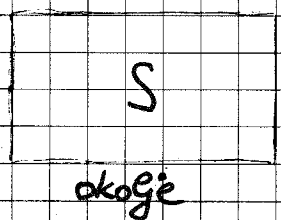
I. UVOD

1. SISTEM

→ Kaj je sistem?

Def.: Sistem je množica povezanih elementov ali komponent, ki imajo relacijo z okoljem.

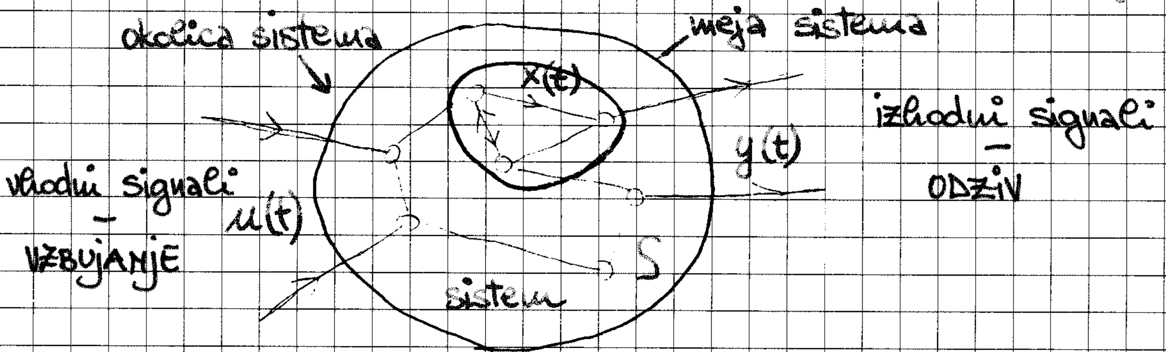


Def.: Sistem je skupina po določenih zakonih povezanih elementov, ki sestavljajo celoto.

↳ elementi niso povezani kar tako (npr. vezje → —▭—, —⌇⌇⌇—, —||— → vzporedna in zaporedna vezava)

Def.: Sistem je množica z določenim namenom povezanih soodvisnih elementov, ki tvorijo celoto.

→ Ključno je, da sistem sestavljajo določeni elementi, povezani na nek določen način in so še povezani z okoljem.



→ Sistemi imajo dve lastnosti:

1. POVEZAVA med elementi sistema (ni nujno, da je vsak z vsakim povezan)

2. MEJA SISTEMA – določa oz. omejuje komponente znotraj sistema in komponente izven sistema.

- Meje, ki so REALNE ali NAMIŠLJENE, so GIBLJIVE ali ELASTIČNE, lahko jih premikamo, tako da v sistem vključujemo nove komponente, jih odstranjujemo ali pa se omejimo samo na del sistema (podsistem).

  - REALNE MEJE ⇒ upr. v vezje dodajamo komponente (se fizično poveča)

  - MEHKE / NAMIŠLJENE MEJE ⇒ upr. finančni ali gospodarski sistem

⇒ Interakcije sistema z okolico: sistem je preko določenih elementov se povezan z okolico; ni izolirana stvar.

* Živi ali dinamični sistemi: v časovnem obdobju se s sistemom nekaj dogaja; časovna odvisnost (celica, vezje ⇒ prenašanje signalov)

→ SIGNALI so neločljivo povezani s sistemom

Signali so spremenljivke, ki prenašajo informacije (spremenljivka čas → vrednosti signalov se s časom spreminjajo)

- Povezave, ki peljejo informacije v sistem: VHODNI SIGNALI – VZBUJANJE
- Povezave, ki vodijo informacije iz sistema: IZHODNI SIGNALI – ODZIV

- Veličine so lahko fizikalne, ekonomske, ...
- Kako se informacije pretakajo določajo zakoni fizike, ekonomije, ...

$$\underbrace{S,\ u(t),\ y(t),}\ \boxed{y(0)} \rightarrow$$ pomembna so še začetna stanja sistema

to imamo vedno

① $\underbrace{S, u(t)}_{\text{to je podano}} \rightarrow y(t) = ?$, $x(t) = ?$ } neznana stvar; izračunamo iz podanih informacij

ANALIZA SISTEMOV ⇒ zanimivi tudi signali znotraj sistema in ne le izhodi $x(t)$

② $\underbrace{u(t), y(t)}_{\text{podano}} \rightarrow S = ?$ iščemo sistem, ki bo vhodni signal preslikal v željeni izhodni signal

SINTEZA SISTEMOV

* ANALIZA SISTEMOV:

- vzbujamo in merimo kaj dobimo na izhodu ⇒ EKSPERIMENTALNO (precej težavno, o realni sistem opišemo z MATEMATIČNIMI IZRAZI

S → MATEMATIČNI IZRAZI

↑ MATEMATIČNO MODELIRANJE

sprememba v sistemu ⇒ dodan ali spremenjen izraz (diferencialne, diferenčne enačbe,...)

* matematični izrazi ⇒ ANALIZA SISTEMOV

2. RAZVRSTITEV SISTEMOV (klasifikacija)

⇒ Dva načina razvrščanja sistemov

a) prva razvrstitev: ne vidimo takoj matematičnega izraza

b) druga razvrstitev: vsaka kategorija ima določeno obliko matematičnega izraza

a) 1. delitev na NARAVNE in UMETNE sisteme (npr. človek, žival, rastlina, organ, tkivo, ... ; umetne naredi človek : mehanski sistem, vezja, gospodarstvo, ekonomija, ...)

2. delitev na FIZIČNE in KONCEPTUALNE sisteme

- FIZIČNI: elementi so fizični: masa, vzmet, dušilka ⇒ lahko primemo v roke
- KONCEPTUALNI: organizacija elementov, ki niso fizični → povezava idej

3. delitev na STATIČNE in DINAMIČNE sisteme

- STATIČNI: večinoma nezanimivi → odziv oz. notranja stanja se ne spreminjajo
- DINAMIČNI: signali in notranja stanja imajo neko dinamiko (komponenta časa)

4. delitev na ODPRTE in ZAPRTE sisteme → ni določljive meje

- ODPRTI: velika interakcija z okoljem
- ZAPRTI: manjša interakcija z okoljem

5. delitev na ENOSTAVNE in KOMPLEKSNE sisteme → meja je točno določena

- ENOSTAVNI: iz majhnega števila elementov (povezav med njimi je malo)
- KOMPLEKSNI: veliko število elementov (povezav je veliko in te so kompleksne)

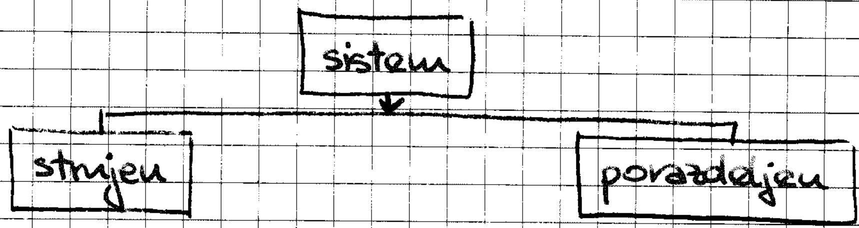
$S = (X, R)$

$X = \{x_i\}$ $i = 1, 2, \ldots, N$ → komponente

$R = \{r_j\}$ $j = 1, 2, \ldots, M$ → množica relacij (med komponentami)

- lastnosti sistema se bodo izražale v matematičnem izrazu in obratno

RAZVRSTITEV SISTEMOV



→ KRITERIJI

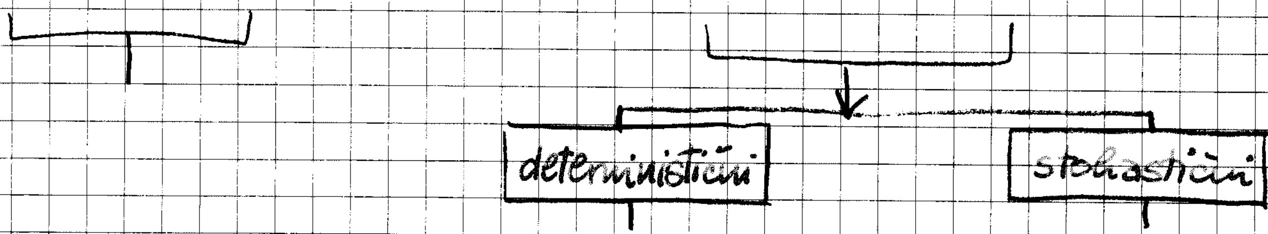
1. delitev: – strnjen
   – porazdeljen

→ Sistemi s porazdeljenimi parametri imajo spremenljivke, ki so funkcije več spremenljivk (večih veličin: čas, kraj, ...) → opisujejo jih parcialne diferencialne enačbe PDE.

→ Strnjene: majhne dimenzije, vsota sistema lahko predpostavimo ⇒ navadne diferencialne ali diferenčne enačbe ⇒ povsod upoštevamo iste vrednosti spremenljivk (razdalje v vezjih so majhne v primerjavi z elektromagnetnim valovanjem)

EM V $\lambda = \frac{v}{f}$ $v \approx 10^8$, $f < 10^6$ ⇒ $\lambda \approx 100\,m$

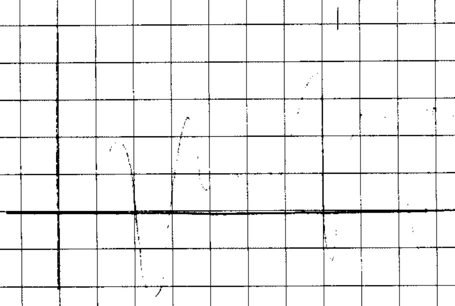
→ vezja so strnjen sistem ⇒ velike poenostavitve



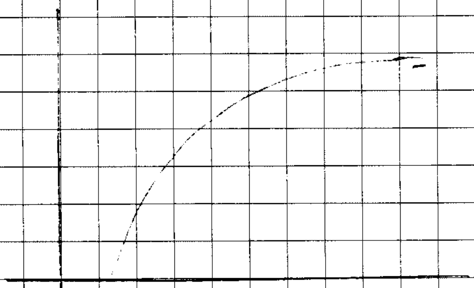
2. delitev: – deterministični
   – stohastični

→ Parametri ali spremenljivke nekaterih sistemov lahko naključno variirajo (se naključno spreminjajo).

→ Stohastični sistemi: tudi vhodni signali (vzbujanje) so lahko naključni – naključno se spreminjajo lastnosti elementov.



stohastični signal



deterministični signal

→ Deterministični sistemi pa imajo parametre, vhodne signale, ki so deterministični ⇒ se jih da matematično opisati (so predvidljivi)

3. delitev: – zvezni sistemi
– diskretni sistemi

→ Zvezni sistemi imajo zvezno časovno skalo t → <u>diferencialne enačbe</u>

→ Diskretni sistemi imajo diskretno časovno skalo $k \cdot \Delta t$, $k = 0, 1, \dots$ (vrednosti poznamo le v določenih časovnih trenutkih) ⇒ DIFERENČNE ENAČBE

DIFERENCIALNE ENAČBE

VZBUJANJE

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_0 u$$

$y(t) = ?$ $\quad t \geq 0$ $\quad / \ \mathcal{L}$ (Laplace)

$y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ → začetni pogoji

DIFERENČNE ENAČBE

→ imamo tudi začetne pogoje; vrednosti v posameznem časovnem trenutku so za Δt zamaknjeni

① $a_n y[k+n] + a_{n-1} y[k+n-1] + \dots = b_m u[k+m] + \dots$ $\quad / \ \mathcal{Z}$ z-preslikava

② $a_n y[k] + \dots$

$y[0], y[1], \dots y[n-1]$

$y[k] = ?$

$k = 0, 1, 2, \dots$

4. delitev: – linearni sistemi
   – nelinearni sistemi

→ Linearni sistemi so enostavnejši za modeliranje in reševanje (premica).

→ Nelinearni sistemi: poenostavitev, da je sistem linearen (vsaj na nekem določenem območju) ⇒ poenostavitve

5. delitev: – časovno nespremenljivi sistemi
   – časovno spremenljivi sistemi

⇒ To lahko razberemo iz koeficientov diferencialne enačbe: če so konstante je časovno spremenljiv sistem, če pa so odvisne od časa (funkcije) je časovno spremenljiv sistem.

→ Če se pa funkcije spreminjajo s časom (ne konstante) je sistem DINAMIČEN (statičen sistem ima časovni odziv enak nič)

6. delitev: – homogeni sistemi
   – nehomogeni sistemi

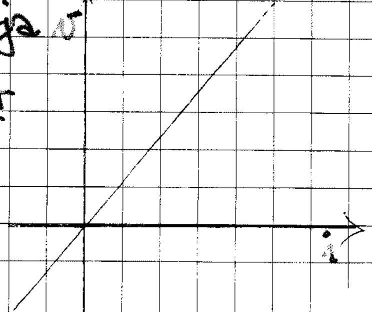
→ Nehomogeni sistemi so sistemi z vzbujanjem.

→ Homogeni sistemi so sistemi brez vzbujanja (desna stran diferencialne enačbe je enaka nič). Ali je sistem še vedno dinamičen? ja ⇒ sistem se spreminja zaradi začetnih pogojev, če so pa če ti enaki nič, je sistem neodziven.

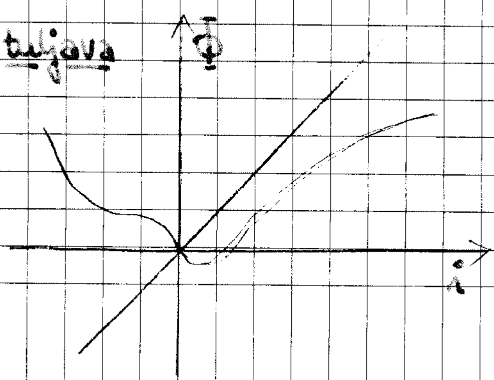
- Linearnost lahko preberemo iz diferencialne enačbe (diferenčne): ni kvadratov, eksponentov, logaritmov iskanih funkcij ⇒ v vsakem členu posebej nastopa le v eni obliki

⇝ električna vezja

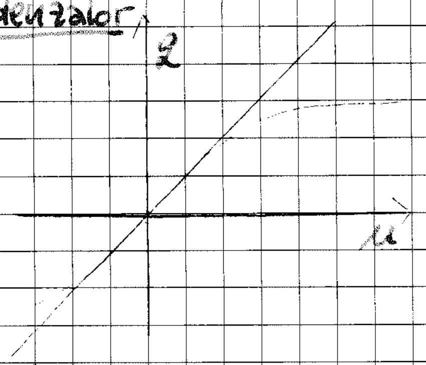
upor



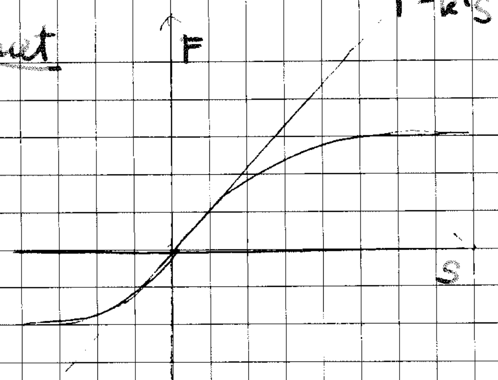
tuljava



kondenzator



vzmet



→ če je sistem sestavljen iz linearnih elementov je sistem linearen

→ matematični sistem

TEST LINEARNOSTI

$$u_1 \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y_1$$

$$u_2 \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y_2$$

→ če je sistem linearen:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 \rightarrow \boxed{S} \rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2$$

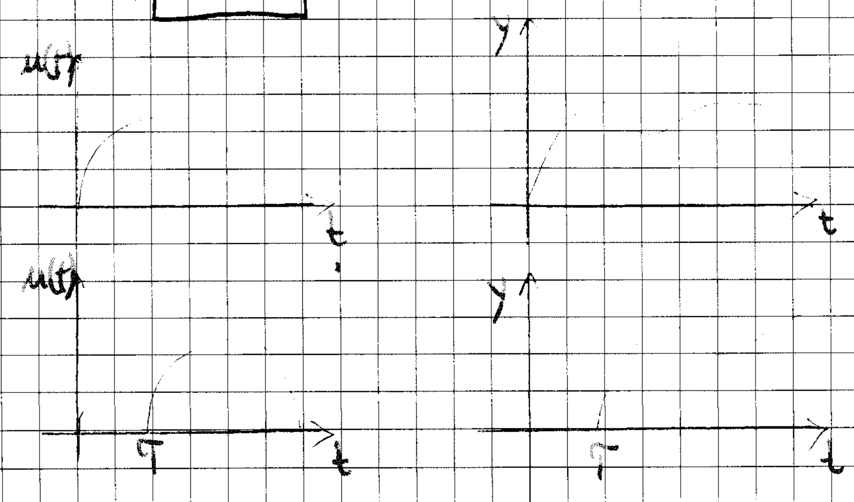
$$\boxed{\begin{array}{l} u_1 \rightarrow y_1 \\ u_2 \rightarrow y_2 \\ \alpha u_1 + \beta u_2 \rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \end{array}}$$

→ SUPERPOZICIJA, če je sistem linearen

SISTEM JE ČASOVNO NESPREMENLJIV

$$u(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y(t)$$

$$u(t-\tau) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y(t-\tau)$$



→ če pa je časovno spremenljiv sistem, ne dobimo enakega in le zakasnjenega izhoda, ker so se vmes karakteristike sistema spremenile

→ LTI – linear - time - independent system (časovno spremenljiv)

Zgled:

$y(t) = u(t) \cdot g(t)$

Ali je sistem linearen?
Ali je časovno nespremenljiv?

test linearnosti

$u_1 \longrightarrow y_1 = u_1 \cdot g$

$u_2 \longrightarrow y_2 = u_2 \cdot g$

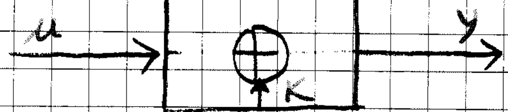
$(\alpha u_1 + \beta u_2) \longrightarrow y = (\alpha u_1 + \beta u_2) \cdot g = \alpha y_1 + \beta y_2$

časovno spremenljiv

$u_2 \longrightarrow y = u_2 \cdot g$

$\left.\begin{array}{ll} u(t) \longrightarrow y(t) = u(t) \cdot g(t) & t \rightarrow t - T \\ u(t-T) \longrightarrow u(t-T) \cdot g(t) & \end{array}\right\} \Rightarrow$ časovno spremenljiv sistem

Zgled: $y(t) = u(t) + K$



Ali je sistem linearen?

$u_1 \longrightarrow y_1 = u_1 + K$

$u_2 \longrightarrow y_2 = u_2 + K$

$\alpha u_1 + \beta u_2 \longrightarrow (\alpha u_1 + \beta u_2) + K \neq \alpha y_1 + \beta y_2$

Zgled: $y(t) = u^2(t)$

Ali je sistem linearen? Ali je sistem časovno nespremenljiv?

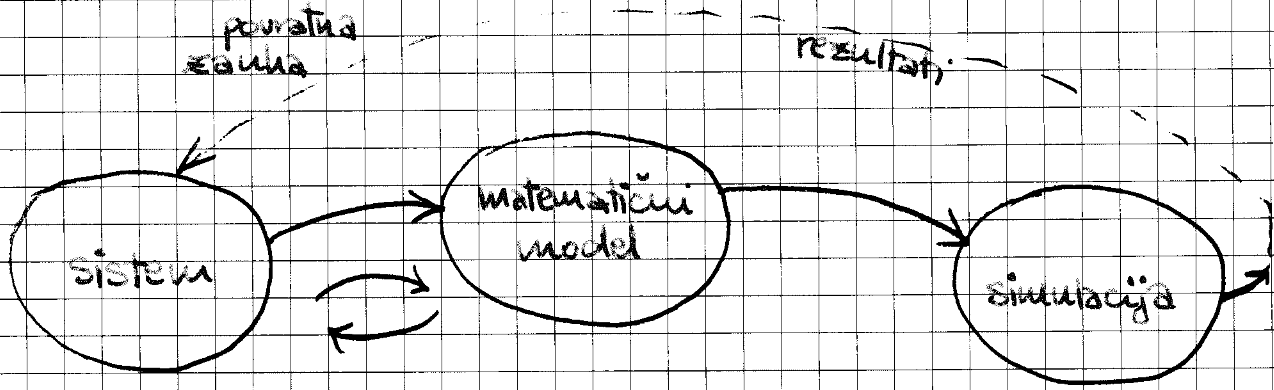
* sistem ni linearen

$$u(t) \longrightarrow y(t) = u^2(t)$$

$$t \rightarrow t-T$$

$$u^2(t-T) \rightarrow y(t-T)$$

* sistem je časovno nespremenljiv



- odzivi pri danih vhodnih signalih in začetnih stanjih
- simulacija nam da neko koristno informacijo o sistemu
- lastnosti sistema se odražajo na matematičnem modelu
- najprej moramo znati matematični model iz sistema in obratno

Zgled: $\frac{dy(t)}{dt} = 5y(t) \;\Big|\; \mathcal{L}$

$\Rightarrow$ linearno, časovno nespremenljivo, zvezen, strnjen, homogen, dinamičen

$\rightarrow$ začetna stanja ne vplivajo na STABILNOST

$$sY(s) - y(0) = 5Y(0)$$

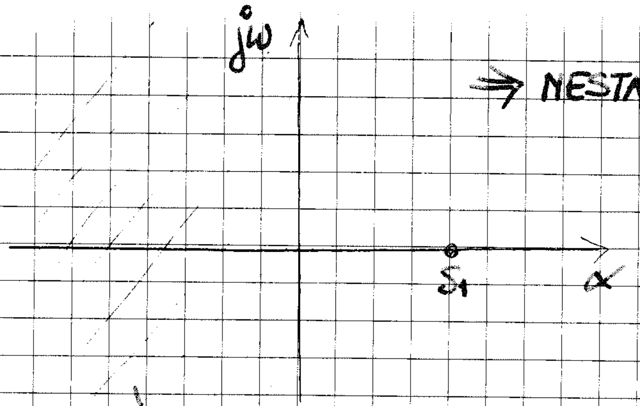
$$\underbrace{(s-5)}Y(s) = y(0)$$

$\underline{Q(s) = s-5}$ $\rightarrow$ KARAKTERISTIČNI oz. ZNAČILNI POLINOM

$\rightarrow$ sistem 1. reda: polinom 1. stopnje je $Q(s)$

$Q(s) = s-5 = 0$ ZNAČILNA ENAČBA

$\boxed{s_1 = 5}$ – koren (v splošnem kompleksen)



$\Rightarrow$ NESTABILEN SISTEM

za stabilnost morajo ležati koreni v levi polravnini

$y(t) = K \cdot e^{st}$

Zgled:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 5y^2(t)$$

$\Rightarrow$ zvezen, homogen, 1. reda, časovno nespremenljiv, stvaren, nelinearen

$\Rightarrow$ hočemo dat zvezen v diskretni sistem

$$y[k+1] = 5y[k]$$

$\Rightarrow$ linearen, stvaren, časovno nespremenljiv, ker da je sedaj diskreten $\rightarrow$ odrani vse lastnosti razen zveznosti

Zgled: $$\frac{dy(t)}{dt} = 5y(t) + 4t$$

$\Rightarrow$ linearen, zvezen, časovno nespremenljiv, stvaren, nehomogen, 1. reda

Zgled: $$\frac{dy(t)}{dt} = (3t+1)y^2(t) + 5t$$

$\Rightarrow$ nehomogen, nelinearen, časovno spremenljiv, stvaren, zvezen

Zgled: $$\frac{dy(t)}{dt} = e^{y(t)} + 5y(t) + g(t)$$

$\Rightarrow$ zvezna, nelinearna, časovno nespremenljiva, stvarna, nehomogena

Zgled: $$\frac{\partial y(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} + 2y(z,t)$$

$\Rightarrow$ porazdeljen, homogen, linearen, časovno nespremenljiv

Zgled: $\frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{dy_2(t)}{dt} = 8y_1(t) - 6y_2(t)$

⇒ linearen, homogen, časovno nespremenljiv, stryjen, zvezen
⇝ dve neznanki y_1 in y_2

⇝ $8y_1(t) \cdot 6y_2(t)$ ⇒ nelinearnost

⇒ tako lahko analiziramo katerikoli sistem s katerega koli področja → preko matematičnega modela (numerične metode, različna orodja,...)

