem zanemarimo. Rešitve tega variacijskega problema imenujemo brahistohrone.

Koordinatni sistem postavimo tako, da je njegovo izhodišče v točki  $T_1$ , abscisna os naj bo vodoravna v ravnini točk  $T_1$  in  $T_2$ , ordinatna os pa naj kaže navpično navzdol. Tako sta koordinati točk  $T_1(0, 0)$  in  $T_2(a, b)$ . Hitrost, s katero drsi masna točka vzdolž krivulje je  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$ , kjer je  $g$  pospešek prostega pada. Čas  $t[y(x)]$ , ki ga točka potrebuje, da pride od  $T_1$  do  $T_2$ , je enak:

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx$$

Med vsemi krivuljami  $y(x)$ , za katere velja  $y(0) = 0$  in  $y(a) = b$ , moramo poiskati tisto, pri kateri je  $t[y(x)]$  najmanjši.

#### 44. Pojem funkcionala

Med vsemi funkcijami  $y(x)$ , ki so definirane na intervalu  $[a_1, a_2]$  in so na njem dovolj gladke, ter zavzamejo na krajiščih predpisani vrednosti  $y(a_1) = b_1$  in  $y(a_2) = b_2$ , je treba poiskati tisto, pri kateri doseže integral  $I[y(x)]$  najmanjšo ali največjo vrednost:

$$I[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y') dx$$

Vrednost integrala  $I[y(x)]$  je določena za vsako funkcijo  $y(x)$ , ki je na intervalu  $[a_1, a_2]$  zvezna in zvezno odvedljiva. Predpis  $I[y(x)]$  potemtakem priredi vsaki taki funkciji  $y(x)$  neko realno število. Pravimo da je  $I[y(x)]$  funkcional.

Definicijsko območje  $D_I$  funkcionala  $I[y(x)]$  sestavljajo zvezno odvedljive funkcije, ki zavzemajo na krajiščih intervala zahtevani vrednosti  $y(a_1) = b_1$  in  $y(a_2) = b_2$ .

#### 45. Kako je definiran lokalni ekstrem funkcionala?

Najprej definirajmo  $\varepsilon$  okolico funkcije  $y(x)$ . Naj bo  $\varepsilon$  poljubno pozitivno število. Okolico  $\varepsilon$  funkcije  $y(x) \in D_I$  sestavljajo vse funkcije  $Y(x) \in D_I$ , za katere velja povsod na intervalu neenačba:

$$|Y(x) - y(x)| < \varepsilon$$

Okolico  $\varepsilon$  funkcije  $y(x)$  torej sestavljajo vse zvezno odvedljive funkcije  $Y(x)$ , ki ležijo v pasu širine  $2\varepsilon$  okoli funkcije  $y(x)$  in ustrezajo pogojema  $Y(a_1) = b_1$  in  $Y(a_2) = b_2$ .

Funkcional  $I[y(x)]$  doseže v funkciji  $u(x)$  lokalni maksimum, če obstaja vsaj ena taka  $\varepsilon$  okolica funkcije  $u(x)$ , da je za vsako funkcijo  $y(x)$  iz te okolice izpolnjena neenačba:

$$I[u(x)] - I[y(x)] \geq 0$$

Podobno funkcional  $I[y(x)]$  doseže v funkciji  $v(x)$  lokalni minimum, če obstaja vsaj ena taka  $\varepsilon$  okolica funkcije  $v(x)$ , da je za vsako funkcijo  $y(x)$  iz te okolice izpolnjena neenačba:

$$I[v(x)] - I[y(x)] \leq 0$$

#### 46. Funkcionalni za funkcije dveh spremenljivk.

$$I[z(x, y)] = \iint_D f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy$$

Ekstrem iščemo med vsemi tistimi zadosti gladkimi funkcijami, ki na robu področja  $D$  zavzemajo predpisano vrednost.

#### 47. Kako izgleda izoperimetričen problem?

Dana sta dva funkcionala  $I[y(x)]$  in  $K[y(x)]$ . Oba sta definirana nad isto množico  $D_I$ . Iščemo tisto funkcijo  $y(x)$  iz  $D_I$ , pri kateri ima  $K[y(x)]$  predpisano vrednost,  $I[y(x)]$  pa doseže ekstrem.

Navedimo še poseben primer izoperimetričnega problema. Na abscisni osi naj bosta podani točki  $T_1(a_1, 0)$  in  $T_2(a_2, 0)$ . Točki povežimo s krivuljo  $y(x)$ , ki ima predpisano dolžino  $l$ . Med vsemi krivuljami  $y(x) \geq 0$  hočemo najti tisto, ki z absciso ograja največjo ploščino. Poiskati moramo torej ekstrem funkcionala:

$$I[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} y(x) dx$$

pri pogoju:

$$K[y(x)] = l = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

---

#### 48. Osnovni izrek variacijskega računa.

Naj bosta  $P(x)$  in  $Q(x)$  zvezni in zvezno odvedljivi funkciji na intervalu  $[a_1, a_2]$ . Za vsako zvezno odvedljivo funkcijo  $\eta(x)$ , ki ustreza pogoj

$$\eta(a_1) = \eta(a_2) = 0,$$

naj bo izpolnjen pogoj:

$$\int_{a_1}^{a_2} [P(x)\eta(x) + Q(x)\eta'(x)]dx = 0$$

Potem je:

$$P(x) = Q'(x)$$


---

### 3.2. Eulerjeva enačba

#### 49. Eulerjeva diferencialna enačba.

Naj bo  $f = f(x, y, y')$ . Potem se Eulerjeva diferencialna enačba glasi:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$


---

#### 50. Integracija Eulerjeve diferencialne enačbe.

Eulerjevo diferencialno enačbo lahko zapišemo tudi takole:

$$f_y - f_{xy'} - f_{yy'}y' - f_{y'y'}y'' = 0$$

Eulerjeva diferencialna enačba je diferencialna enačba drugega reda. Splošna rešitev je torej odvisna od dveh konstant  $y = y(x, C_1, C_2)$ . Določimo ju tako, da ekstremala izpolni še pogoja

$$b_1 = y(a_1, C_1, C_2) \text{ in } b_2 = y(a_2, C_1, C_2).$$

Robna naloga za Eulerjevo diferencialno enačbo nima vedno rešitev. Če ima rešitev, se lahko zgodi, da ta rešitev ni edina. Vsaka možna rešitev pa je šele kandidatka za ekstremalo. Določanje ekstremale variacijske naloge se nam včasih posreči z neposrednim dokazom, včasih pa moramo verificirati zadostne pogoje za nastop ekstrema.

