

STROMAR⁵

STROMAR⁵

10.4.1	Frekvençnetransformacije \mathcal{L} as ∞ zveznih sit	216
10.4.2	Frekvençnetransformacije \mathcal{L} as ∞ diskretnih sit	217
11	Diskretni nakljuçni procesi	219
11.1	Statistika nakljuçnih proces ∞	219
11.1.1	Povpreçnavrednost	220
11.1.2	Stacionarnostin ergodiçnost	220
11.2	Analiza momentov drugegareda	221
11.2.1	Korelacija in kovarianca	222
11.2.2	Kriçna korelacija in kriçna kovarianca	224
11.3	Opis nakljuçnih proces ∞ v frekvençnemprostoru	225
11.4	Enostavni nakljuçni procesi	226
11.4.1	Bernoullijev procesin binarni beli χ^2 um	226
11.4.2	Nakljuçno premikanje in diskretni Wienerjev proces	227
11.5	Markovski procesi	229
11.5.1	VerigeMarkovskih proces ∞	230
11.5.2	Zakriti Markovski modeli	235
11.6	Nakljuçni Gauss ∞ i procesiin beli χ^2 um	240
11.6.1	Diskretni Gauss ∞ i procesi	241
11.6.2	Diskretni beli χ^2 um	242
12	Diskretni adaptivni sistemi	245
12.1	Osnovne znaçilnosti gradiertne metode	253
12.2	Newtnova metoda	256
12.3	Metoda najveçjegavzpona	258
12.4	Primerjava Newtnove metode in metode najveçjestrmine	260
12.5	Ocenagradierta srednjekvadratiçne napake in vpliv napake ocenena adaptacijo261	
	Literatura	265

Frekvenca vzorčenja je obratno sorazmerna intervalu vzorčenja

$$F_s = \frac{1}{T} \quad (2.2)$$

in pove število vzorcev na enoto časa.

Pri vzorčenju hitro spoznamo soodvisnost med časovnima spremenljivkama t in n . Obe sta povezani po periodi vzorčenja T in sicer

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \quad (2.3)$$

Kot posledica te povezave, mora obstajati tudi neko razmerje med frekvenco F zveznega signala (ali Ω) in frekvenco f (oziroma ω) časovno diskretnega signala.

Zaradi lažjega razumevanja vzemimo zvezni signal

$$x_a(t) = A \cdot \cos(2\pi Ft + \Theta) \quad (2.4)$$

ki ga vzorčimo s frekvenco vzorčenja $F_s = \frac{1}{T}$ kar da diskretni signal

$$x_a(nT) = x(n) = A \cdot \cos(2\pi nFT + \Theta) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi Fn}{F_s} + \Theta\right) \quad (2.5)$$

Če primerjamo ta izraz z izrazom, ki smo ga srečali pri časovno diskretnih sinusnih signalih:

$$x(n) = A \cdot \cos(2\pi fn + \Theta), \quad (2.6)$$

tedaj lahko takoj uvidimo povezavo med F in f

$$f = \frac{F}{F_s} \quad (2.7)$$

oziroma

$$\omega = \Omega \cdot T \quad (2.8)$$

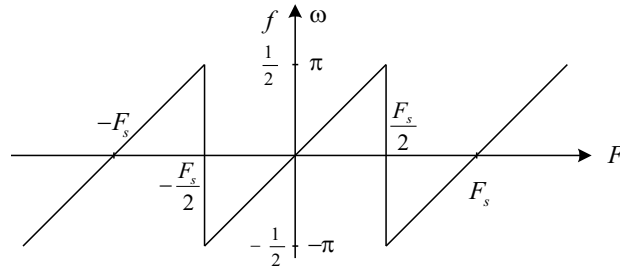
V primeru (2.7) govorimo o relativni ali normirani frekvenci, ki podaja frekvenčno diskretno spremenljivko f .

V primeru zveznega signala sta potekali spremenljivki

$$\begin{aligned} -\infty < F < \infty \\ -\infty < \Omega < \infty \end{aligned} \quad (2.9)$$

dočim pa v časovno diskretnih sistemih je

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \\ -\pi < \omega < \pi \end{aligned} \quad (2.10)$$



Slika 2.2: Preslikava spektra zveznega signala v spekter vzorčenega signala

2.2 Princip vzorčenja

Vrnimo se sedaj, ko smo spoznali povezave med zveznimi in diskretnimi spremenljivkami F , Ω ter f , ω nazaj na princip vzorčenja zveznega-analognega signala.

Pri vzorčenju zveznega signala prihaja do množenja (modulacije) med osnovnim zveznim signalom $x_a(t)$ in nizom Diracovih delta funkcij $\delta(t)$.

$$x_{vz}(t) = x_a(t) \cdot s(t) \quad (2.19)$$

kjer je

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (2.20)$$

Iz tega sledi, da je

$$x_{vz}(t) = x_a(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (2.21)$$

To lahko tudi zapišemo v obliki

$$x_{vz}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) \cdot \delta(t - nT). \quad (2.22)$$

Napravimo sedaj Fourierovo transformacijo (FT) med signalom x_{vz} , kar predstavlja konvolucijo med FT $X_a(\Omega)$ in $S(\Omega)$.

$$S(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k \cdot \Omega_{vz}) \quad (2.23)$$

kjer je $\Omega_{vz} = \frac{2\pi}{T}$ in je frekvenca vzorčenja v radianih na sekundo (rad/s). Ker je

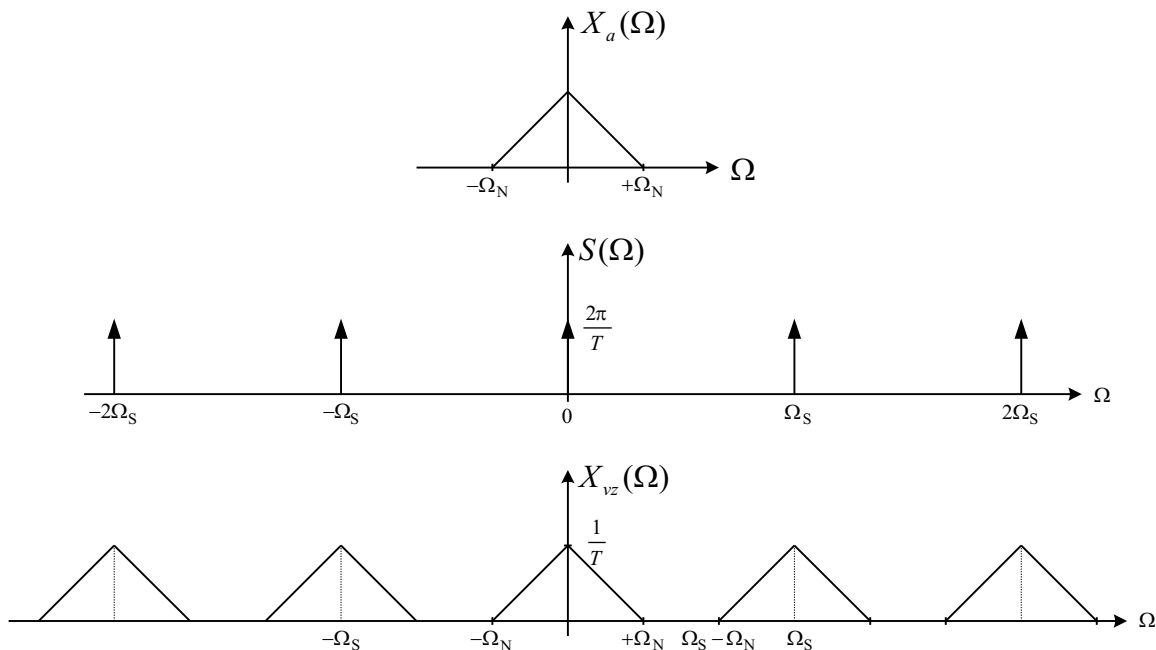
$$X_{vz}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(\Omega) * S(\Omega) \quad (2.24)$$

kjer $*$ pomeni konvolucijo, sledi

$$X_{vz}(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(\Omega - k \cdot \Omega_{vz}). \quad (2.25)$$

Vidimo, da je FT časovno diskretnega, torej vzorčnega signala, $x_{vz}(t)$ sestavljena iz periodično se ponavljajočih kopij FT zveznega signala $x_a(t)$.

Kopije $X_a(\Omega)$ so multiplicirane s celoštevilčnim faktorjem vzorčevalne frekvence F_{vz} , na katere se preslikajo kot je razvidno na sliki 2.3.



Slika 2.3: Posledica vzorčenja analognega signala v frekvenčnem prostoru

Iz slike 2.3 je razvidno, da v primeru ko je spekter signala v mejah:

$$\Omega_{vz} - \Omega_N > \Omega_N \quad \text{ali} \quad \Omega_{vz} > 2\Omega_N \quad (2.26)$$

ne prihaja do prekrivanja posameznih kopij frekvenčnih spektrov. V tem primeru lahko iz vzorčenega signala $x_{vz}(t)$ restavriramo analogni, vzorčeni signal $x_a(t)$ tako, da še uporabimo idealno nizko sito $H_r(\Omega)$.

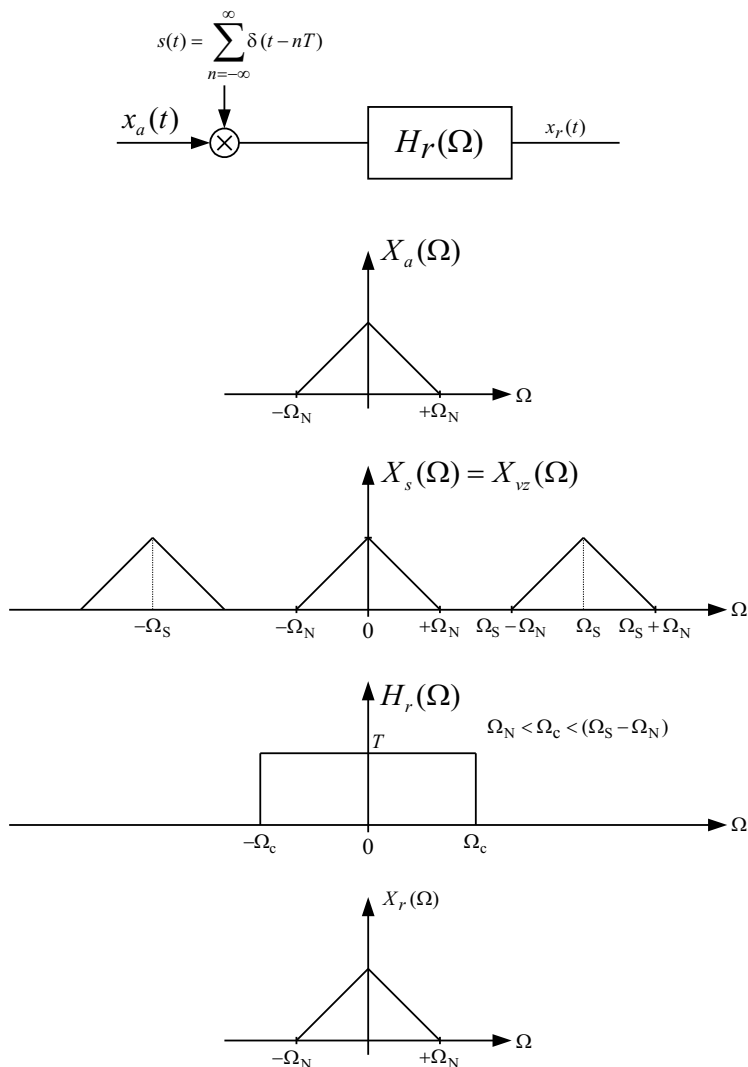
Vidimo, da je rekonstruiran signal po situ $H_r(\Omega)$

$$X_r(\Omega) = H_r(\Omega) \cdot X_{vz}(\Omega). \quad (2.27)$$

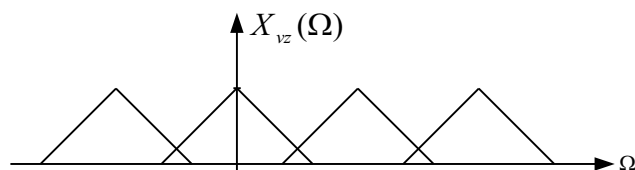
Če upoštevamo propustne omejitve idealnega nizkega sita, potem velja

$$X_r(\Omega) = X_a(\Omega). \quad (2.28)$$

Če pa je $\Omega_{vz} \leq 2\Omega_N$, tedaj se kopije spektrov $X_a(\Omega)$ prekrivajo in $X_a(\Omega)$ ne moremo rekonstruirati z uporabo nizkega sita.



Slika 2.4: Rekonstrukcija signala z uporabo nizkega sita



Slika 2.5: Prekrivanje spektrov

2.3 Nyquistov teorem o vzorčenju

Naj bo $x_a(t)$ frekvenčno omejen signal

$$X_a(\Omega) \quad \text{za} \quad |\Omega| > \Omega_N. \quad (2.29)$$

Potem je $x_a(t)$ enolično določen z vzorci:

$$x[n] = x_a(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.30)$$

če velja da

$$\Omega_{vz} = \frac{2\pi}{T} = 2\Omega_N \quad (2.31)$$

Frekvenco Ω_N največkrat kar imenujemo kot Nyquistovo frekvenco in $2\Omega_N$ je Nyquistova vzorčevalna frekvenca, ki je minimalna frekvenca vzorčenja. Pri tem pogoju ne prihaja do prekrivanja spektrov in signal lahko rekonstruiramo.

2.4 Rekonstrukcija pasovno omejenega signala iz vzorcev

Glede na teorem o vzorčenju časovno zveznega frekvenčno pasovno omejenega signala, lahko ta signal točno rekonstruiramo iz znanih vzorcev signala.

V predhodnem poglavju smo videli, da v primeru množenja zveznega signala z “glavnikasto funkcijo” (vlakom δ impulzov) dobimo vzorčen signal, katerega spekter je enak spektru zveznega signala, le da se ponavlja okoli mnogokratnikov vzorčevalne frekvence. Ko smo ta signal filtrirali z ustreznim nizkim sitom, smo po primerjavi spektra vzorčenega in filtriranega signala s spektrom zveznega signala ugotovili, da sta spektra identična.

Če torej imamo niz vzorcev $x[n]$, lahko oblikujemo vlak impulzov $x_a(t)$, katerih zaporedni impulzi pripadajo površini signala:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT) \quad (2.32)$$

n -ti vzorec je povezan z impulzom $t = n \cdot T$, kjer je T perioda vzorčenja.

Če sedaj iz tega vlaka impulzov vodimo posamične impulze na vhod idealnega nizkega in časovno zveznega sita, katerega frekvenčni odziv je $H_r(\Omega)$ in impulzni odziv je $h_r(t)$, potem na izhodu sita dobimo

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot h_r(t - nT) \quad (2.33)$$

Vzemimo sedaj idealno sito z ojačanjem T (da odpravimo faktor $\frac{1}{T}$) in njegovo frekvenco rezanja (*cut off*) Ω_c . Ta leži med Ω_N in $\Omega_{vz} - \Omega_N$. Najprimerneje je, da je $\Omega_c = \frac{\Omega_{vz}}{2} = \frac{\pi}{T}$.

Na sliki 2.6 b vidimo frekvenčni odziv idealnega nizkega sita. Ustrezní impulzni odziv $h_r(t)$ je inverzna FT $H_r(\Omega)$, ki je pri znani mejni frekvenci $\frac{\pi}{T}$ enak izrazu

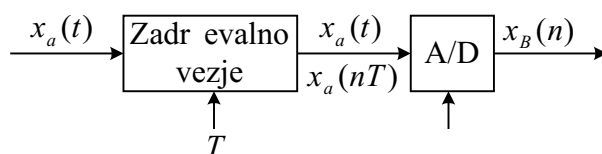
$$h_r(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{T}t)}{\frac{\pi}{T}t} \quad (2.34)$$

Poglavje 3

Kvantizacija signala

V praksi je kvantizacija zveznega v diskretni signal omejena s končno dolžino binarne besede, s katero predstavimo zvezni signal. Takšno pretvorbo realiziramo z analogno/digitalnim (A/D) pretvornikom, katerega dolžina besede je od 10 do 16-bitov. Tako lahko zajeti - vzorčni signal teoretično razdelimo od 2048 nivojev pri 10-bitnem pretvorniku in do 65536 nivojev pri 16-bitnem pretvorniku.

Že samo zajemanje ni idealno, zato ker traja več časa kot smo teoretično predpostavili, smo primorani pred A/D pretvorbo postaviti zadrževalno vezje s slike 3.1



Slika 3.1: Potek A/D transformacije

Izhodni signal iz idealnega zadrževalnega vezja je

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot h_0(t - nT) \quad (3.1)$$

kjer so $x[n] = x_a(nT)$ idealizirani vzorci $x_a(t)$ in $h_0(t)$ je impulzni odziv zadrževalnega vezja npr. ničtega reda:

$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T, \\ 0 & \text{drugače.} \end{cases} \quad (3.2)$$

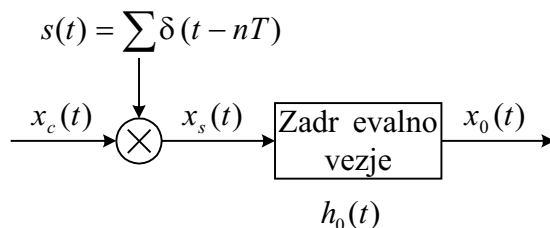
Tako dobimo iz enačbe (3.1) izraz

$$x_a(t) = h_0 * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) \cdot \delta(t - nT) \quad (3.3)$$

Zadrževalna vezja so realizirana tako, da signal $x_a(t)$ vzorčijo v zelo kratkem času, nakar vezje zadrževalnika ohranja vrednost zajetega signala vse do naslednjega zajetega signala in to čim natančneje.

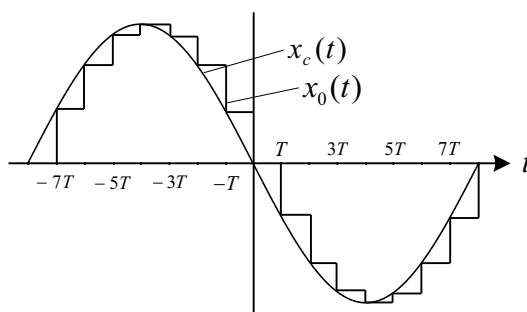
Zelo stroga zahteva po ohranjanju vrednosti signala postavlja A/D pretvornik, katerega načina delovanja ne bomo obravnavali.