II. (MATEMATIČNO) MODELIRANJE SISTEMOV

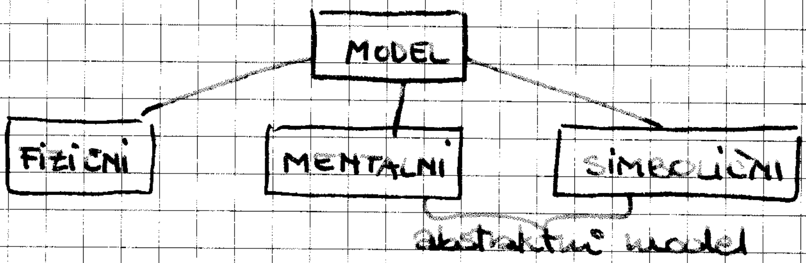
⇒ knjiga: MODELIRANJE SISTEMOV: Rihard Karba

* Modeliranje in simulacija sta neločljivo povezana postopka (simulacije ne moremo delat brez matematičnega modela).

* **Namen:**
  - želimo izboljšati poznavanje in razumevanje delovanja sistema
  - napovedati obnašanje sistema v prihodnosti in v različnih situacijah in pogojih
  - omogočiti načrtovanje sistemov
  - oceniti predvsem tiste parametre procesa, ki niso direktno merljivi
  - testirati občutljivost parametrov sistema
  - optimizirati delovanje sistema (manjša poraba)
  - omogočiti odkrivanje napak v sistemu
  - omogočiti raziskovanje sistemov, katerih analiza bi bila draga, tvegana, neizvedljiva,...

* SIMULACIJA je postopek, ki omogoča študiranje sistema s pomočjo eksperimentiranja na modelu.

RAZVRSTITEV (klasifikacija) MODELOV



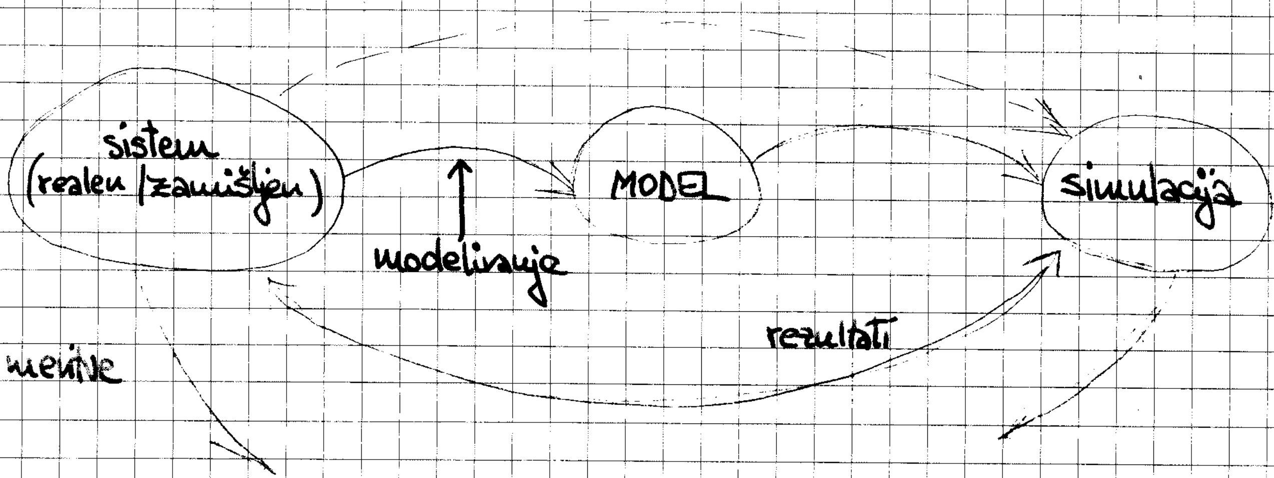
* **FIZIČNI MODELI** so pomanjšana fizična predstavitev realnih sistemov. Njihova gradnja je največkrat draga, zamudna in nepraktična.

  → Statični fizični modeli so pomanjšane kopije realnih sistemov ali pa inženirski modeli.

  → Dinamični fizični modeli so lahko analogni modeli (zvok, glasovi, miške z določenimi masami, vzmeti in dušilke) ali pa prototipi (pomanjšane kopije realnih sistemov).

* **MENTALNI MODELI**: so subjektivna slika realnih sistemov (npr. električne veje → predstavljamo si upornike, kondenzatorje, ...)

* **SIMBOLIČNI MODELI** so uporabni za simulacije. Delimo jih v NEMATEMATIČNE, MATEMATIČNE in LOGIČNE.
  Nematematični modeli so lahko verbalni, grafični ali shematični. Najpomembnejši, največkrat uporabljeni so matematični modeli, ki predstavljajo preslikavo relacij med fizičnimi spremenljivkami realnega sistema v ustreznem matematičnem izrazu.



- rezultate, ki jih dobimo s pomočjo simulacije lahko primerjamo z meritvami, ki jih opravimo na sistemu
- Matematični model sistema je ena ali več enačb, ki opisujejo sistem.

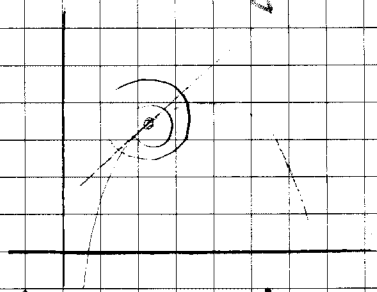
• trenutek nič ⇒ podajamo začetna stanja

NAČINI MODELIRANJA

* Matematično modeliranje lahko razdelimo na TEORETIČNO, EKSPERIMENTALNO in KOMBINIRANO modeliranje (to kombinirano dopristop teorije in eksperimentov)

① TEORETIČNO MODELIRANJE

- Pri teoretičnem modeliranju razčlenimo/razstavimo sistem oz. proces na večje število enostavnejših podsistemov (kolenski sklep: kosti za podporo; kite, mišice ⇒ vsako posebej kot podsistem).
- Povezave med podsistemi določimo na osnovi zakonov, ki veljajo na določenem področju (vezja - zakoni iz elektrotehnike).
- Povezave med podsistemi so v tehničnih znanostih razmeroma dobro določene. Na področju družboslovja pa tudi biomedicine pa manj in lahko predstavljajo resen problem.
- Zelo dober oz. precizen matematični model nekega sistema je lahko zelo kompleksen.
- Kompleksni matematični modeli zmanjšujejo njihovo uporabnost.
- Možna rešitev je v premišljenih poenostavitvah, zanemaritvah in predpostavkah.
- Paziti je treba, da je model zgajen s poenostavitvami, še vedno dobro opisuje sistem. Poenostavitve najpogostejše:
  * linearnost: v okolici delovne točke predpostavimo linearnost (pri močni ukrivljenosti vzamemo manjše področje)



  * strnjenost sistema: ni parcialnih DE, ampak le navadne DE
  * determinističnost:
  * sistem je časovno nespremenljiv

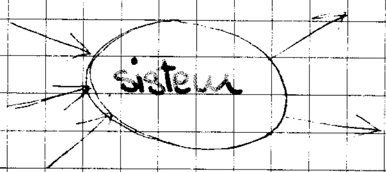
- Poiskati moramo kompromis med natančnostjo in kompleksnostjo modela.

- Pomembna lastnost teoretičnih modelov je, da jih lahko uporabimo za modeliranje podobnih sistemov ob manjši spremembi parametrov.

- Pomembno je tudi, da lahko s teoretičnim modeliranjem modeliramo sisteme, ki še ne obstajajo (v fazi ideje / zamisli).

(2.) EKSPERIMENTALNO MODELIRANJE

- Pri tem modeliranju gradimo matematični model na osnovi poskusov in meritev na realnem sistemu.



- Sistemu moramo izbrati vhode in izhode. Na vhodih spreminjamo signale, spreminjamo vrednosti elementov sistema in merimo izhodne signale.

- Želimo poiskati matematični model, katerega rešitev bi dala rezultate, ki so čimbolj podobni izhodnim signalom, ki smo jih dobili z meritvami.

(3.) KOMBINIRANO MODELIRANJE: teoretično + eksperimentalno modeliranje

- V praksi se največkrat uporablja kombinirano modeliranje, ki združuje dobre lastnosti teoretičnega in eksperimentalnega modeliranja.

- Strukturo modela ponavadi določimo s teoretičnim modeliranjem, vrednosti parametrov pa z eksperimentalnim.

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u(t)$$

→ t.i. CIKLIČEN PRISTOP K MODELIRANJU (koraki, ki jih zaporedno izvajamo)

* Modeliranje je ITERATIVEN in INTERAKTIVEN postopek.

  ker imamo sistem, ki ga modeliramo
  in simuliramo ⇒ primerjamo rezultate z meritvami

* V grobem je modeliranje sestavljeno iz naslednjih korakov:
  - postavitev problema
  - razvoj modela s pomočjo modeliranja
  - vrednotenje modela (ali je v redu?)
  - reševanje problema s pomočjo modela
  - testiranje in preverjanje rešitev (izkoriščanje rezultatov na osnovi meritev / rešitev)
  - implementacija rešitve oz. sinteza sistema

* Ponavljamo, dokler nismo z rezultati zadovoljni.

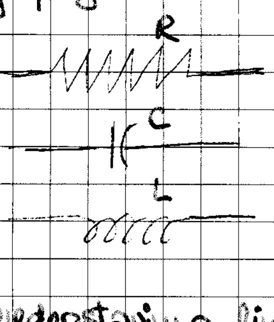
* Pri modeliranju moramo paziti predvsem na:

  1. namen modeliranja mora biti jasen in nedvoumen
  2. upoštevati moramo čimveč možnih omejitev
  3. predpostavke in zanemaritve morajo biti utemeljene
  4. zagotovljena mora biti zmožnost meritev in eksperimentiranja sistema
  5. izbrati moramo strategijo / pristop k razvoju modela, ki obsega:
     a) postopke zbiranja in analize podatkov
     b) ocenjevanje parametrov
     c) tip modela
  6. razpoložljivost in kakovost simulacijskih orodij
  7. splošnost dobljenih rezultatov
  8. možnost nadgradnje modela

⇒ Kako modeliramo sisteme, ki prihajajo z različnih področij?

PRIMERI MODELIRANJA

• najprej pogledamo osnovne komponente

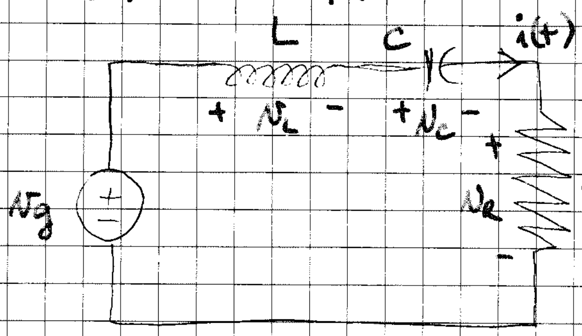


} VZBUJANJE: tokovni in napetostni generatorji

→ predpostavimo linearno karakteristiko elementov, časovno nespremenljiv sistem, vezje / elementi so majhni v primerjavi z valovno dolžino ⇒ strnjenost

→ znanje, ZAKONI: Kirchhoffovi zakoni (tokovni in napetostni; KTZ in KNZ), vejne enačbe, ki povezujejo toke z napetostjo

$i_{R,C,L} \longleftrightarrow v_{R,L,C}$



$\Rightarrow$ matematični model?

- napovedat hočemo, kako se bo pri različnih vhodnih signalih spreminjal tok
- nehomogene DE s konstantnimi koeficienti: 2. reda

KVZ: $\boxed{v_g(t) = v_L(t) + v_C(t) + v_R(t)}$

$i(t) = ?$

$$v_g(t) = L\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C}\int i_C\,dt + R i_R$$

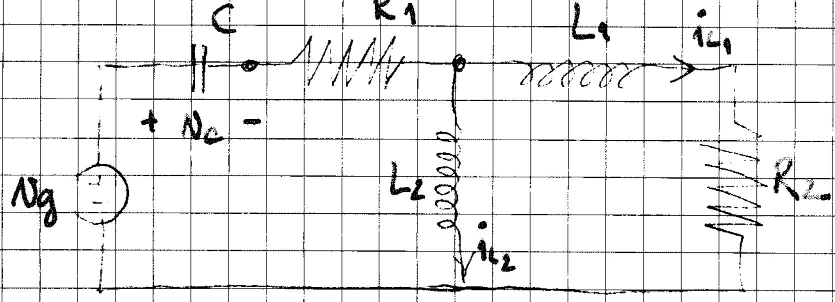
$$i = i_L = i_C = i_R$$

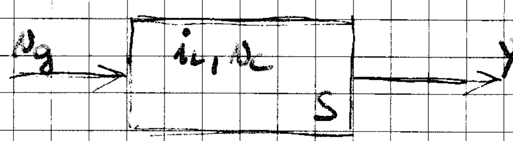
$$v_g(t) = L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt + R\cdot i \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{dv_g(t)}{dt} = L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C}\cdot i + R\frac{di}{dt}$$

$v_C(t) =$
$v_L(t) =$
$v_R(t) =$
} diferencialna enačba 2. reda

$i = \frac{v_R}{R}$





$y(t) \rightarrow$ odziv (tok ali napetost)

* spremenljivke stanj: i_L, u_C

$$\{i_{L1}, i_{L2}, u_C\}$$

⇒ namesto ene DE višjega reda zapišemo več DE prvega reda

$$\frac{di_{L1}}{dt} = f(i_{L1}, i_{L2}, u_C, u_g)$$

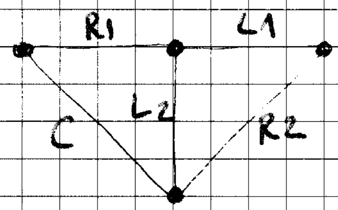
$$\frac{di_{L2}}{dt} = f(i_{L1}, i_{L2}, u_C, u_g)$$

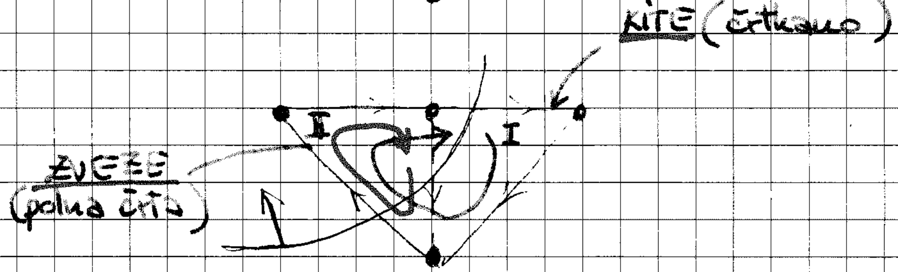
$$\frac{du_C}{dt} = f(i_{L1}, i_{L2}, u_C, u_g)$$

* imamo toliko DE višjega reda, kot je v vezju kondenzatorjev ali toliko DE prvega reda, kolikor je spremenljivk stanj.

SISTEMATIČEN POSTOPEK REŠEVANJA

- narišemo GRAF vezja ⇒ vsak element predstavlja eno vejo + vozlišča





- povežemo vozlišča tako, da ne naredimo nobene zaključene zanke ⇒ veje v katerih so tuljave ne upoštevamo; kjer pa so kondenzatorji VEDNO upoštevamo
- označimo še smeri tokov: iste kot v pravem vezju
- nato narišemo še zanko: vsebuje vejo v kateri je tuljava, vse ostale veje pa morajo biti veje z vezja → zanka ima lahko le eno črtkano vejo (smer — po smeri tokov v posamezni veji)
- za vejo v kateri je kondenzator narišemo REZ: prerežemo vejo s kondenzatorjem, vendar ne smemo rezati nobene druge polne črte ⇒ smer toka v veji enaka smeri reza.

Z1: $u_{L1} + u_{R2} + u_C + u_{R1} - u_g = 0$

$$L\frac{di_L}{dt} = -v_{R1} - v_{R2} - v_C + v_g$$

$$\underline{\underline{v_{R2}}} = R_2 \cdot i_{R2} = R_2 \cdot i_{L1}$$

$$L\frac{di_{L1}}{dt} = -v_{R1} - R_2 \cdot i_{L1} - v_C + v_g$$

$$v_{R1} = R_1(i_{L1} + i_{L2}) = R_1 \cdot i_{R1}$$

Z2: $v_{L2} + v_C - v_g + v_{R1} = 0$

$$L\frac{di_{L2}}{dt} = -v_C - v_{R1} + v_g$$

R1: $i_C - i_{L1} - i_{L2} = 0$

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_{L1} + i_{L2}$$

MEHANSKI SISTEMI

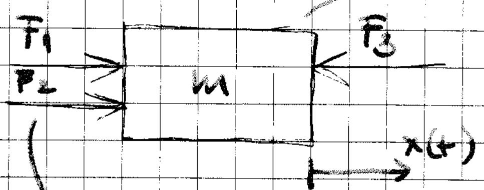
TRANSLATORNI (x, y, z smer)

ROTACIJSKI (rotacija okrog teh osi)

TRANSLATORNI: 2. Newtonov zakon $\boxed{F = m \cdot a}$

$$\sum_i F_i = m \cdot a = m\frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d^2s}{dt}$$

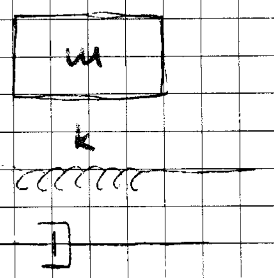
→ telesa z maso!



Za vsako telo v telesu bomo zapisali eno DE

$$F = \underbrace{F_1 + F_2 - F_3}_{\sum_i F_i} = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d^2x}{dt}$$

* osnovni gradniki v mehaniki (transformacija)
  - TELO Z MASO
  - VZMETI
  - DUŠILKA



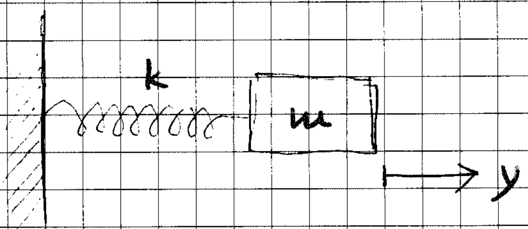
b - koeficient dušenja

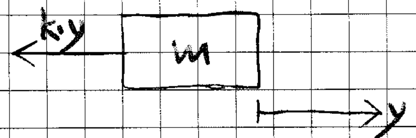
$\boxed{F_V = k\cdot x}$ Hookov zakon

$\boxed{F_D = b\cdot \dot{x}}$

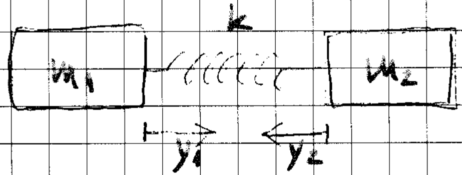
$$\boxed{\sum_i F_i = m\cdot a = m\cdot \ddot{x}}$$

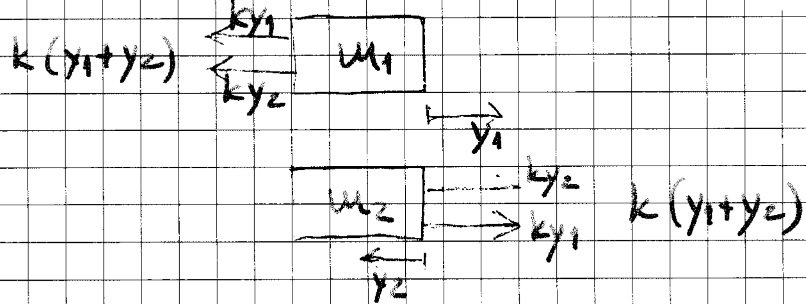
PRIMER:



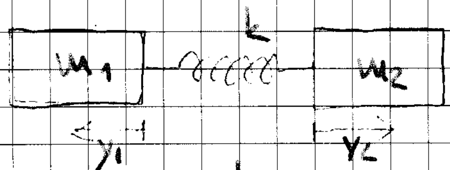


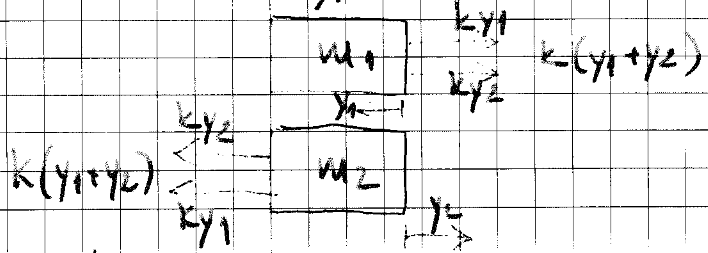
PRIMER 1:



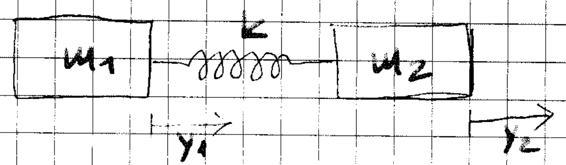


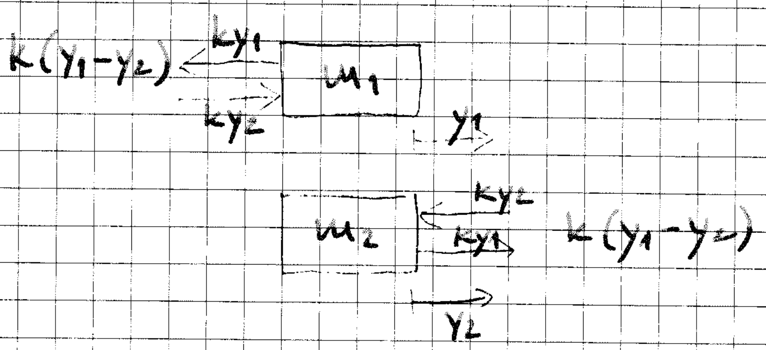
PRIMER 2:



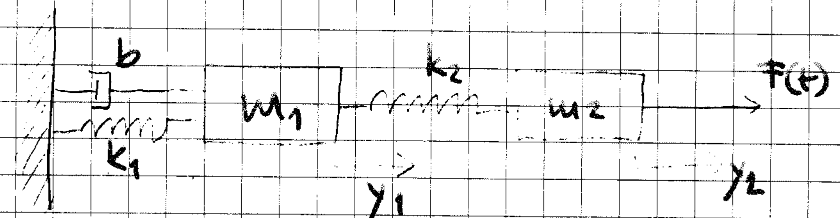


PRIMER 3:

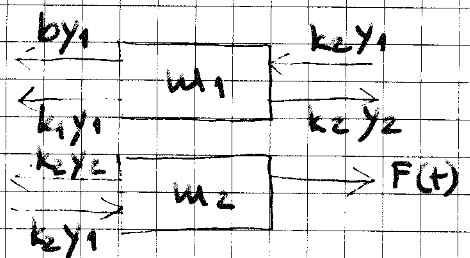




PRIMER:



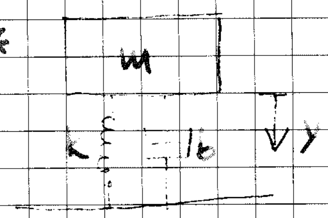
- v mehanskih sistemih je vzbujanje vedno neka sila
- trenje bi lahko nadomestili z dušilko (odvisnost od hitrosti)



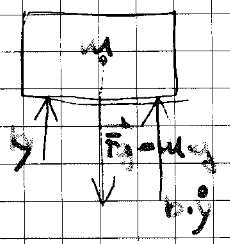
$$\left.\begin{aligned} \boxed{m_1}:\ \sum_i F_i &= m_1\ddot{y}_1 = -k_1y_1 - b\dot{y}_1 - k_2y_1 + k_2y_2 \\ \boxed{m_2}:\ \sum_i F_i &= m_2\ddot{y}_2 = -k_2y_2 + k_2y_1 + F(t) \end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned} y_1(t) &= ? \\ y_2(t) &= ? \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1(0),\ \dot{y}_1(0) \\ y_2(0),\ \dot{y}_2(0) \end{aligned}\right\} \text{začetna stanja}$$

Zgledi: *



izberemo pozitivno smer premika y



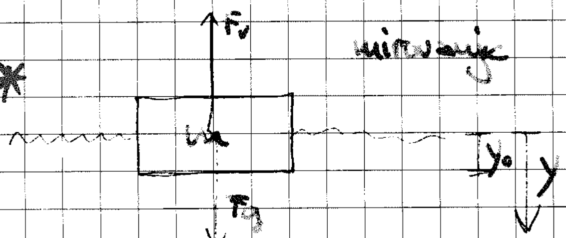
→ DIAGRAM SIL

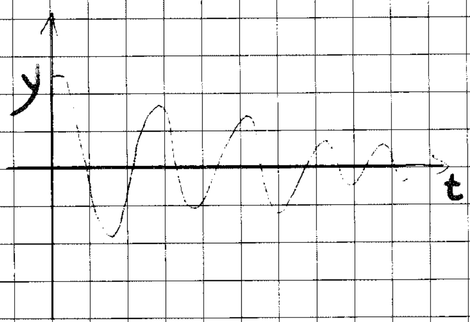
$$mg - ky - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

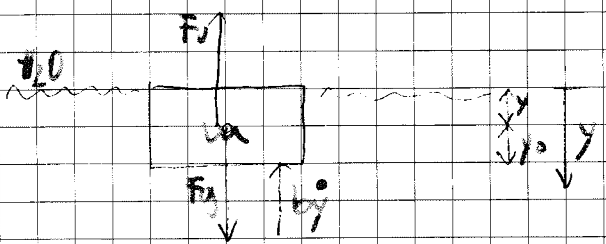
$$\boxed{m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = m\cdot g}$$ nehomogena enačba

*

mirovanje







→ enačbe: $\vec{F}_T = m\cdot g$

$\vec{F}_V = \rho_{H_2O}\cdot V = \rho_{H_2O}\cdot P(y + y_0)$

$\vec{F}_b = b\cdot\dot{y}$ ⇒ dušenje: tako dušenje, nihanje se na koncu ustavi

$\sum F = m\cdot a$ → dušenje vedno deluje v nasprotno smer kot je gibanje

$$mg - \rho_v P(y+y_0) - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

$$\rho_v P y_0 - \rho_v P y - P\rho_v y_0 - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

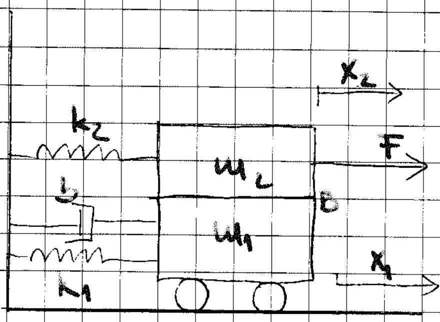
$$\boxed{m\ddot{y} = -\rho_v P y - b\dot{y}}$$

! RAVNOVESJE !