---

#### 51. Eulerjeva diferencialna enačba, ko je $f = f(x, y')$ .

V primeru  $f = f(x, y')$ , se Eulerjeva diferencialna enačba nekoliko poenostavi:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

To enačbo lahko še enkrat integriramo:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C$$


---

#### 52. Eulerjeva diferencialna enačba, ko je $f = f(y, y')$ .

V primeru  $f = f(y, y')$ , se Eulerjeva diferencialna enačba nekoliko poenostavi:

$$f_y - f_{yy'}y' - f_{y'y'}y'' = 0$$

To enačbo pomnožimo z  $y'$ , prištejemo in odštejemo  $y''f_{y'}$ , in dobimo:

$$\frac{d}{dx} \left( f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

To enačbo lahko še enkrat integriramo:

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C$$


---

### 53. Rotacijska ploskev z najmanjšo površino.

Da najdemo rotacijsko ploskev z najmanjšo površino, moramo najti minimum funkcionala:

$$S(y) = 2\pi \int_{a_1}^{a_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Ker je podintegralna funkcija odvisna le od  $y$  in  $y'$ , sledi:

$$y \sqrt{1 + y'^2} - \frac{y y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

$$y = C \sqrt{1 + y'^2}$$

Enačbo kvadriramo in preuredimo:

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 - C^2}}{C}$$

Ločimo spremenljivki:

$$dx = \frac{C dy}{\sqrt{y^2 - C^2}}$$

Po integraciji pridemo do:

$$y = C \cosh \frac{x - A}{C}$$

Konstanti  $A$  in  $C$  pa določimo s pomočjo podanih točk, skozi katere gre rešitev  $T_1 = (a_1, b_1)$ ,  $T_2 = (a_2, b_2)$ .

### 54. Variacijski problem za več funkcij.

Funktional naj bo podan z izrazom:

$$I(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

Lokalni ekstrem iščemo med vsemi zvezno odvedljivimi funkcijami, ki ustrezajo robnim pogojem:

$$y_1(a_1) = b_{11}, \quad y_2(a_1) = b_{12}, \quad \dots \quad y_n(a_1) = b_{1n}$$

$$y_1(a_2) = b_{21}, \quad y_2(a_2) = b_{22}, \quad \dots \quad y_n(a_2) = b_{2n}$$

Denimo, da pri funkcijah  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  funkcional doseže lokalni ekstrem. Funkcije  $u_2(x), \dots, u_n(x)$  fiksirajmo in spreminjajmo samo funkcijo  $y_1(x)$ . Funkcional postane odvisen le od  $y_1(x)$ , pri  $u_1(x)$  pa doseže lokalni ekstrem. Odtod sledi, da mora biti izpolnjena Eulerjeva enačba:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_1'} \right) = 0$$

Na podoben način variiramo vsako od preostalih funkcij, pri čemer je vedno  $n - 1$  fiksiranih funkcij. Dobimo  $n$  diferencialnih enačb:

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_k'} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

Tej enačbi morajo ustrezati neznane funkcije  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ .

### 55. Reševanje izoperimetričnega problema.

Med vsemi funkcijami  $y(x)$ , ki so na intervalu  $[a_1, a_2]$  zvezno odvedljive in ustrezajo pogojema  $y(a_1) = b_1$ ,  $y(a_2) = b_2$ , je treba najti tisto, pri kateri ima funkcional

$$I[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y') dx$$

ekstrem, hkrati pa ima funkcional  $K[y(x)]$  predpisano vrednost  $l$ .

$$K[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} g(x, y, y') dx = l$$

Reševanja izoperimetričnega problema se lotimo tako, da najprej sestavimo pomožni funkcional  $I + \lambda K$ , nato pa rešimo navadno variacijsko nalogo za ta funkcional. Kandidatke za ekstremale najdemo med rešitvami Eulerjeve diferencialne enačbe. Rešitve so odvisne še od dveh integracijskih konstant in od parametra  $\lambda$ . Za določitev količin potrebujemo tri enačbe. Dve dobimo iz zahteve, da gre rešitev skozi podani točki  $T_1 = (a_1, b_1)$ ,  $T_2 = (a_2, b_2)$ , tretjo pa iz pogoja, da zavzame funkcional  $K(y)$  predpisano vrednost  $l$ .

### 3.3. Direktna metoda

#### 56. Direktna metoda variacijskega računa.

Rayleigh-Ritzovo metodo lahko uporabimo za iskanje ekstremov funkcionalov, odvisnih od ene ali več funkcij ene ali več neodvisnih spremenljivk.

Iščemo ekstrem funkcionala  $I(y)$  med vsemi funkcijami definicijskega območja  $D_I$  funkcionala. Izberimo neko zaporedje koordinatnih funkcij

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots,$$

ki ima to lastnost, da vse linearne kombinacije

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$$

ležijo v  $D_I$ . Ko vstavljamo funkcije  $y_n(x)$  v funkcional, dobimo funkcijo koeficientov  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Če hočemo najti njen ekstrem, moramo rešiti sistem enačb:

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \dots, \frac{\partial I}{\partial c_n} = 0$$

#### 57. Poiščite krivuljo, ki veže dve točki in ima najmanjšo dolžino.

Dve točki  $T_1 = (a_1, b_1)$  in  $T_2 = (a_2, b_2)$  omejujeta množico krivulj, v kateri iščemo tisto krivuljo  $y(x)$ , ki ima najmanjšo dolžino:

$$l = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Torej:

$$f = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

$$\frac{y'^2}{1 + y'^2} = C^2$$

$$y'^2 = C^2 + C^2 y'^2$$

$$y' = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} = C_1$$

$$dy = C_1 dx$$

$$y = C_1 x + C_2$$

58. Opišite definicijsko območje funkcionala  $I[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y') dx$ .

Definicijsko območje  $D$  funkcionala  $I[y(x)]$  sestavljajo zvezno odvedljive funkcije, ki zavzamejo na krajiščih intervala zahtevani vrednosti  $y(a_1) = b_1$  in  $y(a_2) = b_2$ .

59. Kaj je  $\varepsilon$  okolica funkcije  $y(x)$ ?

$\varepsilon$  je poljubno pozitivno realno število.  $\varepsilon$  okolico funkcije  $y(x) \in D$  sestavljajo vse funkcije  $Y(x) \in D$ , za katere v intervalu  $[a_1, a_2]$  velja neenačba:

$$|Y(x) - y(x)| < \varepsilon$$

Torej  $\varepsilon$  okolico funkcije  $y(x)$  sestavljajo vse funkcije  $Y(x)$ , ki ležijo znotraj pasu polmera  $\varepsilon$  okoli  $y(x)$  in ustrezajo še mejnima pogojema:

$$Y(a_1) = b_1 \text{ in } Y(a_2) = b_2$$

60. Kako izgleda kvadratni funkcional?

Pri reševanju praktičnih problemov pogosto naletimo na kvadratni funkcional, za katerega je

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial I}{\partial c_n} = 0$$

sistem linearnih algebrskih enačb, ki ga znamo rešiti. Primer kvadratnega funkcionala je:

$$I(y) = \int_{a_1}^{a_2} [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + f(x)y] dx; \quad y(a_1) = b_1, \quad y(a_2) = b_2$$

61. Rešite variacijski problem za funkcional  $I = \int_0^1 (y^2 + 2xy') dx$ ;  $y(0) = 0, y(1) = 1$ .

Uporabimo Eulerjevo diferencialno enačbo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= 0 \\ 2y - \frac{d}{dx} (2x) &= 0 \\ 2y - 2 &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Preverimo robne pogoje:

$$\begin{aligned} y(1) &= 1 \\ y(0) &\neq 1 \end{aligned}$$

Ekstremala ne obstaja, ker ne ustreza robnemu pogoju.