Idealizirano sliko postopka kvantizacije in zadrževanja lahko prikažemo na sliki 3.2



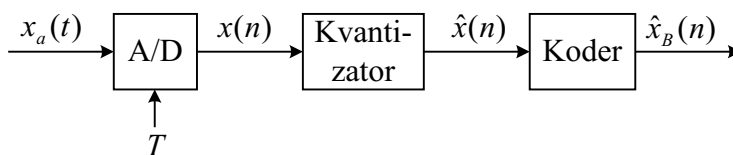
Slika 3.2: Vzorčenje signala z zadrževalnikom

in razmerje med vhodnim in sledenim-zadržanim signalom na sliki 3.3



Slika 3.3: Vzorčenje in zadrževanje signala

Pripadajoči model, ki ga obravnavamo v tem poglavju pa je podan na sliki 3.4



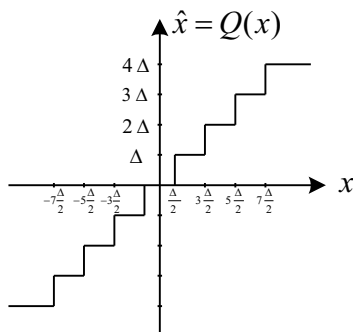
Slika 3.4: Model sistema vzorčenja in kvantizacije

Kvantizator (A/D) pretvornik je nelinearen sistem, ki pretvarja vhodne vzorce $x[n]$ v končni niz v naprej predpisanih simbolov

$$\hat{x}[n] = Q(x[n]) \quad (3.4)$$

kjer je $\hat{x}[n]$ kvantizirana predstavitev $x(n)$. Govorimo o *enolični kvantizaciji s konstantnim korakom*.

Na sliki 3.5 je predstavljen tipični kvantizator, ki razpozna pozitivne in negativne signale.



Slika 3.5: Kvantizacijski nivoji kvantizatorja v odvisnosti od vhoda $x(n)$

V splošnem imamo 2^{B+1} kvantizacijskih nivojev. Kot vidimo je teh vedno sodo število, število bitov s katerimi predstavimo ustrezno število nivojev pa je $B + 1$. Zato govorimo o $B + 1$ bitni binarni kodi, ki je za različne signale \hat{x} predstavljena v tabeli 3.1.

Binarni simboli	vhodna vrednost \hat{x}
0 1 1	$3/4$
0 1 0	$1/2$
0 0 1	$1/4$
0 0 0	0
1 1 1	$-1/4$
1 1 0	$-1/2$
1 0 1	$-3/4$
1 0 0	-1

Tabela 3.1: $B + 1$ bitna binarna koda

V splošnem moramo opraviti z dvojiškim komplementom v obliki

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_B \quad (3.5)$$

katerega število, ki mu komplement pripada ima vrednost

$$a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \dots + a_B 2^{-B} \quad (3.6)$$

Razmerje med dolžino kodne besede in številom kvantizacijskih nivojev je odvisno od parametra, ki določa celotno področje A/D pretvornika.

Tipične vrednosti A/D pretvornikov 10, 5 in 1 volt. Iz predhodne slike vidimo, da je korak kvantizatorja določen z:

$$\Delta = \frac{2X_{max}}{2^{B+1}} = \frac{X_{max}}{2^B} \quad (3.7)$$

$$-\Delta/2 \leq e_q(n) \leq \Delta/2 \quad (3.10)$$

zmanjša in točnost kvantizacijskega A/D pretvornika se poveča.

Kvaliteto kvantizatorja (3.11) merimo z razmerjem moči signala P_x in kvantizacijskim šumom P_q SQNR (Signal-to-quantization noise ratio):

$$SQNR = \frac{P_x}{P_q} \quad (3.11)$$

Največkrat pa to razmerje podamo kar v decibelih (3.12):

$$SQNR[dB] = 10 \cdot \log \frac{P_x}{P_q} \quad (3.12)$$

Ker območju Δ amplitudno zveznega signala priredimo eno diskretno vrednost, pomeni, da je kvantizacija nereverzibilen proces, ki povzroča izgubo informacije. Velikost popačenja (izgube) je odvisna od števila bitov, ki jih uporabimo pri kvantiziranju. To natančnost določimo glede na ceno A/D pretvornika in vzorčevalno frekvenco. Cena se veča z večanjem točnosti in vzorčne frekvence.

Ker želimo doseči pri postopkih kodiranja čim višjo kakovost zapisa signala s čim manjšim številom bitov so kodirniki razviti za optimalno kodiranje signalov v njegovem frekvenčnem območju, za druge signale pa so največkrat neuporabni.

Kvantizirani signal je zaradi postopka kvantizacije do neke mere popačen. Popačitve zaradi postopka kvantizacije signala niso zaželeni. Zato poskušamo pri danem številu bitov kvantizirati s čim manj popačitvami. Kvantizatorje delimo na:

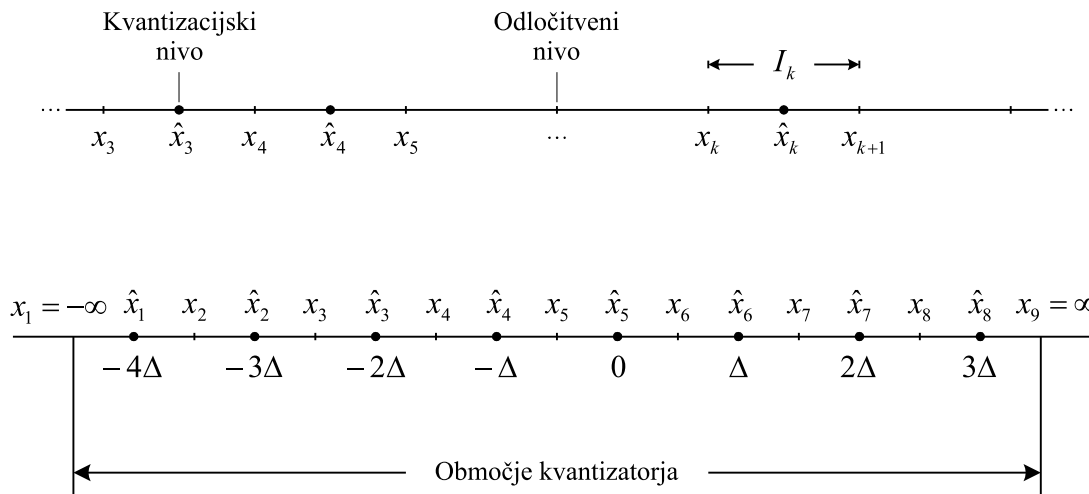
- enakomerne in neenakomerne ter na
- fiksne in adaptivne

Oglejmo si le podrobneje enakomerne kvantizatorje, ostali kvantizatorji pa so prezahtevni za sedanjo obravnavo, prav tako pa so tudi zahtevni postopki rekonstrukcije tako kvantiziranega signala.

3.1 Enakomerna kvantizacija

3.1.1 Pulzno kodna modulacija (PCM)

Osnovna naloga A/D pretvornika je pretvorba zveznega amplitudnega signala v diskretno zaporedje digitalnih kod (besed). Ta pretvorba je sestavljena iz dveh procesov in sicer kvantizacije ter kodiranja. Kvantizator je nelinearen in nereverzibilen proces 3.7, ki priredi amplitudi $x(n) = x_a(nT)$ določeno amplitudo (približno vrednost) iz končne zaloge vrednosti.



Slika 3.7: Proces kvantizacije

- proces kvantizacije razdelimo na odločitvene nivoje x_i in kvantizacijske nivoje l_i , ki jih dobimo na izhodu, kot rezultat, pri čemer je I_i interval med odločitvenimi nivoji;
- primer sredinske kvantizacije, ko je 0 vključena v kvantizacijsko področje. V tem primeru imamo 8 nivojev, kjer smatramo ekstremna odločitvena nivoja za $\pm\infty$.

Vidimo, da je območje amplitude vhodnega signala razdeljeno na N intervalov z $N + 1$ odločitvenimi nivoji $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N+1}$. Možne izhodne vrednosti kvantizatorja so označene z l_1, l_2, \dots, l_N .

$$x_q(n) = Q[x(n)] = l_k \quad (3.13)$$

pri čemer je $x(n) \in \Delta_k$.

Pri operaciji kvantizacije in kodiranja je v večini primerov določanje vrednosti $x_q(n)$ neodvisno od n , t.j. kvantizator je brez spomina, kar pomeni, da je $x_q = Q[x]$. Za linearno kvantizacijo tudi velja še izraz, ki določa že preje omenjeni korak kvantizacije

$$l_{k+1} - l_k = \Delta \quad \text{za } k = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \quad (3.14)$$

Enačba (3.14) velja za končne vrednosti x_k, x_{k+1} , ki določata korak kvantizacije $x_{k+1} - x_k = \Delta$, oz. kvantizacijske stopnice.

Linearne kvantizacije se poslužujemo tedaj, ko moramo dobljeni vzorčni signal še obdelati z npr. signalnim procesorjem. Pri prenosu in shranjevanju signalov, kot je govor, pa uporabimo nelinearne in časovno spremenljive kvantizatorje.

Če definiramo ničlo kot enega izmed kvantizacijskih nivojev, je kvantizator tipa *midtread* 3.8. Če pa jo definiramo kot odločitveni (decizijski) nivo, je to kvantizator tipa *midrise*. Na

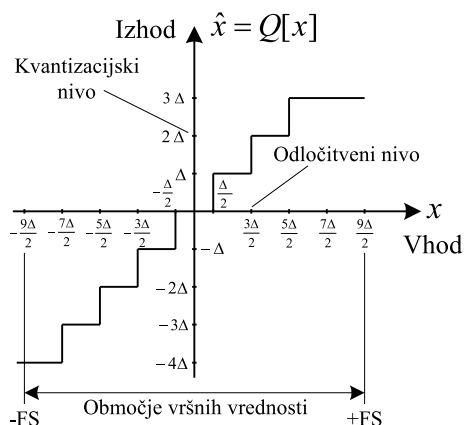
splošno se raje uporablja prvi kvantizator, ker je neobčutljiv na majhne spremembe signala v pozitivno in v negativno smer okoli ničle. Mejna odločitvena nivoja se teoretično smatrata kot $x_1 = -\infty$ in $x_{N+1} = \infty$, tako lahko zajamemo celotno dinamično območje vhodnega signala. Seveda pa v praksi kvantizator obdeluje le končne vrednosti. Območje kvantizatorja je tako določeno kot razlika

$$R = x_1 - x_N \quad (3.15)$$

Glede na območje vhodnega signala ločimo *FSR*-(*full scale range*) pretvornike, za bipolarne in *FS*-(*full scale*) za unipolarne signale.

Pri kvantizaciji vzorčenega signala imamo torej na razpolago le določeno število digitov. V praksi poizkušamo skrajšati dobljene številke iz kodirnika. Za to poznamo dva načina izločanja digitov:

- da preostanek preprosto odrežemo
- da zaokrožimo vrednost



Slika 3.8: Karakteristična funkcija *midtread* kvantizatorja z 8 nivoji. Kodirnik določi vsakemu nivoju lastno binarno kodo.

Pri zaokrožitvenem kvantizatorju dodelimo vzorec $x(n)$ najbližji kvantizacijski vrednosti (3.13), medtem ko v prvem primeru dodelimo $x(n)$ spodnji kvantizacijski vrednosti (3.13).

Zaokrožitev:

$$-\Delta/2 \leq e_q(n) \leq \Delta/2 \quad (3.16)$$

Odrez:

$$0 \leq e_q(n) \leq \Delta \quad (3.17)$$

Proces kodiranja, uporabljen pri A/D pretvorniku, dodeli vsakemu kvantizacijskemu nivoju določeno binarno kodo. Zato potrebujemo za N nivojev N različnih binarnih kod. Z b -bitno besedo imamo na razpolago 2^b različnih binarnih števil. Vidimo, da za N nivojski kvantizator potrebujemo $b \geq \log_2 N$ bitno besedo. Iz tega sledi, da je velikost stopnice ali ločljivost A/D pretvornika določena z $\Delta = R/2^b$, kjer je R območje kvantizatorja.

Pri postopkih kodiranja imamo na voljo enostavno binarno kodo s predznakom, dvojiški komplement, eniški komplement, premik binarnega zapisa, itd. Dvojiški komplement se uporablja v večini signalnih procesorjev, ker lahko dobljeni zapis takoj uporabimo, pri nadaljnjih postopkih obdelave signala, brez dodatnega prekodiranja zapisa.

3.1.2 Analiza napak kvantizacije signala

Pri idealnem kvantizatorju imamo opravljen s kvantizacijsko napako (s kvantizacijskim šumom), ki jo zmanjšamo s povečanjem števila bitov b . Pri realnem kvantizatorju pa žal nastopajo razne degradacije, razvidne s slike 3.9:

- napaka odmika (*Offset error*), ko se prvi prehod ne izvrši točno npr. pri 1 LSB za kvantizator tipa *midtread*,
- napaka dobitka (*Scale-factor ali gain error*) razlika v vrednosti, pri kateri se je izvršil prvi in zadnji prehod, ni enaka FS - 2LSB npr. za unipolarni signal,
- napaka zaradi nelinearnosti (*Linearity error*) nastopi tedaj, ko razlike med prehodnimi vrednostimi niso enake ali enakomerno spreminjajoče,
- izgubljene kode (*Differential error*). Če je ta napaka dovolj velika lahko preskočimo eno ali več kod.

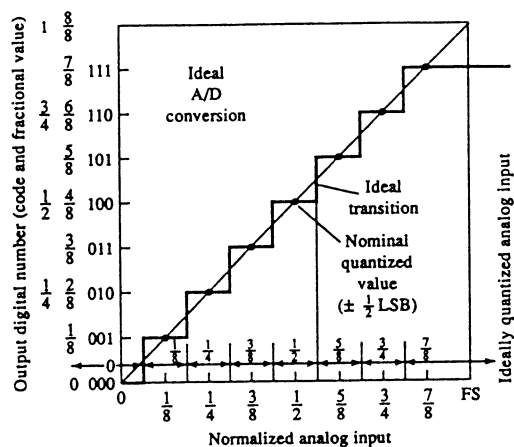
Da bi lahko določili vpliv kvantizacije na A/D pretvornik, uporabljamo v večini primerov statistični pristop. Tako predpostavimo, da je kvantizacijska napaka naključna. To si lahko zamislimo, kot šum, ki ga prištejemo našemu originalnemu vzorčenemu, a nekvantiziranemu signalu 3.9. Če je vhodni signal v območju kvantizatorja, je tedaj napaka omejena (npr. $|e_q(n)| < \Delta/2$.) in jo tudi imenujemo *zrnato* popačenje. Ko pa vhodni signal prekorači območje kvantizatorja, je lahko napaka $e_q(n)$ neomejena in jo imenujemo *prekoračitveno* popačenje. Edina rešitev pred prekoračitveno napako je, da skaliramo (reduciramo) vhodni signal, tako da bo padel v območje kvantizatorja.

Da bi čim lažje izpeljali formule za napako pri kvantiziranju predpostavimo, da je:

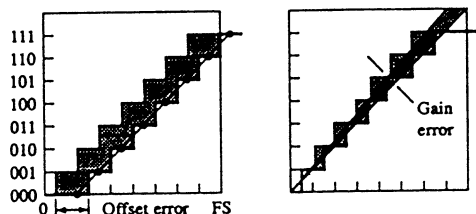
- napaka $e_q(n)$ enakomerno porazdeljena na območju $-\Delta/2 < e_q(n) < \Delta/2$,

- opravlka imamo le z belim šumom, t.j. $e_q(n)$ in $e_q(m)$, pri čemer je $m \neq n$, med seboj nista korelirani,
- tudi niz napak $\{e_q(n)\}$ ni koreliran z nizom signala $x(n)$ in
- niz signala $x(n)$ je stacionaren.

Na splošno omenjene predpostavke ne veljajo, vendar pa se jim lahko približamo, če je kvantizacijski korak dovolj majhen in če signal preskoči več kvantizacijskih nivojev med dvema zaporednima vzorcema. Vpliv napake lahko opišemo z logaritemskim razmerjem med močjo signala P_x in močjo napake P_q *SQNR* (*signal-to-quantization noise (power) ratio*):

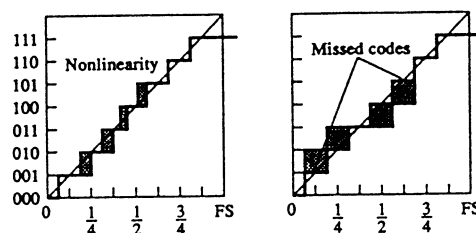


(a)



(b)

(c)



(d)

(e)

Slika 3.9: Karakteristika idealnega 3-bitnega A/D pretvornika a) brez napak in realnega pretvornika s popačenji: b) napaka odmika, c) napaka dobitka, d) napaka zaradi nelinearnosti in e) zgrešene kode.

$$SQNR[dB] = 10 \cdot \log \frac{P_x}{P_q} \quad (3.18)$$

$$P_x = \sigma_x^2 = E[x^2(n)] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x^2(n) \cdot p(n) dx(n) \quad (3.19)$$

$$P_q = \sigma_q^2 = E[e_q^2(n)] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e_q^2 \cdot p_q(n) dx(n) \quad (3.20)$$

Če je kvantizacijska napaka enakomerno porazdeljena 3.11, lahko slednjo enačbo poenostavimo:

$$P_q = \frac{1}{\Delta} \cdot \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 de = \frac{\Delta}{12}, \quad (3.21)$$

kjer je Δ je kvantizacijski korak σ^2 je varianca ali 2. centralni moment, določen z izrazom:

$$\sigma^2 = E[(x - \bar{x})^2] \quad (3.22)$$

S časom se moč signala oziroma standardna deviacija spreminja. E je matematično upanje, ali povprečje, ali 1. centralni moment

$$E[x] = \bar{x} = \int (x \cdot p) dx \quad (3.23)$$

kjer je p funkcija gostote verjetnosti signala x .

Poznamo več različnih porazdelitev verjetnosti:

- Gaussova ali Normalna porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3.24)$$

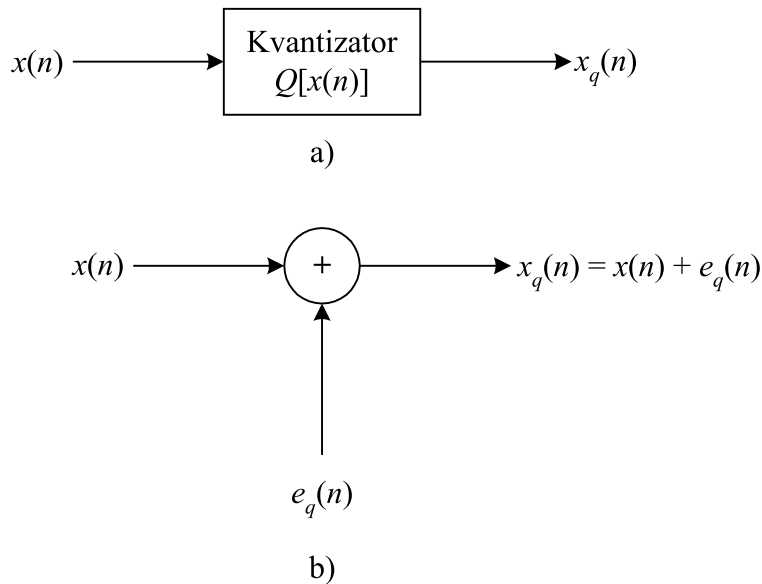
- Laplaceova porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3.25)$$

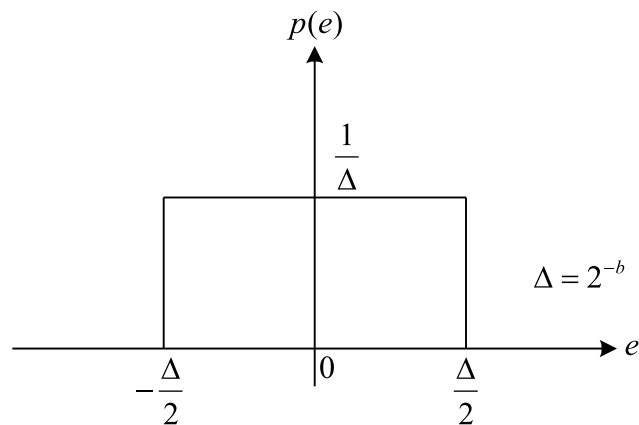
- Gamma porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi \cdot |x|}} e^{-k|x|} \quad (3.26)$$

kjer je $k = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma}$



Slika 3.10: Matematični model kvantizacijske napake $e_q(n)$, ki ga ponazorimo kot vsota z vhodnim signalom $x(n)$.