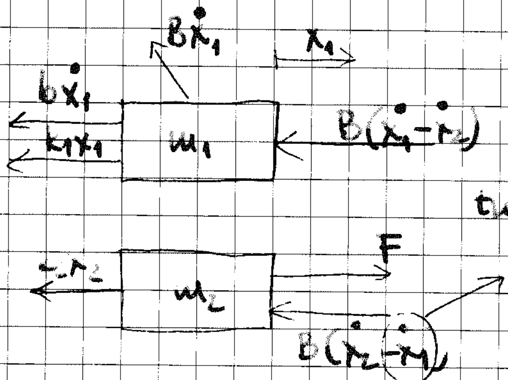
$F_g = F_V$

$mg = \rho_v P\cdot y_0$

*



B... koeficient trenja



! POGLEJ SI SMERI

trenje je manjše za toliko, kot se porabi za pospeševanje prve mase

1) $-k_1x_1 - k_1\dot{x}_1 - B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1\ddot{x}_1$

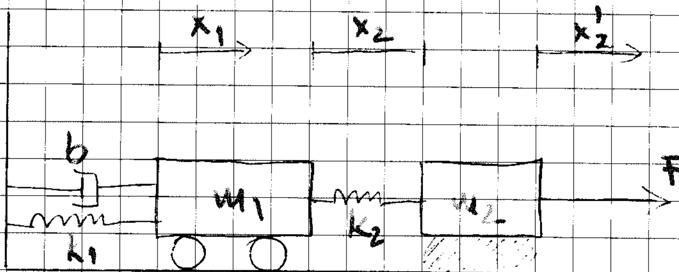
2) $-k_2x_2 - B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F = m_2\ddot{x}_2$

dobimo $x_1(t)$ in $x_2(t)$

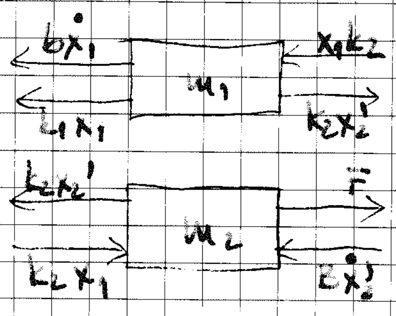
↓

$f(k_1, k_2, b, B, F)$

*



$\boxed{x_2 = x_2' - x_1}$



(1) $-b\dot{x}_1 - k_1x_1 - k_2x_1 + k_2x_2' = m_1\ddot{x}_1$

(2) $-k_2x_2' + k_2x_1 + F - B\dot{x}_2' = m_2\ddot{x}_2'$

izračunamo $x_1(t)$ in $x_2'(t)$, iz tega pa x_2

ROTACIJSKO GIBANJE

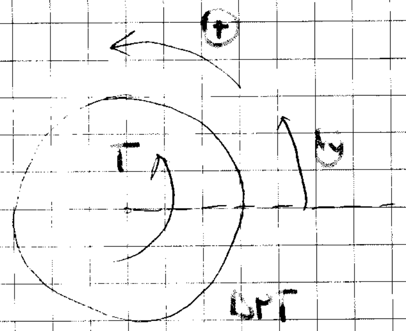
$\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}$

$\Theta \rightarrow$ kot

$\dot{\Theta} \rightarrow \omega \rightarrow$ kotna hitrost

$\ddot{\Theta} \rightarrow \alpha \rightarrow$ kotni pospešek

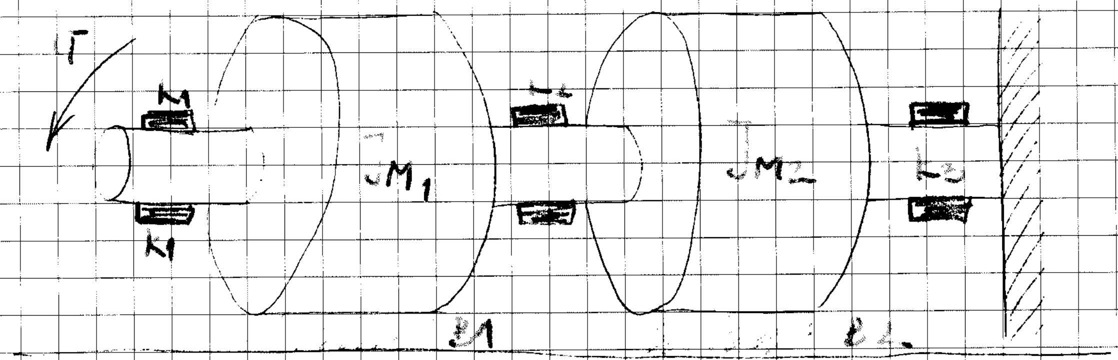
$$\boxed{\Gamma = J_M \cdot \alpha}$$



$\Gamma_G = I \cdot \alpha_G$

$$\boxed{\sum_i \Gamma_i = J_M \cdot \alpha = J_M \cdot \ddot{\Theta}}$$

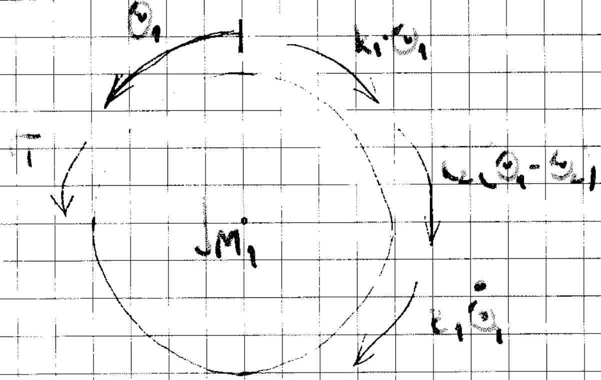
DIAGRAM PROSTIH TELES

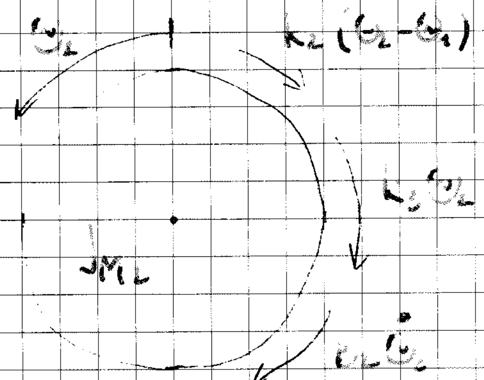


→ izvijanje = navor Γ

→ k_1, k_2, k_3 = koeficienti torzijske vzmeti

→ ℓ_1, ℓ_2 = dolžine





$$\boxed{\Gamma - k_1\Theta_1 - k_2(\Theta_1 - \Theta_2) - k_1\dot{\Theta}_1 = J_{M1} \cdot \ddot{\Theta}_1}$$

→ nehomogena linearna DE drugega reda [illegible]

$$\boxed{-k_2(\Theta_2-\Theta_1)-k_3\Theta_2-B_2\dot{\Theta}_2=J_{M_2}\ddot{\Theta}_2}$$

$$\boxed{\Theta_1(t),\ \Theta_2(t)}$$

⇒ rešujemo kot DE prvega reda !!!

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\dot{\Theta}_1\\ \omega_2&=\dot{\Theta}_2\end{aligned}\right\}$$ vstavimo v originalne enačbe

$$T-k_1\Theta_1-k_2(\Theta_1-\Theta_2)-B_1\omega_1=J_{M_1}\cdot\dot{\omega}_1$$

$$-k_2(\Theta_2-\Theta_1)-k_3\Theta_2-B_2\omega_2=J_{M_2}\cdot\dot{\omega}_2$$

$$\boxed{\Theta_1,\ \Theta_2,\ \omega_1,\ \omega_2}$$

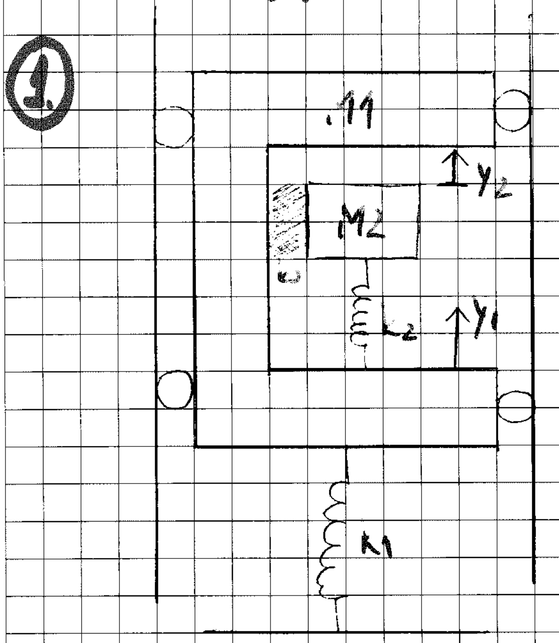
1. $\dot{\Theta}_1=\omega_1$
2. $\dot{\Theta}_2=\omega_2$
3. $\dot{\omega}_1=\frac{1}{J_{M1}}\left(\Theta_1(-k_1-k_2)+k_2\cdot\Theta_2-B_1\omega_1+T\right)$
4. $\dot{\omega}_2=\frac{1}{J_{M_2}}\left(k_2\Theta_1-(k_2+k_3)\Theta_2-B_2\omega_2\right)$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{\Theta}_1\\ \dot{\Theta}_2\\ \dot{\omega}_1\\ \dot{\omega}_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ -\frac{k_1+k_2}{J_{M_1}}&\frac{k_2}{J_{M_1}}&-\frac{B_1}{J_{M_1}}&0\\ \frac{k_2}{J_{M_2}}&-\frac{k_2+k_3}{J_{M_2}}&-\frac{B_2}{J_{M_2}}&0\end{bmatrix}}_{A}\cdot\begin{bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\\ \omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{J_{M_1}}\\ 0\end{bmatrix}}_{B}T$$

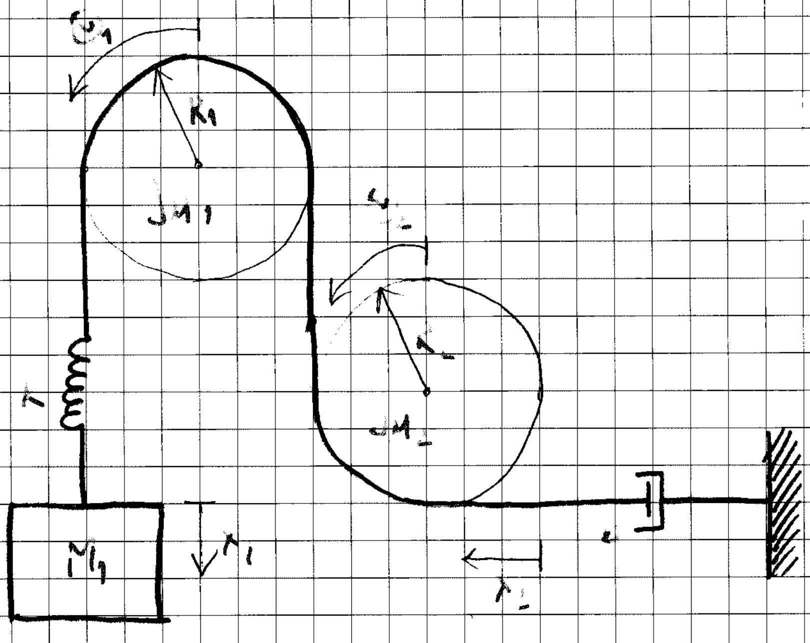
$$\boxed{\dot{x}=Ax+BT}\ -u$$

ZADOLŽITEV: Reši sistem!

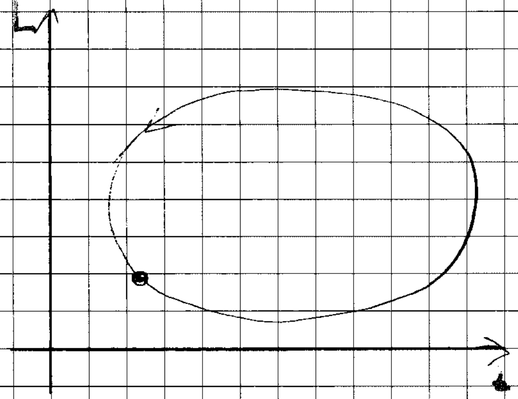
1.



2.



EKO SISTEM: lisice in zajci (plenilci in plen)



$L(t)$
$Z(t)$

Lotka-Volterra → avtorja tega sistema

$$\frac{dZ}{dt} = a\cdot Z - b\cdot L\cdot Z$$

$$\frac{dL}{dt} = -c\cdot L + \boxed{d\cdot Z\cdot L}$$

→ [illegible]

ENAČBA PLENA

ENAČBA PLENILCA

- [illegible]:
  - [illegible]
  - [illegible]
  - [illegible]
  - [illegible]
- [illegible]!
- [illegible]: $L(t)$, $Z(t)$ [illegible] $L(t)$, $Z(t)$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dt} = 0$$ → [illegible]

$$a\bar{Z} - b\cdot\bar{L}\cdot\bar{Z} = 0$$

$$-c\cdot\bar{L} + d\cdot\bar{L}\cdot\bar{Z} = 0$$

$$\bar{Z}(a - b\bar{L}) = 0$$

$$\bar{L}(-c + d\bar{Z}) = 0$$

[illegible] rešitvi

[illegible]:

$$\bar{L} = \frac{a}{b} = 20$$

$$\bar{Z} = \frac{c}{d} = 450$$

* [illegible]

→ na [illegible]

$a = 0.0$[illegible]
$b = 0.00$[illegible]
$c = 0.$[illegible]
$d = 0.$[illegible]002

RICHARDSON-ov MODEL OBOROŽEVALNE TEKME

- študijski model [illegible] vojne
- dve strani / [illegible]

A: $x_A(t) = $ [illegible] $x_A(t), x_B(t)$

B: $x_B(t) = $ [illegible]

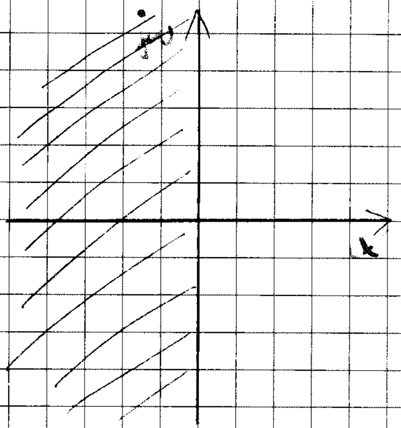
[illegible]

$$\frac{dx_A(t)}{dt} = -a x_A + b x_B + g \quad \rightarrow \text{vzbujanje ([illegible])}$$

$$\frac{dx_B(t)}{dt} = c x_A - d x_B + h$$

$a, b, c, d \rightarrow$ NEGATIVEN SISTEM (ker ni na desni strani)

- [illegible] sistem [illegible] [illegible] [illegible]



INVESTICIJSKI MODEL - Samuelson-ov model

- k gibanje kapitala glede na investicije
- $K(t)$ - celoten kapital, ki je v določenem trenutku na razpolago
- K_0 - kapital, ki [illegible] ([illegible] in [illegible])
- $\boxed{k(t) = K(t) - K_0}$
- $I(t)$ - investicije

→ prirast kapitala je v investicijah

$$\frac{dk(t)}{dt} = I(t)$$ neti

→ [illegible] investirati, [illegible]

$$\frac{dI(t)}{dt} = -[illegible](t) + \bar{I}(t)$$

$$\frac{d[illegible](t)}{dt} = \bar{I}(t)$$

DISKRETNI MODEL: SAMUELSON-OV MODEL NARODNEGA DOHODKA (BDP)

- ugotavlja se ga 4-krat letno (četrtletje)

$T = 3$ mesece

kT, $k = 0, 1, 2, \ldots$

k $y[k]$, $x[k]$

$$\boxed{y[k] = c[k] + i[k] + u[k]}$$

$y[k]$ .... narodni dohodek (BDP)

$c[k]$ .... izdatki potrošnikov

$i[k]$ ... investicije podjetij

$u[k]$ .... izdatki države

$c[k] = a \cdot y[k-1]$

$i[k] = b\left(c[k] - c[k-1]\right) \Rightarrow i[k] = b\left(a y[k-1] - a y[k-2]\right)$

$u[k] = K$ → konstantno

$$y[k] = a y[k-1] + b\left(a y[k-1] - a y[k-2]\right) + K$$

$$y[k] - (a + ab)\, y[k-1] + ab\, y[k-2] = K$$ → K kot neko vzbujanje (stopnica z amplitudo K)

DIFERENČNA ENAČBA 2. REDA

$y[k] = ?$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

→ potrebujemo še dve začetni stanji

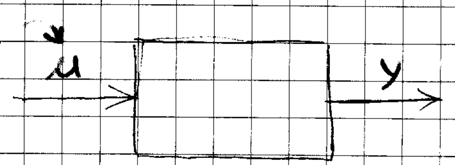
PRESLIKAVE MED MAT. MODELI

- znotraj enega sistema

PREVEDBA DIFERENCIALNE ENAČBE n-TEGA REDA V n-DIFERENCIALNIH ENAČB 1.-REDA

$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u}$$

- splošna nehomogena DE n-tega reda



$\boxed{m < n}$

$\dot{x}_1 =$
$\dot{x}_2 =$
$\vdots$
$\dot{x}_n =$

$$\boxed{\dot{x} = Ax + Bu}$$

preslikava ?

1. Primer, ko so odvodi vhodnega signala enaki 0

$$\frac{d^m u}{dt^m} = \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} = \dots = \frac{du}{dt} = 0$$

- Kako izberemo spremenljivke stanj?

$x_1 = y$

(n-1) enačb:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{y} \\ \dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{y} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n = y^{(n-1)} \\ \dot{x}_n &= y^{(n)} \end{aligned}}$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -a_0 y - a_1\dot{y} - \dots - a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + b_0 u$$

$$\boxed{\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + b_0 u}$$

SISTEM DE 1. REDA

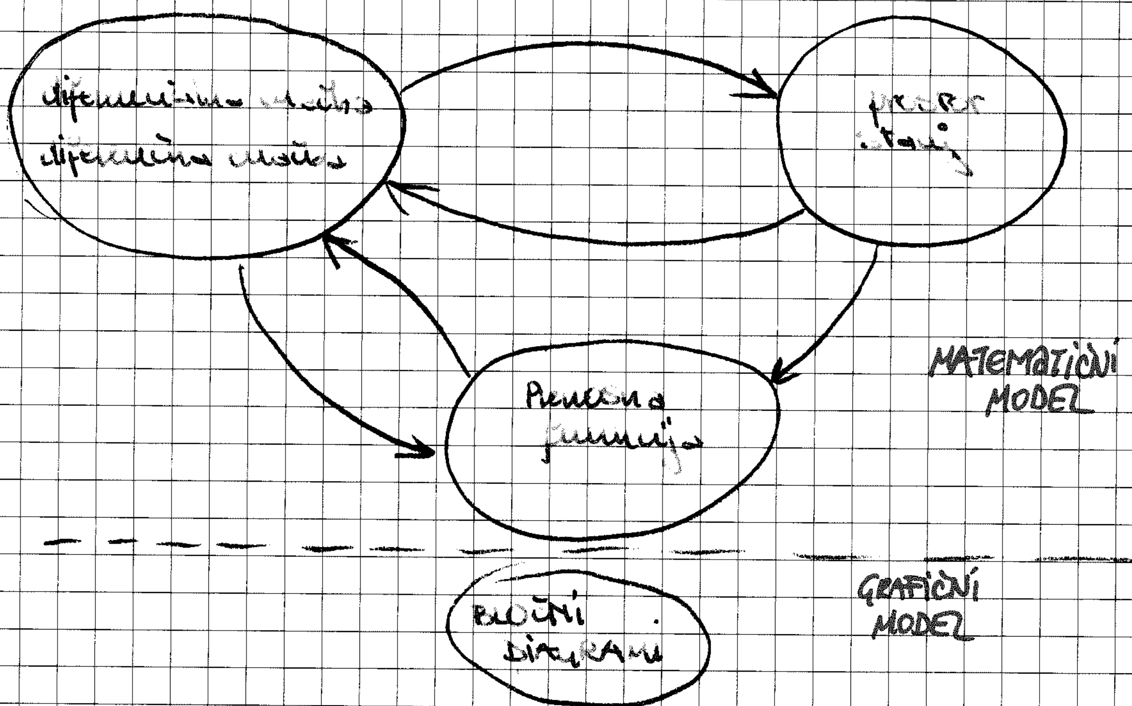
$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \vdots\\ \dot x_n\end{bmatrix}}_{\dot x} = \underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\ &&\vdots&&\\0&0&0&\dots&1\\ -a_0&-a_1&\dots&\dots&-a_{n-1}\end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\b_0\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{u}_{u}$$

$\boxed{\dot x = Ax + Bu}$ $\boxed{y = Cx}$ x – spremenljivke stanj

matrični enačbi prostora stanj

$y = x_1$

$y = \underbrace{[1\ 0\ \dots\ 0]}_{C}\, x$



$\boxed{\begin{aligned} x[k+1] &= A\cdot x[k] + B\cdot u[k] \\ y[k] &= C\cdot x[k] \end{aligned}}$ za diskretne sisteme

- za linearne in časovno nespremenljive sisteme
- v splošnem: $\dot x = f(x, u, t)$
  $\dot x = f(x, u) \rightarrow$ časovno nespremenljivi sistemi

$\dot{x} = Ax + Bu \rightarrow$ linearni in časovno nespremenljivi sistemi

Zgled:

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 7u$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x_1 = y$$
$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{y}$$
$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{y}$$
$$\dot{x}_3 = \dddot{y} = \ldots$$

$$\dddot{y} = -y - 4\dot{y} - 3\ddot{y} + 7u$$

$$\boxed{\dot{x}_3 = -x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 7u}$$

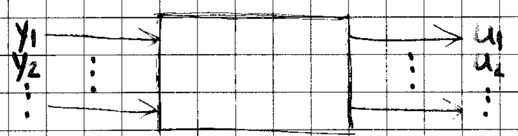
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = Cx$$

SISTEM Z VEČJIM ŠTEVILOM VHODOV in IZHODOV



Primer:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 &= 4u_1 - 2y_2 \\ \ddot{y}_2 + y_2 &= 5u_2 - \dot{y}_1 \end{aligned}\right\}$$

modeliramo sistem z dvema DE (dva vhoda in dva izhodna signala)

$$x_1 = y_1 \qquad x_3 = y_2$$
$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{y}_1 \qquad \dot{x}_3 = x_4 = \dot{y}_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{y}_1 \qquad \dot{x}_4 = \ddot{y}_2$$

$$\dot{x}_2 + 3x_2 = 4u_1 - 2x_3$$
$$\dot{x}_4 + x_3 = 5u_2 - x_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

PRIMER:

$$\left.\begin{aligned} \ddot y_1 + 2\int y_1\,dt &= 4u_1 - 2y_2 \\ \ddot y_2 + y_2 &= 5u_2 - \dot y_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot x = Ax + Bu$$

a) $\dddot y_1 + 2y_1 = 4\dot u_1 - 2\dot y_2$ odvajamo

b) $\int y_1\,dt = x_1$ Boljše je ni odvodov vhodnega signala ⇒ integral kot stanje kot spremenljivka

$\dot x_1 = y_1 = x_2$

$\boxed{\text{za DN}}$

⇒ kaj če imamo še odvode vhodnega signala?