## 4. Parcialne diferencialne enačbe

### 4.1. Uvodni pojmi in klasifikacija

62. Kaj je parcialna diferencialna enačba? Navedite nekaj primerov!

Enačbo, ki vsebuje enega ali več parcialnih odvodov neznane funkcije dveh ali več spremenljivk, imenujemo parcialna diferencialna enačba. Red najvišjega parcialnega odvoda, ki nastopa v enačbi, določa red parcialne diferencialne enačbe. S takimi enačbami mamo opravka pri različnih fizikalnih in geometrijskih problemih. Neodvisne spremenljivke so običajno čas in ena ali več koordinat prostora.

Nekaj primerov parcialnih diferencialnih enačb, ki so zelo pogoste v fiziki in tehniki:

1. Enodimenzionalna enačba valovanja:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2. Tridimenzionalna nehomogena enačba nihanja:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(t, x, y, z)$$

3. Telegrafska enačba:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (LG + RC) \frac{\partial w}{\partial t} - RGw = 0$$

4. Laplaceova enačba:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

5. Difuzijska enačba (prenos toplote):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

**63. Zapišite splošno linearno parcialno diferencialno enačbo drugega reda za  $u = u(x, y)$ !**

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x, y)$$

Tu je  $u(x, y)$  iskana funkcija, koeficienti so odvisni le od  $x$  in  $y$ . Enačbe te vrste klasificiramo glede na predznak izraza:

$$H = B^2 - 4AC$$

1. Eliptična:  $H < 0$
2. Parabolična:  $H = 0$
3. Hiperbolična:  $H > 0$
4. Mešana:  $H$  na nekem območju nima določenega predznaka

**64. Napišite parcialne diferencialne enačbe elektromagnetnega polja!**

Spreminjanje elektromagnetnega polja opisujejo Maxwellove enačbe. Elektromagnetno polje je določeno s parom vektorskih funkcij električne in magnetne poljske jakosti:

$$\vec{E}(t, \vec{r}), \quad \vec{H}(t, \vec{r})$$

Omejimo se na del prostora, kjer polji, po katerih se širi valovanje nimata izvorov in snov naj ima konstantno permeabilnost  $\mu$  in konstantno dielektričnost  $\varepsilon$ . Maxwellove enačbe se v tem primeru glasijo:

1.  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
2.  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$
3.  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \vec{H}_t$
4.  $\operatorname{rot} \vec{H} = -\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}_t$

**65. Klasificirajte linearne parcialne diferencialne enačbe drugega reda!**

Glej odgovor na vprašanje 63.

## 66. Kakšne dodatne pogoje je treba predpisati pri enačbah posameznega tipa, da je rešitev enolično določena?

Če ima parcialna diferencialna enačba rešitev, jih ima več. Enolična parcialna diferencialna enačba, ki ustreza danemu fizikalnemu problemu, dobimo z dodatnimi informacijami, ki izhajajo iz konkretne fizikalne situacije. V nekaterih primerih so na meji območja predpisane vrednosti iskane funkcije in (ali) njeni odvodi. Take pogoje imenujemo robni pogoji. Če je čas  $t$  ena od spremenljivk, je pogostokrat predpisana vrednost rešitve pri  $t = 0$ , to so začetni pogoji. Za enolično rešitev parcialne diferencialne enačbe je potrebno podati robne in (ali) začetne pogoje. Šele ti pogoji iz množice rešitev določajo eno samo rešitev.

## 4.2. Enačbe valovanja in difuzije

### 67. Enačba nihanja strune. Rešite jo z metodo separacije spremenljivk!

Enodimenzionalna enačba valovanja (enačba nihanja strune) se glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Iskana funkcija  $u$  opisuje odmik masne točke iz mirovne lege v razdalji  $x$  v času  $t$ . Ker je struna (dolžine  $l$ ) na koncih pritrjena, imamo robna pogoja:

$$u(0, t) = 0 \text{ in } u(l, t) = 0$$

Oblika gibanja strune je odvisna od začetnega odklona (odklon ob času  $t = 0$ ) in začetne hitrosti (hitrosti ob času  $t = 0$ ). Začetni odklon podamo s funkcijo  $f_1(x)$ , začetno hitrost pa s funkcijo  $f_2(x)$ . Tako dobimo še dva začetna pogoja:

$$u(x, 0) = f_1(x) \text{ in } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = f_2(x)$$

Rešitev  $u(x, t)$  bomo z metodo separacije spremenljivk izpeljali v treh korakih:

- Z metodo separacije spremenljivk dobimo dve navadni diferencialni enačbi.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x)G(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= F(x)\ddot{G}(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F''(x)G(t) \\ F(x)\ddot{G}(t) &= a^2 F''(x)G(t) \\ \frac{\ddot{G}(t)}{a^2 G(t)} &= \frac{F''(x)}{F(x)} = -k^2 \end{aligned}$$

$$F'' + k^2 F(x) = 0, \quad \ddot{G}(t) + k^2 a^2 G(t) = 0$$

- Izberemo tiste rešitve diferencialnih enačb, ki ustrezajo robnim pogojem.

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l, t) = F(l)G(t) = 0$$

Ker bi bil za  $G(t) \equiv 0$  tudi  $u \equiv 0$ , je  $g(t) \neq 0$ . Sledi:

$$F(0) = 0, \quad F(l) = 0$$

Splošna rešitev enačbe  $F'' + k^2 F(x) = 0$  je:

$$F(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

Z upoštevanjem robnih pogojev dobimo:

$$F(0) = A = 0$$

$$F(l) = B \sin kl = 0$$

Ker bi za  $B = 0$  pomenilo  $F \equiv 0$ , privzamemo  $B \neq 0$ :

$$\sin kl = 0 \rightarrow kl = n\pi \rightarrow k = \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$B$  lahko postavimo na 1 in dobimo neskončno mnogo rešitev  $F_n(x)$ :

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Splošna rešitev enačbe  $\ddot{G}(t) + k^2 a^2 G(t) = 0$  je:

$$G(t) = C \cos akt + D \sin akt = C \cos \frac{an\pi}{l} t + D \sin \frac{an\pi}{l} t, \quad n \in \mathbb{N}$$

Torej so funkcije:

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = \left( C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \in \mathbb{N}$$

3. Dobljene rešitve sestavimo tako, da je rezultat rešitev valovne enačbe in da ustreza začetnim pogojem.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Upoštevamo prvi začetni pogoj:

$$u(x, 0) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Uporabimo še drugi začetni pogoj:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Iz teh dveh enačb dobimo koeficiente  $C_n$  in  $D_n$ , saj je to razvoj funkcij  $f_1(x)$  in  $f_2(x)$  v Fourierevo vrsto. Koeficienti se glasijo:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx, \quad D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l f_2(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

### 68. Kaj so stojni valovi, lastne vrednosti in lastne funkcije strune?

$$u_n(x, t) = \left( C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \in \mathbb{N}$$

Te funkcije imenujemo tudi lastne funkcije ali karakteristične funkcije strune. Vrednosti  $\lambda_n = \frac{an\pi}{l}$  pa so lastne ali karakteristične vrednosti nihajoče strune. Množico

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots$$

imenujemo tudi spekter. Vrednosti  $\lambda_n$  predstavljajo krožne frekvenc. Za  $n = 1$  imamo osnovni ton, za  $n = 2, 3, \dots$  pa harmonične tone.