Slika 3.11: Primer enakomerno porazdeljene kvantizacijske napake, na območju $(-\Delta/2, \Delta/2)$

Največ se uporablja Gaussova porazdelitev (3.24), v zahtevnejših daljših nizih s presledki pa se raje uporablja Laplaceovo porazdelitev (3.25). Laplace-a tudi raje uporabljamo pri izračunih, medtem ko Gaussa za meritve in standardizacijo. Rezultat ni enak, vendar pa razlike niso velike.

Sledi, da je

$$SQNR[dB] = 10 \log \frac{\sigma_x}{\sigma_q} = 6.02 \cdot b + 16,81 - 20 \cdot \log \frac{R}{\sigma_x} \quad (3.27)$$

Če še predpostavimo, da je npr. obseg kvantizatorja $-3\sigma_x < R < 3\sigma_x$, to je $R = 6\sigma_x$, kar pomeni, da le 3% vhodnih signalov prekorači mejno vrednost, bi dobili enačbo (3.28):

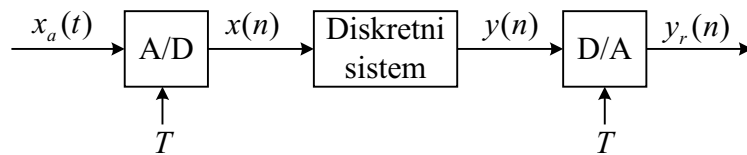
$$SQNR[dB] = 6.02 \cdot b + 1.25 \quad (3.28)$$

To pomeni, da z vsakim dodanim bitom izboljšamo razmerje signal-šum, za 6 dB. V praksi, je število bitov pri kvantizaciji vzorčenega signala, ki se jih učinkovito uporablja, lahko nekoliko manjše od nazivnega števila. Tako ima npr. 16 bitni kvantizator lahko le 14 bitno natančnost.

Poglavje 4

Časovno diskretni sistemi in diskretna obravnava signalov

Večji delež diskretnih sistemov je namenjen obravnavi časovno zveznih signalov, kar prikazuje slika 4.1.



Slika 4.1: Diskretna obdelava zveznih signalov

V sliki lahko prepoznamo niz aplikacij, kjer ustrezno pretvorjeni signal $x_a(t)$ obdelamo in ga nato pretvorimo iz diskretne nazaj v zvezno obliko z D/A pretvornikom.

Najprej si oglejmo potek te obdelave z uporabo ustreznega matematičnega orodja.

A/D pretvornik generira časovno diskretne signale

$$x[n] = x_a(nT) \quad (4.1)$$

iz zveznega signala $x_a(t)$. Fourierova transformacija niza je odvisna od Fourierove transformacije zveznega vhodnega signala:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi n}{T}\right) \quad (4.2)$$

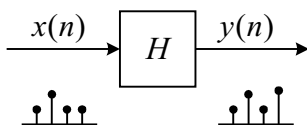
Kot že vemo D/A pretvornik generira zvezni izhodni signal $y_r(t)$ na osnovi enačbe

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)]}{\pi(t - nT)} \quad (4.3)$$

Kot je razvidno, je izhodni niz $y[n]$ odvisen od vhodnega niza $x[n]$, oziroma lahko rečemo, da sta v frekvenčnem prostoru $Y(e^{j\omega})$ in $X(e^{j\omega})$ v soodvisnosti.

Običajno je vhodni signal (pasovno) frekvenčno omejen, tako da je $X_a(\omega) = 0$ za $|\omega| \geq \pi/T$ in v primeru, da je diskretni sistem $I(\omega) = 1$, tedaj je $y[n] = x[n] = x_a(nT)$ in $y_r(t) = x_a(t)$. V tem primeru lahko rečemo, da je diskretni sistem linearen in časovno neodvisen sistem.

4.1 Linearno časovno neodvisni diskretni sistemi



Slika 4.2: Diskretni sistem

Če je diskretni sistem s slike 4.2 linearen in časovno neodvisen, potem velja neka relacija med $x(n)$ in $y(n)$

$$y(n) = H[x(n)] \quad (4.4)$$

kjer simbol H predstavlja transformacijo ali operator sistema nad $x(n)$.

V prenosni funkciji H , oziroma v operatorju je zajet algoritem obdelave signalov, ki mu lahko tudi rečemo časovno diskretni sistem, ki izvrši določene operacije nad vhodnim signalom. Rezultat operatorja nad vhodnim nizom $x[n]$ je izhodni signalni niz $y[n]$.

Razmerje med enim in drugim signalnim nizom pa določa takozvana vhodno-izhodna povezava ali odvisnost

$$x(n) \xrightarrow{H} y(n) \quad (4.5)$$

Zgornji zapis pomeni, da je $y(n)$ odziv sistema H na vzbujanje $x(n)$.

Če bi opazovali tovrstne sisteme, bi opazili, da je izhod sistema v času $n = n_0$, ne le odvisen samo od vhoda v času $n = n_0$ ($x(n_0)$) temveč tudi od predhodnih vhodov, ki so vzbujali sistem H pred $n = n_0$. To pomeni v $n = n_0 - 1$, ali v $n = n_0 - 2$ itd.

Vzemimo za primer seštevalnik (akumulator), kot prenosno funkcijo H .

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) + x(n) = y(n-1) + x(n) \quad (4.6)$$

od koder izvira izraz akumulacija.

Vzemimo, da imamo dan vhodni signal $x(n)$ za vse $n > n_0$. Na osnovi tega poznavanja želimo določiti odziv sistema za $n \geq n_0$. Za $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ dobimo

$$\begin{aligned} y(n_0) &= y(n_0 - 1) + x(n_0) \\ y(n_0 + 1) &= y(n_0) + x(n_0 + 1) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Vidimo, da na izhod vpliva naš "začetni pogoj" $y(n_0 - 1)$,

$$y(n_0 - 1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k), \quad (4.8)$$

ki pa predstavlja vse vplive vhodnih signalov na sistem vse do časa $n_0 - 1$.

Torej $y(n)$ ni enolično določen, torej je $y(n)$ za vse $n \geq n_0$ odvisen od začetnega pogoja $y(n_0 - 1)$.

Izhod iz sistema je enolično določen z začetnim pogojem $y(n_0 - 1)$ ter nizom vhodnih signalov $x(n)$ za $n \geq n_0$.

V primeru, če je $y(n - 1) = 0$ pravimo, da je sistem sproščen, brez začetnih pogojev.

Lastnosti

Sistem s spominom Kot smo opazili, je izhod $y[n]$ v vsakem diskretnem času n odvisen od vhodnega signala $x[n]$ in začetnega pogoja $y(n - 1)$. Takim sistemom pravimo sistem s spominom.

V primeru, ko je izhod $y[n]$ v vsakem času n odvisen le od vhodne vrednosti $x[n]$ pri istem n , pa govorimo o sistemu brez spomina.

Linearni sistemi Razred linearnih sistemov določimo na osnovi superpozicije. Če poljubna vhodna niza $x_1[n]$ in $x_2[n]$ povzročita na izhodu sistema odziva $y_1[n]$ in $y_2[n]$, tedaj govorimo, da je sistem linearen če in samo če

$$H\{x_1[n] + x_2[n]\} = H\{x_1[n]\} + H\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n] \quad (4.9)$$

in

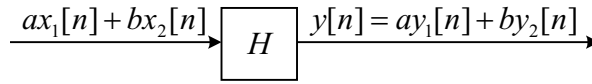
$$H\{a \cdot x[n]\} = a \cdot H\{x[n]\} = a \cdot y[n], \quad (4.10)$$

kjer je a poljubna konstanta.

Prva lastnost je znana kot aditivna lastnost, druga pa je znana pod imenom homogenosti ali skaliranja.

Obe lastnosti lahko združimo v princip superpozicije, ki se glasi:

$$H\{a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]\} = a \cdot H\{x_1[n]\} + b \cdot H\{x_2[n]\} \quad (4.11)$$



Slika 4.3: Linearni sistem

za poljubni konstanti a in b .

Splošno lahko napišemo za niz vhodov:

$$x[n] = \sum_k a_k \cdot x_k[n] \quad (4.12)$$

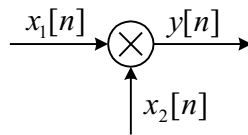
in

$$y[n] = \sum_k a_k \cdot y_k[n] \quad (4.13)$$

kjer je $y[n]$ odziv sistema na vhod $x[n]$.

Množenje je primer operacije brez spomina. S slike 4.4 je razvidno, da produkt dveh signalnih nizov $x_1[n]$ in $x_2[n]$ generira nov signalni niz $y[n]$.

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \quad (4.14)$$



Slika 4.4: Množenje

Časovna neodvisnost Pravimo, da je sistem časovno neodvisen, za katerega velja, da vsak pomik ali zakasnitev niza na vhodu povzroči enak pomik ali zakasnitev na izhodu.

Sistem je torej časovno neodvisen, če za vse n_0 vhodnega niza

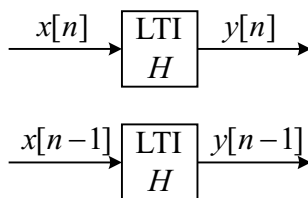
$$x[n] = x[n - n_0] \quad (4.15)$$

velja, da dobimo izhodni niz z vrednostmi

$$y[n] = y[n - n_0] \quad (4.16)$$

Stabilnost Stabilnost lahko določimo v odvisnosti od vhodno izhodnega obnašanja sistema.

Če je vhod v sistemu omejen (kar pomeni, da amplituda ne presega nekih meja) in če je sistem stabilen, tedaj mora biti tudi izhod omejen.



Slika 4.5: Časovna neodvisnost

Iz tega sledi znani BIBO (Bounded Input, Bounded Output) kriterij, ki pravi, da je sistem BIBO stabilen če in samo če vsak omejen vhodni niz $x[n]$ povzroči omejen izhodni niz $y[n]$.

Vhod $x[n]$ je omejen, če velja:

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \quad \text{za vse } n \quad (4.17)$$

Stabilnost torej zahteva, da velja za vsak omejen vhod tudi taka omejena vrednost B_y da velja

$$|y[n]| \leq B_y < \infty \quad \text{za vse } n \quad (4.18)$$

Vzročnost (kavzalnost) Sistem je kavzalen, če je izhodni niz v času $n = n_0$ odvisen le od vseh vhodnih nizov za katere je $n \leq n_0$. To pa vsebuje primer, da če je $x_1[n] = x_2[n]$ za vse $n \leq n_0$, tedaj je tudi $y_1[n] = y_2[n]$ za vse $n \leq n_0$.

Statičnost in dinamičnost sistemov Diskretni sistem je statičen ali brez spomina, če njegov izhod $y(n)$ v trenutku n je odvisen le od vhoda $x(n)$ v istem trenutku n . V vseh drugih primerih govorimo o dinamičnih sistemih ali o sistemu s spominom.

Če je izhod sistema v času n povsem določen z vhodnimi vzorci z intervala $n - N$ do n , pravimo da ima sistem spomin dolžine N .

4.2 Povezovanje časovno diskretnih sistemov

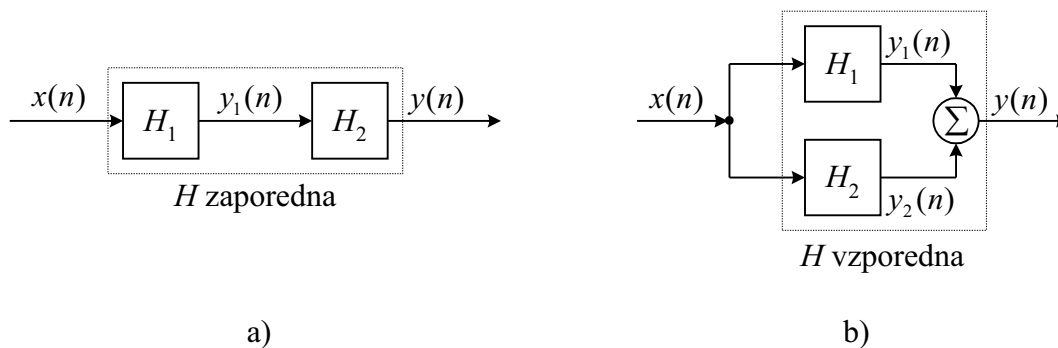
Časovno diskretni sistem lahko povežemo v večje sisteme. V osnovi poznamo dve metodi povezovanja časovno diskretnih sistemov in sicer: zaporedno (serijsko) in vzporedno (paralelno). Oba primera povezovanja sta razvidna s slike 4.6.

V primeru zaporedne povezave je izhod $y_1(n)$ iz prvega sistema H_1

$$y_1(n) = H_1[x(n)] \quad (4.19)$$

vhod v drugi sistem H_2 . Njegov izhod je

$$y(n) = H_2[y_1(n)] = H_2\{H_1[x_1(n)]\} \quad (4.20)$$



Slika 4.6: Zaporedna in vzporedna povezava

Iz povedanega sledi, da lahko obe prenosni funkciji H_1 in H_2 združimo v celovito prenosno funkcijo zaporednega sistema povezav:

$$H_c = H_2 \cdot H_1 \quad (4.21)$$

Vidimo, da je vrstni red operacij H_i pomemben. Za poljubne sisteme velja, da

$$H_2H_1 \neq H_1H_2 \quad (4.22)$$

V primeru linearnih in časovno neodvisnih sistemov H_1 , H_2 pa velja, da je tudi H_c časovno neodvisna in da je $H_2H_1 = H_1H_2$, kar pomeni, da je vrstni red izvajanja operatorja nad vhodnim nizom nepomemben in da v obeh primerih dobimo identičen rezultat.

V primeru vzporedne povezave s slike 4.6 b pa dobimo na izhodu prvega sistema $y_1(n)$, na izhodu drugega pa $y_2(n)$. Celoten izhod je v tem primeru

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = H_1[x(n)] + H_2[x(n)] = (H_1 + H_2)[x(n)] = H_{vzp}[x(n)] \quad (4.23)$$

Običajno tvorimo mešane vzporedno-zaporedne povezave, kar omogoča gradnjo kompleksnejših sistemov.

4.3 Analiza časovno diskretnih, linearnih in časovno neodvisnih sistemov (LČN)

Pomembna lastnost sistemov, ki jih bomo obravnavali, je njihova časovna neodvisnost in linearnost.

Večina sistemov za obdelavo signalov spada v razred sistemov z omenjenima lastnostima.

Če je linearnost lastnost, ki jo združujemo s predstavitvijo splošnega niza kot linearne kombinacije, sledi, da lahko linearni sistem v celoti podamo z njegovim impulznim odzivom.

Torej je vhodno izhodno razmerje tisto, ki določa sistem. V splošnem je odziv sistema

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N), x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)], \quad (4.24)$$

kjer F pomeni neko transformacijo nad elementi v oklepaju. Na splošno lahko rečemo, da je časovno neodvisen in linearni sistem podan z

$$y(n) = - \sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k), \quad (4.25)$$

kjer sta $\{a_k\}$ in $\{b_k\}$ niza konstantnih parametrov sistema in sta neodvisna od $x(n)$ in $y(n)$.

Enačba (4.25) je diferenčna enačba in določa delovanje časovno diskretnega linearno časovnega neodvisnega sistema.

Drug pristop analize obnašanja linearno časovno neodvisnega sistema je zasnovan na dekompoziciji vhodnih signalov v osnovne signale. Vsak elementarni, ali osnovni signal vzbudi sistem, zato opazujemo odziv sistema na posamične elementarne signale. Vsota odzivov vseh elementarnih signalov daje celoten odziv na vhodni signal $x(n)$, katerega komponente so $\{x_k(n)\}$

$$x(n) = \sum_k c_k \cdot x_k(n) \quad (4.26)$$

kjer so c_k utežni koeficienti elementarnih signalov. Vzemimo, da je odziv sistema H na elementarni vhodni signal $x_k(n)$ kar $y_k(n)$. Tako dobimo odziv

$$y_k(n) = H[x_k(n)] \quad (4.27)$$

oziroma, celovit odziv sistema na $x(n)$ je

$$y(n) = H[x(n)] = H \left[\sum_k c_k \cdot x_k(n) \right] = \sum_k c_k \cdot H[x_k(n)] = \sum_k c_k \cdot y_k(n). \quad (4.28)$$

Če se omejimo na lastnosti vhodnih signalov, lahko le te predstavimo kot utežen niz impulzov.

Vzemimo kot osnovni vhodni signal $x_k(n) = \delta(n-k)$, kjer k predstavlja zakasnitev enotnega impulza. Ta ima vrednost nič povsod, kjer je $n \neq k$ in ena, kjer je $n = k$.

Kot smo že predstavili signalni niz $[x(n)]$ je ta določen kot vsota osnovnih signalov v različnih časovnih trenutkih. Iz tega razmišljanja sledi, da signale ločimo na posamezne signale v različnih časih $n = k$, celoten signal pa je vsota osnovnih - posameznih signalov:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n-k) \quad (4.29)$$

4.4 Odziv časovno neodvisnega sistema (LČN) na vhodni signal

Vhodni signal smo torej razstavili na uteženo vsoto različno zakasnenih impulzov. Določimo sedaj odziv linearnega sistema na niz vhodnih enotinih impulzov v času $n = k$. Ta odziv označimo s $h(n, k)$ za $-\infty < k < +\infty$

$$y(n, k) = h(n, k) = H[\delta(n - k)] \quad (4.30)$$

Pri tem je n indeks in k je parameter, ki kaže na položaj vhodnega impulza na časovni osi. Namesto zgornjega zapisa lahko uporabimo zapis

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n - k) \quad (4.31)$$

kjer velja, da je $h(n)$ odziv sistema na $\delta(n)$ in $h(n - k)$ je odziv sistema na $\delta(n - k)$.

Če upoštevamo, da je odziv sistema na $x(n)$ vsota uteženih izhodnih odzivov, potem lahko zapišemo

$$y(n) = H[x(n)] = H\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n - k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot H[\delta(n - k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n, k) \quad (4.32)$$

Enačba (4.32) predstavlja odziv linearnega časovnega neodvisnega sistema na poljuben signal.