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u$$

$\boxed{m < n}$

$\dot x = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$?

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = u$ → Ni smo upoštevali vse odvode vhodnega signala

$\dot x = Ax + Bu$

$x_1 = y$

$\dot x_1 = x_2 = \dot y$

⋮

$\dot x_{n-1} = x_n = y^{(n-1)}$

$\dot x_n = y^{(n)} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$\rightarrow x_1^{(n)} + a_{n-1} x_1^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x}_1 + a_0 x_1 = u \quad / \frac{d}{dt}$ n-krat odvajamo

$x_1^{(n+1)} + a_{n-1} x_1^{(n)} + \dots + a_0 \dot{x}_1 = \dot{u}$

$\rightarrow x_2^{(n)} + a_{n-1} x_2^{(n-1)} + \dots + a_0 x_2 = \dot{u} \quad / \frac{d}{dt}$

$x_2^{(n+1)} + a_{n-1} x_2^{(n)} + \dots + a_0 \dot{x}_2 = \ddot{u}$

$\dot{x}_2 = x_3$

$\rightarrow x_3^{(n)} + a_{n-1} x_3^{(n-1)} + \dots + a_0 x_3 = \ddot{u}$

$\vdots$

zadnji:

$\rightarrow \boxed{x_{m+1}^{(n)} + a_{n-1} x_{m+1}^{(n-1)} + \dots + a_0 x_{m+1} = u^{(m)}}$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + \boxed{a_0 y} = b_m \left(x_{m+1}^{(n)} + a_{n-1} x_{m+1}^{(n-1)} + \dots + \boxed{a_0 x_{m+1}} \right) + \dots + b_1 \left(x_2^{(n)} + \dots + \boxed{a_0 x_2} \right) + b_0 \left(x_1^{(n)} + \dots + \boxed{a_0 x_1} \right)$$

$\underline{y = b_m x_{m+1} + \dots + b_1 x_2 + b_0 x_1}$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$(m < n) \rightarrow$ zato so tu še ničle

Zgled: $\dddot{y} + 2\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 2\ddot{u} + 5\dot{u} + 7u$

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

PRENOSNA FUNKCIJA

- Kako se vhodni signal preslika v izhodni signal (karakteristika sistema), katerih ne vplivajo začetna stanja,

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{prenosna funkcija}} \longrightarrow y(t)$$

$$\begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \vdots \end{matrix} \boxed{\text{Matrika prenosnih funkcij}} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \vdots \\ \longrightarrow \end{matrix}$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_0 u \quad / \mathcal{L}$$

$$\frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]} = \boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s)}$$ → pri enem vhodu in enem izhodu

$$\boxed{Y(s) = H(s) \cdot U(s)}$$ → velja ne glede na to ali se to skalarji ali matrike

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_0) U(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)}}$$

- Ločimo dva primera

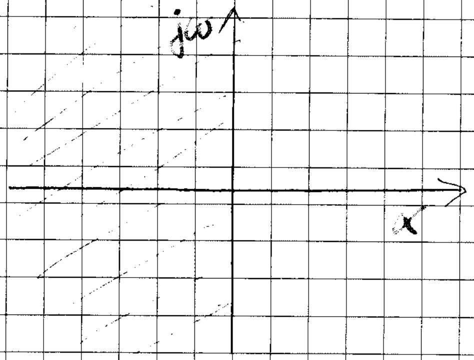
$$Q(s) = s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

karakteristični oz. značilni polinom

karakteristična oz. značilna enačba

⇒ koreni enačbe: $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ⇒ v splošnem kompleksni

rešujemo stabilnost



→ če je samo en koren na desni strani ⇒ nestabilen sistem

$$y = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}\right| \mathcal{L}$$

kako dobimo iz tega prenosne funkcije?

$$sX(s) = A\cdot X(s) + B\cdot U(s)$$

$$Y(s) = C\cdot X(s) + D\cdot U(s)$$

$$s\cdot X(s) - A\cdot X(s) = B\cdot U(s)$$

$$(s\cdot I - A)\,X(s) = B\cdot U(s) \quad \Big/ \,(sI - A)^{-1}$$

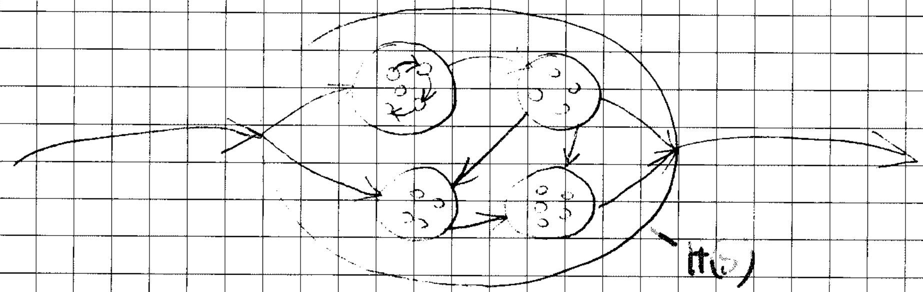
$$X(s) = (s\cdot I - A)^{-1}\cdot B\cdot U(s)$$

$$Y = \underbrace{\left(C\cdot(sI - A)^{-1}\cdot B + D\right)}_{\text{prenosna funkcija}} U$$

$$\boxed{H(s) = C\,(sI - A)^{-1} B + D}$$; pogosto $D = 0$

BLOČNI DIAGRAMI

- Sistem je pogosto sestavljen iz preprostejših podsistemov, ki so sestavljeni iz osnovnih komponent.



- zanima nas tudi, kako se podsistemi obnašajo (sestavljeni so iz komponent ali sistemi)

$H(s)$

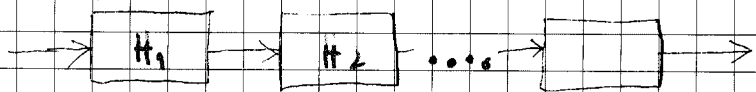
$H_1(s), H_2(s), \dots, H_n(s)$

$H_{11}, \dots, H_{1m}(s)$

- Na kakšen način lahko osnovne komponente povezujemo?
- Kaj se dogaja s prenosnimi funkcijami pri različnih povezavah?

ZAPOREDNA

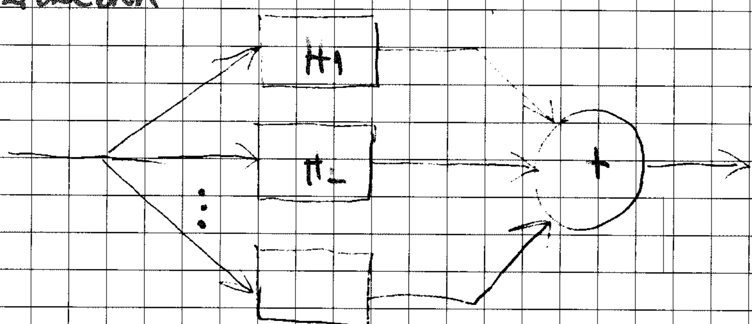
$H(s) = H_1 \cdot H_2 \cdot \dots$



→ množenje prenosnih funkcij

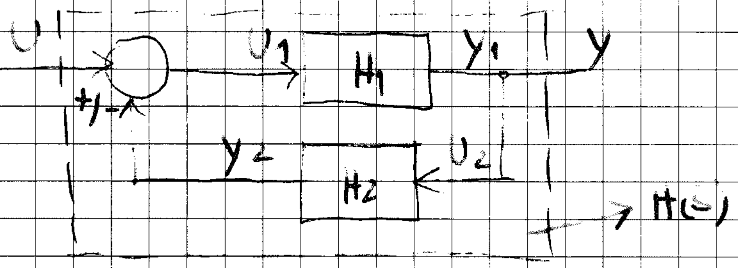
VZPOREDNA

$H(s) = H_1 + H_2 + \dots$



→ seštevanje prenosnih funkcij

POVRATNA ZANKA



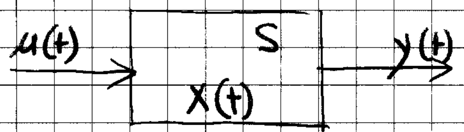
$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$

$Y = Y_1 = H_1 U_1 = H_1(U \pm Y_2) = H_1(U \pm H_2 U_2) = H_1(U \pm H_2 Y)$

$Y \mp H_1 H_2 Y = H_1 U$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s) H_2(s)}}$$

III.



① $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots = b_m \frac{d^m u}{dt^m} \Rightarrow y(t) = ? \quad y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$

→ upoštevamo n-začetnih stanj

PRENOSNA FUNKCIJA

- zvezen sistem: DE višjega reda
- z upeljavo novih spremenljivk pridemo do sistema DE prvega reda

$x_1 = y$

$\vdots$

② $\dot{x} = Ax + Bu$ začetna stanja $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$

$y = Cx + Du$ / $\mathcal{L}$ (Laplaceova transformacija)

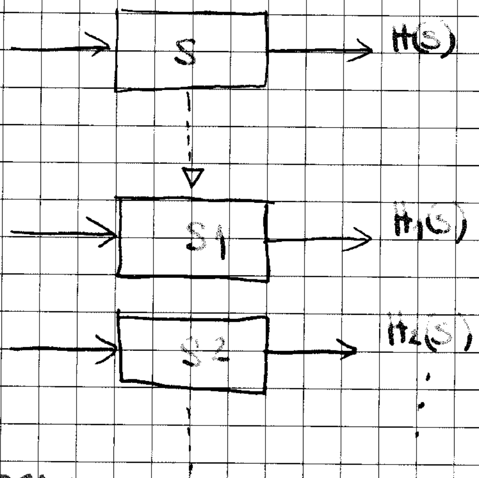
$$\boxed{H(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}}$$ → dva polinoma

$Y(s) = U(s) \cdot H(s)$

$Q(s) \rightarrow$ ZNAČILNI ali KARAKTERISTIČNI polinom

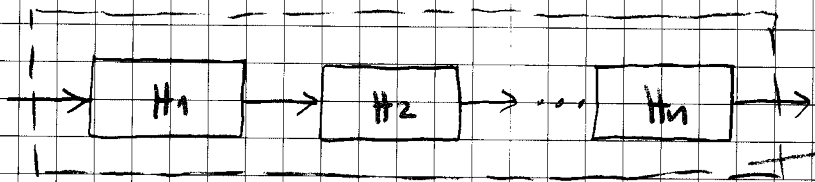
$Q(s) = 0 \Rightarrow s_1, s_2, \ldots, s_n$ KORENI

- dva načina modeliranja: DE višjega reda, sistem DE prvega reda
- prenosne funkcije: vhodni signal preslikajo v izhodni
- za lažjo obdelavo razdelimo v podsisteme



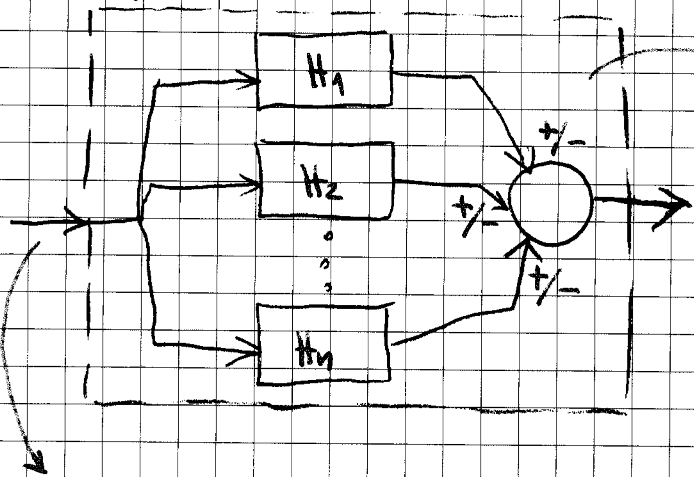
$\rightarrow$ kombinacija prenosnih funkcij podsistemov

1 ZAPOREDNO



$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot \ldots \cdot H_n(s)$

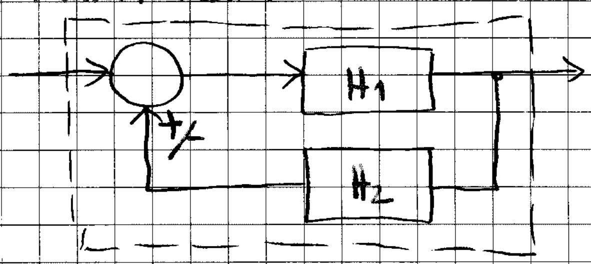
2 VZPOREDNO



$H(s) = \pm H_1(s) \pm H_2(s) \pm \ldots \pm H_n(s)$

isti vhod peljemo na vse podsisteme

③ POVRATNA ZANKA



$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s)\, H_2(s)}$$

$$\boxed{H_i(s) = \frac{Y_i(s)}{U_i(s)}}$$

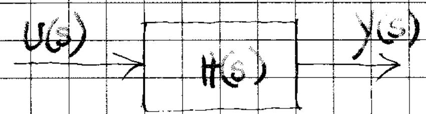
BLOČNI DIAGRAMI

⇒ Sistemi so ponavadi sestavljeni iz večjega števila komponent. Za študij vpliva posameznih komponent ali skupine komponent na obnašanje sistema se pogosto uporabljajo bločni diagrami. Z uporabo ustreznih pravil lahko bločne sheme poenostavimo in s tem pridemo iz kompleksnih shem do povezav, ki jasneje kažejo prispevek posameznih komponent na celotno obnašanje sistema.

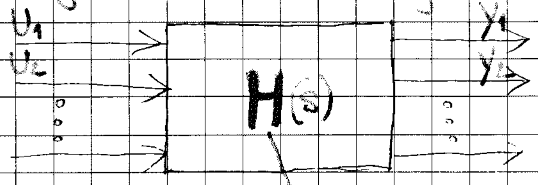
Bločni diagrami pokazujejo dinamično obnašanje sistema, ne vsebujejo pa informacije o fizikalni zgradbi sistema.

Vsak sistem je mogoče opisati z bločnim diagramom na različne načine.

→ Poljubna delitev na podsisteme → dobimo različne bločne sheme



→ bločni diagrami lahko imajo tudi več vhodov in izhodov



prenosna funkcija je MATRIKA!

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots \\ \vdots & & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

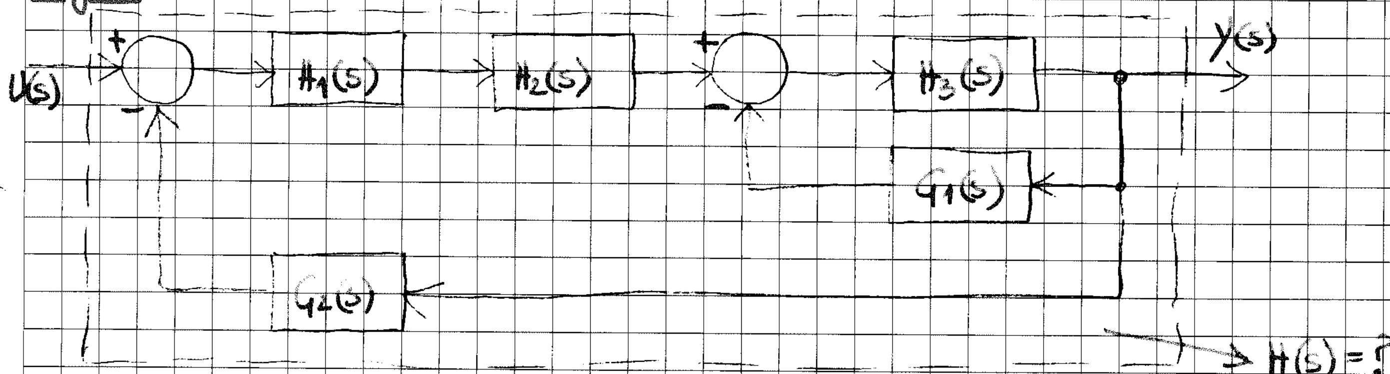
→ kako se katerikoli od vhodnih signalov preslika v enega izmed izhodnih

$$\boxed{H_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}}$$

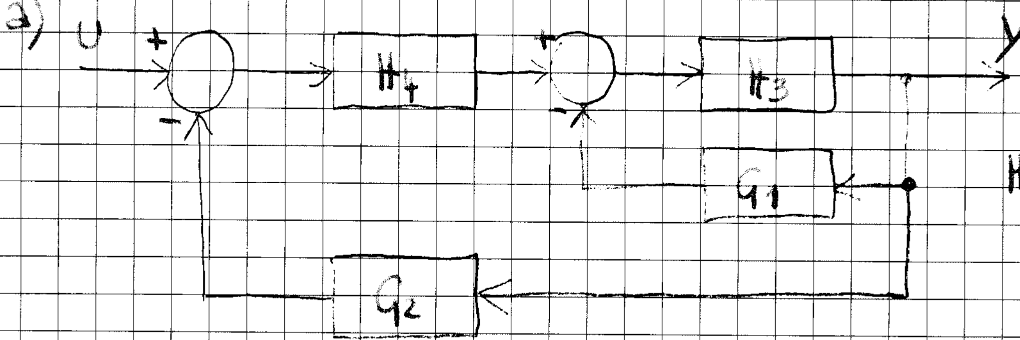
⇒ Največkrat so bločni diagrami za linearne sisteme, ki so tudi najpogostejši.

⇒ Bločni diagrami niso omejeni na samo na linearne sisteme.

Zgled:

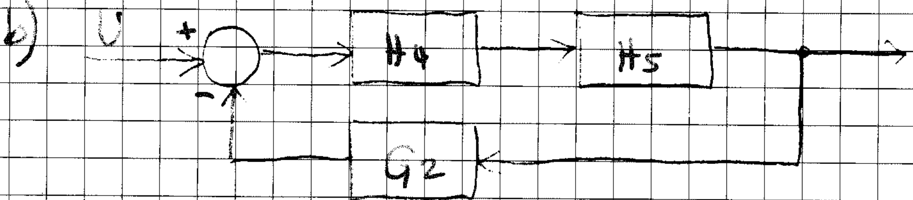


a)



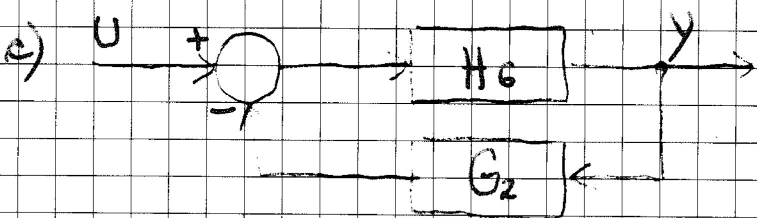
$$H_4 = H_1 \cdot H_2$$

b)



$$H_5 = \frac{H_3}{1 + H_3 G_1}$$

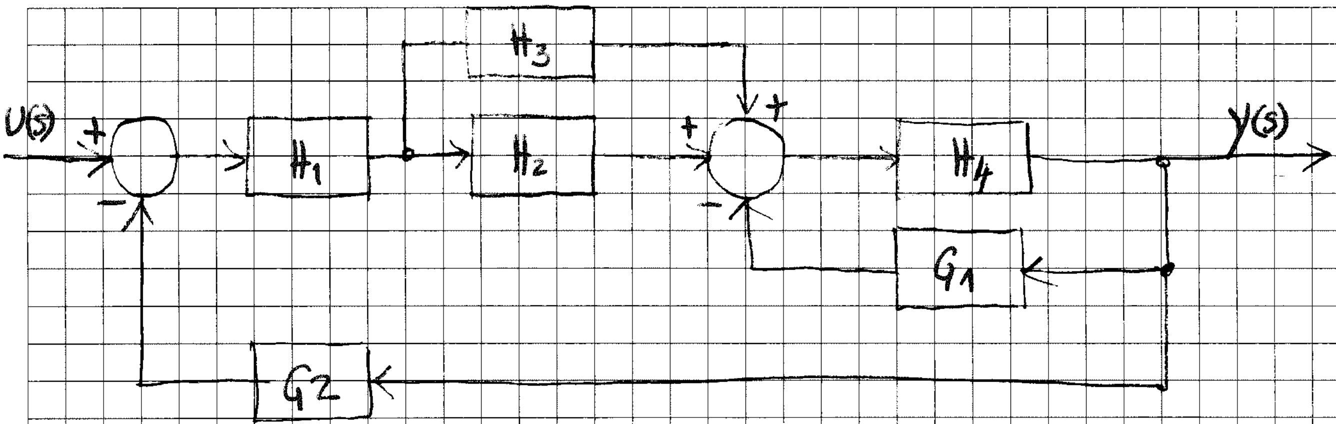
c)

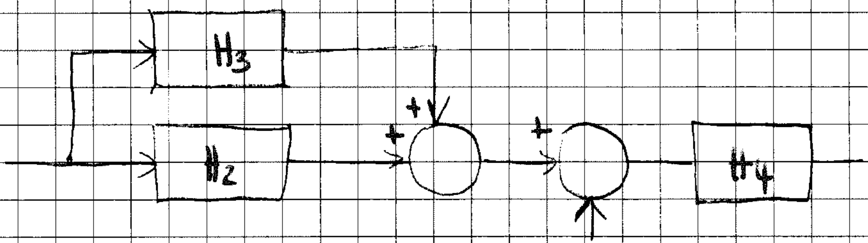


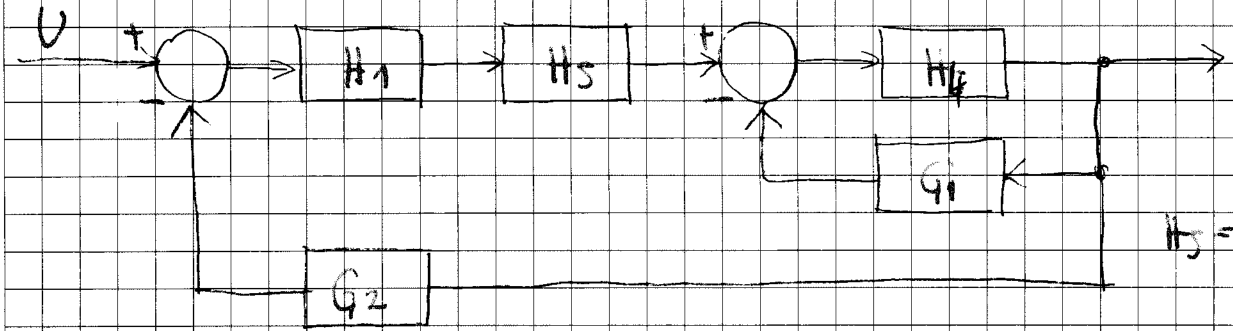
$$H_6 = H_4 \cdot H_5$$

$$\boxed{H = \frac{H_6}{1 + H_6 \cdot G_2}}$$

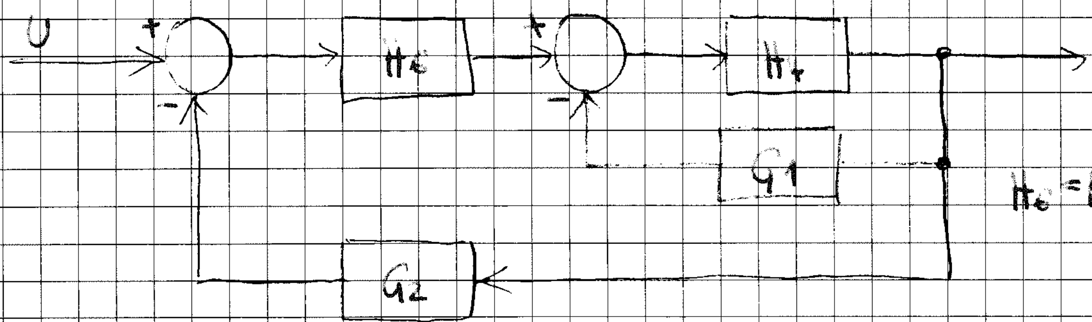
$$\boxed{H(s) = \frac{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3}{1 + H_3 \cdot G_1 + H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot G_2}}$$