Stojni val je funkcija, ki opisuje nihanje strune, pri katerem se gibljejo vsi deli strune sinhrono, vsi grede hkrati skozi mirovno lego, vsi hkrati dosežejo maksimalni odmik. To je posebna rešitev valovne enačbe, ki jo lahko zapišemo kot produkt dveh faktorjev – en odvisen od kraja, drug pa od časa:

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

### 69. d'Alambertova rešitev enačbe za nihanje strune.

Z d'Alambertovo metodo poiščemo splošno rešitev valovne enačbe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

V enačbo vpeljemo dve novi neodvisni spremenljivki:

$$v = x + ct, \quad z = x - ct$$

Tako  $u(x, t)$  postane funkcija spremenljivk  $v$  in  $z$ . Izrazimo odvoda  $u_{tt}$  in  $u_{xx}$  glede na novi spremenljivki:

$$v_x = 1, \quad v_t = c, \quad z_x = 1, \quad z_t = -c$$

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z$$

$$u_t = u_v v_t + u_z z_t = c(u_v - u_z)$$

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{zv} + u_{zz}$$

$$u_{tt} = c(u_v - u_z)_t = c(u_v - u_z)_v v_t + c(u_v - u_z)_z z_t = c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz})$$

Dobljene izraze vstavimo v valovno enačbo:

$$c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz}) = c^2(u_{vv} + 2u_{zv} + u_{zz})$$

Sledi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$$

Integriramo po spremenljivki  $z$ :

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

Integriramo še po spremenljivki  $v$ :

$$u(v, z) = \int h(v) dv + \psi(z) = \varphi(v) + \psi(z)$$

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

Funkciji  $\varphi$  in  $\psi$  določimo z dodatnimi pogoji.

### 70. Enačba za prevajanje toplote - kako izgleda in kakšne vrste dodatnih pogojev moramo podati?

Enačba za prevajanje toplote je primer parabolične parcialne diferencialne enačbe in ima obliko:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Tu je  $T$  temperatura in je v splošnem funkcija koordinat, časa in  $c^2 = \frac{\kappa}{\sigma\rho}$ , kjer je  $\kappa$  toplotna prevodnost,  $\sigma$  specifična toplota materiala in  $\rho$  specifična gostota materiala. Telo naj bo iz homogenega materiala.

Če hočemo, da so rešitve enačbe enolično določene, moramo podati še začetne in robne pogoje.

Drugače, kot pri valovni enačbi, moramo za dano telo podati še en začetni pogoj:

$$T|_{t=0} = f(x, y, z)$$

Vedeti moramo še, kakšne so razmere na površini telesa  $P$ . Razlikujemo vsaj tri osnovne primere:

1. Površina je na stalni temperaturi:  $T|_P = konst.$

2. Del površine je toplotno izoliran:  $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{del.P} = 0$

Izsevana toplota je sorazmerna razliki temperature telesa  $T$  in temperature okolice  $T_0$ :

3.  $\left[ \frac{\partial T}{\partial n} + k(T - T_0) \right]_P = 0$

### 71. Rešite enačbo za prevajanje toplote skozi tanko palico - z metodo separacije spremenljivk!

Prevajanje toplote naj bo le v smeri osi  $x$ , sicer imejmo idealno zunanjo izolacijo. Temperaturo palice označimo s  $T(x, t)$  in je funkcija le dveh spremenljivk. Enačba ima obliko:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Privzemimo, da sta oba konca palice dolžine  $l$  na isti temperaturi  $T = 0$ . Sledita robna pogoja:

$$T(0, t) = 0, \quad T(l, t) = 0$$

Naj funkcija  $f(x)$  podaja začetno temperaturo v palici. Torej je začetni pogoj:

$$T(x, 0) = f(x)$$

Rešitev  $T(x, t)$  bomo z metodo separacije spremenljivk izpeljali v treh korakih:

1. Rešitev iščemo kot produkt:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= F(x)G(t) \\ F(x)\dot{G}(t) &= c^2 F''(x)G(t) \\ \frac{F''(x)}{F(x)} &= \frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = -k^2 \end{aligned}$$

Dobimo dve diferencialni enačbi:

$$F''(x) + k^2 F(x) = 0, \quad \dot{G}(t) + c^2 k^2 G(t) = 0$$

2. Uporabimo robne pogoje, da izluščimo rešitve:

$$\begin{aligned} F(x) &= A \cos kx + B \sin kx \\ F(0) &= A = 0 \\ F(l) &= B \sin kl = 0 \rightarrow k = \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \\ F_n(x) &= \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Splošna rešitev druge diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} G(t) &= C e^{-c^2 k^2 t} = C e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} = C e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N} \\ T_n(x, t) &= F_n(x) G_n(t) = C_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

3. Dobljene rešitve sestavimo tako, da ustrezajo začetnemu pogoju:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \\ T(x, 0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

Funkcijo  $f(x)$  razvijemo v vrsto po sinusih na intervalu  $[0, l]$ . Koeficiente take razvrstitve prepoznamo iz razvoja v Fourierjevo vrsto in so:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

## 72. Enačba za prenos toplote v neskončnem sredstvu - rešite jo s pomočjo Fourierovega integrala!

Imamo neskončno palico, ki se širi v smeri osi  $x$ , in je idealno izolirana. Enačba se glasi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Ker je palica neskončno dolga, nimamo robnih pogojev. Imamo le začetni pogoj:

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

Rešitev  $T(x, t)$  bomo z metodo separacije spremenljivk izpeljali v treh korakih:

1. Rešitev iščemo kot produkt:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= F(x)G(t) \\ F(x)\dot{G}(t) &= c^2 F''(x)G(t) \\ \frac{F''(x)}{F(x)} &= \frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = -k^2 \end{aligned}$$

Dobimo dve diferencialni enačbi:

$$F''(x) + k^2 F(x) = 0, \quad \dot{G}(t) + c^2 k^2 G(t) = 0$$

2. Splošni rešitvi zgornjih enačb sta:

$$\begin{aligned} F(x) &= A \cos kx + B \sin kx, \quad G(t) = e^{-c^2 k^2 t} \\ T(x, t) &= (A \cos kx + B \sin kx) e^{-c^2 k^2 t} \end{aligned}$$

Ker robni pogoji ne določajo diskretnih vrednosti za  $k$ , lahko ta zavzame poljubno vrednost, tako sta  $A = A(k)$  in  $B = B(k)$ . Rešitev iščemo v obliki:

$$T(x, t) = \int_0^{\infty} T(x, t, k) dk = \int_0^{\infty} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) e^{-c^2 k^2 t} dk$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo:

$$T(x, 0) = f(x) = \int_0^{\infty} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) dk$$

3. S pomočjo Fourierovega integrala zapišemo izraza za  $A(k)$  in  $B(k)$ :

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos kv \, dv, \quad B(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin kv \, dv$$

Sledi:

$$T(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) (\cos kv \cos kx + \sin kv \sin kx) e^{-c^2 k^2 t} \, dv \right] dk$$

Z uporabo adicijskega izreka lahko to zapišemo kot:

$$T(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos k(x-v) e^{-c^2 k^2 t} \, dv \right] dk$$

Lahko obrnemo vrstni red integracije:

$$T(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[ \int_0^{\infty} \cos k(x-v) e^{-c^2 k^2 t} \, dk \right] dv$$

Vrednost notranjega integrala izračunamo s pomočjo tabele integralov in dobimo:

$$\int_0^{\infty} \cos k(x-v) e^{-c^2 k^2 t} \, dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}}$$

$$T(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}} \, dv$$

Zaradi poenostavitve vpeljemo zamenjavo:

$$w = \frac{v-x}{2c\sqrt{t}}, \quad dv = 2c\sqrt{t} \, dw$$

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2wc\sqrt{t}) e^{-w^2} \, dw$$

### 73. Dvodimenzionalna valovna enačba - kako jo rešimo s separacijo spremenljivk?

Primer dvodimenzionalnega valovanja je valovanje membrane. Predpostavimo:

- Masa membrane naj bo homogena
- Membrana naj bo upogljiva
- Membrana naj bo pritrjena po vsem robu v ravnini
- Odklon membrane  $u(x, y, t)$  naj bo majhen glede na razsežnosti membrane

Ob teh predpostavkah postavimo enačbo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Vpetost na robu zapišemo:  $u = 0$  na robu za vse  $t$ . Začetna pogoja pa sta:

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y)$$

Naj bo membrana  $D$  pravokotne oblike in pritrjena na robih.