Torej je odziv linearnega časovnega neodvisnega sistema na enotin impulz $\delta(n)$ kar $h(n)$

$$h(n) = H[\delta(n)] \quad (4.33)$$

tedaj je glede na časovno neodvisnost linearnega sistema

$$h(n - k) = H[\delta(n - k)] \quad (4.34)$$

Tako lahko zapišemo, da je

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n - k) \quad (4.35)$$

kar predstavlja izraz za konvolucijo vsote. Torej, če je $y(n)$ katerega vrednosti so povezane z nizom $h(n)$ in $x(n)$, lahko rečemo, da je $y(n)$ konvolucija $x(n)$ in $h(n)$, kar zapišemo v obliki

$$y(n) = x(n) * h(n), \quad (4.36)$$

in kjer $*$ predstavlja znak za konvolucijo. Če želimo izračunati izhod sistema v času npr. $n = n_0$, tedaj je ta podan z izrazom (4.35), oziroma:

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n_0 - k) \quad (4.37)$$

Pri tem lahko opazimo, da seštevamo po indeksu k in da sta signal $x(k)$ in odziv sistema $h(n_0 - k)$ funkciji k . Prav tako vidimo, da sta niza $x(k)$ in $h(n_0 - k)$ med seboj pomnožena, tako da tvorita nov niz. Elemente tega niza enostavno seštejemo in tako dobimo $y(n_0)$.

Niz $h(n_0 - k)$ dobimo tako, da niz $h(k)$ preslikamo okoli osi $k = 0$, kar da $h(-k)$, nakar dobljeni niz premaknemo za n_0 in dobimo $h(n_0 - k)$.

Celoten postopek konvolucije lahko združimo v štiri korake:

1. Izračunaj preslikavo $h(k)$ okoli $k = 0$, kar da $h(-k)$.
2. Pomakni niz $h(-k)$ za n_0 v desno, če je n_0 pozitiven, drugače v levo, nakar dobiš $h(n_0 - k)$.
3. Pomnoži niz $x(k)$ z tako dobljenim nizom odzivov $h(n_0 - k)$, tako dobimo nov niz $v_{n_0}(k) = x(k) \cdot h(n_0 - k)$.
4. Seštej vse elemente novega niza $v_{n_0}(k)$, vsota vseh seštevčkov da trenutno vrednost konvolucijskega produkta v času $n = n_0$

Primer:

Oglejmo si postopek izračuna konvolucije:

Impulzni odziv linearnega časovno neodvisnega sistema je

$$h(n) = \{1, \overset{n=0}{2}, 1, -1\} \quad (4.38)$$

Določimo odziv sistema na vhodni signalni niz

$$x(n) = \{ \overset{n=0}{1}, 2, 3, 4 \} \quad (4.39)$$

Uporabimo izraz za izračun konvolucije (4.35) in ponazorimo omenjene korake tudi grafično.

Prvi korak: Preslikajmo $h(k)$ okoli $k = 0$, kar da $h(-k)$. Tako dobimo niz s slike 4.7 b.

Drugi korak: Ta korak zahteva izračun konvolucijskega produkta za razne $n_0 = \dots, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Vzemimo, da je prvič $n_0 = 0$. Tako dobimo izraz:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(-k) \quad (4.40)$$

Ker je $n_0 = 0$ ne napravimo pomika niza, pač pa izračunamo produktni niz:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_0(k) = 4 \quad (4.41)$$

Sedaj vzemimo $n_0 = 1$. Premaknemo $h(-k)$ za eno mesto desno in dobimo

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(1-k) \quad (4.42)$$

Ta niz je razviden s slike 4.7 c. Produktni niz, ki ga dobimo je določen z izrazom

$$v_1(x) = x(k) \cdot h(1-k) \quad (4.43)$$

Pri seštetju vseh elementov produktnega niza dobimo odziv

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_1(k) = 8 \quad (4.44)$$

Podobno izračunamo $y(2) = 8$, $y(3) = 3$, $y(4) = -2$, $y(5) = -1$. Za $n > 5$ lahko ugotovimo, da je $y(n > 5) = 0$.

Prav tako moramo oceniti $y(n)$ za negativne vrednosti $n < 0$. Tako dobimo $y(-1) = 1$, za ostale $n < -1$ pa je $y(n < -1) = 0$.

□

Preden nadaljujemo z lastnostmi konvolucije, si oglejmo zanimivo lastnost, da je konvolucija neodvisna od izbire preslikave in premika enega od nizov $h(k)$ ali $x(k)$.

Vzemimo zopet izraz za konvolucijsko vsoto:

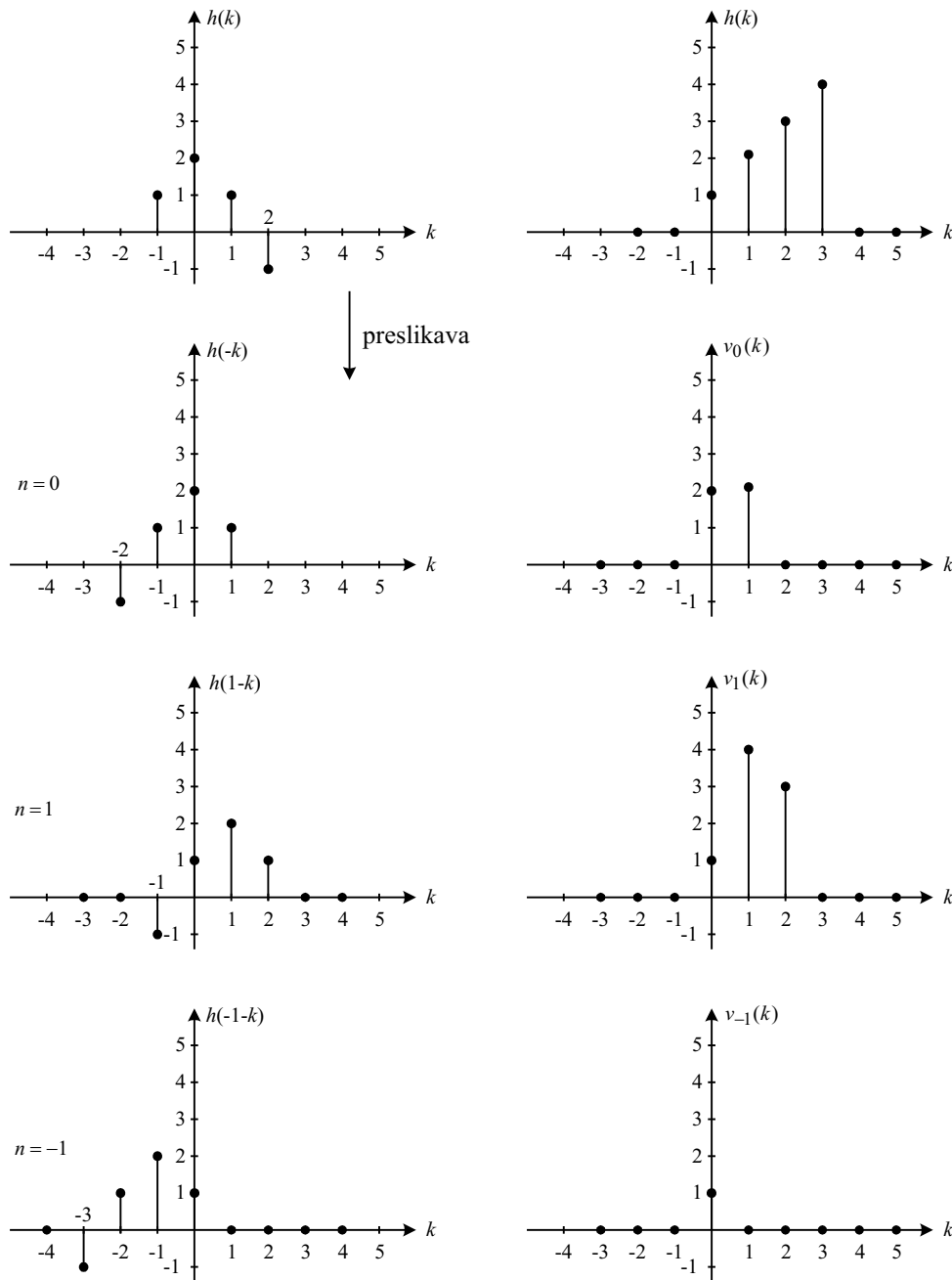
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k) \quad (4.45)$$

Pri tem zamenjajmo izraz v vsoti z $m = (n - k)$. Torej je $k = n - m$. Če to vstavimo v izraz konvolucijske vsote, dobimo:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n-m) \cdot h(m) \quad (4.46)$$

oziroma m lahko zamenjamo s k in dobimo

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k) \cdot h(k) \quad (4.47)$$



Slika 4.7: Postopek izračuna konvolucije

Lastnosti linearne konvolucije

Konvolucijsko vsoto običajno zamenjamo z zvezdico *. Torej je

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k) \quad (4.48)$$

1. Omenjeno lastnost lahko podamo z zakonom o komutativnosti, ki je

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (4.49)$$

2. Omenjena lastnost zadošča tudi zakonu asociativnosti

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * h_1(n) * h_2(n) \quad (4.50)$$

saj velja, da je

$$y(n) = y_1(n) * h_2(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \quad (4.51)$$

Ker pa je zaradi linearnega časovnega neodvisnega sistema

$$\begin{aligned} h(n) &= h_1(n) * h_2(n) \\ y(n) &= x(n) * h(n) \end{aligned} \quad (4.52)$$

velja izraz zakona o asociativnosti tudi v posplošeni obliki za več kot dva sistema. Tako imamo v primeru več zaporedno vezanih sistemov z impulznimi odzivi $h_1(n), h_2(n), \dots, h_l(n)$ ekvivalenten linearen časovno neodvisen sistem, ki ima impulzni odziv podan kot

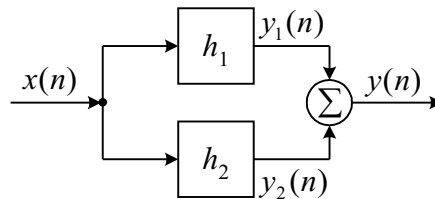
$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) * \dots * h_l(n) \quad (4.53)$$

pri čemer je po zakonu komutativnosti vrstni red zaporedno vezanih sistemov nepomemben.

3. Zakon distributivnosti govori o dveh vzporedno vezanih sistemih, katerih vsote delnih odzivov so enake vsoti odziva celotnega sistema

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (4.54)$$

Ker sta oba sistema vzbujena z istim vhodnim signalom $x(n)$, govorimo o dveh vzporednih sistemih, katerih izhod je podan z $y_1(n) = h_1(n) * x(n)$ in $y_2(n) = h_2(n) * x(n)$.



Slika 4.8: Zakon distributivnosti

V tem primeru je $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$. V primeru l vzporedno vezanih sistemov, je impulzni odziv celotnega sistema

$$h(n) = \sum_{j=1}^l h_j(n) \quad (4.55)$$

4.5 Kavzalni, linearni, časovno neodvisni sistem (LČNS)

V predhodnem poglavju smo že določili definicijo kavzalnega sistema. Kavzalni sistem je tisti sistem, katerega izhod v času n je odvisen le od trenutnega vhoda $x(n_0)$ in od preteklih vhodov $x(n_0 - 1)$, $x(n_0 - 2)$, ... in ne od bodočih vhodov $x(n_0 + 1)$, ... Torej je $y(n)$ odvisen le od tistih $x(n)$ za katere velja, da je $n \leq n_0$.

Vzročnost LČN sistemov lahko prikažemo kot pogoj impulznega odziva.

Vzemimo torej LČN sistem v času $n = n_0$ in ustrezní odziv

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n_0 - k) \quad (4.56)$$

Ta izraz razdelimo:

$$y(n_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \cdot x(n_0 - k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k) \cdot x(n_0 - k) = \\ [h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0 - 1) + h(2)x(n_0 - 2) + \dots + h(-1)x(n_0 + 1) + h(-2)x(n_0 + 2) + \dots] \quad (4.57)$$

Prvi del vsote vsebuje trenutni in vse pretekle signale, drugi del vsote pa prihajajoče signale $x(n_0 + 1)$, $x(n_0 + 2)$, ...

Če je izhod iz sistema odvisen le od trenutnega in preteklih vhodov, potem je jasno, da mora impulzni odziv zadostiti pogoju

$$h(n) = 0 \quad \text{za} \quad n < 0 \quad (4.58)$$

Ker je $h(n)$ odziv sistema brez začetnih pogojev na enotin impulz v $n = 0$ sledi, da je $h(n) = 0$ za $n < 0$. Ta trditev predstavlja potreben in zadosten pogoj za določitev kavzalnosti (vzročnosti).

Sistem je torej kavzalen, če in samo če je njegov odziv na enotin impulz nič za vse negativne n .

To pa pomeni, da lahko v tem primeru poenostavimo izraz za konvolucijo kavzalnega sistema z vhodnim signalom $x(n)$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot x(n - k) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \cdot h(n - k) \quad (4.59)$$

To pa pomeni, da v trenutku n nimamo dostopa do bodočih vhodnih signalov. Za izračun trenutnega izhoda imamo na razpolago le trenutni in pretekle vhodne signale.

Če je vhodni niz za $n < 0$ ničelni niz potem je to kavzalni niz, in če je ničelni za $n < 0$ in $n > 0$ je to bikavzalni niz.

Torej če je vhodni niz v kavzalni LČN sistem kavzalni niz $x(n) = 0$ za $n < 0$, tedaj so meje konvolucijske formule še dodatno omejene:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k) = \sum_{k=0}^n x(k) \cdot h(n-k) \quad (4.60)$$

4.6 Stabilnost LČN sistema in njegov odziv

Kot smo že definirali BIBO pogoj stabilnosti, je sistem stabilen če in samo če je izhodni niz omejen za vsak vhodni niz sistema.

Torej za vse n velja

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \quad (4.61)$$

in da je

$$|y(n)| \leq M_y < \infty. \quad (4.62)$$

Poglejmo sedaj stabilnost sistema, katerega izhod je podan s konvolucijsko formulo:

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k) \right| \quad (4.63)$$

Po trikotniškem izreku velja, da je absolutna vrednost vsote elementov vedno enaka ali manjša vsoti absolutnih vrednosti teh elementov.

$$|y(n)| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| \cdot |x(n-k)| \quad (4.64)$$

kjer je $|x(n)| \leq M_x$ lahko zapišemo

$$|y(n)| = M_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| \quad (4.65)$$

Na osnovi tega izraza lahko pridemo do sklepa o stabilnosti ki pravi, da bo izhod omejen, če impulzni odziv sistema zadošča pogoju

$$S_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty \quad (4.66)$$

kar pomeni, da je vsota posameznih odzivov $|h(k)|$ manjša od neskončne vrednosti.

4.7 Diferenčne enačbe in opis časovno diskretnih sistemov

Vzemimo zopet linearen časovno neodvisen sistem, katerega enotni impulzni odziv je $h(n)$. Pri znanem $x(n)$ vhodu in podanem $h(n)$ lahko iz enačbe za konvolucijsko vsoto izračunamo odziv sistema

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k) \quad (4.67)$$

Sam izraz lahko realiziramo na več načinov. Npr. za sisteme s končnim odzivom FIR (Finite Impulse Response) potrebujemo elemente seštevanja, množenja in končno število pomnilniških celic. Sistem z neskončnim odzivom tipa IIR (Infinite Impulse Response) pa ne moremo realizirati direktno iz enačbe za $y(n)$. Vprašamo se, kakšen pa je postopek, da bi lahko sistemu tipa IIR realizirali iz enačbe konvolucijske vsote. S preobrazbo zapisa te enačbe pridemo do sistema diferenčnih enačb, ki predstavljajo posplošitev zapisa časovno diskretnih sistemov, med katere tipične predstavnike spadata IIR in FIR sistema. Zato si oglejmo postopek na samem primeru.

Naloga, ki smo si jo zadali je, da najdemo posplošeno rekurzivno in nerekurzivno obliko zapisa enačbe konvolucijske vsote.

Vzemimo primer izračuna kumulativnega povprečja signala $x(n)$ na intervalu $0 \leq k \leq n$ določenega z:

$$y(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x(k) \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.68)$$

V izrazu potrebujemo pomnilniške elemente, katerih število raste z n in s t . Shraniti moramo vse elemente in nato izračunati $y(n)$. Intuitivno bi lahko pristopili k računanju tako, da računamo $y(n)$ iz predhodnega $y(n-1)$. Torej dobimo nov izraz

$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = n \cdot y(n-1) + x(n) \quad (4.69)$$

in od tu sledi

$$y(n) = \frac{n}{n+1}y(n-1) + \frac{1}{n+1}x(n) \quad (4.70)$$

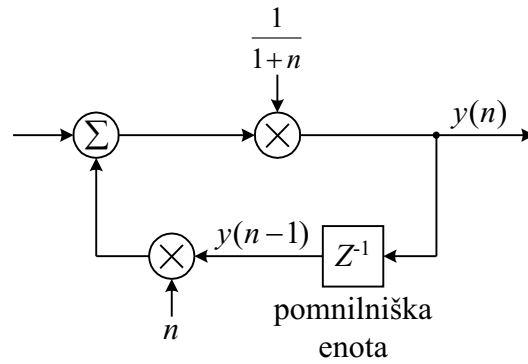
Vidimo, da lahko kumulativno povprečje računamo rekurzivno z uporabo predhodnega rezultata $y(n-1)$ uteženega z $\frac{n}{n+1}$, kateremu prištejemo trenutni vhod $x(n)$, utežen z $\frac{1}{n+1}$.

Zgornji izraz (4.70) predstavlja tipičen rekurzivni zapis sistema.

Realizacija rekurzivnega sistema je razvidna s slike 4.9

Torej izhod sistema je bil odvisen od predhodnega izhoda $y(n-1)$ ter od trenutnega vhoda $x(n)$. Takšen sistem je kavzalni sistem in ga lahko realiziramo kot

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)] \quad (4.71)$$

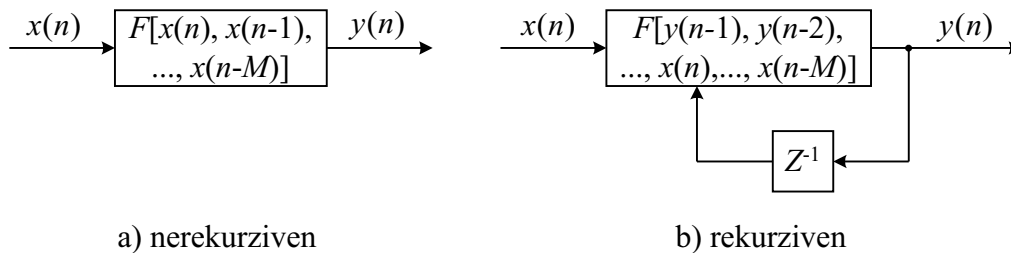


Slika 4.9: Rekurzivni sistem komulativnega povprečevanja

kjer je operator F le običajno utežena vsota trenutnega in preteklih vhodov. Ta zapis predstavlja nerekurziven sistem. Konvolucijska vsota, s katero smo predstavili FIR sistem je kavzalen sistem oblike

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k) \cdot x(n-k) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(M)x(n-M) = F[x(0), \dots, x(n-M)] \quad (4.72)$$

katerega impulzni odziv je $h(n)$ za $0 \leq n \leq M$. Osnovna razlika med sistemoma je razvidna s slike 4.10.