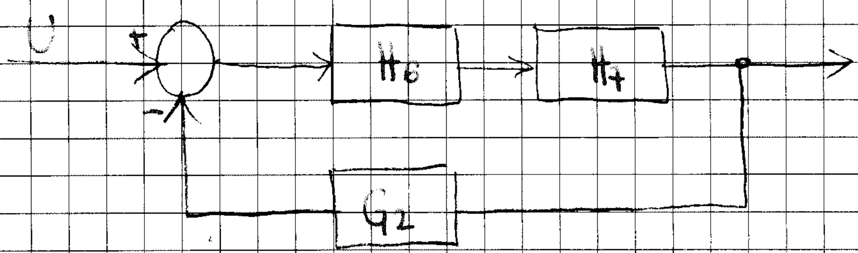




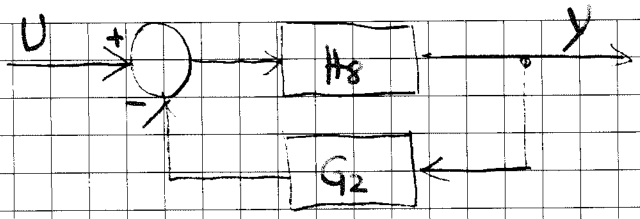
$H_5 = H_2 + H_3$



$H_6 = H_1 \cdot H_5$



$$H_7 = \frac{H_4}{1 + H_4 \cdot G_1}$$



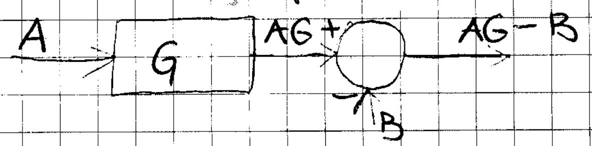
$H_8 = H_6 \cdot H_7$

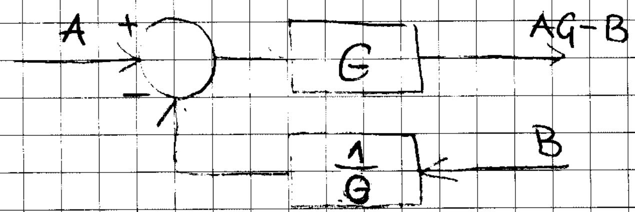
$$\boxed{H(s) = \frac{H_8}{1 + H_8 G_2}}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{H_1 \cdot H_4 (H_2 + H_3)}{1 + H_4 G_1 + H_1 H_4 G_2 (H_2 + H_3)}}$$

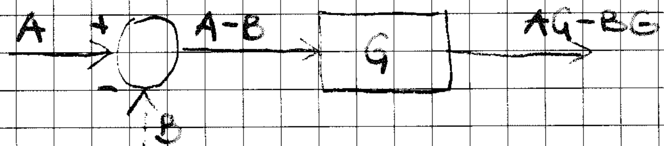
PRAVILA ALGEBRE BLOČNIH SHEM

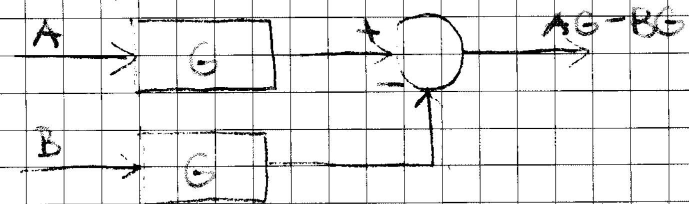
① premik sumacije pred blok



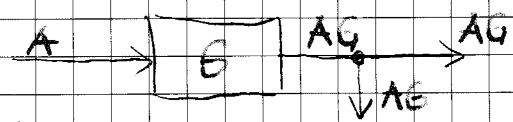


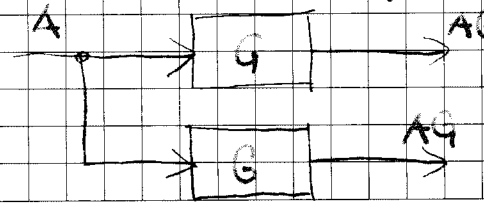
② premik seštevalnika za blok



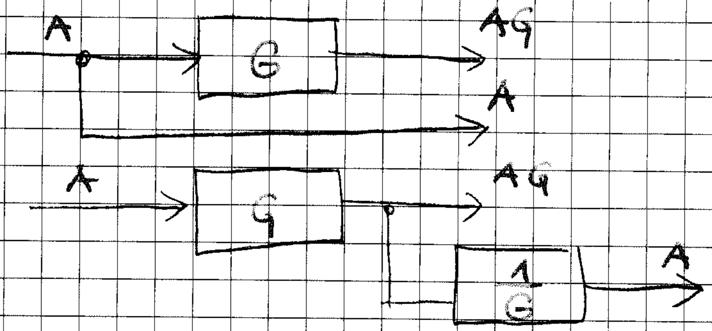


③ premik razcepišča pred blok

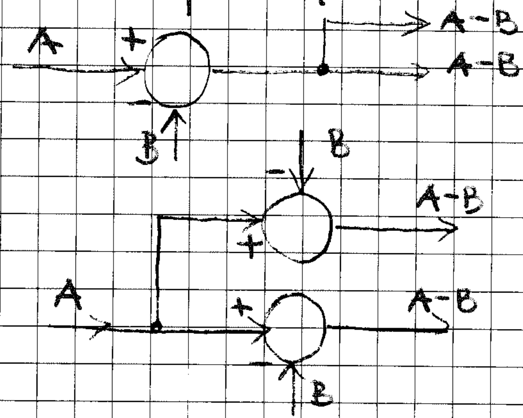




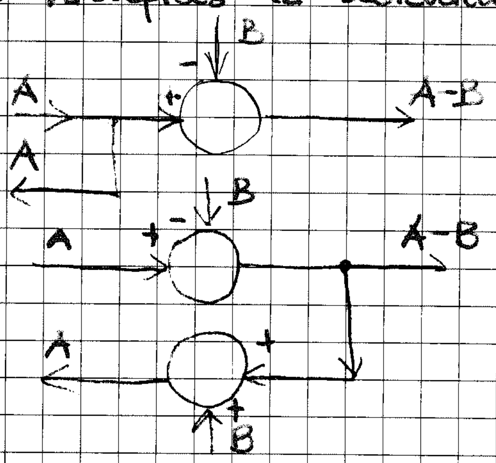
4. premik razcepišča za blok



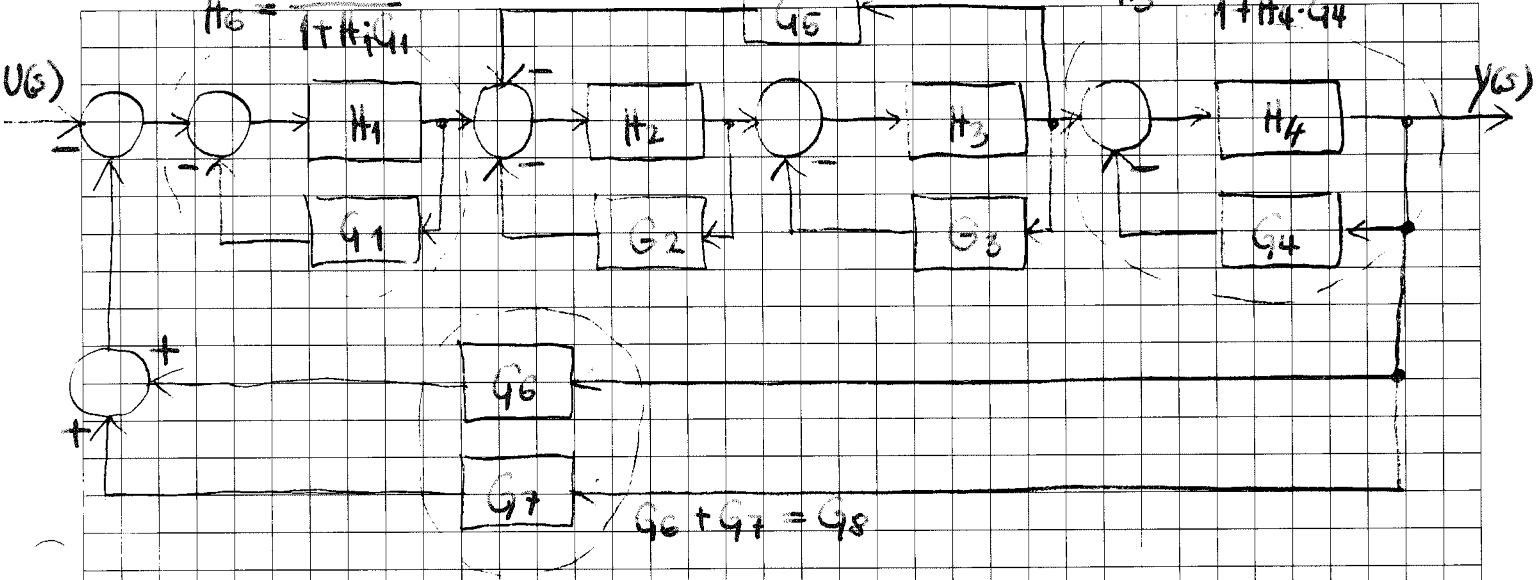
5. premik razcepišča pred seštevalnik



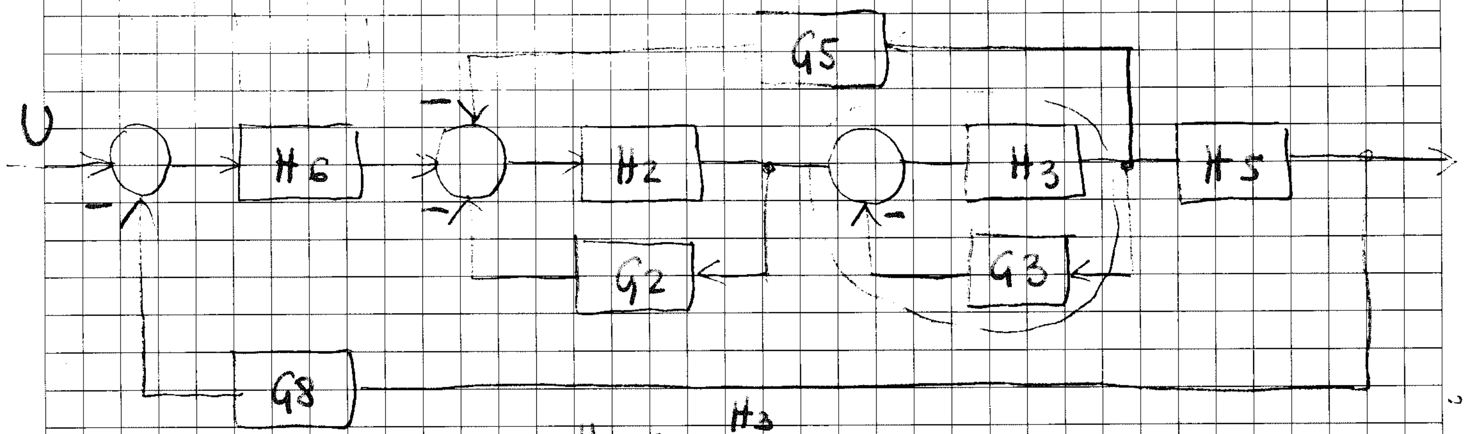
6. premik razcepišča za seštevalnik



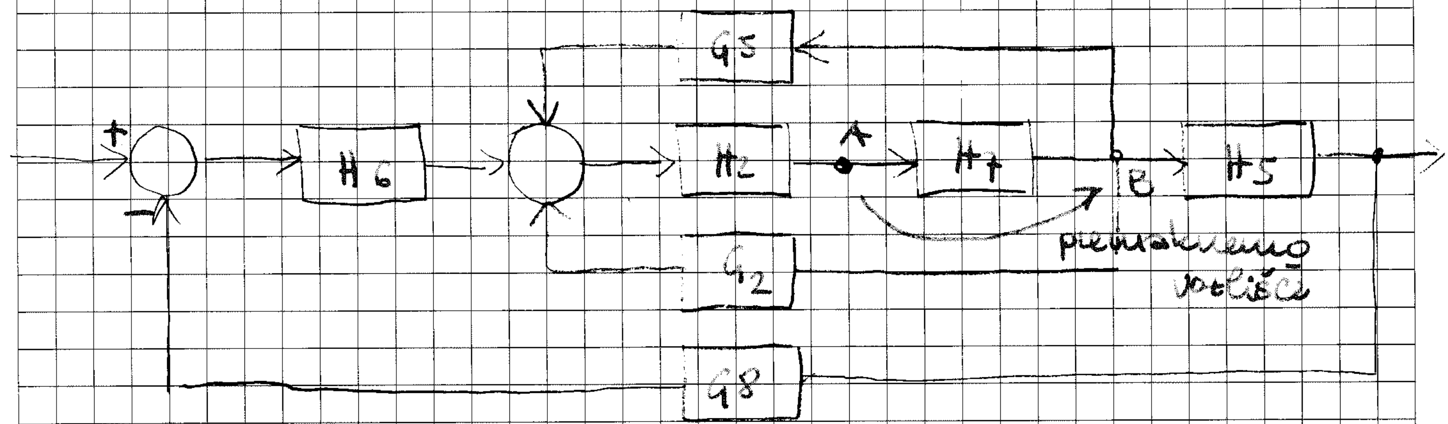
$$H_6 = \frac{H_1}{1+H_1G_1} \qquad H_5 = \frac{H_4}{1+H_4\cdot G_4}$$



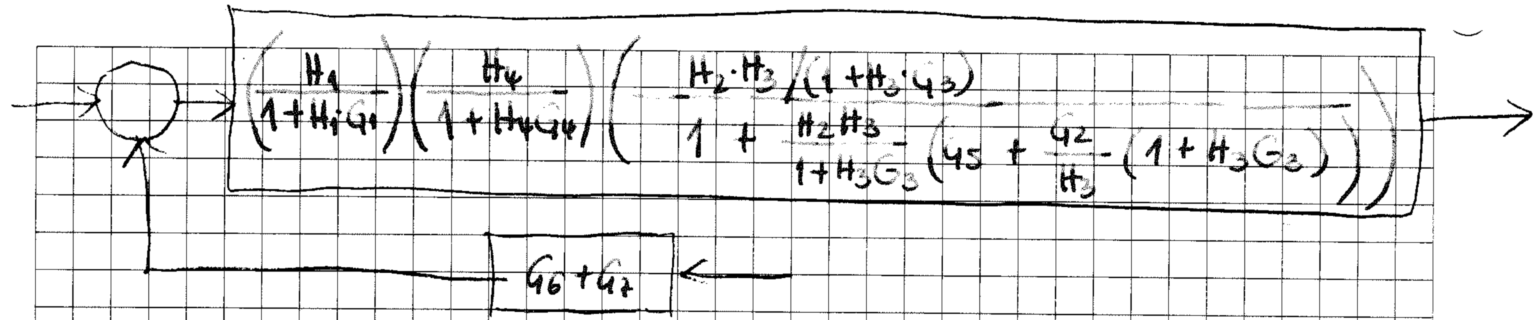
$$G_6 + G_7 = G_8$$

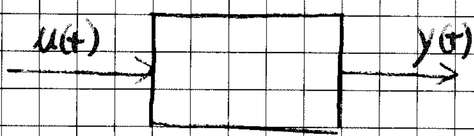


$$H_7 = \frac{H_3}{1+H_3G_3}$$



- razcepišče A smo premaknili v razcepišče B po pravilu premika razcepišča za blok

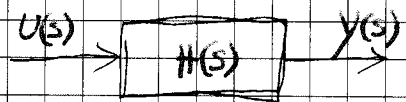




⇓ bločna shema

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\dots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=b_m\frac{d^m u}{dt^m}+\dots+b_1\frac{du}{dt}+b_0u \quad \Big|\ \mathcal{L}$$

$$H(s)=\frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]}=\frac{P(s)}{Q(s)}$$



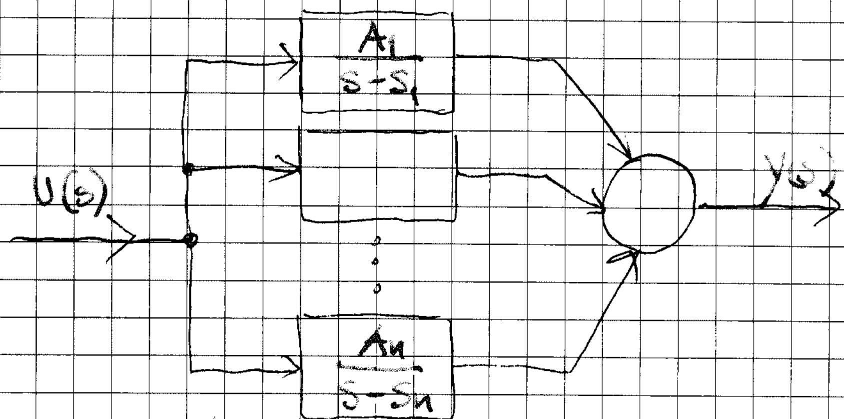
$Q(s)=0$

↓ $s_1, s_2, \dots, s_n$

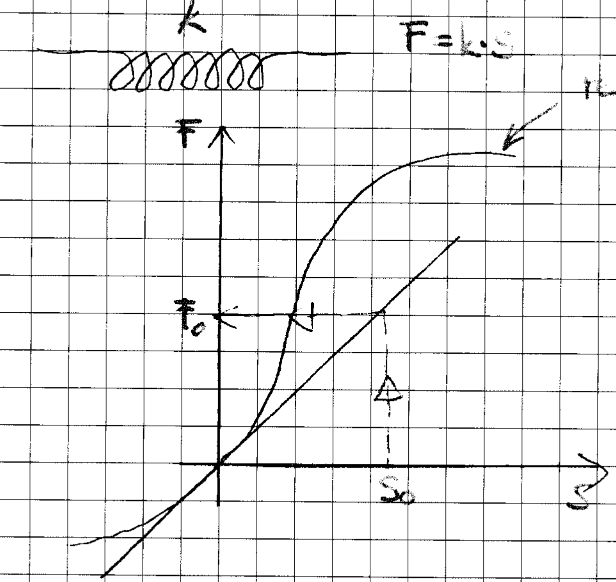
razdamo v parcialne ulomke

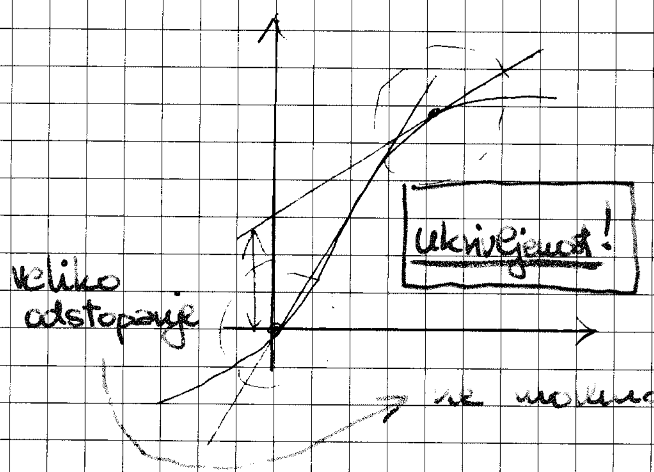
$$\frac{P(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\dots$$

→ vsak parcialni ulomek je prenosna funkcija (ker je + med njimi je to vzporedna vezava)



IV. LINEARIZACIJA NELINEARNIH SISTEMOV





→ nelinearna karakteristika

⇒ LINEARIZIRAMO: iščemo najboljšo aproksimacijo

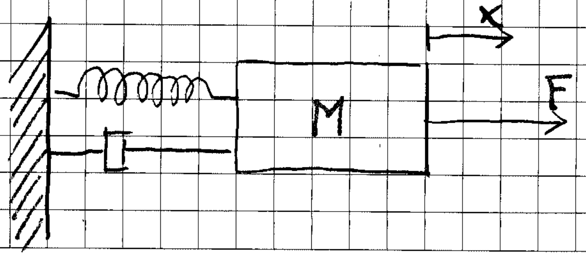
⇒ TANGENTA je najboljša aproksimacija v neki točki

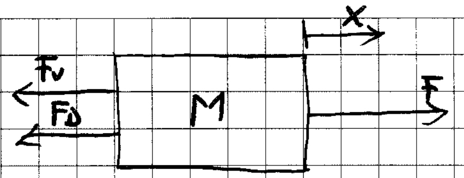
→ ne moremo z eno premico dobro aproksimirat

→ izbira DELOVNE TOČKE: poenostavitev bo dobra v nekem področju okoli delovne točke

→ pomembno je kje izberemo delovno točko in na kakšnem območju okrog delovne točke velja predpostavka linearnosti

1. UVOD





$F_v = k \cdot x^2$

$F_D = b \cdot \dot{x}$

$F - F_v - F_D = M \cdot a = M \cdot \ddot{x}$

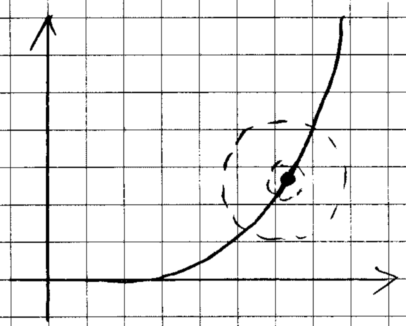
$\boxed{M\ddot{x} + b\dot{x} + kx^2 = F}$ x^2!!! → enačba 2. reda, nehomogena in nelinearna

$\Downarrow$

$$M\ddot{\hat{x}} + b\dot{\hat{x}} + k\hat{x} = F$$

- Linearizacija predstavlja zamenjavo nelinearnih matematičnih izrazov z linearnimi.
- V praksi izvorno linearni sistemi in s tem matematični modeli ne obstajajo. Zato je linearizacija pogosto uporabljen postopek. Razlogi za linearizacijo so predvsem naslednji:

1. Za ozka področja okoli delovne točke se linearizirani model obnaša podobno kot nelinearni model



2. obravnava linearnih modelov (matematičnih izrazov) je že dobro vpeljana, na voljo pa je tudi veliko računalniških orodij.

3. SUPERPOZICIJA. Linearni matematični modeli omogočajo uporabo superpozicije. Ta pa omogoča analizo sistemov na osnovi standardnih vhodnih signalov in delitev sistemov glede na njihove dinamične lastnosti

4. Pri linearnih sistemih je stabilnost lastnost procesa in ni odvisna od začetnih pogojev, zato je analiza stabilnosti enostavna.

$Q(s) = 0$ → karakteristična enačba

$s_1, s_2, s_3, \ldots$ → koreni (kje ležijo!!!)

- Pri nelinearnih sistemih niso možne splošne metode in pristopi. Vsak nelinearni sistem namreč vsebuje drugačno nelinearnost, ki zahteva potrebno metodo po reševanju.

  x^2, $\log x$, ...

- Nezmožnost enovitega pristopa reševanja nelinearnih izrazov je vodila v linearizacijo.

- Močen in učinkovit postopek obravnave nelinearnih modelov pa je računalniška simulacija.

- Nelinearnosti so lahko izražene analitično ali pa v obliki standardnih nelinearnosti (mrtva območja, histereze, nasičenja, ...)