Rešitev  $u(x, y, t)$  bomo z metodo separacije spremenljivk izpeljali v treh korakih:

1. Rešitev iščemo v obliki:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= F(x, y)G(t) \\ F(x, y)G''(t) &= c^2 \left( F_{xx}(x, y)G(t) + F_{yy}(x, y)G(t) \right) \\ \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} &= \frac{F_{xx}(x, y) + F_{yy}(x, y)}{F(x, y)} = -v^2 \end{aligned}$$

$$F_{xx}(x, y) + F_{yy}(x, y) + v^2 F(x, y) = 0, \quad G''(t) + v^2 c^2 G(t) = 0$$

Prva enačba je znana Helmholtzova parcialna diferencialna enačba, za katero ponovno lahko uporabimo separacijo spremenljivk:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= H(x)Q(y) \\
 H_{xx}(x)Q(y) &= -(H(x)Q_{yy}(y) + v^2 H(x)Q(y)) \\
 \frac{H_{xx}(x)}{H(x)} &= -\frac{1}{Q(y)}(Q_{yy}(y) + v^2 Q(y)) = -k^2 \\
 H_{xx}(x) + k^2 H(x) &= 0, \quad Q_{yy}(y) + p^2 Q(y) = 0, \quad p^2 = v^2 - k^2
 \end{aligned}$$

2. Splošni rešitvi zgornjih diferencialnih enačb sta:

$$H(x) = A \cos kx + B \sin kx, \quad Q(y) = C \cos py + D \sin py$$

Iz robnih pogojev sledi:

$$\begin{aligned}
 H(0) &= A = 0, & Q(0) &= C = 0 \\
 H(a) &= B \sin ka = 0 \rightarrow k = \frac{m\pi}{a}, & m &\in \mathbb{N} \\
 Q(b) &= D \sin pb = 0 \rightarrow p = \frac{n\pi}{b}, & n &\in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Torej je:

$$\begin{aligned}
 H_m(x) &= \sin \frac{m\pi x}{a}, & Q_n(y) &= \sin \frac{n\pi y}{b}, & m, n &\in \mathbb{N} \\
 F_{mn}(x, y) &= H_m(x)Q_n(y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}
 \end{aligned}$$

To je rešitev Helmholtzove parcialne diferencialne enačbe. Označimo  $vc = \lambda$  torej  $\lambda = c\sqrt{p^2 + k^2}$ . Iz tega sledi:

$$\lambda = \lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a} + \frac{n^2}{b}}$$

Rešitev gornje enačbe je torej:

$$G_{mn}(t) = A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \sin \lambda_{mn} t$$

Sledi:

$$u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G(t) = (A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

3. Dobljene rešitve sestavimo tako, da rezultat ustreza začetnima pogojevma:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) \\
 u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}
 \end{aligned}$$

To je dvojna Fourierova vrsta. Zato tudi funkcijo  $f(x, y)$  razvijemo v tako vrsto:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 A_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx dy, \quad m, n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Uporabimo še začetna pogoja:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, 0) &= f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}
 \end{aligned}$$

Za funkcijo  $g(x, y)$  predpostavimo, da je razvita v dvojno Fourierovo vrsto, potem so koeficienti  $B_{mn} \lambda_{mn}$  prav Fourierovi koeficienti te vrste:

$$B_{mn} \lambda_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx dy, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

## 74. Reševanje telegrafске enačbe z metodo separacije spremenljivk.

Telegrafska enačba je homogena hiperbolična parcialna diferencialna enačba. Ima obliko:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (LG + RC) \frac{\partial u}{\partial t} - RG u = 0$$

Telegrafsko enačbo rešujemo pri nehomogenih robnih pogojih, taki pogoji so namreč za to enačbo tipični. Robna pogoja naj bosta:

$$u(0, t) = E, \quad u(l, t) = 0$$

Prvi pogoj pomeni, da je napetost konstantna; drugi pogoj pa pomeni, da imamo kratek stik. Začetna pogoja pa naj bosta:

$$u(x, 0) = 0, \quad i(x, 0) = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

1. Najprej poiščimo rešitev enačbe, ki je odvisna le od ene spremenljivke  $x$  in ustreza nehomogenim robnim pogojem. Postavimo  $F(x) = u(x, t)$  in imejmo spremenljivko  $t$  za konstanto.

$$F''(x) - RGF(x) = 0 \\ F''(x) - b^2 F(x) = 0, \quad b^2 = RG$$

Splošna rešitev take enačbe je:

$$F(x) = A \sinh bx + B \cosh bx = C \sinh b(d - x)$$

2. Z upoštevanjem robnih pogojev dobimo:

$$F(0) = E = C \sinh bd, \quad F(l) = 0 = C \sinh b(d - l)$$

Iz drugega pogoja sledi  $d = l$ . Torej:

$$C = \frac{E}{\sinh bl} \\ F(x) = E \frac{\sinh b(l - x)}{\sinh bl}$$

Vpeljimo še novo spremenljivko  $w(x, t) = u(x, t) - F(x)$ . Robna pogoja za to novo spremenljivko sta torej:

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0$$

Tako smo dobili homogene robne pogoje. Zapišimo še začetna pogoja:

$$w(x, 0) = -F(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

3. Enačba ima sedaj obliko:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F''(x) - LC \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (LG + RC) \frac{\partial w}{\partial t} - RG w(x, t) - RGF(x) = 0$$

Ker je  $F''(x) - RGF(x) = 0$  dobimo enačbo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial w}{\partial t} - b^2 w(x, t) = 0$$

Kjer smo uporabili  $a^2 = LC$ ,  $b^2 = RG$  in  $2h = (LG + RC)$ . Na tej enačbi lahko sedaj uporabimo metodo separacije spremenljivk:

$$w(x, t) = P(x)G(t) \\ P''(x)G(t) - a^2 P(x)\ddot{G}(t) - 2hP(x)\dot{G}(t) - b^2 P(x)G(t) = 0 \\ \frac{P''(x)}{P(x)} = \frac{a^2 \ddot{G}(t) + 2h\dot{G}(t) + b^2 G(t)}{G(t)} = -k^2$$

$$P''(x) + k^2 P(x) = 0, \quad a^2 \ddot{G}(t) + 2h\dot{G}(t) + G(t)(b^2 + k^2) = 0$$