Slika 4.10: Rekurzivni in nerekurzivni sistem

Rekurziven sistem ima povratno zanko z zakasnilno celico (spominom), nerekurzivni pa ne.

4.8 Impulzni odziv LČN sistemov

Impulzni odziv linearnega časovno neodvisnega sistema definiramo kot odziv sistema na enotin impulz, kjer je $x(n) = \delta(n)$.

V primeru rekurzivnega sistema, je $h(n)$ enako odziv sistema na $x(n) = \delta(n)$, le da je sistem v začetnem stanju 0.

Kot primer vzemimo rekurzivni sistem 1. reda z vhodno-izhodno relacijo:

$$y(n) = a \cdot y(n-1) + x(n) \quad (4.73)$$

V tem primeru je odziv sistema na ničelno začetno stanje

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^n a^k \cdot x(n-k) \quad (4.74)$$

oziroma pri $x(n) = \delta(n)$

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^n a^k \cdot \delta(n-k) = a^n \quad n \geq 0 \quad (4.75)$$

Torej je impulzni odziv rekurzivnega sistema 1. reda izražen v že znani enačbi:

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^n h(k) \cdot x(n-k) \quad n \geq 0 \quad (4.76)$$

V primeru, ko je $x(n) = \delta(n)$ je odziv enak

$$y_{zs}(n) = h(n) \quad (4.77)$$

Če bi se vrnil na področje linearnih diferenčnih enačb s konstantnimi koeficienti, bi ugotovili, da obstojata dve osnovni metodi reševanja omenjenih enačb: direktna in indirektna, slednja je znana pod imenom transformacija Z . Ker obravnavamo transformacijo Z v posebnem poglavju, si tu oglejmo le direktno metodo izračuna odziva sistema.

Če želimo rešiti sistem, poiskati odziv $y(n)$ za dani $x(n)$ pri $n \geq 0$, tedaj po direktni metodi razdelimo rešitvi na dva dela:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n), \quad (4.78)$$

kjer je $y_h(n)$ homogeni del, $y_p(n)$ pa partikularni del rešitve.

V našem primeru, kjer je vzbujanje z enotnim impulzom, je partikularni del nič, saj je $x(n) = 0$ za $n > 0$ in torej je

$$y_p(n) = 0 \quad (4.79)$$

Rešitev je samo v iskanju homogenega dela, katerega parametri $\{c_k\}$ določajo odziv sistema na enotni impulz in na dane začetne pogoje.

Vzemimo torej splošeno diferenčno enačbo

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=1}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (4.80)$$

oziroma ekvivalentni zapis

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad \text{pri } a_0 = 1 \quad (4.81)$$

kjer je N red diferenčne enačbe.

Ker lahko predpostavimo, da je vhod $x(n) = 0$, moramo rešiti zgornjo enačbo, podano v homogeni diferenčni enačbi

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = 0 \quad (4.82)$$

Predpostavimo, da je rešitev diferenčne enačbe tipa

$$y_h(n) = \lambda^n \quad (4.83)$$

kjer indeks h pomeni rešitev homogene diferenčne enačbe. Če ta izraz (4.83) vstavimo v (4.82), dobimo

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot \lambda^{n-k} = 0 \quad (4.84)$$

ali

$$\lambda^{n-N}(\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \dots + a_{N-1}\lambda + a_N) = 0 \quad (4.85)$$

Ta polinom se imenuje karakteristični polinom sistema. Koreni polinoma so koreni sistema $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, ki pa so lahko realni ali kompleksni.

Če so koeficienti a_1, a_2, \dots, a_n realni, tedaj se kompleksni koreni pojavljajo v kompleksnih konjugiranih parih. Če so nekateri koreni enaki, govorimo o večkratnih korenih.

Splošna rešitev homogene diferenčne enačbe je v tem primeru

$$y_h(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_N\lambda_N^n \quad (4.86)$$

kjer so c_1, c_2, \dots, c_N utežni koeficienti, ki jih določimo iz začetnih pogojev sistema.

Primer:

Oglejmo si sistem diferenčnih enačb 2. reda:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0 \quad (4.87)$$

Po enačbi (4.83) ima rešitev obliko

$$y_h(n) = \lambda^n \quad (4.88)$$

Po vstavitvi v zgornji izraz dobimo:

$$\begin{aligned} \lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} &= 0 \\ \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) &= 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

Koreni so torej $\lambda = -1, 4$ in rešitev je

$$y_h(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1(-1)^n + c_2(4)^n \quad (4.90)$$

Iz odziva sistema na ničelni vhod $x(n) = 0$ in na začetna pogoja $y(-1)$ in $y(-2)$ dobimo koeficiente c_1, c_2 . Iz enačbe (4.87) dobimo

$$\begin{aligned} y(0) &= 3y(-1) + 4y(-2) \\ y(1) &= 3y(0) + 4y(-1) = 3[3y(-1) + 4y(-2)] + 4y(-1) = 13y(-1) + 12y(-2) \end{aligned} \quad (4.91)$$

Iz enačbe dobimo

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 \\ y(1) &= -c_1 + 4c_2 \end{aligned} \quad (4.92)$$

Če oba izraza izenačimo in uredimo, dobimo rešitev

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2) \\ c_2 &= \frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2) \end{aligned} \quad (4.93)$$

Tako dobimo odziv sistema na ničelni vhod y_{zi}

$$y_{zi}(n) = \left[-\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2) \right] (-1)^n + \left[\frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2) \right] (4)^n \quad (4.94)$$

Za primer znanih $y(-2)$ in $y(-1)$ nato izračunamo $y_{zi}(n)$ oziroma homogeno rešitev sistema linearnih diferenčnih enačb.

V primeru *partikularne rešitve* $y_p(n)$ diferenčne enačbe, moramo zadostiti diferenčni enačbi

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y_p(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad \text{pri } a_0 = 1 \quad (4.95)$$

pri določenem vhodnem signalu $x(n)$ za $n \geq 0$. Rešitev $y(n)$ je odvisna od vhoda $x(n)$.

Primer:

Oglejmo si postopek reševanja na primeru diferenčne enačbe 1. reda:

$$y(n) = a_1 y(n-1) = x(n) \quad |a_1| < 1 \quad (4.96)$$

pri stopničastem vhodnem signalu

$$x(n) = u(n) \quad \text{za } n \geq 0. \quad (4.97)$$

Vzbujajoča funkcija $x(n)$ daje partikularno rešitev

$$y_p(n) = K \cdot u(n) \quad (4.98)$$

kjer je K skalarni faktor, ki mora zadostiti enačbi (4.95). Če vstavimo izraz (4.98) v enačbo (4.96) dobimo

$$Ku(n) + a_1 K[u(n-1)] = u(n) \quad (4.99)$$

K določimo za $n \geq 1$ kjer še nastopajo vsi členi enačbe

$$K + a_1 K = 1 \quad \longrightarrow \quad K = \frac{1}{1 + a_1} \quad (4.100)$$

Partikularna rešitev diferenčne enačbe je

$$y_p(n) = \frac{1}{1 + a_1} u(n) \quad (4.101)$$

□

Povrnimo se sedaj k impulznemu odzivu LČN rekurzivnega sistema. Kot smo že omenili vzamemo enotin impulz kot vhodni signal. Tako dobimo za

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \quad (4.102)$$

odziv ničelnega začetnega stanja

$$y_{zs} = \sum_{k=0}^n a^k \cdot x(n-k) \quad (4.103)$$

pri $x(n) = \delta(n)$

$$y_{zs} = \sum_{k=0}^n a^k \cdot \delta(n-k) = a^n \quad (4.104)$$

Torej je impulzni odziv enačbe (4.102)

$$h(n) = a^n u(n) \quad (4.105)$$

Odziv ničelnega začetnega stanja LČN rekurzivnega sistema je izražen kot konvolucija

$$y_{zs} = \sum_{k=0}^n h(k) \cdot x(n-k) \quad n \geq 0 \quad (4.106)$$

Če je $x(n) = \delta(n)$, tedaj se enačba (4.106) skrči na

$$y_{zs} = h(n) \quad (4.107)$$

Primer:

Določimo impulzni odziv $h(n)$ diferenčne enačbe 2. reda

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) \quad (4.108)$$

Vemo, da je rešitev homogene diferenčne enačbe (kar smo že videli)

$$y_h(n) = c_1(-1)^n + c_2(4)^n \quad \text{za } n > 0 \quad (4.109)$$

Ker je partikularna rešitev nič, ko je $x(n) = \delta(n)$, tedaj je impulzni odziv dan z enačbo (4.109), kjer morata c_1 in c_2 zadostiti enačbi (4.108). Za $n = 0$ in $n = 1$ dobimo iz enačbe (4.108)

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 \\ y(1) &= -c_1 + 4c_2 \end{aligned} \quad (4.110)$$

Iz obeh enačb dobimo, da je $c_1 = -1/5$ in $c_2 = 6/5$ in s tem odziv sistema

$$h(n) = \left[-\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{6}{5}(4)^n \right] u(n). \quad (4.111)$$

□

Če zaključimo razmišljanja, tedaj lahko na osnovi dosedanjih primerov spoznamo, da sistem podan z linearno diferenčno enačbo N -tega reda (4.95) ima rešitev homogene enačbe podane v obliki

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^N C_k \cdot \lambda_k^n, \quad (4.112)$$

kjer so $\{\lambda_k\}$ koreni karakteristične enačbe (polinoma). Tudi impulzni odziv je identičen in sicer

$$h(n) = \sum_{k=1}^N C_k \cdot \lambda_k^n \quad (4.113)$$

kjer pa paramete $\{C_k\}$ določimo z uporabo začetnih pogojev pri $y(-1) = \dots = y(-N) = 0$.

4.9 LČN strukture

Oglejmo si realizacijo sistemov na osnovi linearne diferenčne enačbe s konstantnimi koeficienti. Do sedaj smo spoznali dve osnovni vezavi struktur in sicer zaporedno in vzporedno, tu pa si oglejmo pristop realizacije LČN strukture na osnovi znane diferenčne enačbe

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \quad (4.114)$$

Vzemimo realizacijo, ki predstavlja direktno obliko dobljeno z enačbo (4.114).

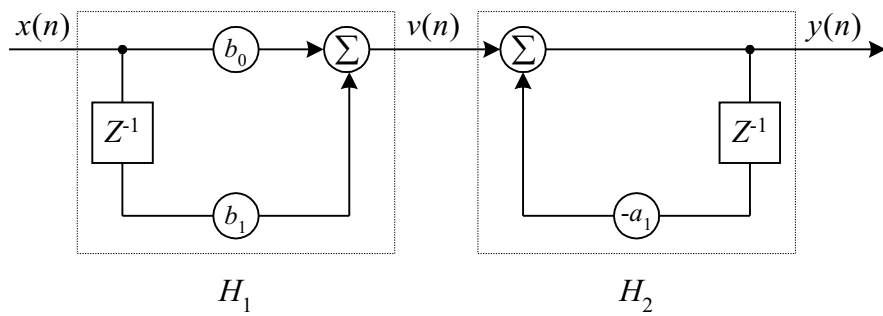
Tej obliki pravimo *direktna oblika I*.

Iz slike 4.11 vidimo, da je prva nerekurzivna enačba

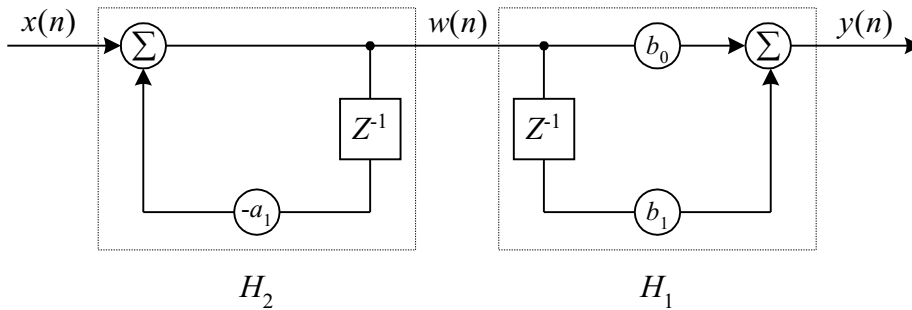
$$v(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \quad (4.115)$$

in druga rekurzivna enačba je

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + v(n) \quad (4.116)$$



Slika 4.11: LČN struktura oblike I



Slika 4.12: LČN struktura oblike II

Ker lahko v LČN sistemih zamenjamo vrstni red LČN sistemov $H_1H_2 = H_2H_1$, tedaj dobimo alternativno strukturo realizacije osnovnega sistema.

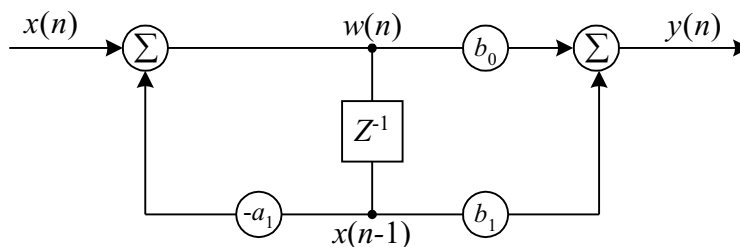
Uvedemo novo spremenljivko $w(n)$. Tako dobimo

$$w(n) = -a_1w(n-1) + x(n) \quad (4.117)$$

in

$$y(n) = b_0w(n) + b_1w(n-1) \quad (4.118)$$

Ta zapis je ekvivalenten osnovni diferenčni enačbi (4.114). Vidimo, da dvoje zakasnitvenih vezij lahko združimo v eno samo vezje in tako dobimo *direktno obliko realizacije II*, ki jo prikazuje slika 4.13.

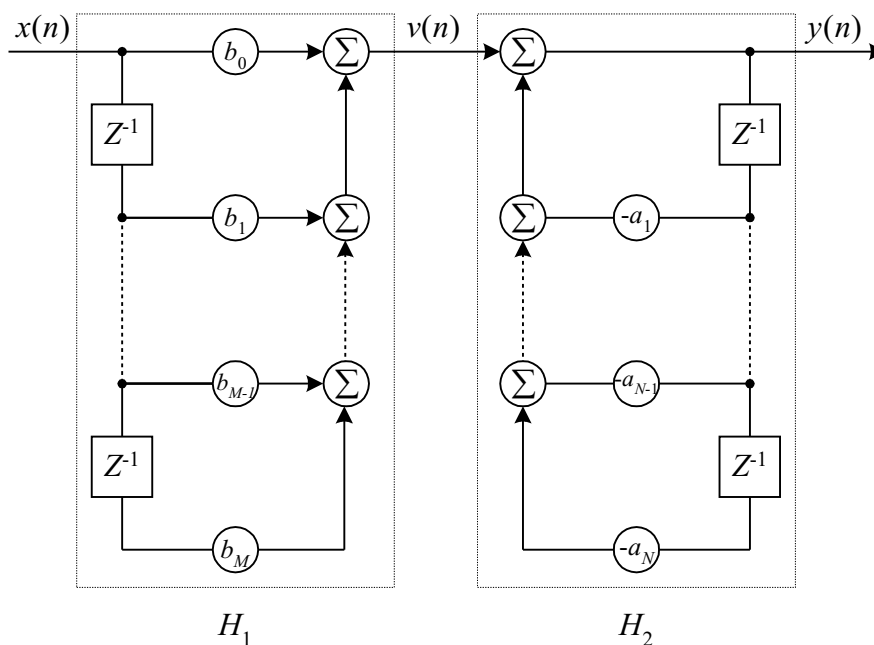


Slika 4.13: končna oblika LČN strukture II

Vzemimo LČN strukturo, podano z diferenčno enačbo

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (4.119)$$

Ekvivalentno strukturo I vidimo na sliki 4.14. Ta vsebuje $M + N$ zakasnitvenih elementov ter $N + M + 1$ množenj. Tudi tu lahko zamenjamo obe skupini enačb, ki predstavljajo prenosni funkciji H_1 in H_2 .



Slika 4.14: Posplošena oblika direktne strukture I

Tudi tu obe skupini zapišemo kot

$$v_1(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (4.120)$$

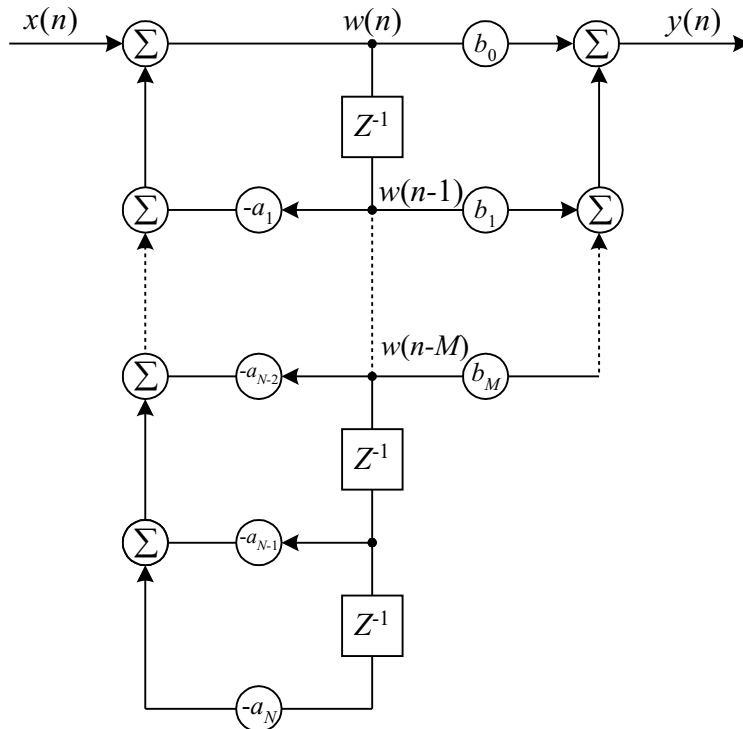
in rekurzivno enačbo

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + v(n) \quad (4.121)$$

Tudi v tem primeru lahko zamenjamo vrstni red izvajanja funkcij H_1 in H_2 , tako da dobimo direktno obliko II s slike 4.15.

Za $N > M$ vidimo, da zapišemo pomožno spremenljivko

$$w(n) = - \sum_{k=1}^N a_k \cdot w(n-k) + x(n) \quad (4.122)$$

Slika 4.15: Posplošena oblika direktne strukture II za $N > M$

in nerekurziven sistem

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot w(n-k) \quad (4.123)$$

V primeru, ko so parametri $a_k = 0$, za $k = 1, \dots, N$, tedaj se oblika (4.114) poenostavi v

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (4.124)$$

kar predstavlja nerekurziven LČN sistem. V tem sistemu imamo $M + 1$ vzorcev vhodnih signalov in $M + 1$ uteži b_k .

Prenosna funkcija predstavlja utežen povprečevalnik (moving average - MA), oziroma povprečevalni sistem.