2. LINEARIZACIJA (nelinearnih sistemov)

nelinearni matematični izraz preslika v linearni matematični izraz

$\boxed{1}$ METODA TANGENTNE APROKSIMACIJE

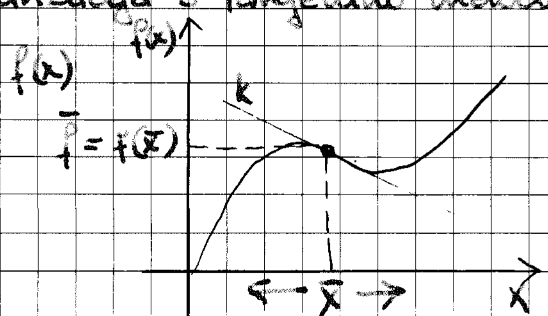
$\boxed{2}$ METODA HARMONIČNE LINEARIZACIJE

- nelinearni sistem vzbudimo s harmoničnim signalom (sinusoida)
- odziv bo dan z ustrezno Fourierovo vrsto
- z zanemaritvijo enosmerne komponente in višjih harmonskih komponent odziv aproksimiramo samo z osnovno harmonsko komponento

- in razmerje tega približnega odziva in vzbujanja predstavlja opisno funkcijo (kot prenosna funkcija pri linearnih sistemih)

$\boxed{3}$ METODA STATIČNE LINEARIZACIJE V ČASOVNEM PROSTORU, kjer nelinearni model zamenjamo z linearnim

$\boxed{1}$ linearizacija s tangentno metodo



- PREDPOSTAVIMO: ima vse odvode na nekem intervalu, ki vsebuje tudi točko $\bar{x}$ (ta točka določa delovno točko)

→ Taylorjeva vrsta

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(x)\Big|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x}) + \frac{f''(x)}{2!}\Big|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x})^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Big|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x})^n + \ldots$$

→ neskončna vrsta

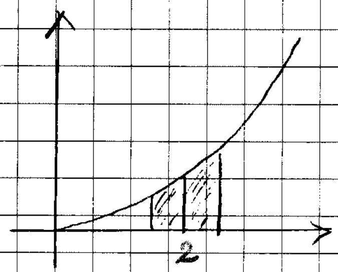
$(x-\bar{x})$ .... majhna vrednost

če sta si x-a blizu je ta razlika majhna → višje potence teh razlik so še manjše ⇒ te vrednosti lahko zanemarimo

$$\boxed{f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(x)\Big|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x})}$$

$f(x) \approx f(\bar{x}) + k(x-\bar{x})$ → LINEAREN ZAPIS / IZRAZ

ZGLED $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$; $\bar{x} = 2$; največja relativna napaka na nekem področju $x \in [1'5, 2'5]$



$$\boxed{\delta(x) = \frac{f(x) - \text{aproks}}{f(x)}}$$

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(x)\Big|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x}) \quad ; \quad \bar{x} = 2$$

$$f(\bar{x}) = \bar{f} = \frac{8}{3}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)\Big|_{x=\bar{x}} = f'(\bar{x}) = \frac{28}{9}$$

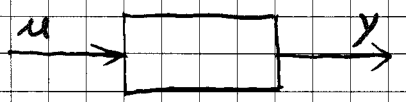
$$f(x) \approx \frac{8}{3} + \frac{28}{9}(x-\bar{x}) = \frac{8}{3} + \frac{28}{9}(x-2)$$

$$\boxed{f(x) \approx \frac{28}{9}x - \frac{32}{9}}$$

$$\delta(x) = \frac{\frac{x^3}{x+1} - \left(\frac{28}{9}x - \frac{32}{9}\right)}{\frac{x^3}{x+1}} = \frac{9x^3 - 28x^2 + 4x + 32}{9x^3}$$

→ največja napaka: iščemo minimume in maksimume (minimum v $\bar{x}$)

PRIMER



- relacijo med odzivom in vzbujanjem opisuje DE

$\ddot{y}, \dot{y}, y, u, \dot{u}$

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_1\dot{u} + b_0 u$$

$$h(y,\dot{y},\ddot{y},u,\dot{u}) = 0$$

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y - b_1\dot{u} - b_0 u = 0$$

$$X = [y\ \dot{y}\ \ddot{y}\ u\ \dot{u}]^T$$

$$\boxed{h(x)=0}$$

- Določimo delovno točko, okoli katere bomo linearizirali:

D.T. $\bar{x} = ?$

- Kako delovno točko izberemo?

→ Ker imamo DE bomo linearizirali okoli rešitev, ki so konstantne. Linearizacija je namreč aproksimacija, ki velja samo na področju, ki je blizu delovne točke. Ker je $\bar{x}$ rešitev, velja da je:

$$\boxed{h(\bar{x}) = 0}$$

$$\bar{x} = [\bar{y}\ 0\ 0\ \bar{u}\ 0]$$

→ v D.T. so prvi in vsi nadaljnji odvodi enaki nič

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(x)\big|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x})$$

$$0 = h(x) \approx h(\bar{x}) + h'(x)\big|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x})$$

x ... skalar

→ če ni skalar in imamo vektor

$$0 = h(x) \approx h(\bar{x}) + \nabla h(x)\big|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x})$$

x ... vektor

$$h(\bar{x}) = 0$$

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\nabla h(x)\Big|_{x=\bar{x}} (x-\bar{x}) = 0$$

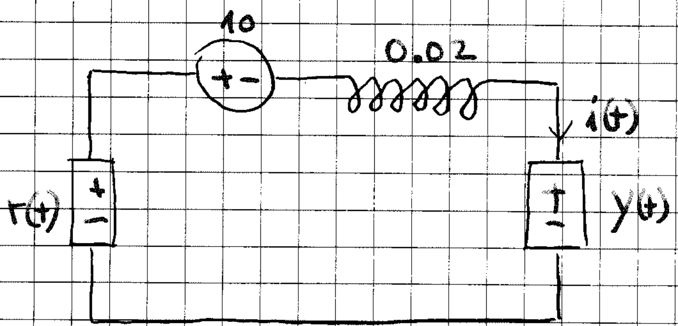
$$\hat{x} = x - \bar{x}$$

$$\hat{x} = [\hat{y}\ \dot{\hat{y}}\ \ddot{\hat{y}}\ \hat{u}\ \dot{\hat{u}}]$$

$$\nabla h(x)\Big|_{\bar{x}} (x-\bar{x}) = \frac{\partial h_1}{\partial y}\Big|_{\bar{x}} \cdot \hat{y} + \frac{\partial h_1}{\partial \dot{y}}\Big|_{\bar{x}} \dot{\hat{y}} + \frac{\partial h_1}{\partial \ddot{y}}\Big|_{\bar{x}} \ddot{\hat{y}} + \frac{\partial h_1}{\partial u}\Big|_{\bar{x}} \hat{u} + \frac{\partial h_1}{\partial \dot{u}}\Big|_{\bar{x}} \dot{\hat{u}} = 0$$

→ LINEARNA ENAČBA

$\boxed{\text{ZGLED}}$



$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}}$$ → to dobimo le v primeru, da je sistem linearen

$y(t) = 5 \cdot i(t) + 20 \cdot i^3(t)$ ⇒ LINEARIZIRAMO

$y(t) = r(t) + 10 + 0.02 \cdot \frac{di}{dt} = 0$ } linearizirajmo

$\bar{i} = 1A$ $\quad \bar{r} = \bar{y} + 10$

$\bar{y} = 0.52V$

$5 \cdot i + 20 \cdot i^3 - y = 0$

$h_1(x) = 0$

→ $h_1(y, i) = 0$

$h_2(y, r, \frac{di}{dt}) = 0$

$$h_1(y,i) = 0 \approx \overset{\to 0}{h_1(0.52, 0.1)} + \frac{\partial h_1}{\partial y_1}\Big|_{d.t.} \hat{y} + \frac{\partial h_1}{\partial i}\Big|_{d.t.} \hat{i}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial y}\Big|_{d.t.} = -1$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial i}\Big|_{d.t.} = 5 + 60 i^2\Big|_{d.t.}$$

$$h_1(y,i) \approx 0 - \hat{y} + 5\hat{i} + 60\bar{i}^2 \cdot \hat{i}$$

$\bar{i} = 0.1$

$$\boxed{h_1(y,i) = -\hat{y} + 5.6\cdot\hat{i} = 0} \quad /\mathcal{L}$$

$$h_2\left(y,r,\frac{di}{dt}\right) \approx \underbrace{h_2(0.52,\ 10,\ 52,\ 0)}_{0} + \frac{\partial h_2}{\partial y}\Big|_{d.t.}\hat{y} + \frac{\partial h_2}{\partial r}\Big|_{d.t.}\hat{r} + \frac{\partial h_2}{\partial \frac{di}{dt}}\Big|_{d.t.}\hat{\dot{i}}$$

$$\boxed{h_2\left(y,r,\frac{di}{dt}\right) \approx \hat{y} - \hat{r} + 0.02\hat{\dot{i}} = 0} \quad /\mathcal{L}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

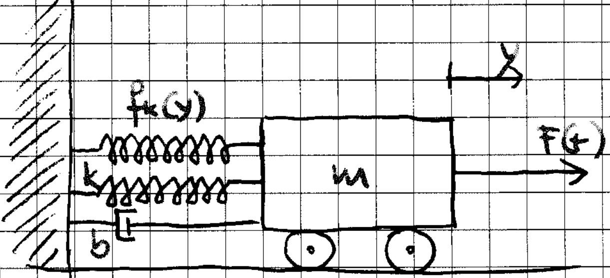
$$5.6\hat{I}(s) - \hat{Y}(s) = 0 \Rightarrow \hat{I}(s) = \frac{1}{5.6}\hat{Y}(s)$$

$$\hat{Y}(s) - \hat{R}(s) + s\cdot 0.02\,\hat{I}(s)$$ ← $I(s)$ se znebimo!

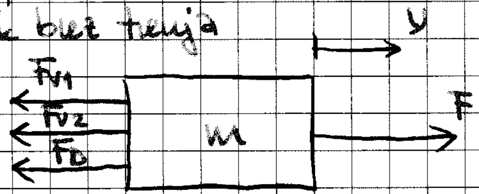
$$\boxed{\hat{H}(s) = \frac{\hat{Y}(s)}{R(s)} = \frac{280}{s+280}}$$

MEHANSKI PRIMER

→ prva vzmet je nelinearna



m ▸ voziček brez trenja



$$F - F_{v1} - F_{v2} - F_b = m\cdot a = m\cdot\ddot{y}$$

$$F - f_k(y) - k\cdot y - b\dot{y} = m\cdot\ddot{y}$$

$$\boxed{m\ddot{y} + b\dot{y} + ky + f_k(y) = F}$$ nelinearna DE 2.reda

$\bar{y},\ \bar{F}$

$$x = [y\ \dot{y}\ \ddot{y}\ F]^T$$

$$d.t. \Rightarrow \bar{x} = [\bar{y}\ 0\ 0\ \bar{F}]^T$$

$$\boxed{k\bar{y} + f_k(\bar{y}) = \bar{F}}$$ enačba v d.t.

$$g(x) = 0 = m\ddot{y} + b\dot{y} + ky + \boxed{f_k(y)} - F$$ odvod tega je konstanta

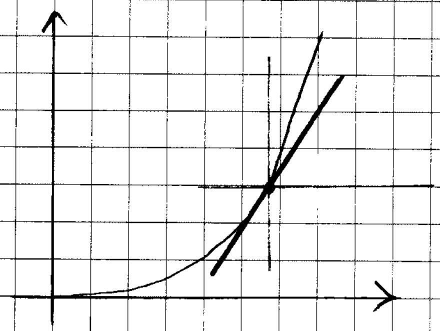
$$g(x) \approx \underset{0}{g(d.t.)} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{d.t.} \hat{y} + \frac{\partial g}{\partial \dot{y}}\bigg|_{d.t.} \hat{\dot{y}} + \frac{\partial g}{\partial \ddot{y}}\bigg|_{d.t.} \hat{\ddot{y}} + \frac{\partial g}{\partial F}\bigg|_{d.t.} \hat{F} \right)$$

$$(k + c)\cdot\hat{y} + b\hat{\dot{y}} + m\hat{\ddot{y}} - \hat{F} = 0$$

$$\boxed{m\hat{\ddot{y}} + b\hat{\dot{y}} + (k+c)\hat{y} = \hat{F}}$$ linearna enačba

$$\hat{y}(t) = ?$$

$$\boxed{y(t) = \hat{y}(t) + \bar{y}}$$



V. PROSTOR STANJ

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 u \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n u \end{aligned}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \vdots & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

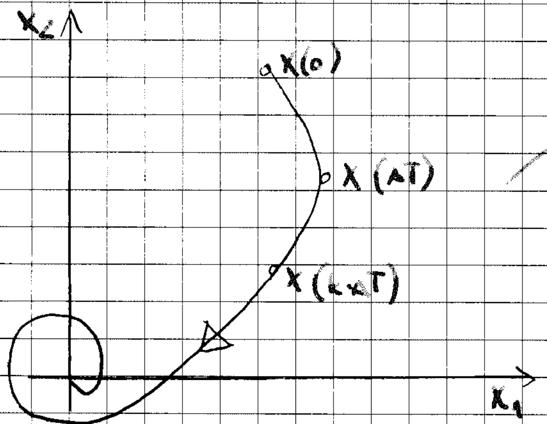
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}}$$ x ... vektor spremenljivk stanj

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$ → podatek o stanju sistema ob času t

A ... osnovna matrika sistema
u ... vzbujanje

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$ → začetno stanje; stanje ob času 0

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

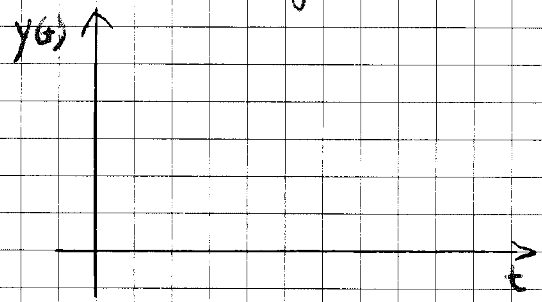


→ PROSTOR STANJ, ki ga definirajo spremenljivke stanj (dimenzije = št. spremenljivk)

- vsako spremenljivko damo na eno os ⇒ definirajo prostor

∘ stanje v katerem koli času lahko ponazorimo s točko v prostoru stanj, ki se s časom giblje.

Krivuljo, ki jo definirajo stanja v določenih trenutkih, imenujemo KRIVULJA PROSTORA STANJ oz. TIRNICA.



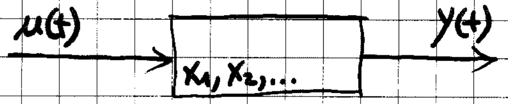
V. PROSTOR STANJ (state space)

∘ ko je sistem modeliran s sistemom DE 1. reda

V.1. SPREMENLJIVKE STANJ (state variables)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{(n diferencialnih enačb 1. reda)}$$

→ model velja samo za linearne zvezne sisteme, ki so tudi časovno nespremenljivi



→ sistem želimo analizirat preko spremenljivk stanj kako se s časom spreminjajo

$$x_1(t), x_2(t), \ldots \underset{t \geq t_0}{=} ?$$

→ S pomočjo spremenljivk vhodnih signalov in matematičnega modela, ki opisuje dinamični sistem lahko določimo bodoča stanja sistema in bodoče odzive.

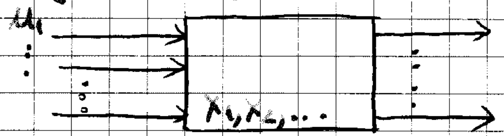
$\dot{x} = Ax + Bu$ $u(t)$ $x(t_0)$ $(x(0))$	pozname ⟹	$x(t)$ $t \geq t_0$ $y(t)$ $t \geq t_0$	→ to določimo

→ Množice spremenljivk, ki opisujejo stanje sistema imenujemo spremenljivke stanj

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$$

$x(t)$.... vektor stanja sistema

→ Spremenljivke stanj bodo opisovale obnašanje sistema v prihodnosti



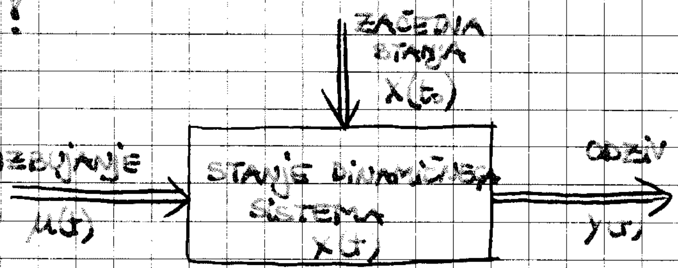
→ V SPLOŠNEM

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

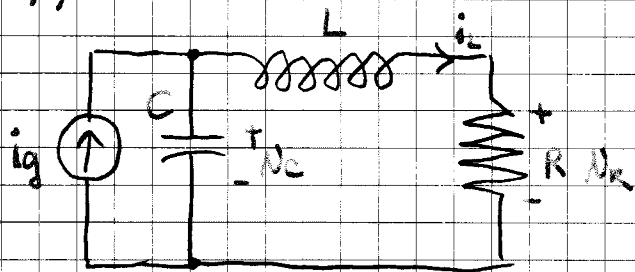
$u(t)$ → vektor vzbujanj (vektor vhodnih signalov)

→ različne dimenzije vektorjev!

$\dot{x} = Ax + Bu$
$u(t)$, $x(t_0)$
↓
$x(t)$, $y(t)$, $t \geq t_0$



Primer: ①



→ Kaj izbrati za spremenljivko stanj?

→ tokovi in napetosti

* število spremenljivk stanj naj bo čim manjše, vendar ne manjše kot je red sistema. Izogniti se moramo redundandnosti spremenljivk (sistema).

⇒ izberemo tokove preko tuljav in napetosti na kondenzatorjih

$x_1(t) = i_L(t)$

$x_2(t) = u_C(t)$

$\boxed{\dot{x} = Ax + Bu}$ → poiščemo matematični model

$$i_g = i_C + i_L$$

$$i_C = \frac{du_C}{dt}$$

$$C\frac{du_C}{dt} + i_L = i_g$$

$$\boxed{\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} i_g}$$ ⇒ prva DE 1. reda

$$u_L + u_R - u_C = 0$$

$$L\frac{di_L}{dt} = -u_R + u_C$$

$$L\frac{di_L}{dt} = -R\cdot i_L + u_C$$

$$\boxed{\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} i_L + \frac{1}{L} u_C}$$ $\qquad x = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \emptyset \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \emptyset \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix}}_{B} i_g \qquad X(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ u_C(0) \end{bmatrix} ; \; i_g(t)$$

$$X(t) = ?$$

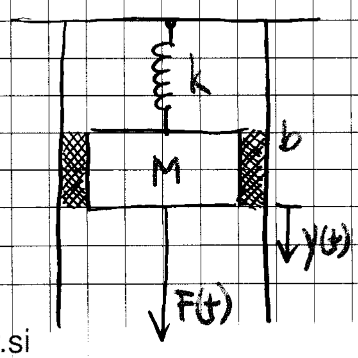
* ODZIV: ni nujno, da so to spremenljivke stanj (brez smisla)

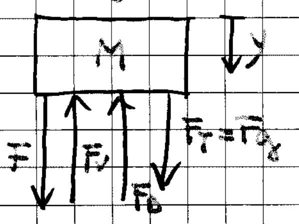
$y(t) \neq x(t)$ $\qquad y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} R & \emptyset \end{bmatrix}}_{C} x(t)$ $\qquad \boxed{y = Cx}$

$y(t) = u_R(t)$; $u_R(t) = R\cdot i_L(t)$

(2) MEHANSKI SISTEM

→ diagram prostih teles





$-F_V - F_D + F_T + F = M\cdot a$

$-k\cdot y - b\dot{y} + M\cdot g + F = M\cdot \ddot{y}$

$\boxed{M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = M\cdot g + F}$ DE 2. reda $\Rightarrow$ pretvorimo v dve DE 1. reda

$x_1 = y$
$x_2 = v = \frac{dy}{dt}$

$\left.\begin{array}{l}\boxed{\dot{x}_1 = x_2} \\ \boxed{M\dot{x}_2 + bx_2 + kx_1 = Mg + F}\end{array}\right\}$ dve DE 1. reda

$$\dot{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}}_{A} X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_{B} \cdot \begin{bmatrix} g \\ F(t) \end{bmatrix}$$

→ V obeh primerih izbrana množica spremenljivk stanj ni edina možna

$x_1 = y + v$ (taka izbira ni smiselna)

Primer: $x_1^* = v_L$ $\quad \dot{x}_1^*$ $\quad \dot{x}^* = \begin{bmatrix} -R & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$

$x_2^* = v_C = x_2$ $\quad \dot{x}_2^* = \dot{x}_2$

→ Vedno izbiramo smiselne spremenljivke stanj (i_L, v_C, odmik, hitrost, temperaturo, tlak, pretok, ...)

V. 2. ENAČBE STANJ SISTEMA

$$\boxed{\dot{X} = AX + Bu}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \ldots + b_{1m}\cdot u_m$

$\dot{x}_2 = \ldots$

$\vdots$

$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \ldots + b_{nm}\cdot u_m$

$$\dot{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A_{n\times n}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}}_{B_{n\times m}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

→ Množico DE 1. reda imenujemo enačbe stanja sistema. Matrično enačbo $\dot{X} = AX + BU$ imenujemo enačbe stanja v matrični obliki. Stolpni vektor $X(t)$ imenujemo vektor stanja sistema, vektor $u(t)$ imenujemo vektor vhodnih signalov.

→ Matrika A je <u>osnovna matrika sistema</u>. Matrika je kvadratna, njene dimenzije so v splošnem $n \times n$, kjer je n število spremenljivk stanj. Matrika B je <u>vhodna matrika</u>, njene dimenzije so $n \times m$, kjer je n število spremenljivk stanj, m pa število vhodnih signalov.

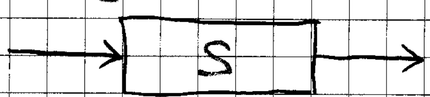
→ V vektorju $y(t)$ zberemo izhodne signale, ki so v splošnem različni od vhodnih signalov.

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix} \qquad y(t) \rightarrow \text{vektor odzivov} \qquad \boxed{y = Cx + Du}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & \\ c_{l1} & \dots & c_{ln} \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & & \\ d_{l1} & \dots & d_{lm} \end{bmatrix}}_{D} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$C_{l\times n}$ – izhodna matrika
$D_{l\times m}$ – neposredna matrika prenosa

V.3. PROSTOR STANJ

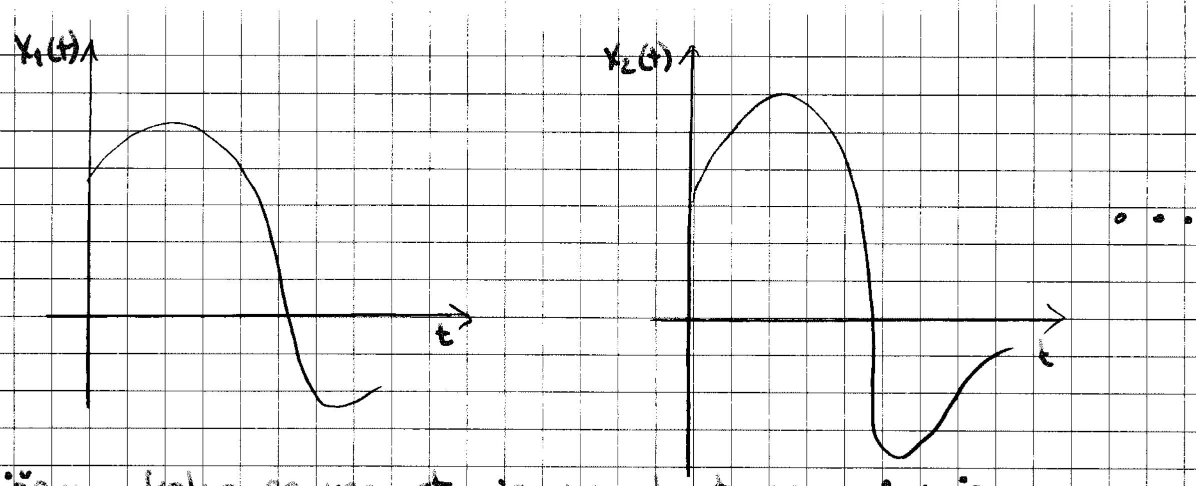


$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \dot{X} = AX + BU$$

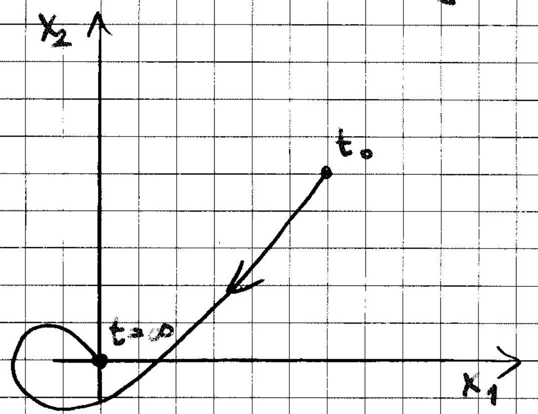
⇒ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ $\quad t \geq t_0$

$x_1(t_0), x_2(t_0), \dots$

⤳ rešitve lahko grafično prikažemo (v odvisnosti od časa)



* narišemo kako se vsa stanja naenkrat spreminjajo



⇒ krivulja prikazuje odziv vseh spremenljivk stanj

* Stanje sistema $x(t)$ lahko ponazorimo s točko v prostoru, ki ga določajo spremenljivke stanj. Dimenzija prostora stanj je enaka številu spremenljivk stanj.