Za prvo enačbo sta robna pogoja  $P(0) = 0$  in  $P(l) = 0$ . Splošni rešitvi za ti dve enačbi sta torej:

$$P_n = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad G_n = A_n e^{\alpha_n t} + B_n e^{\beta_n t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Tu smo z  $\alpha_n$  in  $\beta_n$  zaznamovali ničle karakteristične enačbe:

$$a^2 r^2 + 2hr + \left( b^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) = 0$$

Torej:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\alpha_n t} + B_n e^{\beta_n t}) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Uporabimo še začetna pogoja:

$$w(x, 0) = -F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \alpha_n + B_n \beta_n) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Z razvojem v Fourierove vrste sklepamo, da za koeficiente vrst veljajo zveze:

$$A_n + B_n = -\frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$A_n \alpha_n + B_n \beta_n = 0$$

Rešitev zapišemo v obliki:

$$u(x, t) = E \frac{\sinh b(l-x)}{\sinh bl} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\alpha_n t} + B_n e^{\beta_n t}) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

### 75. Enačba za nihanje okrogle membrane.

Naj bo membrana okrogle oblike in s polmerom  $R$ . Ker imamo opravka s krožno geometrijo, bomo uporabili polarne koordinate  $x = r \cos \varphi$  in  $y = r \sin \varphi$ . Dvodimenzionalna enačba valovanja v polarnih koordinatah ima obliko:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right)$$

Ker bomo iskali le tiste rešitve  $u(r, t)$ , ki so radialno simetrične, torej niso odvisne od kota  $\varphi$ , se enačba poenostavi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

Membrana je na robu pritrjena, zato je robni pogoj:

$$u(R, t) = 0$$

Da rešitve ne bi bile odvisne od kota  $\varphi$ , postavimo začetna pogoja takole:

$$u(r, 0) = f(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(r)$$

Enačbo rešujemo z metodo separacije:

1. Rešitev iščemo v obliki:

$$u(r, t) = W(r)G(t)$$

$$W(r)\ddot{G}(t) = c^2 \left( W''(r)G(t) + \frac{1}{r} W'(r)G(t) \right)$$

$$\frac{\ddot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{W''(r)}{W(r)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)}{W(r)} = -k^2$$

$$W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + k^2 W(r) = 0, \quad \ddot{G}(t) + \lambda^2 G(t) = 0, \quad \lambda = ck$$

2. Prvo diferencialno enačbo lahko prevedemo na Besselovo diferencialno enačbo z vpeljavo nove spremenljivke  $s = kr$ :

$$W'(r) = \frac{dW}{ds} \frac{ds}{dr} = k \frac{dW}{ds}$$

$$W''(r) = \frac{d}{ds} \left( k \frac{dW}{ds} \right) \frac{ds}{dr} = k^2 \frac{d^2 W}{ds^2}$$

Dobimo enačbo:

$$\frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dW}{ds} + W = 0$$

To je Besselova diferencialna enačba za  $\nu = 0$ . Splošna rešitev je torej:

$$W(s) = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s)$$

Funkcija  $Y_0$  ima logaritemsko singularnost pri  $x = 0$ , torej smemo zahtevati, da v rešitvi ta funkcija ne nastopa, oziroma  $c_2 = 0$ . Za prvo konstanto pa lahko določimo  $c_1 = 1$ :

$$W(s) = J_0(kr)$$

Besselova funkcija  $J_0$  ima neskončno mnogo realnih ničel. Pozitivne ničle označujemo z  $\alpha_m$ . Torej je:

$$kR = \alpha_m \text{ ali } k_m = \frac{\alpha_m}{R}$$

Odtod sledi, da je rešitev prve diferencialne enačbe:

$$W_m(s) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)$$

Splošna rešitev druge diferencialne enačbe je:

$$G_m(t) = A_m \cos \lambda_m t + B_m \sin \lambda_m t$$

Torej:

$$u_m(r, t) = (A_m \cos \lambda_m t + B_m \sin \lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)$$

3. Da dobimo rešitev, ki bo ustrezala še začetnim pogojem, rešitev obravnavamo kot vrsto:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$$

Uporabimo prvi začetni pogoj:

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$$

Ker lahko funkcijo  $f(r)$  razvijemo v Fourier-Besselovo vrsto, lahko izpišemo koeficiente  $A_m$ :

$$A_m = \frac{2}{R^2 J_1(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) dr, \quad m \in \mathbb{N}$$

Uporabimo še drugi začetni pogoj:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \lambda_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$$

Koeficienti  $B_m \lambda_m$  so ponovno koeficienti Fourier-Besselove vrste:

$$B_m = \frac{2}{\lambda_m R^2 J_1(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) dr, \quad m \in \mathbb{N}$$

### 4.3. Laplaceova enačba

#### 76. Laplaceova enačba - kako izgleda? Pri kakšnih dodatnih pogojih jo rešujemo?

Ena od pomembnejših parcialnih diferencialnih enačb, ki se pojavljajo v fiziki je Laplaceova enačba:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Pri Laplaceovi enačbi nimamo začetnih pogojev, ampak le robne pogoje. Uporabljamo oznake  $C$  za rob področja  $D$  in  $f(P)$ ,  $f_1(P)$ ,  $f_2(P)$  za dane funkcije točke  $P$ , ki leži na robu  $C$ . V glavnem razlikujemo tri probleme:

1. Dirichletov problem – iščemo harmonično funkcijo, ki je definirana na področju  $D$  in na robu  $C$  zavzame predpisane vrednosti. Naloga ima enolično rešitev pri razmeroma širokih pogojih za funkcijo  $f(P)$ . Pogoj ima obliko:

$$u|_C = f(P)$$

2. Neumannov problem – iščemo funkcijo, ki ima na robu predpisan normalni odvod. Da je naloga sploh rešljiva, mora biti:

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_C f_1(P) ds = 0$$

Če je Neumannova naloga rešljiva, je rešitev določena le do aditivne konstante natančno. Pogoj ima obliko:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = f_1(P)$$

3. Mešani problem – ima obliko:

$$\left( u + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_C = f_2(P)$$

### 77. Rešite Laplaceovo enačbo za notranjost kroga!

Področje  $D$  naj bo krog z radijem  $r = a$  in predpis na robu, to je robni pogoj  $u|_{r=a} = f(\varphi)$ . Ker imamo krožno geometrijo bomo uporabili polarne koordinate. Enačba se glasi:

$$\Delta u(r, \varphi) = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0$$

Oziroma:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0$$

Reševanja problema se lotimo z metodo separacije spremenljivk:

1. Rešitev bomo iskali v obliki:

$$u(r, \varphi) = R(r)F(\varphi)$$

$$r^2 R''(r)F(\varphi) + rR'(r)F(\varphi) + R(r)\ddot{F}(\varphi) = 0$$

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = - \frac{\ddot{F}(\varphi)}{F(\varphi)} = k^2$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - k^2 R(r) = 0, \quad \ddot{F}(\varphi) + k^2 F(\varphi) = 0$$

2. Splošna rešitev druge diferencialne enačbe je:

$$F(\varphi) = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi$$

Ker vemo, da velja  $F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi)$ , je  $k \in \mathbb{Z}$ . Prva enačba pa je Eulerjeva diferencialna enačba, ki jo rešujemo z nastavkom  $R(r) = r^\lambda$ :

$$\lambda(\lambda - 1)r^\lambda + \lambda r^\lambda - k^2 r^\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - k^2 = 0$$

$$\lambda = \pm k$$

Splošna rešitev je torej:

$$R(r) = Cr^k + Dr^{-k}$$

Ker je potencial v središču kroga omejen, sledi  $D = 0$ . Torej so rešitve:

$$R(r) = r^k, \quad F(\varphi) = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) r^k$$