Ta sistem je sistem tipa FIR, katerega impulzni oziv $h(k)$ je enak koeficientom b_k .

$$h(k) = \begin{cases} b_k & 0 \leq k \leq M, \\ 0 & \text{drugače.} \end{cases} \quad (4.125)$$

Če se zopet povrnemo k enačbi (4.114) in postavimo $M = 0$ tedaj posplošen LČN sistem pretvorimo v čisti rekurzivni sistem podan z enačbo:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + b_0 \cdot x(n) \quad (4.126)$$

Vidimo, da je izhod sistema odvisen od linearne kombinacije N zadnjih izhodov in trenutnega vhoda.

Primer:

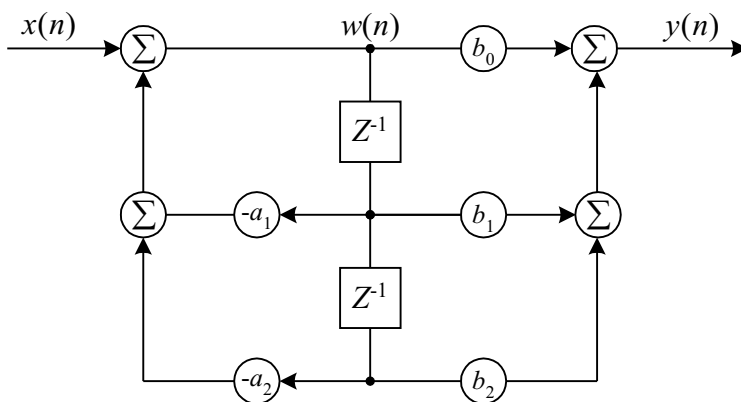
Vzemimo posplošen sistem drugega reda podan z diferenčno enačbo:

$$y(n) = -a_1y(n-1) - a_2y(n-2) + b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2), \quad (4.127)$$

ki smo ga dobili iz enačbe (4.114) za $N = 2$ in $M = 2$. Če postavimo koeficienta $a_1 = a_2 = 0$ potem se enačba (4.127) zreducira v

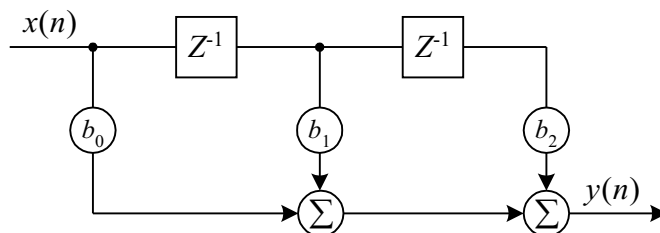
$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2), \quad (4.128)$$

kjer predstavlja tipičen primer sistema FIR. Strukturno I lahko direktno dobimo iz slike posplošene oblike sistema 2. reda



Slika 4.16: Posplošen LČN sistem II reda

le, če opustimo del s koeficienti a_k .

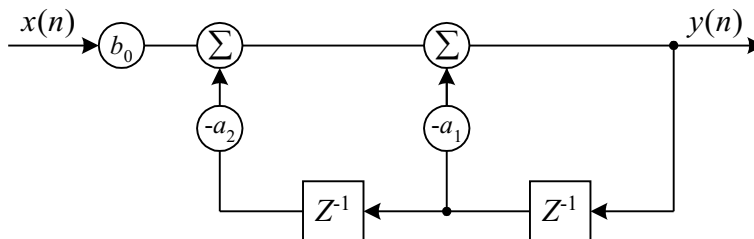


Slika 4.17: FIR sistem II reda

Strukturo rekurzivnega sistema 2. reda dobimo, če postavimo v enačbo (4.114) parametra $b_1 = b_2 = 0$. Tako dobimo čisto diferenčno enačbo 2. reda

$$y(n) = -a_1y(n-1) - a_2y(n-2) + b_0x(n) \quad (4.129)$$

Tovrstni sistem je predstavljen na sliki 4.18 in je čisti rekurzivni sistem tipa IIR.



Slika 4.18: Čisti rekurzivni sistem II reda (IIR)

4.10 Realizacija sistemov FIR na osnovi posplošenega rekurzivnega in nerekurzivnega postopka

Kot smo opazili, imata sistema FIR in IIR različne odzive $h(n)$ na enotin impulz $\delta(n)$. Prvi ima odziv s končnim, drugi pa z neskončnim trajanjem. Eden je nerekurziven, drugi pa rekurziven sistem.

V osnovi je rekurziven sistem podan z enačbo, ki ponazarja vhodno/izhodne relacije:

$$y(n) = F[y(n-1), \dots, y(n-N), x(n), \dots, x(n-M)] \quad (4.130)$$

oziroma za LČN sistem

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (4.131)$$

Rekurzivni sistem vsebuje pretekle odzive, dočim nerekurzivni sistem ni odvisen od preteklih izhodov ampak le od preteklih vhodov:

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)] \quad (4.132)$$

V primeru FIR sistema smo videli, da vedno sistem realiziramo nerekurzivno:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (4.133)$$

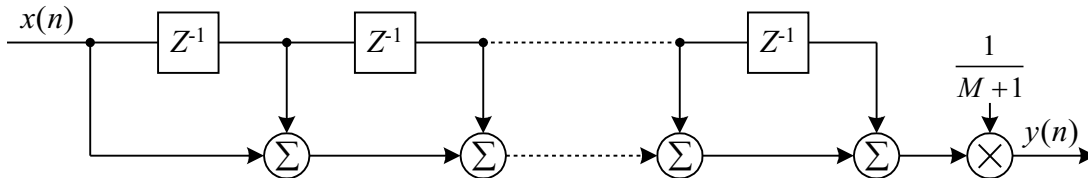
Njegov odziv na enotin impulz na vhodu je enak vrednostim koeficientov $\{b_k\}$.

Če npr. vzamemo MA-povprečevalno sito FIR, tedaj je odziv sistema

$$y(n) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (4.134)$$

in odziv na enotin impulz je

$$h(n) = \frac{1}{M+1} \quad \text{za } 0 \leq n \leq M \quad (4.135)$$



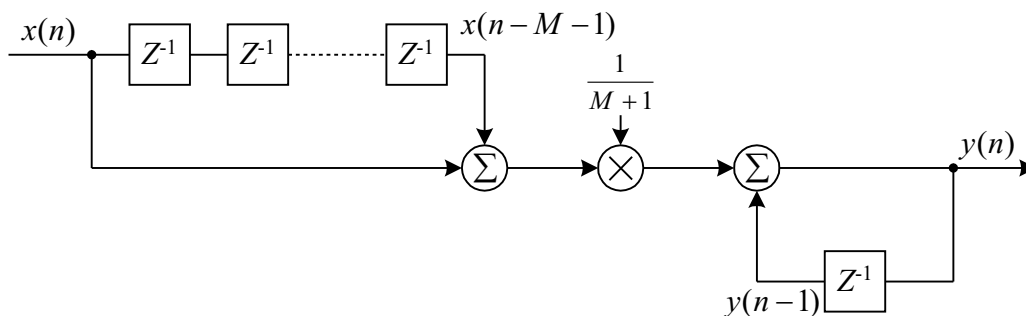
Slika 4.19: Realizacija povprečevalnega sita

Sistem je prikazan na sliki 4.19.

Sedaj pa preoblikujmo izraz (4.134) tako, da mu dodamo in odvezamemo člen $x(n - 1 - k)$ sicer:

$$y(n) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M x(n-1-k) + \frac{1}{M+1} [x(n) - x(n-1-k)] = y(n-1) + \frac{1}{M+1} [x(n) - x(n-1-M)] \quad (4.136)$$

Tovrstni sistem predstavlja rekurzivni sistem tipa FIR. Struktura tako optimirane arhitekture je razvidna s slike 4.20.



Slika 4.20: Struktura rekurzivnega MA sita

4.11 Križno korelacijski in avtokorelacijski nizi

Vzemimo dva signalna niza $\{x(n)\}$ in $\{y(n)\}$ s končno energijo.

Križno korelacijo med nizoma $\{x(n)\}$ in $\{y(n)\}$ označimo z $r_{xy}(l)$ in je določena z izrazom

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot y(n-l) \quad \text{za } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.137)$$

oziroma

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+l) \cdot y(n) \quad \text{za } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.138)$$

kjer indeks l pomeni časovni pomik.

Če izvedemo reverzno križno korelacijo, kjer vzamemo reverzni vrstni red koeficientov, tedaj dobimo križno korelacijski niz:

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot x(n-l) \quad (4.139)$$

oziroma

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n+l) \cdot x(n) \quad (4.140)$$

Če primerjamo vse štiri izraze vidimo da je

$$r_{xy}(l) = r_{yx}(-l) \quad (4.141)$$

To pomeni, da je $r_{xy}(l)$ le preslikava $r_{yx}(-l)$, kjer se preslikava izvede okoli $l = 0$. Isto velja tudi obratno.

V primeru, če želimo izračunati križno korelacijo z uporabo konvolucije, tedaj moramo izpeljati "korelacijo" med $x(n)$ in $y(-n)$, torej velja da je

$$r_{xy}(l) = x(l) * y(-l) \quad (4.142)$$

V primerih, ko je $x(n) = y(n)$ pa govorimo o avtokorelaciji niza $\{x(n)\}$ določeno kot

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot x(n-l) \quad (4.143)$$

oziroma

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+l) \cdot x(n) \quad (4.144)$$

V primeru končnih nizov dolžine N , to pomeni, da so elementi $x(n) = y(n) = 0$ za $n < 0$ in $n \geq N$, lahko križno korelacijo in avtokorelacijo dveh nizov izrazimo z

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n) \cdot y(n-l) \quad (4.145)$$

in

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n) \cdot x(n-l) \quad (4.146)$$

kjer je $i = l$, $k = 0$ za $l \geq 0$ in $i = 0$ za $k = l$ za $l < 0$.

Poglavje 5

Frekvenčna analiza signalov

Fourierova transformacija je eno izmed matematičnih orodij uporabnih pri analizi in sintezi LČN sistemov in predstavlja moderno orodje v današnjih telekomunikacijskih sistemih. Klasične Fourierove metode, kot sta Fourierova vrsta in Fourierov integral se uporabljata pri analizi časovno zveznih signalov in sistemov, to pomeni da za signal $s(t)$, definiramo celoten interval $-\infty < t < \infty$, za vse t . Časovno diskretna Fourierova transformacija (DTFT) kot tudi diskretni Fourierov transform (DTF) sta le primer razširitve osnovnega koncepta, uporabnega pri časovno diskretnih signalih $s(n)$, ki so določeni le v trenutkih n za $-\infty < n < \infty$.

V nadaljevanju bomo govorili o bazičnem konceptu in lastnostih zvezne transformacije (CT) in diskretne transformacije (DT).

Relacija med zveznim in časovno diskretnim signalom je podana z operacijama vzorčenja in rekonstrukcije signala.

5.1 Karakteristične-bazne funkcije in ortogonalnost

Še preden pričnemo z analizo diskretne Fourierove transformacije, si oglejmo idejo, ki je bralcu jasna že iz prvega poglavja in sicer razstavitev signala na karakteristične, oz. bazne signale ali funkcije, ki smo jih predstavili z vsoto različnih fazorjev. Kot nam je znano lahko le te zapišemo s Fourierovo vrsto. Predstavitev poljubnega periodičnega signala $x(t)$ lahko podamo z vsoto enosmerne komponente, osnovnega kosinusnega in sinusnega signala ter višjih harmonikov:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (5.1)$$

Enačba predstavlja zapis omenjenega periodičnega signala s Fourierovo vrsto. Konstantni del in vsak sinusoidni ali kosinusoidni izraz lahko kar imenujemo bazne ali osnovne funkcije. Poznavanje le-teh in njim pripadajočih frekvenc $n\omega$ omogoča popoln zapis signala.

Druga možna predstavitev signala je predstavitev v eksponentni obliki, kar poznamo že iz prvega poglavja te knjige.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad (5.2)$$

V primeru, ko želimo preiti iz periodičnega v aperiodični signal, lahko uporabimo predhodni zapis signala, pri čemer razširimo periodo signala v neskončnost. Tako lahko aperiodični signal podamo z izrazom:

$$x(t) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k F_0 t} \quad (5.3)$$

To lahko tudi smatramo kot vsoto neskončnega števila baznih funkcij, ki jih podaja izraz v eksponentni obliki $e^{j2\pi k F_0 t}$.

Izraz vsote od $-\infty$ do $+\infty$ lahko nadomestimo z integralom tako, da je inverzni Fourierov transform podan z

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi k F_0 t} df \quad (5.4)$$

Ta izraz lahko tudi predstavimo kot limitni primer podajanja signala z baznimi funkcijami, ki so v frekvenčnem prostoru zaradi limitnega procesa neskončno stisnjene druga k drugi, zaradi tega pa tudi zavzemajo celoten frekvenčni prostor od $-\infty$ do $+\infty$.

Če ta koncept posplošimo, vidimo, da lahko vsako periodično funkcijo izrazimo z baznimi funkcijami $\Phi_n(t)$ in s pripadajočimi utežmi x_n .

$$x(t) = x_1\Phi_1(t) + x_2\Phi_2(t) + x_3\Phi_3(t) + \dots = \sum_n x_n\Phi_n(t) \quad (5.5)$$

Bazične funkcije lahko predstavimo kot karakteristične vektorje, pripadajoče uteži x_n , pa kot projekcije periodičnega signala na karakteristične vektorje. Te so lahko realne ali kompleksne in so le števila ne pa funkcije časa.

Sinusne, kosinusne ali eksponentne funkcije niso edine možne bazne funkcije. Če uporabimo katero drugo bazno funkcijo, lahko ocenimo signalu $x(t)$ pripadajoče vrednosti x_n tako, da obe strani predhodne enačbe, kjer smo izrazili z baznimi funkcijami, pomnožimo z eno od baznih funkcij $\Phi_k(t)$ in integriramo po času. Tako dobimo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\Phi_k(t)dt &= x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(t)\Phi_k(t)dt + \\ & x_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(t)\Phi_k(t)dt + \\ & \vdots \\ & x_k \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k^2(t)dt + \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ker za bazne-karakteristične funkcije velja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(t)\Phi_k(t)dt = 0 \quad (5.7)$$

za vse $n \neq k$, razen za $n = k$, kar pomeni, da so karakteristične funkcije med sabo neodvisne, torej so ortogonalne druga na drugo. Zaradi tega izginejo v zgornji enačbi vsi členi, razen tistega za katerega je $n = k$. Tako dobimo poenostavljen izraz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\Phi_k(t)dt = x_k \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k^2(t)dt \quad (5.8)$$

Sinusuide, kosinusuide in kompleksni eksponenti (fazorji) so ortogonalne funkcije, za razliko s pravokotnimi impulzi različnih frekvenc, ki pa niso ortogonalne funkcije.

Trigonometrične in eksponentne funkcije pa niso edine ortogonalne funkcije. K tem baznim funkcijam lahko štejemo tudi Walsh-ove in Haar-ove funkcije. Torej je vsak zapis signala s koeficienti kateregakoli niza baznih ortogonalni funkcij, transformacija signala. To pa zato, ker ti koeficienti omogočajo popoln zapis signala, na osnovi katerih lahko signal tudi restavriramo.

Zapis signala z vsoto vseh baznih funkcij, lahko podaja tudi nek fizikalni pomen. Npr. pri Fourierovi transformaciji pojav izredno močne spektralne črte, napram ostalim črtam, lahko pomeni močne vibracije ali resonanco pri tej frekvenčni črti.

Prav tako pa lahko zapis signala z določenimi karakterističnimi funkcijami, pomaga pri analizi odziva linearne sistema na ta signal. V primeru kompleksnih eksponentnih baznih funkcij lahko odziv sistema podamo z diferencialno enačbo. Rešitev te pa je enostavna, če je vhod v linearni sistem ena izmed teh kompleksnih eksponentnih baznih funkcij. Običajno signal opišemo z več omenjenimi baznimi funkcijami, tedaj poznamo odziva linearne sistema na posamezno bazno funkcijo, odziv celotnega signala pa predstavlja vsoto odzivov vseh baznih funkcij, s katerimi podamo signal. To pa je dejansko bistvo Fourierove analize.

Vhodni signal $x(t)$ nadomestimo z opisom v frekvenčnem prostoru $X(\omega)$, kar pomeni z amplitudami in fazami kompleksnih eksponentov, odvisnih od frekvenc prostora signala. Frekvenčna prenosna funkcija sistema $H(\omega)$ dejansko podaja ojačanje in fazni premik kot funkciji frekvence, tako da v frekvenčnem prostoru izhod iz sistema podamo kot $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$. Izhodni signal v časovnem prostoru je dejansko vsota vseh fazorjev signala podanega s karakterističnimi funkcijami in njim pripadajočimi x_n .

5.1.1 Trigonometrične bazne funkcije v primeru diskretnih signalov

Vzemimo primer vzorčenega niza signala dolžine $N = 8$. Ker imamo osem neodvisnih vzorcev, pomeni, da moramo poznati amplitude osmih ortogonalnih baznih funkcij, s katerimi popol-

noma opišemo vzorčeni signalni niz. Omenjeni niz lahko zapišemo z izrazom

$$x(n) = \sum_n x_n \Phi_n(t) = a_0 \cos(0) + a_1 \cos(2\pi n/8) + b_1 \sin(2\pi n/8) + a_2 \cos(4\pi n/8) + b_2 \sin(4\pi n/8) + a_3 \cos(6\pi n/8) + b_3 \sin(6\pi n/8) + a_4 \cos(8\pi n/8) \quad (5.9)$$

Vidimo, da je izraz zelo podoben trigonometrični Fourierovi vrsti, razen da so členi enačbe diskretni sinusni in kosinusni signali.

S transformacijo, ki smo jo podali v predhodnji enačbi, smo signalni niz osmih vzorcev $x(n)$ nadomestili z osmimi koeficienti $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$, in a_4 .

Ortogonalnost baznih funkcij v tem primeru pomeni, da ko želimo poiskati vrednost koeficienta a_k moramo predhodnjo enačbo pomnožiti s $\cos(2\pi kn/8)$ in nato sešteti vse rezultirajoče vzorce na obeh straneh enačbe. Enak postopek uporabimo pri izračunu koeficientov b_k , le da množimo enačbo s $\sin(2\pi kn/8)$ in seštejemo prispevke na obeh straneh enačbe.