V. 4. REŠITEV ENAČB STANJ

→ $\dot{x} = Ax + bu \Rightarrow x(t) = ?$

$x(t_0)$ → potrebujemo vektor začetnih stanj

1. homogena enačba stanj (brez vzbujanja)

$u(t) = 0 \quad \boxed{\dot{x} = Ax}$

$\frac{dx}{dt} = ax$ (za skalarje)

$\frac{dx}{x} = a \cdot dt \quad \Big| \int$

$x = e^{at} \cdot K \qquad K = x(0)$

$\underline{x = e^{at} \cdot x(0)}$

$\boxed{x(t) = e^{At} \cdot x(0)} \quad x(t_0)$

$$\boxed{X(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot X(t_0)}$$ splošna rešitev

$e^{At} : X(0) \longrightarrow X(t)$ → preslikava, ki preslika začetno stanje v kasnejše

$e^{A(t-t_0)} : X(t_0) \longrightarrow X(t)$

* e^{At} je matrika, ki preslika začetno stanje v stanje sistema v času t

$A \rightarrow e^{At}$ → preslikava je odvisna od osnovne matrike sistema

$\Phi(t) = e^{At}$

$\Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$

* e^{At} je matrika, ki jo imenujemo matrika prehajanja stanj. Dimenzije te matrike so enake dimenzijam osnovne matrike A.

$\boxed{\Phi_{n \times n} \quad n\text{-število spremenljivk stanj}}$

$$X(t) = \Phi(t) \cdot X(0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \dots & \Phi_{2n} \\ \vdots & & \\ \Phi_{n1} & \dots & \Phi_{nn} \end{bmatrix} \cdot X(0)$$

$\Phi_{ij}(t)$ → funkcija časa t

* Vsak element matrike prehajanja stanj podaja | opisuje preslikavo j-tega začetnega stanja k i-ti spremenljivki stanj

$$\boxed{X_j(t) = \Phi_{ij} \cdot X_1(0) + \dots + \Phi_{nj} \cdot X_n(0)}$$

* Lastnosti $\Phi(t)$:

1. $\Phi(t_0 - t_0) = I$
2. $\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\,\Phi(t_1 - t_0)$
3. $\Phi(t_1 - t_0) = [\Phi(t_0 - t_1)]^{-1}$

$\dot{X} = AX \qquad X = e^{At} \cdot X(0)$

(2.) Nehomogena enačba $u(t) \neq 0$ → prisotnost vzbujanja

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad x(t) = ?$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \Big| \, e^{-At}$$

$$e^{-tA} \cdot \dot{x} = e^{-At} \cdot A \cdot x + e^{-At} \cdot B \cdot u$$

$$e^{-At} \cdot B \cdot u = -e^{-At} \cdot A \cdot x + e^{-At} \cdot \dot{x}$$

$$e^{-At} \cdot B \cdot u = \frac{d}{dt}\left[e^{-At} \cdot x(t)\right] \quad \Big| \int_0^t$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{-A\tau} x(\tau)\right] d\tau = \int_0^t e^{-A\tau} \cdot B \cdot u(\tau) \, d\tau$$

$$e^{-A\tau} \cdot x(\tau) \Big|_0^t = \int_0^t \ldots$$

$$e^{-At} \cdot x(t) - x(0) = \int_0^t \ldots$$

$$e^{-At} \cdot x(t) = x(0) + \int_0^t \ldots \quad \Big| \, e^{At}$$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{At} \cdot x(0)}_{x_0} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \, d\tau}_{x_v}}$$

ODZIV NA ZAČETNO STANJE — ODZIV NA VZBUJANJE

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\boxed{x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \, d\tau} \quad t \geq t_0$$

splošnejša rešitev

$$\Phi(t) = e^{At} = ?$$

→ nastopa v obeh delih

V. 5. DOLOČANJE MATRIKE PREHAJANJA STANJ

① Določanje z razvojem v vrsto

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \ldots + \frac{(at)^n}{n!} + \ldots$$

$$e^{At} = I + A \cdot t + \frac{(At)^2}{2!} + \ldots \; \vdots \; \ldots$$

→ kot aproksimativna metoda: približno, vzamemo nekaj členov

$e^{At} \approx$

Zgled:

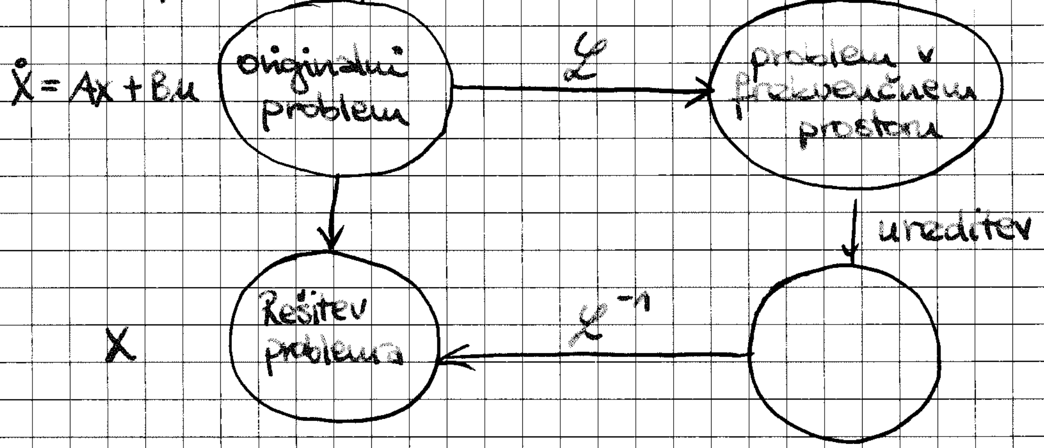
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} \approx I + A \cdot t + \frac{(At)^2}{2!}$$

$$e^{At} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2t & -t \\ 2t & \emptyset \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 & t^2 \\ -2t^2 & -t^2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} \approx \begin{bmatrix} 1-2t+t^2 & -t+t^2 \\ 2t-2t^2 & 1-t^2 \end{bmatrix}$$

② Laplace-ova preslikava



$$\dot{x} = Ax + Bu \quad / \mathcal{L}$$

$$sX(s) - x(0) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$$

$$sX(s) - A \cdot X(s) = x(0) + B \cdot U(s)$$

$$(sI - A) X(s) = x(0) + B \cdot U(s) \quad \Big| \cdot (sI-A)^{-1}$$

$$\underline{\underline{X(s) = (sI-A)^{-1} x(0) + (sI-A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)}}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

$$x(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1} x(0)\right]}_{x_z} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)\right]}_{x_v}$$

$$e^{At} \cdot x(0)$$

$$\boxed{e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]}$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix} \qquad sI=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)=\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$\det=(s+2)s+2=s^2+2s+2$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\det}\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+2\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

$$A_{11}=\frac{s}{s^2+2s+2}=\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+1}=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}\ \Big/\ \mathcal{L}^{-1}$$

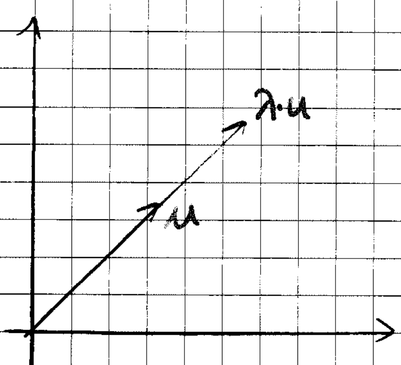
$$a_{11}=\mathcal{L}^{-1}\left[A_{11}\right]=e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t$$

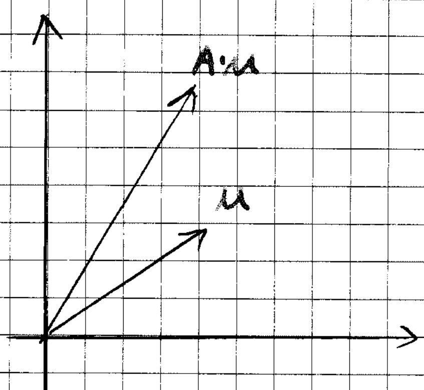
$$e^{At}=e^{-t}\begin{bmatrix}\cos t-\sin t & -\sin t\\ 2\sin t & \cos t+\sin t\end{bmatrix} \qquad t\geq 0$$

* Laplaceova transformacija da eksaktno obliko matrike prehajanja stanj; vsak člen posebej moramo narediti inverz.

③ Določanje matrike prehajanja stanj s pomočjo lastnih vrednosti matrike A

$$\boxed{A\cdot u=\lambda\cdot u}$$





λ... lastna vrednost matrike A
u... lastni vektor

$$A \cdot u - \lambda \cdot u = 0$$

$$(A - \lambda I)\, u = 0$$

$$\boxed{g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0}$$ KARAKTERISTIČNA ENAČBA

$$g(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$

$A_{n \times n}$

$\boxed{g(\lambda) = 0}$ ⇒ poiščemo korene karakteristične enačbe

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ → koreni so lastne vrednosti ⇒ vsaki lastni vrednosti pripada en lastni vektor

$$\boxed{A \cdot u_i = \lambda_i u_i \Rightarrow u_i = ?}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = \ldots$
$\lambda_2 = \ldots$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad g(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$$

$\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = -2$

$$A u_1 = \lambda_1 u_1$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix}$$

$$-3u_{11} - u_{21} = -u_{11}$$

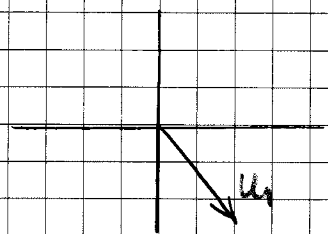
$$-2u_{11} = u_{21}$$

$\boxed{u_{11} = 1}$ izberemo

$u_{21} = -2$

vektor kaže v isto smer, le da ima drugačno dolžino

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



PROSTOR STANJ

→ sistem modeliran kot sistem DE 1. reda

- če linearen in časovno nespremenljiv: $\dot{X} = AX + Bu$

$* \; u(t) = 0, \; x(0) \neq 0 \Rightarrow x(t) = e^{At} \cdot x(0)$

$* \; u(t) \neq 0, \; x(0) \neq 0 \Rightarrow x(t) = \underbrace{e^{At} \cdot x(0)}_{\text{odziv na začetno stanje}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau}_{\text{odziv na vzbujanje}}$

$\Phi = e^{At} = ?$ → matrika prehajanja stanj

POSTOPKI DOLOČANJA

1. RAZVOJ V NESKONČNO VRSTO (vzamemo le nekaj členov)
2. LAPLACEOVA PRESLIKAVA

$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$ → SLABOSTI iskanje inverznega Laplaceovega transforma (zahtevno)

3. LASTNE VREDNOSTI OSNOVNE MATRIKE A

$\lambda \quad A \Rightarrow \lambda_i$

$g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ → karakteristična enačba

⇒ lastni vektorji $A \cdot u_i = \lambda_i \cdot u_i \Rightarrow u_i$

a) $\boxed{\lambda_i \Rightarrow e^{At}}$ → Kako nam lastne vrednosti pomagajo to določit?

$e^{At} = I \cdot A \cdot t + \frac{A^2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n t^n}{n!} + \ldots$

$\boxed{A_{n \times n}}$

$g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

⇒ CAYLEY-HAMILTONOV TEOREM

- vsaka kvadratna matrika zadosti svoji karakteristični enačbi.

$$\lambda \longrightarrow A$$

$$g(A) = |A - AI| = \emptyset$$

$$\longrightarrow a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = \emptyset$$

$$A^n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} A^{n-1} - \ldots - \frac{a_1}{a_n} A - \frac{a_0}{a_n} \cdot I$$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = -\frac{a_{n-1}}{a_n} A^n - \ldots - \frac{a_1}{a_n} \cdot A^2 - \frac{a_0}{a_n} A$$

$$\vdots$$

$$e^{At} = \alpha_0 \cdot I + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot A^{n-1}$$

kombinacija a-jev

c) $$\boxed{e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot A^k}$$ končno število členov → končna vsota

$\alpha_k = ?$ → kombinacija a-jev

$$A \longrightarrow \lambda$$

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda^k$$ → n-neznank: vzamemo n lastnih vrednosti

$$\left.\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot \lambda_1^k \\ e^{\lambda_2 k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot \lambda_2^k \\ &\vdots \\ e^{\lambda_n t} &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot \lambda_n^k \end{aligned}\right\} \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$$

Zgled

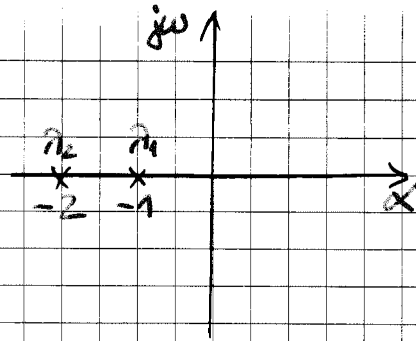
① $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & \emptyset \end{bmatrix}$; $e^{At} = ?$ → realne lastne vrednosti λ_i

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \emptyset$$

$$g(\lambda)=\lambda^2+3\lambda+2=0$$

$$\underline{\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-2}$$

splošno kompleksne (govorijo o stabilnosti sistema)



$$e^{-t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1=\alpha_0-\alpha_1$$

$$e^{-2t}=\alpha_0-2\alpha_1 \quad ; \quad k=0,1$$

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha_1&=e^{-t}-e^{-2t}\\ \alpha_0&=2e^{-t}-e^{-2t}\end{aligned}}$$

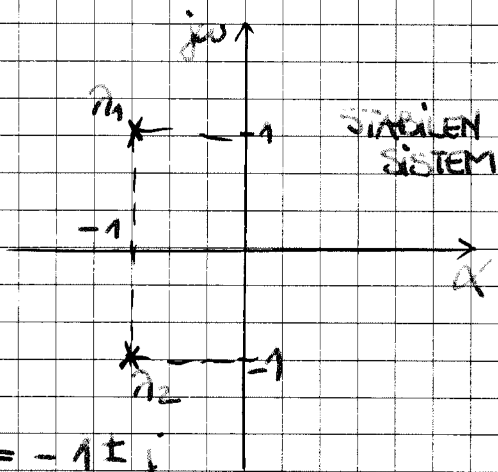
$$e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A=(2e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+(e^{-t}-e^{-2t})\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{e^{At}}}=\begin{bmatrix}-e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+e^{-2t}\\ 2e^{-t}-2e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

λ_i – določajo stabilnost, nastopajo v rešitvi
λ_i – stabilnost sistema

② kompleksne lastne vrednosti λ_i

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$



$$g(\lambda)=|A-\lambda I|=0$$

$$g(\lambda)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$g(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+2=0 \Rightarrow \underline{\lambda_{1,2}=-1\pm j}$$

$$e^{\lambda t}=\sum_{k=0}^{1}\alpha_k\lambda^k$$

$$e^{\lambda t}=\alpha_0+\alpha_1\cdot\lambda$$

$$\left.\begin{aligned}e^{(-1+j)}&=\alpha_0+\alpha_1(-1+j)\\ e^{(-1-j)}&=\alpha_0+\alpha_1(-1-j)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \alpha_0,\alpha_1$$

$$e^{(-1+j)} - e^{(-1-j)} = (-1+j)\alpha_1 - (-1-j)\alpha_1 = 2j\alpha_1$$

$$\alpha_1 = \frac{e^{(-1+j)} - e^{(-1-j)}}{2j} = \frac{e^{-t}\cdot e^{jt} - e^{-t}\cdot e^{-jt}}{2t} = \frac{e^{-t}(e^{jt} - e^{-jt})}{2j} = \underline{\underline{e^{-t}\cdot \sin t}}$$

$$\underline{\underline{\alpha_0 = e^{-t}(\cos t + \sin t)}}$$

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -\sin t + \cos t & -\sin t \\ 2\sin t & \sin t + \cos t \end{bmatrix} e^{-t}$$

(3) večkratne lastne vrednosti λ_i

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$g(\lambda) = (\lambda+1)^2 = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{\lambda_{1,2} = -1}}$$

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot \lambda^k$$

$$\underline{\underline{e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda}} \;\Big/ \frac{d}{d\lambda}$$

tolikokrat odvajamo, kolikokrat je ničla -1

$$e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1$$

$$t \cdot e^{\lambda t} = \alpha_1$$

$$\boxed{\alpha_1 = t\cdot e^{-t}}$$

$$e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1 = \alpha_0 - te^{-t}$$

$$\boxed{\alpha_0 = e^{-t} + te^{-t}}$$

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} - te^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & te^{-t} + e^{-t} \end{bmatrix}$$

$e^{At} = ?$

a) $A \to \lambda_i$

b) $e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_i + \alpha_2\lambda_i^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\cdot\lambda_i^{n-1}$

$\downarrow$ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$

$\downarrow$ ta sistem enačb za dobivanje α_n je problem

c) $e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$

DOLOČANJE LASTNIH VEKTORJEV

$A \quad g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots$

$\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \ldots \neq \lambda_n}$

$A \cdot u_i = \lambda_i u_i \Rightarrow u_i$ → vsaki lastni vrednosti pripada en lastni vektor

* večkratne lastne vrednosti ⇒ PROBLEM

$\lambda_i = \lambda_j$ → če sta že samo dve enaki, ne gre po zgornjem postopku

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$

$Au = \lambda u$

→ alternativni način določanja lastnih vrednosti

$$\boxed{f(\lambda, \mu) = \frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu}}$$

značilna enačba: $g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

$g(\mu) = |A - \mu I| = 0$

razvijemo:
$$\begin{cases} g(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \\ g(\mu) = a_n\mu^n + a_{n-1}\mu^{n-1} + \ldots + a_1\mu + a_0 = 0 \end{cases}$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{(a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0) - (a_n\mu^n + \ldots + a_1\mu + a_0)}{\lambda - \mu}$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{a_n(\lambda^n - \mu^n) + a_{n-1}(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}) + \ldots + a_1(\lambda - \mu)}{\lambda - \mu}$$

$$f(\lambda,\mu) = a_n \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} + a_{n-1} \frac{\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}}{\lambda - \mu} + \ldots + a_1$$

števec se da delit z imenovalcem brez ostanka

$$\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu} = \frac{(\lambda+\mu)\cancel{(\lambda-\mu)}}{\cancel{\lambda-\mu}}$$

$\boxed{f(\lambda,\mu) \quad \lambda \to \lambda I \quad \mu \to A}$ zamenjava

$$f(\lambda I, A) = (\lambda I - A)^{-1}\left[g(\lambda I) - g(A)\right] \;/\; (\lambda I - A)$$

$$\Longrightarrow (\lambda I - A)\cdot f(\lambda I, A) = g(\lambda I) - \cancel{g(A)}^{\,Q} \qquad \boxed{g(A) = Q}$$

$$(\lambda I - A)\cdot f(\lambda I, A) = g(\lambda I)$$

$$\boxed{C(\lambda) = f(\lambda I, A)}$$

$$(\lambda I - A)\cdot C(\lambda) = g(\lambda I)$$

$$g(\lambda I) = g(\lambda)\cdot I$$

$$g(\lambda)\cdot I = (\lambda I - A)\cdot C(\lambda)$$

$\lambda \to \lambda_i$ $\qquad g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_i)$

$g(\lambda_i) = Q$ → koren, zato je Q

$$g(\lambda_i)\cdot I = (\lambda I - A)\, C(\lambda_i)$$

$$(\lambda_i I - A)\, C(\lambda_i) = Q$$

$$C(\lambda_i) \Rightarrow u_i$$

$$\Longrightarrow A\cdot u = \lambda \cdot u$$

$$A\cdot u - \lambda u = Q$$

$$(A - \lambda I)u = Q$$

$$(A - \lambda_i I)u_i = Q$$

* Ker vsaki lastni vrednosti pripada en lastni vektor in ker ta vektor določimo iz matrike $C(\lambda_i)$ so stolpci matrike $C(\lambda_i)$ linearno odvisni. Zato iz matrike $C(\lambda i)$ lahko izločimo i-ti

lastni vektor. Ta lastni vektor predstavlja katerikoli stolpec matrike $C(\lambda_i)$.

$\boxed{\text{Zgled}}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 \Rightarrow u_1 \\ \lambda_2 \Rightarrow u_2 \end{matrix}$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$g(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad g(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 1}} \quad \underline{\underline{\lambda_2 = 3}}$$

$$g(\mu) = \mu^2 - 4\mu + 3$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu} = \frac{(\lambda^2 - 4\lambda + 3) - (\mu^2 - 4\mu + 3)}{\lambda - \mu}$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu} - 4 = \boxed{\lambda + \mu - 4} \qquad \begin{matrix} \lambda \longrightarrow \lambda I \\ \mu \longrightarrow A \end{matrix}$$

$$C(\lambda) = f(\lambda I, A)$$

$$C(\lambda) = \lambda I + A - 4 \cdot I$$

$$\boxed{C(\lambda) = A + (\lambda - 4) I}$$

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$C(\lambda_1 = 1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(\lambda_2 = 3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* večkratne lastne vrednosti

$$A \Rightarrow g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots \Rightarrow u_1, u_2, \dots$

$\lambda_i \dots$ m-kratna

$$g(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_i)^m \dots$$

- Kako poiščemo lastne vektorje?

$$f(\lambda,\mu) = \frac{g(\lambda)-g(\mu)}{\lambda-\mu} \qquad \begin{matrix}\mu \to A \\ \lambda \to \lambda \cdot I\end{matrix}$$

$$f(\lambda I, A) = C(\lambda)$$

$$\underline{\underline{g(A) = 0}}$$

$$g(\lambda)\cdot I = (\lambda I - A)\cdot C(\lambda)$$

$\Rightarrow (\lambda I - A)\cdot C(\lambda) = g(\lambda)\cdot I$ $(m-1)$-krat odvajamo na λ

1. $\to (\lambda I - A)\cdot C'(\lambda) + C(\lambda) = g'(\lambda)\cdot I \quad \Big| \frac{d}{d\lambda}$ pri odvod

$$(\lambda I - A)\cdot C''(\lambda) + C'(\lambda) + C'(\lambda) = g''(\lambda)\cdot I$$

2. $\to (\lambda I - A)\cdot C''(\lambda) + 2C'(\lambda) = g''(\lambda)\cdot I \quad \Big| \frac{d}{d\lambda}$

$$(\lambda I - A)\cdot C'''(\lambda) + C''(\lambda) + 2C''(\lambda) = g'''(\lambda)\cdot I$$

3. $\to (\lambda I - A)\cdot C'''(\lambda) + 3\cdot C''(\lambda) = g'''(\lambda)\cdot I$

$\vdots$

$(m-1) \to (\lambda I - A) C^{(m-1)}(\lambda) + (m-1) C^{(m-2)}(\lambda) = g^{(m-1)}(\lambda)\cdot I$

$\lambda \to \lambda_i \quad g(\lambda_i) = g'(\lambda_i) = \dots = g^{(m-1)}(\lambda_i) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &(A - \lambda I)\, C(\lambda_i) = 0 \\ &(A - \lambda I)\, C'(\lambda_i) + C(\lambda_i) \quad \Big| \cdot (A - \lambda_i I) \\ &\vdots \\ &(A - \lambda_i I)\, C^{(m-1)}(\lambda_i) = (m-1)\, C^{(m-2)}(\lambda_i) \end{aligned}\right\} \text{m-enačb}$$

$$\left.\begin{aligned} &(A - \lambda_i I)\cdot C(\lambda_i) = 0 \\ &(A - \lambda_i I)^2 \cdot C'(\lambda_i) = (A - \lambda_i I)\, C(\lambda_i) = 0 \\ &\vdots \\ &(A - \lambda_i I)^m \cdot C^{(m-1)}(\lambda_i) = 0 \end{aligned}\right\} \text{m-enačb}$$

$$A \cdot u = \lambda \cdot u$$

$$A u - \lambda \cdot u = 0$$

$$(A - \lambda I) \cdot u = 0$$

$$(A - \lambda_i I) \cdot u_i = 0$$

$$u_i \longrightarrow \left.\boxed{\begin{matrix} C(\lambda_i) \\ C'(\lambda_i) \\ \vdots \\ C^{(m-1)}(\lambda_i) \end{matrix}}\ * \ \right\}$$ dobit m u_i, ki pripada i-ti lastni vrednosti

- Lastni vektorji, ki pripadajo večkratni lastni vrednosti so posplošeni lastni vektorji. V primeru m-kratne lastne vrednosti λ_i dobimo m-lastnih vektorjev, ki pripadajo večkratni lastni vrednosti iz matrike *.