3. Upoštevajmo robni pogoj:

$$u(a, \varphi) = f(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) a^k$$

Funkcijo  $f(\varphi)$  razvijemo v Fourierovo vrsto:

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi$$

Koeficienti  $\alpha_k = A_k a^k$  in  $\beta_k = B_k a^k$  so Fourierovi koeficienti. Zapišemo rezultat:

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) \left(\frac{r}{a}\right)^k$$

## 4.4. Reševanje z Laplaceovo transformacijo

### 78. Reševanje valovne enačbe s pomočjo Laplaceove transformacije.

Naj bo žica pol neskončna in naj se širi vzdolž osi  $x$ . Pri  $t = 0$  se konec žice začne premikati vzdolž osi  $y$  na način, ki ga opišemo z robnim pogojem  $y(0, t) = f(t)$ . Iščemo odklon žice  $y(x, t)$ . Dobimo enodimenzionalno valovno enačbo:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Začetna pogoja naj bosta:

$$y(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

1. Napravimo Laplaceovo transformacijo glede na  $t$ :

$$s^2 \mathcal{L}[y(x, t)] - sy(x, 0) - \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = a^2 \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}[y(x, t)]$$

Upoštevamo začetne pogoje:

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}[y(x, t)] - \frac{s^2}{a^2} \mathcal{L}[y(x, t)] = 0$$

2. To je navadna diferencialna enačba za  $\mathcal{L}[y(x, t)] = Y(x, s)$ :

$$Y''(x, s) - \frac{s^2}{a^2} Y(x, s) = 0$$

Splošna rešitev te diferencialne enačbe je:

$$Y(x, s) = A(s)e^{-\frac{s}{a}x} + B(s)e^{\frac{s}{a}x}$$

Ker mora veljati  $|Y(x, s)| < M$  za  $x \rightarrow \infty$ , sledi  $B(s) = 0$ . Uporabimo prvi robni pogoj:

$$\mathcal{L}[y(0, t)] = Y(0, s) = A(s) = \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$Y(x, s) = F(s)e^{-\frac{s}{a}x}$$

3. Preostane le še inverzna Laplaceova transformacija, ki jo najlažje opravimo s pomočjo tabel:

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right) u_{\frac{x}{a}}(t)$$

Ali drugače:

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right) u\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

### 79. Reševanje enačbe za prenos toplote s pomočjo Laplaceove transformacije.

Vzemimo enačbo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Naj bosta robna pogoja:

$$u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) < \infty$$

Začetni pogoj naj bo:

$$u(x, 0) = 0$$

1. Predpostavimo  $\mathcal{L}[u(x, t)] = U(x, s)$ . Napravimo Laplaceovo transformacijo diferencialne enačbe glede na  $t$ :

$$\frac{d^2}{dx^2} U(x, s) = a^2 s U(x, s) - a^2 u(x, 0)$$

Uporabimo začetni pogoj in dobimo navadno diferencialno enačbo:

$$U''(x, s) - a^2 s U(x, s) = 0$$

2. Splošna rešitev te enačbe je:

$$U(x, s) = A(s)e^{-a\sqrt{s}x} + B(s)e^{a\sqrt{s}x}$$

Zaradi omejenosti funkcije (drugi robni pogoj) je  $B = 0$ . Uporabimo še prvi robni pogoj:

$$U(0, s) = A(s) = \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$U(x, s) = F(s)e^{-a\sqrt{s}x}$$

3. Preostane le še inverzna Laplaceova transformacija. V tem primeru je to nekoliko bolj zapleteno. Končni rezultat je:

$$u(x, t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{ax}{2\sqrt{t}}\right)$$

**80. Rešite Laplaceovo enačbo v krogelnem koordinatnem sistemu! Poiščite le  $u = u(r, \varphi)$ !**

Laplaceova enačba se v krogelnem koordinatnem sistemu glasi:

$$\Delta u(r, \varphi, \vartheta) = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right] = 0$$

Naj bo en od robnih pogojev:

$$u(R, \varphi, \vartheta) = f(\varphi)$$

Vrednosti na robu sfere torej niso odvisne od kota  $\vartheta$ . Sledi, da iščemo rešitev  $u = u(r, \varphi)$  in se nam zato enačba nekoliko poenostavi:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0$$

Naj bo drugi robni pogoj:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(r, \varphi, \vartheta) = 0$$

To rešitev bomo iskali s pomočjo metode separacije spremenljivk:

1. Rešitev bomo iskali v obliki:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= G(r)H(\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G'(r)H(\varphi)) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi G(r)\dot{H}(\varphi)) &= 0 \\ \frac{1}{G(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G'(r)) + \frac{1}{H(\varphi)} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \dot{H}(\varphi)) &= 0 \\ \frac{1}{G(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G'(r)) = -\frac{1}{H(\varphi)} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \dot{H}(\varphi)) &= k \end{aligned}$$

Dobimo dve navadni diferencialni enačbi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G'(r)) - kG(r) &= r^2 G''(r) + 2rG'(r) - kG(r) = 0 \\ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \dot{H}(\varphi)) + kH(\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

2. Prva diferencialna enačba je Eulerjeva diferencialna enačba, ki se jo lotimo z nastavkom  $G(r) = r^\alpha$ . Postavimo še  $k = n(n+1)$ :

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)r^\alpha + 2\alpha r^\alpha - n(n+1)r^\alpha &= 0 \\ \alpha(\alpha+1) - n(n+1) &= 0 \end{aligned}$$

Ničli tega karakterističnega polinoma sta  $\alpha_1 = n$  in  $\alpha_2 = n-1$ . Torej sta splošni rešitvi:

$$G_n(r) = r^n, \quad G_n^*(r) = r^{-n-1}$$

Tudi v drugo diferencialno enačbo postavimo  $k = n(n+1)$ . Poleg tega vpeljemo še novo spremenljivko  $w = \cos \varphi$  in upoštevamo  $\sin^2 \varphi = 1 - w^2$ . Upoštevamo tudi odvajanje po  $w$ :

$$\frac{dg}{d\varphi} = \frac{dg}{dw} \frac{dw}{d\varphi} = -\sin \varphi \frac{dg}{dw}$$

Tu je  $g$  splošna funkcija. Sledi:

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{dg}{d\varphi} = -\frac{dg}{dw}, \quad \sin \varphi \frac{dg}{d\varphi} = -\sin^2 \varphi \frac{dg}{dw}$$

Torej se druga enačba prevede v:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dw} \left( -(1-w^2) \frac{dH}{dw} \right) + n(n+1)H(w) &= 0 \\ \dot{H}(w) - (2w\dot{H}(w) + w^2\ddot{H}(w)) + n(n+1)H(w) &= 0 \\ (1-w^2)\dot{H}(w) - 2w\dot{H}(w) + n(n+1)H(w) &= 0 \end{aligned}$$

Ta enačba pa je Legendrova diferencialna enačba. Njene rešitve so Legendrovi polinomi:

$$H(w) = P_n(w) = P_n(\cos \varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dobili smo rešitve:

$$u_n(r, \varphi) = A_n P_n(\cos \varphi) r^n, \quad u_n^*(r, \varphi) = B_n P_n(\cos \varphi) r^{-n-1}$$