Primer:

Vzemimo signalni niz $x(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0\}$ in določimo koeficient b_1 v predhodnji enačbi. Če to enačbo pomnožimo s $\sin(2\pi n/8)$ in seštejemo vse prispevke na obeh straneh enačbe, dobimo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^7 x(n) \sin(2\pi n/8) &= \sum_{n=0}^7 a_0 \sin(2\pi n/8) + \sum_{n=0}^7 a_1 \cos(2\pi n/8) \sin(2\pi n/8) \\ &+ \sum_{n=0}^7 b_1 \sin^2(2\pi n/8) \\ &+ \sum_{n=0}^7 a_2 \cos(4\pi n/8) \sin(2\pi n/8) \\ &+ \sum_{n=0}^7 b_2 \sin(4\pi n/8) \sin(2\pi n/8) \\ &+ \sum_{n=0}^7 a_3 \cos(6\pi n/8) \sin(2\pi n/8) \\ &+ \sum_{n=0}^7 b_3 \sin(6\pi n/8) \sin(2\pi n/8) \\ &+ \sum_{n=0}^7 a_4 \cos(8\pi n/8) \sin(2\pi n/8) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Na desni strani te enačbe je osem členov, produktov raznih baznih funkcij enako nič razen enega in sicer $\sum_{n=0}^7 b_1 \sin^2(2\pi n/8)$. Če upoštevamo trigonometrične funkcije lahko ta izraz zapišemo v obliki $\sum_{n=0}^7 0.5b_1[1 - \cos(4\pi n/8)]$, kar je enako $4b_1$. Enačbo našega primera torej zapišemo kot

$$\sum_{n=0}^7 x(n) \sin(2\pi n/8) = 4b_1 \quad (5.11)$$

od koder dobimo iskani koeficient

$$b_1 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^7 x(n) \sin(2\pi n/8) \quad (5.12)$$

Na isti način določimo vse preostale koeficiente. Na osnovi poznavanja vseh koeficientov lahko vidimo, da vsota vseh uteženih baznih funkcij tvori signal $x(n)$.

5.2 Fourierove vrste in časovno zvezni periodični signal

Tako opremljeni z znanjem o zapisu signala $x(n)$ z baznimi funkcijami, lahko šele razumemo, da je Fourierova vrsta osnovno matematično orodje, s katerim predstavimo periodične signale. Ta je predstavljena kot linearna utežena vsota harmoničnih sinusoidnih ali kompleksnih eksponentov (fazorjev).

Spomnimo se osnovnega signala, za katerega smo rekli, da je vsota rotirajočih vektorjev. Tega lahko zapišemo v obliki

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k F_0 t} \quad (5.13)$$

Osnovna perioda signala je $T_p = 1/F_0$. Torej lahko govorimo o množici eksponentnih signalov

$$\{e^{j2\pi k F_0 t} \quad \text{za } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (5.14)$$

ki predstavljajo osnovne gradnike raznih periodičnih signalov. Na ustrezno izbiro oziroma obliko vplivajo koeficienti $\{c_k\}$, frekvenca F_0 pa predstavlja osnovno periodo signala $x(t)$.

Primer:

Vzemimo signal $x(t)$ s periodo T_p

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k F_0 t} \quad (5.15)$$

Pomnožimo obe strani z $e^{-j2\pi l F_0 t}$, kjer je l celo število, nakar integriramo obe strani po periodi T_p

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) \cdot e^{-j2\pi l F_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j2\pi l F_0 t} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k F_0 t} \right) dt \quad (5.16)$$

Zamenjamo operator \sum z \int

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi F_0 (k-l)t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left[\frac{e^{j2\pi F_0 (k-l)t}}{j2\pi F_0 (k-l)} \right]_{t_0}^{t_0+T_p} \quad (5.17)$$

Za $k \neq l$ je izraz pri zgornji in spodnji meji enak nič, za $k = l$ pa je

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} dt = t \Big|_{t_0}^{t_0+T_p} = T_p \quad (5.18)$$

Torej se je izraz (5.16) reduciral v

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) \cdot e^{-j2\pi l F_0 t} dt = c_l \cdot T_p \quad (5.19)$$

Od tu dobimo oceno Fourierovih koeficientov periodičnega signala

$$c_l = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) \cdot e^{-j2\pi l F_0 t} dt \quad (5.20)$$

oziroma

$$c_l = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) \cdot e^{-j2\pi l F_0 t} dt \quad (5.21)$$

Torej lahko signal $x(t)$ predstavimo s Fourierovo vrsto

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k F_0 t} \quad (5.22)$$

za vsak t . Enačbi (5.21) in (5.22) predstavljata par, ki omogočata sintezo (5.22) in analizo (5.21) signalov.

5.3 Gostota močnostnega spektra periodičnega signala

Periodičen signal ima neskončno energijo in končno povprečno moč podano z:

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt \quad (5.23)$$

Vzemimo kompleksno konjugiran signal (5.22) in iz enačbe (5.23) dobimo

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left[\frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \quad (5.24)$$

Torej je gostota spektra

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \quad (5.25)$$

kjer $|c_k|^2$ pomeni moč k -te harmonične komponente signala.

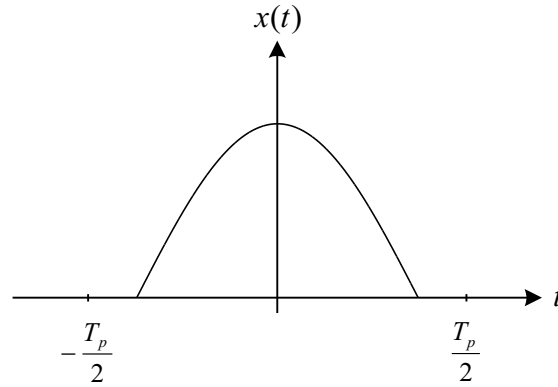
5.4 Fourierova transformacija časovno zveznega aperiodičnega signala

Vzemimo signal s končnim trajanjem s slike 5.1.

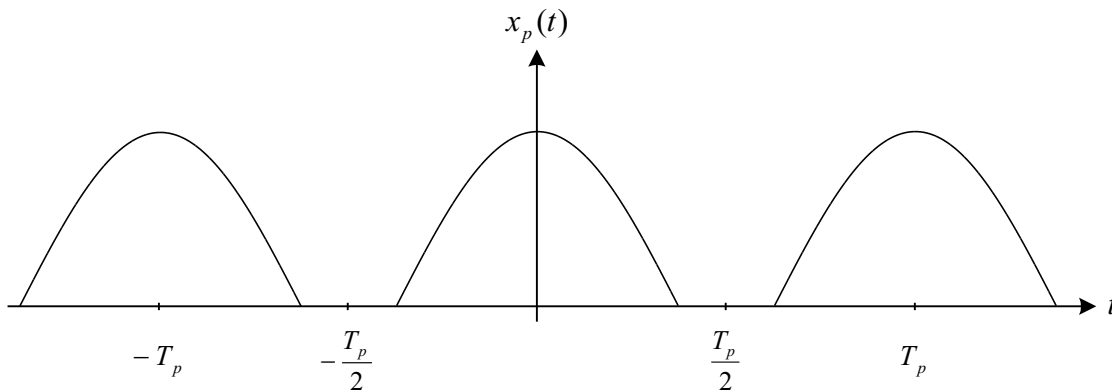
Na osnovi tega signala tvorimo periodičen signal $x_p(t)$ s periodo T_p (slika 5.2).

Očitno sta signala enaka $x_p(t) = x(t)$ v limiti, ko gre perioda proti neskončnosti ($T_p \rightarrow \infty$)

$$x(t) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} x_p(t) \quad (5.26)$$



Slika 5.1: Signal s končnim trajanjem - aperiodični

Slika 5.2: Periodični signal s periodo T_p

To pa pomeni, da lahko dobimo spekter aperiodičnega signala $x(t)$ iz spektra periodičnega signala $x_p(t)$ enostavno tako, da vzamemo $T_p \rightarrow \infty$.

Vzemimo Fourierovo vrsto:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j2\pi F_0 k t} \quad F_0 = \frac{1}{T_p} \quad (5.27)$$

kjer je

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{+T_p/2} x_p(t) e^{-j2\pi F_0 k t} dt \quad (5.28)$$

kjer je na področju $-T_p/2 \leq t \leq T_p/2$ signal $x_p(t) = x(t)$ lahko

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{+T_p/2} x(t) e^{-j2\pi F_0 k t} dt \quad (5.29)$$

Za $|t| > T_p/2$ velja, da je $x(t) = 0$. Torej lahko meje integrala povečamo na $\pm\infty$.

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi F_0 k t} dt \quad (5.30)$$

Imenujmo sedaj funkcijo $X(F)$ -Fourierov transform funkcije $x(t)$

$$X(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft} dt \quad (5.31)$$

$X(F)$ je funkcija zvezne spremenljivke F in ni odvisna od T_p ali F_0 . Če primerjamo izraza (5.30) in (5.31), tedaj opazimo, da lahko izrazimo Fourierove koeficiente c_k z $X(F)$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \cdot X(kF_0), \quad (5.32)$$

oziroma ekvivalentno

$$T_p \cdot c_k = X(kF_0) = X\left(\frac{k}{T_p}\right) \quad (5.33)$$

Vidimo, da so Fourierovi koeficienti vzorci $X(F)$ vzeti v mnogokratnikih F_0 in skalirani z $1/T_p = F_0$. Uporabimo izraz (5.33) v (5.27)

$$x_p(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{T_p}\right) e^{j2\pi k F_0 t} \quad (5.34)$$

Vzemimo meje periode T_p proti ∞ . Zato določimo, da je

$$\Delta F = \frac{1}{T_p} \quad (5.35)$$

Če slednji izraz vstavimo v (5.34) dobimo

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Delta F) \cdot e^{j2\pi k \Delta F t} \cdot \Delta F \quad (5.36)$$

Če gre T_p proti neskončnosti, tedaj gre $x_p(t)$ v $x(t)$. Tudi spremenljivka ΔF postane diferencial dF in $k\Delta F$ postane zvezna frekvenčna spremenljivka F . Torej

$$\lim_{T_p \rightarrow \infty} x_p(t) = x(t) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Delta F) \cdot e^{-j2\pi k \Delta F t} \cdot \Delta F \quad (5.37)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(F) \cdot e^{j2\pi Ft} dF \quad (5.38)$$

Ta izraz predstavlja inverzni Fourierov transform. Tako dobimo *Fourierov par* za aperi-odične signale $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(F) \cdot e^{j2\pi Ft} dF \quad (5.39)$$

kjer predstavlja enačba (5.40) Fourierov transform in

$$X(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi Ft} dt \quad (5.40)$$

kjer predstavlja enačba (5.39) inverzni Fourierov transform.

5.5 Močnostni spekter aperiodičnih signalov

Vzemimo signal $x(t)$ s končno energijo in Fourierov transform $X(F)$. Energija signala je

$$\begin{aligned}
 E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(F) \cdot e^{-j2\pi Ft} dF \right] = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(F) dF \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi Ft} dt \right] = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(F)|^2 dF
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Torej je energija signala

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(F)|^2 dF \tag{5.42}$$

To je Parsevalov teorem o ohranjanju energije. $X(F)$ lahko izrazimo v polarni obliki:

$$X(F) = |X(F)| \cdot e^{j\Theta(F)} \tag{5.43}$$

kjer je $|X(F)|$ amplitudni in $\Theta(F)$ fazni spekter.

Izraz

$$S_{xx}(F) = |X(F)|^2 \tag{5.44}$$

predstavlja porazdelitev energije signala v odvisnosti od frekvence. Temu izrazu $S_{xx}(F)$ (5.44) pravimo tudi spekter gostote energije signala $x(t)$, katerega integral čez vse frekvence daje energijo celotnega signala

$$\int_{F_1}^{F_1+\Delta F_1} S_{xx}(F) dF. \tag{5.45}$$

Primer:

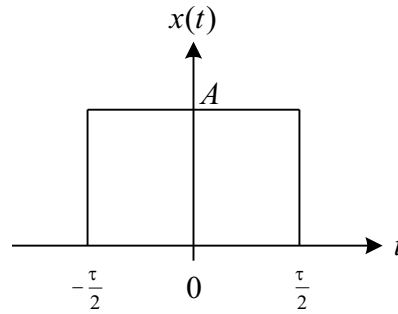
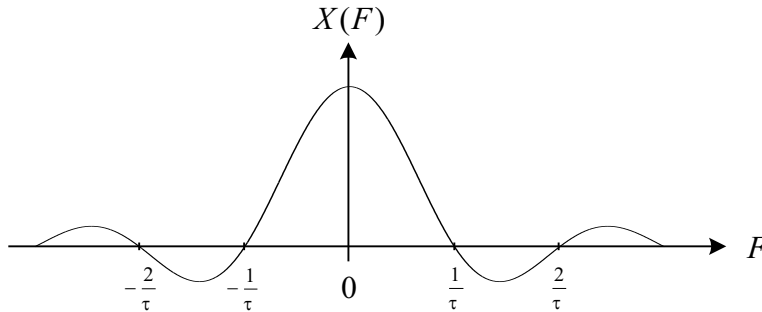
Določimo Fourierovo transformacijo in gostoto močnostnega spektra signala pravokotne oblike s slike 5.3, določenega z

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{za } |t| \leq \tau/2, \\ 0 & \text{za } |t| > \tau/2. \end{cases} \tag{5.46}$$

Vzemimo Fourierovo transformacijo (5.40)

$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} A \cdot e^{-j2\pi Ft} dt = A\tau \frac{\sin(\pi F\tau)}{\pi F\tau} \tag{5.47}$$

Vidimo, da ima $X(F)$ obliko *sinc* funkcije. Torej je spekter pravokotnega impulza ovojnica Fourierovih koeficientov periodičnega signala.

Slika 5.3: Signal $x(t)$ - pravokotni impulz

Slika 5.4: Fourierova transformacija signala pravokotnega impulza

To pomeni, da so Fourierovi koeficienti c_k pripadajočega signala $x_p(t)$ enostavno vzorci $X(F)$ v $kF_0 = k \cdot 1/T_p$.

$$c_k = \frac{1}{T_p} \cdot X(kF_0) = \frac{1}{T_p} \cdot X\left(\frac{k}{T_p}\right) \quad (5.48)$$

5.6 Lastnosti zvezne Fourierove transformacije

Zvezno Fourierovo transformacijo uporabljamo za analizo linearnih, časovno zveznih sistemov. Nekatero lastnosti so nanizane v tabeli 5.2, druge pa smo na kratko združili v nekaj vrstic. Pri tem $\mathcal{F}\{\cdot\}$ pomeni operacijo Fourierovega transformata in $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ pomeni operacijo inverznega Fourierovega transformata, znak $*$ pa pomeni konvolucijo določeno kot:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau \quad (5.49)$$

Lastnosti

1) Linearnost (superpozicija)

$$\mathcal{F}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = a\mathcal{F}\{f_1(t)\} + b\mathcal{F}\{f_2(t)\} \quad (5.50)$$

Signal	Fourierov transform	Koeficienti FT
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega_k \omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega + \omega_0)$	$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_k = 0 \end{cases}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$\begin{cases} a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \\ a_k = 0 \end{cases}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$\begin{cases} a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j} \\ a_k = 0 \end{cases}$
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_0 = 1, a_k = 0, k \neq 0$
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 < t < \frac{T_0}{2} \end{cases}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega_k \omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \text{sin c} \left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi} \right) = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k = -\infty \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ za vse k
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$2T_1 \text{sin c} \left(\frac{\omega T_1}{\pi} \right) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$	—
$\frac{W}{\pi} \text{sin c} \left(\frac{Wt}{\pi} \right)$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{j\omega t_0}$	—
$e^{-at} u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$t e^{-at} u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

Tabela 5.1: Nekaj osnovnih parov časovno zvezne Fourierove transformacije

kjer sta a in b kompleksni konstanti

2) Časovni pomik

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}\{f(t)\} \quad (5.51)$$

Ime	Če je $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega)$, potem
Definicija	$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t} dt$ $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$
Superpozicija	$\mathcal{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$
Če je $f(t)$ soda funkcija	$F(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$
Če je $f(t)$ liha funkcija	$F(j\omega) = 2j \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$
Negativni t	$\mathcal{F}[f(-t)] = F^*(j\omega)$
Skaliranje po času	$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{ a } F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Skaliranje po amplitudi	$\mathcal{F}[af(t)] = aF(j\omega)$
Odvajanje	$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = (j\omega)^n F(j\omega)$
Integriranje	$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x) dx\right] = \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
Časovni premik	$\mathcal{F}[f(t - a)] = F(j\omega)e^{j\omega a}$
Modulacija	$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F[j(\omega - \omega_0)]$ $\{\mathcal{F}[f(t) \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2}[F[j(\omega - \omega_0)] + F[j(\omega + \omega_0)]]\}$ $\{\mathcal{F}[f(t) \sin(\omega_0 t)] = \frac{1}{2}j[F[j(\omega - \omega_0)] - F[j(\omega + \omega_0)]]\}$
Časovna konvolucija	$\mathcal{F}^{-1}[F_1(j\omega)F_2(j\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(\tau)f_2(t_\tau)d\tau$
Frekvenčna konvolucija	$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\lambda)F_2[j(\omega - \lambda)]d\lambda$

Tabela 5.2: Lastnosti časovno zvezne Fourierove transformacije

3) Frekvenčni pomik

$$e^{-j\omega_0 t} f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j(\omega - \omega_0))\} \quad (5.52)$$

4) Konvolucija v časovnem prostoru

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t)\} \cdot \mathcal{F}\{f_2(t)\} \quad (5.53)$$

5) Konvolucija v frekvenčnem prostoru

$$\mathcal{F}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f_1(t)\} * \mathcal{F}\{f_2(t)\} \quad (5.54)$$

6) Odvajanje po času

$$-j\omega F(j\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{d(f(t))}{dt}\right\} \quad (5.55)$$

7) Integriranje po času

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (5.56)$$

Te lastnosti in tudi ostale iz tabele 5.2 koristno uporabljamo pri analizi ali sintezi sistemov. Posamezne lastnosti tudi uporabljamo pri reševanju diferencialnih ali integralnih enačb.

Lastnost časovne konvolucije koristno uporabimo tudi v sistemih obdelave signalov, v komunikacijskih sistemih pa uporabimo lastnost frekvenčnega pomika.

Pri delu običajno uporabljamo tabele parov zvezne Fourierove transformacije in upoštevamo lastnosti omenjene transformacije (tabeli 5.1, 5.2).

Poglavje 6

Diskretna Fourierova transformacija

6.1 FT časovno diskretnih signalov

Vzemimo zvezni signal s končno energijo $x(t)$, katerega vzorčimo z nizom δ funkcij (enotinih impulzov) zakasnenih za T . Tako dobimo vzorčeni signal

$$x[n] = x(t)|_{t=nT} \quad (6.1)$$

določen z izrazom

$$x_a(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT) \quad (6.2)$$

Vzemimo periodo vzorčenja $T = 1$ in frekvenco ω in jo tako nadomestimo z normirano frekvenco $2\pi F' = 2\pi Ft$, tedaj smemo zapisati, da je Fourierova transformacija zveznega signala (5.40) s končno energijo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_a(t)|_{t=nT}\} &= \mathcal{F}\{x_a[n]\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT)\right\} = \\ &= \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \cdot e^{-j2\pi F n T} \end{aligned} \quad (6.3)$$

oziroma pri $T = 1$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi F' n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.4)$$

in inverz dobimo po analogiji upoštevajoč enačbo (5.39)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(2\pi F) \cdot e^{j2\pi F' n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega \quad (6.5)$$

kjer je spekter $X(\omega)$ periodičen s periodo 2π .

Oba izraza sta podobna izrazu za Fourierovo vrsto in izrazu za izračun Fourierovih koeficientov c_k , ki pa je normiran glede na že podani izraz.

$X(\omega)$ predstavlja, slično kot c_k , frekvenčno vsebino signala $x(n)$ in je torej določen z izrazom

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.6)$$

$X(\omega)$ je torej dekompozicija signala $x(n)$ na njegove frekvenčne komponente, kar smo spoznali v podpoglavju o baznih, oz. karakterističnih funkcijah.