Primer

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

$$g(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\underline{\lambda_1 = 5} \quad \underline{\lambda_2 = \lambda_3 = 1} \ ; \ u_1, u_2, u_3 = ?$$

$$C(\lambda) = ?$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\lambda^3 - \mu^3}{\lambda - \mu} - 7\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu} + 11\frac{\lambda - \mu}{\lambda - \mu}$$

$$f(\lambda, \mu) = \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 - 7(\lambda + \mu) + 11$$

$$f(\lambda, \mu) = (\lambda^2 - 7\lambda + 11) + (\mu^2 + \lambda\mu - 7\mu)$$

$$f(\lambda I, A) = (\lambda^2 - 7\lambda + 11) I + A^2 \underbrace{- 7A + \lambda A}_{(-7+\lambda)A}$$

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 5\lambda + 4 & 2\lambda - 2 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 2\lambda - 2 & \lambda^2 - 5\lambda + 4 \end{bmatrix}$$

$$C(\lambda_1 = 5) = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(\lambda_2 = \lambda_3 = 1) = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cancel{\text{najprej}} \to C(\lambda_2 = \lambda_3) \\ \qquad\qquad C'(\lambda_2 = \lambda_3) \end{array}}$$

→ Pri večkratni lastni vrednosti, poskušamo določit čimveč lastnih vrednosti iz matrike $C(\lambda)$ → v upoštev pridejo ki stolpci, ki niso linearne kombinacije že izbranih lastnih vektorjev. Če ne uspemo izločit vseh gremo na $C'(\lambda)$ (čimveč) in lahko gremo še naprej, vendar ni nujno, da gremo do konca.

$$C'(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda - 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2\lambda - 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2\lambda - 5 \end{bmatrix} \qquad C'(\lambda_2 = \lambda_3 = 1) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

linearna kombinacija prejšnjih

$$u_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t) = e^{At} \cdot x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau$$

$\Phi(t) = e^{At} = ?$ $\longrightarrow$ matrika prehajanja stanj

- lastne vrednosti matrike A → vsaki lastni vrednosti pripada lastni vektor

$$A \longrightarrow \lambda_i \longrightarrow u_i$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_i$$

$$A \cdot u_i = \lambda_i \cdot u_i \Rightarrow u_i$$

$\lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$ $\longrightarrow$ lastne vrednosti med seboj različne

- Alternativni postopek določanja lastnih vrednosti

$$f(\lambda, \mu) = \frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu}$$

$$\lambda \rightarrow \lambda I$$
$$\mu \rightarrow A$$

$$f(\lambda I, A) = \underline{C(\lambda)}$$

n-kratna lastna vrednost $\Rightarrow$ do tu isti postopek

$$\lambda_i \neq \lambda_j$$

$$C(\lambda) \Rightarrow u_i$$

$$\underbrace{\lambda_i = \lambda_i = \ldots = \lambda_i}_{m}$$

$$C(\lambda), C'(\lambda), \ldots, C^{(m-1)}(\lambda)$$

- Poiščemo matriko $C(\lambda)$, ne glede nato kakšne so lastne vrednosti, potem v $C(\lambda)$ vstavimo konkretno lastno vrednost, kateri iščemo pripadajoči lastni vektor. Iz $C(\lambda_i)$ izluščimo čimveč linearno neodvisnih stolpcev, ki predstavljajo lastne vektorje. Če s $C(\lambda_i)$ nismo uspeli izločiti vseh lastnih vektorjev, ki pripadajo večkratni lastni vrednosti, določimo $C'(\lambda_i)$ in ponovimo postopek. Končamo ko izločimo vse lastne vektorje.

$$\Theta = [u_1 \,\vdots\, u_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, u_n] \, ; \quad \Theta^{-1}$$

v vsak stolpec matrike damo en lastni vektor

$\boxed{\text{ZGLED}}$ iz prejšne ure

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \end{matrix} \quad \underbrace{u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{C(\lambda_1 = 5)}, \underbrace{u_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \; u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{C(\lambda_2 = \lambda_3 = 1)}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{ZGLED}}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1, \lambda_2, u_1, u_2 = ?$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$g(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = 2}$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - (\mu^2 - 4\mu + 4)}{\lambda - \mu} = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu} - 4 =$$

$$= \lambda + \mu - 4 = \underline{(\lambda - 4) + \mu}$$

$$f(\lambda I, A) = (\lambda - 4) I + A = C(\lambda)$$

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$C(\lambda = 2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C'(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Theta^{-1} = \ldots$$

$e^{\Lambda t} \Rightarrow$ DIAGONALIZACIJA MATRIKE A (postopek)

$$A \longrightarrow D$$

$$A \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

$$A = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \emptyset \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \Lambda^k \qquad \Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \emptyset \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_0 \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \emptyset \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \alpha_0 \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & & \emptyset \\ & \lambda_2^0 \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n^0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n^1 \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_{n-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \lambda_1^0 + \alpha_1 \lambda_1^1 + \ldots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} & \emptyset & \ldots & \emptyset \\ & \alpha_0 \lambda_2^0 + \alpha_1 \lambda_2^1 + \ldots & \ldots & \emptyset \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 \lambda_i^0 + \alpha_1 \lambda_i^1 + \ldots + \alpha_{n-1} \lambda_i^{n-1}; \quad i = 1, \ldots, n \Rightarrow \text{na diagonali}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \emptyset \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- Če je osnovna matrika diagonalna so na diagonali lastne vrednosti $\Rightarrow$ tudi matrika prehajanja stanj je diagonalna

$$A = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Iskanje matrike prehajanja stanj je v primeru diagonalne osnovne matrike A zelo enostavno

• Če pa A ni diagonalna jo preslikamo v diagonalno matriko D

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "?"] \arrow[d, dashed] & D = \Lambda \arrow[d] \\ e^{At} & e^{\Lambda t} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

• Če je podana osnovna matrika A. Ali jo lahko preslikamo v diagonalno matriko in kako?

$\Theta = [u_1 \vdots u_2 \vdots \ldots \vdots u_n]$

Θ^{-1}

$$\boxed{\begin{array}{c} \Lambda = \Theta^{-1} \cdot A \cdot \Theta \\ \hline A = \Theta \cdot \Lambda \cdot \Theta^{-1} \end{array}}$$ ⇒ problem pri večkratnih lastnih vrednostih

$\underline{A \Rightarrow \Lambda}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ \emptyset & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\boxed{\lambda_i = \lambda_j}$

$A \Rightarrow \Lambda$

$\underline{\Lambda \overset{?}{=} \Theta^{-1} \cdot A \cdot \Theta}$ → ne dobimo vedno diagonalne matrike

$\boxed{J = \Theta^{-1} \cdot A \cdot \Theta}$ ⇒ Jordanova kanonična forma

$\boxed{J = \Lambda}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$

• λ_i → m-kratna lastna vrednost (J je lahko diagonalna, ni pa nujno)

• če J ni diagonalna je to najbolj prazna matrika (bolj prazne ne moremo dobiti)

• e^{At} mnogo lažje računat, bolj je matrika prazna

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad J = \Theta^{-1} \cdot A \cdot \Theta = \begin{bmatrix} 5 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \Theta^{-1} \cdot A \cdot \Theta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

⇒ Zakaj obe kanonični formi nista enaki (diagonalni)?

- V prvem primeru smo lastna vektorja, ki pripadata večkratni lastni vrednosti izločili iz ene matrike ($C'(\lambda)$). V drugem primeru pa iz dveh matrik ($C(\lambda)$ in $C'(\lambda)$). Izločanje lastnih vektorjev iz matrik $C^{(n)}(\lambda)$ vpliva na obliko Jordanove kanonične forme.

$$A \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

① $\{(1), (1), (1)\}$

② $\{(1,1), (1)\}$

③ $\{(1,1,1)\}$

- Primer ① predstavlja, da se lastne vrednosti če tudi so enake obnašajo, kot da bi bile različne. V tem primeru bi tri linearno neodvisne lastne vektorje dobili iz matrik $C(\lambda)$ ali $C'(\lambda)$ ali $C''(\lambda)$ (vse tri iz ene matrike).
- Izraz ② pomeni, da se dve lastni vrednosti izločita skupaj in ena posebej. V tem primeru bomo tri linearno neodvisne lastne vektorje dobili iz katerihkoli dveh matrik $C(\lambda)$, $C'(\lambda)$ ali $C''(\lambda)$.
- V ③ primeru bomo iz vsake matrike dobili po en lastni vektor.

① $J = \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix}$ ② $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix}$ ti dve sta povezani ③ $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \emptyset \\ & 1 & 1 \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix}$

- Pod diagonalo so vedno ničle, nad diagonalo pa odvisno od tega kako smo izločili lastne vektorje.

ALTERNATIVNI POSTOPEK DOLOČANJA JORDANOVE KANONIČNE FORME

$$A \xrightarrow{?} J$$

$$J = \bigcirc^{-1} \cdot A \cdot \bigcirc .$$

$$A \Rightarrow g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$\boxed{\lambda_i \to m\text{-kratna}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} [A - \lambda_i I]^k \quad k = 0, 1, \ldots, m \\ r_k = \text{rang}[A - \lambda I]^k \end{array}}$$

$\to$ število linearno neodvisnih stolpcev ali vrstic

→ začnemo s $k=0$ in končamo ko je nek rang enak prejšnjemu

- delamo razlike rangov

$[(r_0 - r_1), (r_1 - r_2), \ldots (r_{m-1} - r_m)]$ Segré-ova značilnica

- Ferrer-jev diagram

  - v vsako vrstico damo toliko znakov, kakršna je razlika ranga v dani vrstici

```
*  *  *   (r0-r1)
*  *  .   (r1-r2)
.  .  .      :
.  .  .      :
─────────
Σ  Σ  Σ
```

$\Sigma\Sigma\Sigma \Rightarrow J$ (po stolpcih seštejemo koliko je teh znakov)

A

$\lambda : 2, \underbrace{1, 1, 1, 1, 1}_{5\times}$

$[A - \lambda_i I]^k \quad \lambda_i = 1$

$[A - I]^k \quad k = 0, 1, \ldots, 5$

$r_0 = 6$

$\left.\begin{array}{l} r_1 = 4 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = 1 \\ r_4 = 1 \end{array}\right\}$ predpostavimo

$[(6-4), (4-2), (2-1)]$

$[\ 2, \quad 2, \quad 1\ ]$

$$\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ * & \\ \hline 3 & 2 \end{array} \qquad J = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 1 & 1 & & \emptyset & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & & \\ & \emptyset & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

→ ki enake lastne vrednosti vzamemo skupaj

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$[A - \lambda_i I]^k \quad \lambda_i = 1$

$[A - I]^k \Rightarrow k = 0, 1, 2$

$\Rightarrow k = 1$

$$[A - I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{r_1 = 1}$

$r_0 = 3$
$r_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad [(3-1)] = [2]$
$r_2 = 1$

$$\begin{array}{cc} * & * \\ \hline 1 & 1 \end{array} \qquad J = \begin{bmatrix} 5 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A \longrightarrow J = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & J = Q^{-1} \cdot A \cdot Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ e^{At} & \xleftarrow{\text{inverzna preslikava}} & e^{Jt} \end{array}$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \emptyset \\ \emptyset & \lambda_1 & 1 \\ \emptyset & \emptyset & \lambda_1 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \lambda_1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \lambda_1 \end{bmatrix}}^{\lambda I} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{C} \qquad \boxed{J = \lambda I + C}$$

$$e^{Jt} = e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} t} = e^{\left\{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t\right\}} = e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \lambda_1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \lambda_1 \end{bmatrix} t} \cdot e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t}$$

$$e^{Jt} = e^{(\lambda I + C)t} = e^{\lambda I t} \cdot e^{Ct}$$

$e^{Ct} = I + Ct + \frac{(Ct)^2}{2!} + \ldots \longrightarrow$ razvijemo v neskončno vrsto

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{n > 2}$$

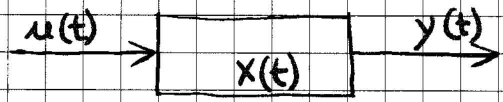
$$e^{Ct} = I + Ct + \frac{(Ct)^2}{2!}$$

$$e^{Ct} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad e^{\lambda I t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{e^{At} = Q \cdot e^{Jt} \cdot Q^{-1}}$$

VI. DISKRETNI SISTEMI



→ ZVEZNI SISTEMI:

① $\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_0 u$

$y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$

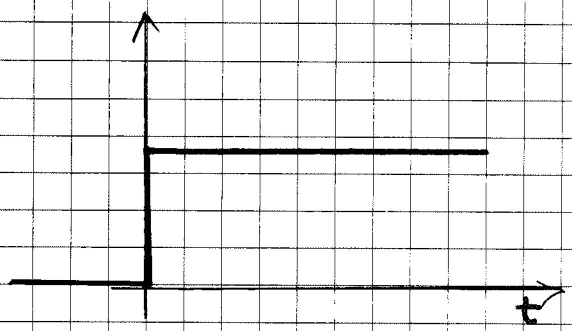
$\underline{y(t)}, \; t \geq 0$

② $\dot{x} = Ax + Bu$

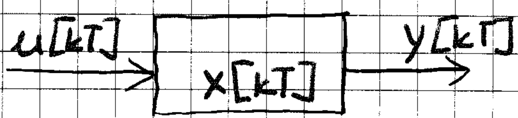
$$x = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \, d\tau$$

$$y(t) = Cx + Du$$

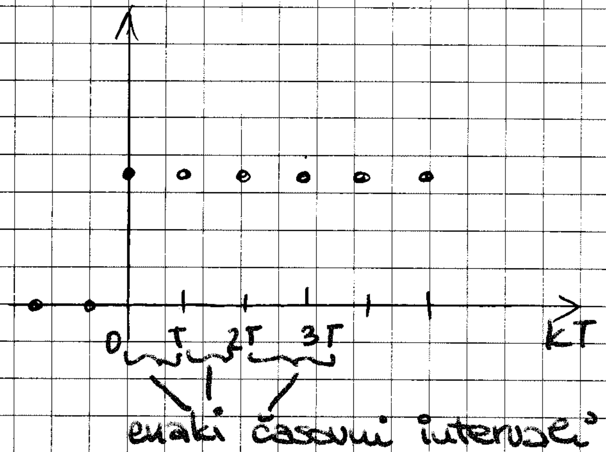
③ s prenosno funkcijo $\quad H(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]}$



DISKRETNI → diskretna časovna stanja



kT



$u(t) \longrightarrow u[kT]$

$y(t) \longrightarrow y[kT]$

$x(t) \longrightarrow x[kT]$

$f(t) \longrightarrow f[kT]$

* kT je diskretna časovna spremenljivka, ki označuje diskretne časovne trenutke

  $kT \quad k=0,1,2,\ldots$

* T je fiksna pozitivna časovna konstanta, ki jo poznamo. Odvisen je od sistema.

  k.... samo koraki (za krajši zapis)

  $u[k], y[k], x[k], f[k]$

  $u[kT]$

* vse signale vzorčimo in frekvenco ⇒ zvezni signal pretvorimo v diskretni

1. MODELIRANJE DISKRETNIH SISTEMOV

(1) $y[k+n] + a_{n-1} \cdot y[k+n-1] + \dots + a_1 \cdot y[k+1] + a_0 \cdot y[k] =$

$= b_m u[k+m] + \dots + b_1 u[k+1] + b_0 \cdot u[k]$

→ enakovredno diferencialni enačbi
→ n-tega reda

⇓

DIFERENČNA ENAČBA n-tega reda opisuje diskreten, linearen sistem, časovno nespremenljiv sistem

⇒ n-začetnih pogojev: $y[0], y[1], \dots, y[n-1]$ → to je za n-ti red
*

$y[k]$ $k = 0, 1, 2, \dots$

$\boxed{k \geq n}$ → zanimivo tega nimamo v začetnih pogojih

- Rešujemo lahko v časovnem prostoru ali s transformacijo
- Ta zapis je v skladu s splošno matematično teorijo linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti. Takšen zapis bi dobili tudi po diskretizaciji diferencialne enačbe.
- Takšen zapis srečujemo tudi pri numeričnih metodah za reševanje diferencialnih enačb!

$\frac{dy}{dt} \doteq \frac{y[1] - y[0]}{T}$ * Tudi rešujemo z numeričnimi metodami za reševanje

- Tudi zapis z enačbami stanj v matrični obliki dobimo s takšnimi enačbami.

(2) $y[k] + a_{n-1} y[k-1] + \dots + a_1 y[k-(n-1)] + a_0 y[k-n] =$

$= b_m u[k-(n-m)] + \dots + b_1 u[k-(n-1)] + b_0 \cdot u[k-n]$

→ vrednost signala pred trenutkom 0

$y[-1], y[-2], \dots, y[-n];$ $y[k]$ $\boxed{k = 0, 1, 2, \dots}$
*

nas še zanima

- Drugi zapis je bolj intuitivno orientiran. Uporablja se med drugim pri linearnih digitalnih filtrih.
- Zapisa sta enakovredna:

$$(1) \longleftrightarrow (2)$$

$$\xrightarrow{-n} \qquad \xleftarrow{+n}$$

- Rezultat moramo tudi začetne pogoje.

$\boxed{\text{ZGLED}}$ $y[k+2] - 3\cdot y[k+1] + 2\cdot y[k] = u[k+1]$ ⇒ drugega reda

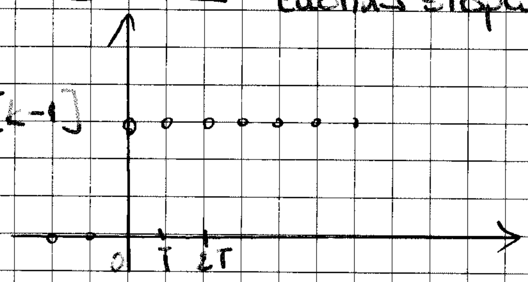
$y[0] = 0;\ y[1] = -4 \qquad u[k] = 3^k \cdot \boxed{u^*[k]}$ → diskretna enotina stopnica

(1) $k = -2$ (2)

$\downarrow$

$y[k] - 3y[k-1] + 2y[k-2] = u[k-1]$

(2) $y[-1],\ y[-2] = ?$



$k = -1$ (1)

$y[1] - 3\cdot y[0] + 2\, y[-1] = u[0]$

$y[-1] = \frac{1}{2}\,[-y[1] + 3\cdot y[0] + u[0]]$

$y[-1] = \frac{1}{2}\,[4+1]$ $\qquad \underline{y[-1] = \frac{5}{2}}$

(1) $k = -2$

$y[0] - 3\, y[-1] + 2\, y[-2] = u[-1]$

$y[-2] = \frac{1}{2}\,[-y[0] + 3\cdot y[-1] + u[-1]]$

$y[-2] = \frac{1}{2}\,[3\cdot y[-1]]$

$\underline{y[-2] = \frac{15}{4}}$

4. Z-preslikava

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$\downarrow$ uredimo

$$f(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} F(s)$$

* ... je preslikava, ki jo uporabljamo pri diskretnih sistemih (diferenčnih enačbah). Podobno kot uporabljamo Laplaceovo preslikavo pri zveznih sistemih (diferencialnih enačbah). Z preslikavo prevedemo reševanje linearnih diferenčnih enačb s konstantnimi koeficienti v reševanje algebraičnih enačb.

$$f[k] \xrightarrow{Z} F[z]$$

$$f[k] \xleftarrow{Z^{-1}} F[z]$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad f(t) = 0,\ t < 0 \text{ pogoj}$$

$$\boxed{F[z] = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]\, z^{-k}} \quad ; \quad f[k] = 0,\ k < 0$$

* Lastnosti Z-preslikave

1. LINEARNOST

$$Z\left[\alpha_1 \cdot f_1[k] + \alpha_2 \cdot f_2[k]\right] = \alpha_1 F_1[z] + \alpha_2 \cdot F_2[z]$$

! 2. premik v desno

$$f[k] \cdot u[k] \xrightarrow{Z} F[z]$$

$$Z\left[f[k-k_0] \cdot u[k-k_0]\right] = \frac{1}{z^{k_0}} \cdot F[z]$$

! 3. premik v levo

$$Z\left[f[k+1]\, u[k]\right] = z \cdot F[z] - z \cdot f[0]$$

$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$ (podobnost!)

$Z\left[f[k+2]\cdot u[k]\right] = z^2\cdot F[z] - z^2 f[0] - z\cdot f[1]$

$Z\left[f[k+k_0]\cdot u[k]\right] = z^{k_0} F[z] - z^{k_0}\cdot f[0] - z^{k_0-1}\cdot f[1] - \ldots - z f[k_0-1]$

[4] skaliranje v frekvenčnem prostoru

$Z[f[k]] = F[z]$

$Z\left[a^k f[k]\right] = F\left[\frac{z}{a}\right]$

$Z\left[a^{-k} f[k]\right] = F[a\cdot z]$

[5] diskretna konvolucija

$f_1[k] * f_2[k] = \sum_{m=0}^{\infty} f_1[m]\cdot f_2[k-m]$

$Z\left[f_1[k] * f_2[k]\right] = F_1[z]\cdot F_2[z]$

→ predstavlja neko filtriranje

TABELA Z-PRESLIKAVE

$f[k]$	$F[z]$
$\delta[k] = \begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$	1
$u[k]$	$\frac{z}{z-1}$
k	$\frac{z}{(z+1)^2}$
k^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$!
$k\cdot a^k$	$\frac{z\cdot a}{(z-a)^2}$

$$\begin{cases} a^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \frac{1}{z-a}$$

- Tako kot pri Laplaceovi preslikavi si tudi z-preslikavi največkrat pomagamo z lastnostmi z-preslikave in tabelo preslikav.
- Funkcijo $F[z]$ poskušamo zapisati kot vsoto preprostih izrazov katerih inverzne z-preslikave so tabelirane!

$$f[k+n] + a_{n-1} f[k+n-1] + \dots + a_1 \cdot f[k+1] + a_0 \cdot f[k] = b_0 \cdot u[k] \quad / Z$$

$y[k], \; k = 0, 1, 2, \dots$

neke konstante

$$\left(z^n F[z] - z^n f[0] - \dots - z \cdot f[n-1]\right) + a_{n-1}\left(z^{n-1} \cdot F[z] - z^{n-1} f[0] - \dots\right)$$

$$+ \dots + a_1\left(z \cdot F[z] - z f[0]\right) + a_0 F[z] = b_0 \cdot U[z]$$

$$\left(z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0\right) F[z] + P[z] = b_0 \cdot U[z]$$

polinom [tvori ga n začetnih stanj]

$Q[z]$ ... značilni/karakteristični polinom

$Q[z] = 0$ – značilna enačba

$\Rightarrow$ ničle: $z_1, z_2, \dots, z_n$

$$Q[z] \cdot F[z] - P[z] = b_0 \cdot U[z]$$

$$Q[z] \cdot F[z] = P[z] + b_0 \cdot U[z]$$

$$\boxed{F[z] = \frac{P[z] + b_0 \cdot U[z]}{Q[z]}}$$

$f[z]$

vzbujanje

Zapis v frekvenčnem prostoru!

začetna stanja

$$F[z] = \frac{P[z]}{Q[z]}$$

- Če poznamo korene potem lahko

$$F[z] = \frac{P[z] + b_0 U[z]}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)}$$ → na splošno kompleksni koreni

$$\boxed{F[z] = \frac{A_1 \cdot z}{z-z_1} + \frac{A_2 \cdot z}{z-z_2} + \dots + \frac{A_n \cdot z}{z-z_n} \Big/ Z^{-1}}$$

$A_i \Rightarrow f[k]$

$$Z^{-1}\left[\frac{A_i z}{z-z_i}\right] = \underline{\underline{A_i \cdot z_i^k}}$$

$\boxed{\text{ZGLED}}$

$$y[z] = \frac{z(z-1)}{(z+0.5)(z-0.5)(z+1)} = \frac{3z}{z+0.5} - \frac{\frac{1}{3}z}{z-0.5} - \frac{\frac{8}{3}z}{z+1} \Big/ Z^{-1}$$

$$y[k] = \underbrace{3(-0.5)^k - \frac{1}{3}(0.5)^k - \frac{8}{3}(-1)^k}_{(\qquad)\cdot u[k]} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

enakovredno

$\boxed{\text{ZGLED}}$

$$y[k+2] = y[k+1] + y[k] \quad / z$$

$\boxed{y[0] = 0 \; ; \; y[1] = 1}$; brez vzbujanja

$$z^2 y[z] - \cancel{z^2 y[0]} - z \cdot y[1] = z \cdot y[z] - \cancel{z \cdot y[0]} + y[z]$$

$$(z^2 - z - 1)\, y[z] = z$$

$$\boxed{y[z] = \frac{z}{z^2 - z - 1}}$$

$Q[z] = z^2 - z - 1 = 0 \quad ; \quad z_1, z_2 = ?$

$$y[z] = \frac{z}{\left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{\left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \Big/ Z^{-1}$$