3. Če nas zanima notranjost sfere, moramo izbrati prvo rešitev, saj bi druga v središču preseгла vse meje:

$$u_{not}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \varphi) r^n$$

Upoštevamo robni pogoj:

$$u_{not}(R, \varphi) = f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \varphi) R^n$$

Torej so koeficienti  $A_n R^n$  koeficienti posplošene Fourierove vrste po Legendrovih polinomih. Določimo jih tako:

$$A_n R^n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_n(w) dw, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Funkcija  $\tilde{f}(w)$  označuje funkcijo  $f(\varphi)$  kot funkcijo spremenljivke  $w = \cos \varphi$ . Koeficiente lahko torej izrazimo:

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\varphi) P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Če nas zanima zunanost sfere, moramo izbrati drugo rešitev, saj prva ne bi zadoščala drugemu robnemu pogoju:

$$u_{zun}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos \varphi) r^{-n-1}$$

Podobno kot pri prejšnjem primeru uporabimo robni pogoj in izrazimo koeficient  $B_n$  kot koeficient Fourierove vrste:

$$B_n = \frac{2n+1}{2R^{-n-1}} \int_0^{\pi} f(\varphi) P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

## 81. Reševanje Laplaceove enačbe v pravokotnih koordinatah.

Naj bo območje  $D$  pravokotnik:

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

Enačba se glasi:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Robni pogoji pa naj bodo:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), & u(x, b) &= g(x) \\ u(0, y) &= F(y), & u(a, y) &= G(y) \end{aligned}$$

Pri teh nehomogenih robnih pogojih ne moremo določiti separacijskega parametra, zato razčlenimo funkcijo na dva sumanda:

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$$

Naj bosta novi funkciji rešitvi Dirichletovih problemov:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Z robnimi pogoji:

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= f(x), & v(x, b) &= g(x), & v(0, y) &= 0, & v(a, y) &= 0 \\ w(x, 0) &= 0, & w(x, b) &= 0, & w(0, y) &= F(y), & w(a, y) &= G(y) \end{aligned}$$

Vsako od novih nalog posebej rešimo s pomočjo metode separacije spremenljivk:

1. Rešitve bomo iskali v obliki:

$$v(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2$$

$$X''(x) + k^2X(x) = 0, \quad Y''(y) - k^2Y(y) = 0$$

2. Splošna rešitev prve enačbe je:

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

$$X(0) = A = 0$$

$$X(a) = 0 = B \sin ka \rightarrow k = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Splošna rešitev druge enačbe je:

$$Y(x) = C e^{ky} + D e^{-ky}$$

$$Y_n = C_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Rešitve so torej:

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

3. Uporabimo še preostala robna pogoja:

$$v(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + D_n) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$v(x, b) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Koeficiente lahko izrazimo z razvojem funkcij  $f(x)$  in  $g(x)$  v Fourierovo vrsto:

$$C_n + D_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$C_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Podobno rešimo še enačbo za  $w(x, y)$  in dobimo končno rešitev.

## 4.5. Nehomogene enačbe

### 82. Reševanje nehomogene valovne enačbe.

Iščemo rešitev nehomogene enodimenzionalne valovne enačbe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

Naj ima problem homogene robne pogoje:

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0$$

Naj bodo začetni pogoji:

$$u(x, 0) = g(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = h(x)$$

1. Najprej poiščemo rešitve homogene enačbe:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}$$

Uporabimo metodo separacije spremenljivk:

$$u^*(x, t) = X(x)T(t)$$

Po znani poti pridemo do (glej odgovor na vprašanje 67):

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}$$

2. Rešitev nehomogene enačbe iščemo v obliki

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Tako zapisana rešitev že ustreza robnim pogojem. Funkcije  $T_n(t)$  izberemo tako, da rešitev ustreza še parcialni diferencialni enačbi in začetnima pogojema. Preostale funkcije razvijemo po funkcijah  $X_n(x)$ :

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$u(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(0) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Pri tem so  $F_n(t)$ ,  $T_n(0)$ ,  $\dot{T}_n(0)$  ustrezni Fourierovi koeficienti:

$$F_n(t) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$T_n(0) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$\dot{T}_n(0) = \frac{2}{a} \int_0^a h(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

3. Če upoštevamo

$$X'(x) = \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a}, \quad X''(x) = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} \sin \frac{n\pi x}{a} = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} X(x),$$

lahko vrste vstavimo v začetno enačbo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t) X_n(x) = -c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{a^2} T_n(t) X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) X_n(x)$$

Da bo enačba izpolnjena, morajo biti istoležni koeficienti pri  $X_n(x)$  enaki. Tako dobimo diferencialno enačbo:

$$\ddot{T}_n(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{a^2} T_n(t) = F_n(t)$$

Neznani koeficienti  $T_n(t)$  so rešitve navadne nehomogene linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti. Poznamo njene začetne pogoje, torej jo lahko za vsak  $n$  enolično rešimo.

### 83. Reševanje parcialnih diferencialnih enačb z nehomogenimi robnimi pogoji.

Iščemo rešitev nehomogene enodimenzionalne valovne enačbe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

Naj bodo začetni pogoji:

$$u(x, 0) = g(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = h(x)$$

Robni pogoji pa naj bodo nehomogeni:

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(a, t) = \psi(t)$$

Postavimo funkcijo:

$$w(x, t) = \varphi(t) \frac{a-x}{a} + \psi(t) \frac{x}{a}$$

Ta funkcija očitno zadošča robnim pogojem enačbe, ne zadošča pa sami enačbi in njenim začetnim pogojem. Zato vpeljimo še funkcijo  $v(x, t)$ :

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$$

1. Funkcija  $v(x, t)$  je rešitev enačbe:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Tukaj smo upoštevali:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\varphi(t)}{a} + \frac{\psi(t)}{a} \right) = 0$$

Funkcija  $v(x, t)$  ustreza homogenima robnim pogojema:

$$v(0, t) = 0, \quad v(a, t) = 0$$

Začetna pogoja pa sta:

$$v(x, 0) = g(x) - w(x, 0), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = h(x) - \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0}$$

Neznana funkcija  $v(x, t)$  je tako rešitev nehomogene parcialne diferencialne enačbe s homogenimi robnimi pogoji. To enačbo lahko nekoliko preoblikujemo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q(x, t), \quad q(x, t) = f(x, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Prepoznamo parcialno diferencialno enačbo iz vprašanja 82, torej lahko nadaljujemo reševanje kot pri omenjenem vprašanju.

2. Včasih uspe najti tako partikularno rešitev nehomogene enačbe, ki ustreza tudi robnim pogojem. Naj bo  $w(x, t)$  taka funkcija:

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$$

Imamo enačbo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, y)$$

In robna pogoja:

$$w(0, t) = \varphi(t), \quad w(a, t) = \psi(t)$$

Tedaj ustreza  $v(x, t)$  homogeni enačbi, s homogenima robnim pogojema in nekoliko drugačnim začetnim pogojem. To je v enačbi:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Robna pogoja sta:

$$v(0, t) = 0, \quad v(a, t) = 0$$

Začetna pogoja pa sta:

$$v(x, 0) = g(x) - w(x, 0), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = h(x) - \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0}$$