Če primerjamo Fourierovo transformacijo spektra časovno zveznega signala s končno energijo in spektra časovno diskretnega signala s končno energijo, opazimo, da ima zvezni signal prisotne frekvenčne komponente na področju $\pm\infty$, dočim ima časovno diskretni signal vse frekvenčne komponente normirane na področju $\pm\pi$, oziroma od 0 do 2π . To se odraža v ponovljivosti spektra signala, torej v konvoluciji med signalom in funkcijo vzorčenja, obravnavano v frekvenčnem prostoru. Če je $X(\omega)$ periodičen s periodo 2π , tedaj velja da je

$$\begin{aligned} X(\omega + 2k\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j(\omega+2k\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \cdot e^{-j2\pi kn} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = X(\omega) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Periodičnost je posledica frekvenčne omejitve signala na $(-\pi, \pi)$ in da je vsaka frekvenca izven intervala ekvivalentna frekvenci znotraj intervala.

Če primerjamo izraz (6.6) z izrazom za izračun koeficientov Fourierove vrste $x(n)$, vidimo, da sta si izraza zelo slična.

Če želimo prikazati to analogijo, potem izraz za

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.8)$$

pomnožimo z $e^{j\omega m}$ in ga integriramo na intervalu $(-\pi, \pi)$, o čemer smo že govorili v uvodnem delu tega poglavja.

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \cdot e^{j\omega m} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \right] \cdot e^{j\omega m} d\omega \quad (6.9)$$

zamenjamo vrstni red seštevanja in integriranja in upoštevamo končno vrsto z N elementi

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{+N} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.10)$$

kar lahko naredimo, če zgornja vrsta konvergira za $N \rightarrow \infty$. Predpostavimo, da vrsta enakomerno (uniformno) konvergira, tedaj za desno stran enačbe (6.9) velja

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi & \text{za } m = n, \\ 0 & \text{za } m \neq n, \end{cases} \quad (6.11)$$

in s tem je

$$\sum_{n=-N}^{+N} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi x(m) & \text{za } m = n, \\ 0 & \text{za } m \neq n. \end{cases} \quad (6.12)$$

Iz slednjega izraza in iz izraza (6.9) dobimo, da je

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N X(\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega \quad (6.13)$$

Če primerjamo ta izraz (6.13) z izrazom za frekvenčno predstavitev časovno zveznega periodičnega signala s Fourierovo vrsto

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k F_0 t}, \quad (6.14)$$

oziroma izrazom za določitev koeficientov c_k ,

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) \cdot e^{-j2\pi F_0 t} dt \quad (6.15)$$

vidimo, da sta izraza (6.13) in (6.14) slična, samo da je izraz (6.13) normiran s periodo 2π .

Torej lahko zaključimo, da je Fourierova transformacija niza $x(n)$, definirana z izrazom (6.6) oblika Fourierove vrste.

Torej Fourierova para časovno diskretnega signala sta podana z enačbama:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega \quad (6.16)$$

in

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.17)$$

$X(\omega)$ je kompleksna Fourierova transformacija, večkrat tudi znana pod imenom Fourierov integral v primeru časovno zveznega signala. Absolutno vrednost $X(\omega)$ lahko pišemo kot

$$|X(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)} = |X(\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)} \quad (6.18)$$

kjer je $|X(\omega)|$ amplitudna gostota ali spektralna amplitudna gostota, kjer je njej pripadajoči fazni potek je podan z izrazom:

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}. \quad (6.19)$$

6.2 Konvergenca Fourierovega transformata

Pri izrazu (6.16) smo predpostavili, da vrsta z N elementi

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{+N} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.20)$$

enolično konvergira k $X(\omega)$ če gre $N \rightarrow \infty$. To pomeni, da napaka $|X(\omega) - X_N(\omega)| \rightarrow 0$, če gre $N \rightarrow \infty$. Pri enolični konvergenci pa je seštevek $x(n)$ končen, to je

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty \quad (6.21)$$

Če je to res, potem velja tudi da je

$$|X(\omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty \quad (6.22)$$

To zagotavlja, da je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |X(\omega) - X_N(\omega)| = 0 \quad (6.23)$$

Če ta izraz kvadriramo, imamo opravka s kvadratom napake $|X(\omega) - X_N(\omega)|^2$, kar pa pomeni, da energija napake signala frekvenčnega prostora gre k nič.

Primer:

Vzemimo signal s končno energijo in sicer naj bo

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{za } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{za } \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (6.24)$$

Vemo, da je $X(\omega)$ periodičen s periodo 2π . Inverzni transform $X(\omega)$ je

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} \quad \text{za } n \neq 0 \quad (6.25)$$

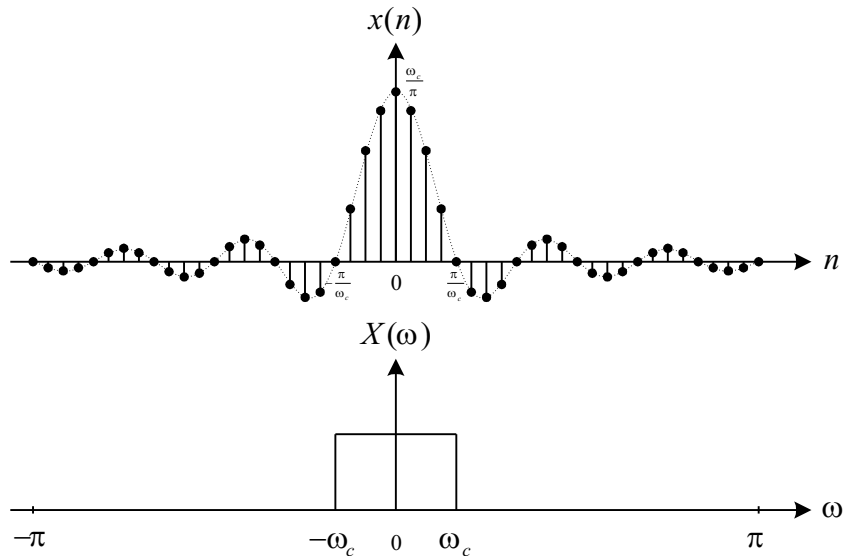
Za $n = 0$ je

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \quad (6.26)$$

Torej je

$$x(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} & \text{za } n = 0, \\ \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} & \text{za } n \neq 0, \end{cases} \quad (6.27)$$

Ta transformacija je prikazana na sliki 6.1.



Slika 6.1: Fourierov par (6.24) in (6.27)

Vzemimo niz $\{x(n)\}$ določen z izrazom, ki se često uporablja v teoriji signalov:

$$x(n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} \quad \text{za } -\infty < n < \infty \quad (6.28)$$

Z vrednostjo $x(n) = \omega_c/\pi$ pri $n = 0$. Poiščimo Fourierovo transformacijo niza $\{x(n)\}$. Ker je niz neskončen, ni absolutno sešteviljiv in imamo opravka z neskončno vrsto

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.29)$$

Oglejmo si funkcijo za razne N . Sam izraz (6.29) ne konvergira enolično za vse ω . Niz ima vsekakor končno energijo $E_x = \omega_c/\pi$. Izraz (6.29) konvergira k $X(\omega)$ po kvadratičnem principu, kjer je

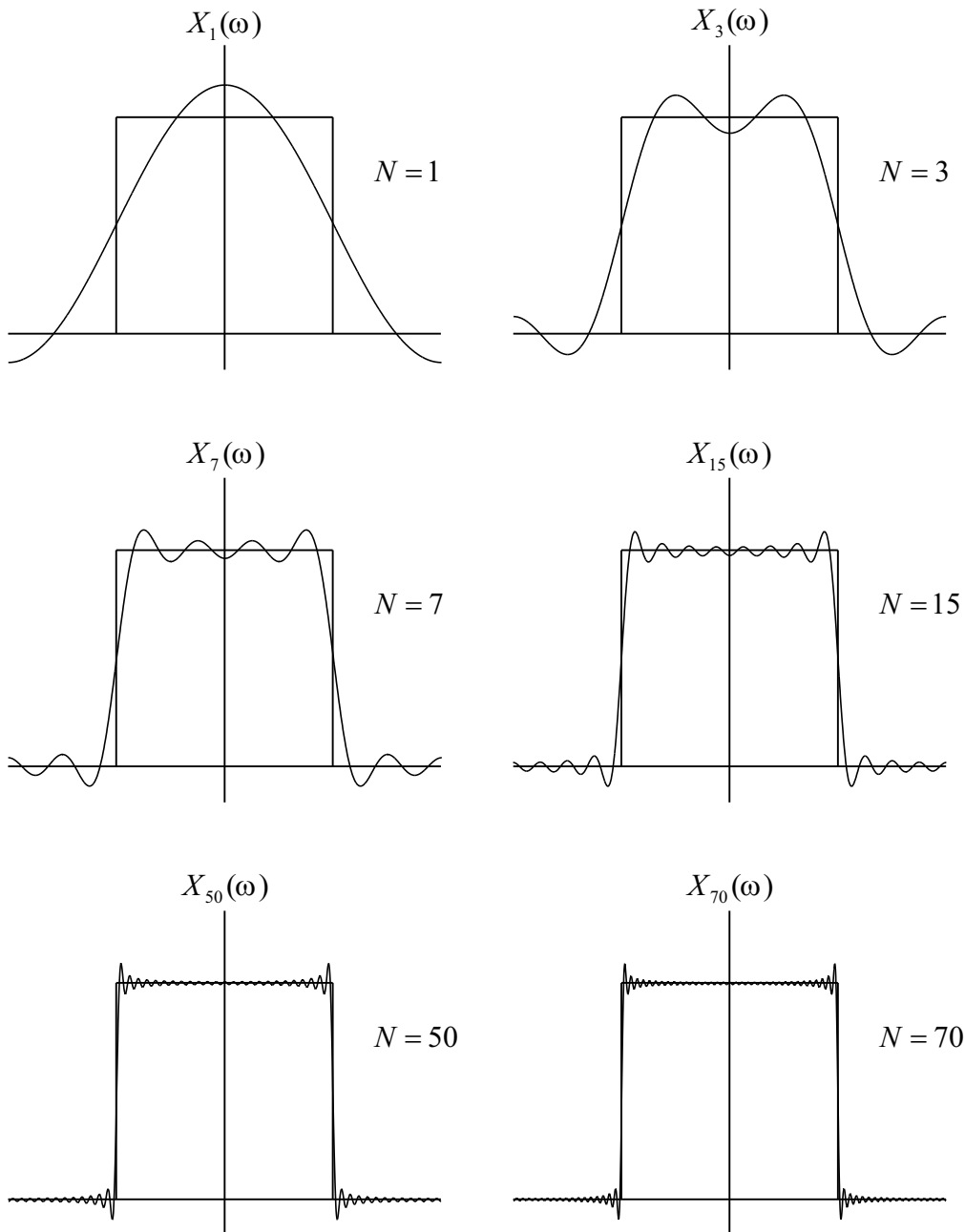
$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{za } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{za } \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (6.30)$$

Torej smemo za razne N zapisati izraz (6.29) v obliki:

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{+N} \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.31)$$

Na sliki 6.2 vidimo potek funkcije $X_N(\omega)$ za razne N .

□

Slika 6.2: Potek $X_N(\omega)$ za razne N

6.3 Gostota energijskega spektra aperiodičnega vzorčenega signala

Energija časovno diskretnega signala je

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \quad (6.32)$$

Izrazimo energijo signala s spektralnimi komponentami $X(\omega)$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) \cdot e^{-j\omega n} d\omega \right] \quad (6.33)$$

Če zamenjamo znaka seštevanja in integriranja dobimo:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (6.34)$$

Torej je razmerje med $x(n)$ in $X(\omega)$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (6.35)$$

To pa je Parsevalov teorem o ohranjanju energije časovno diskretnega signala s končno energijo.

Spekter $X(\omega)$ je kompleksna funkcija

$$X(\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)} \quad (6.36)$$

kjer je

$$\phi(\omega) = \angle X(\omega) \quad (6.37)$$

fazni spekter.

Energijski spekter, oziroma gostota energijskega spektra časovno diskretnega signala $\{x(n)\}$ označimo s

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (6.38)$$

in podaja porazdelitev energije v odvisnosti od frekvence in ne vsebuje informacije o fazi signala.

Če je $x(n)$ realni niz, potem je $X^*(\omega) = X(-\omega)$ in $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$ in $\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega)$. Torej tudi velja

$$S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega) \quad (6.39)$$

Zaradi simetričnih lastnosti, je dovolj, da poznamo signal le na področju $0 \leq \omega \leq \pi$, na področju $-\pi \leq \omega \leq 0$ pa ga določimo na osnovi simetrije signala.

Primer:

Določi gostoto energijskega spektra signala $S_{xx}(\omega)$.

$$x(n) = a^n \cdot u(n) \quad -1 < a < 1 \quad (6.40)$$

Rešitev: Ker je $|a| < 1$ je niz seštevljiv in lahko uporabimo geometrijsko seštevalno formulo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1-a} < \infty \quad (6.41)$$

Iz tega sledi Fourierova transformacija:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a \cdot e^{-j\omega})^n \quad (6.42)$$

kjer je $|a \cdot e^{-j\omega}| < 1$ uporabimo zgornjo formulo

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} \quad (6.43)$$

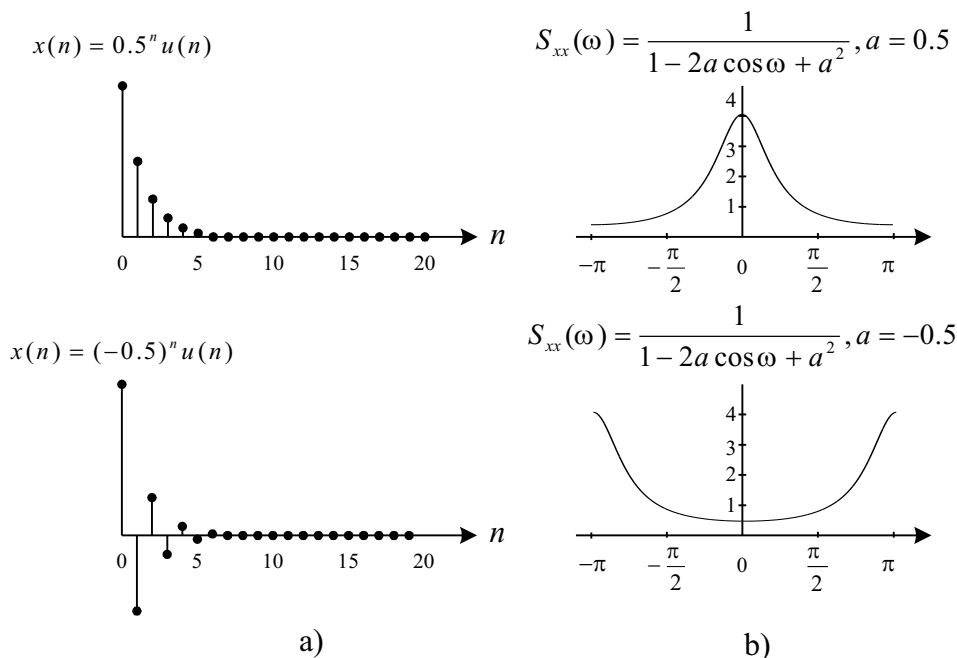
Gostota močnostnega spektra je

$$S_{xx} = |X(\omega)|^2 = X(\omega) \cdot X^*(\omega) = \frac{1}{(1 - a \cdot e^{-j\omega})(1 - a \cdot e^{j\omega})} \quad (6.44)$$

ker je

$$S_{xx} = \frac{1}{(1 - 2a \cos \omega + a^2)} \quad (6.45)$$

ker je $S(-\omega) = S(\omega)$ sledi:



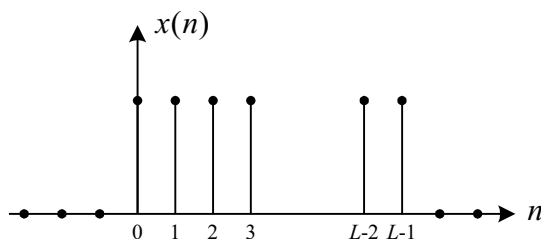
Slika 6.3: a) niz $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$ in $x(n) = (-\frac{1}{2})^n u(n)$; b) njuna energijska spektra

za $x(n)$ in $a = 0.5$ ter za $a = -0.5$ energijski spekter prikazan za oba $a = 0.5$ in $a = -0.5$ na sliki 6.3.

□

Primer:

Vzemimo primer časovno diskretnega pravokotnega impulza s slike 6.4,



Slika 6.4: Časovno diskretni pravokotni signal

ki je določen kot

$$x(n) = \begin{cases} A & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0 & \text{drugače.} \end{cases} \quad (6.46)$$

V tem primeru lahko upoštevamo geometrijsko sumacijsko formulo, ki pravi:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1, \\ \frac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1. \end{cases} \quad (6.47)$$

Z upoštevanjem izraza (6.47) izračunamo Fourierov transform omenjenega pravokotnega impulza:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} A \cdot e^{-j\omega n} = A \cdot \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} = A \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}(L-1)} \cdot \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (6.48)$$

Amplitudni in fazni spekter $x(n)$ sta:

$$|X(\omega)| = \begin{cases} |A| \cdot L & \text{za } \omega = 0, \\ |A| \cdot \left| \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right| & \text{drugače} \end{cases} \quad (6.49)$$

in

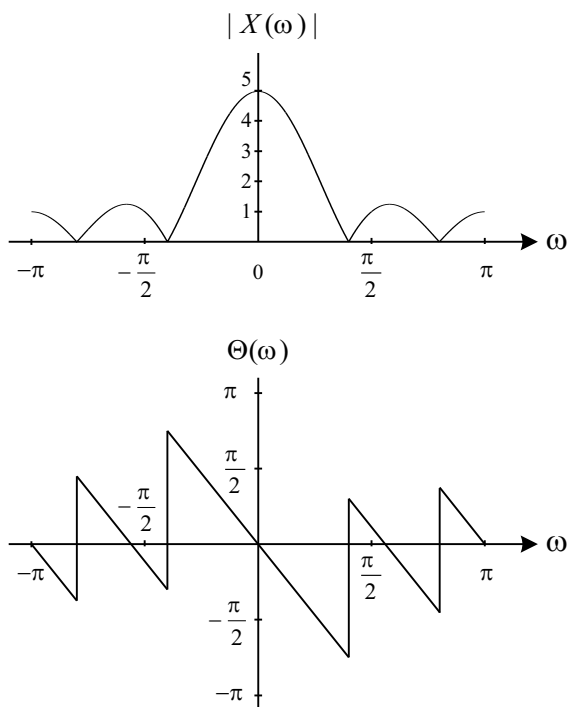
$$\angle X(\omega) = \angle A - \frac{\omega}{2}(L-1) + \angle \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (6.50)$$

kjer lahko se spomnimo, da je faza realnega dela 0, če je ta pozitiven in $-\pi$ če je ta negativen.

□

6.4 Lastnosti Fourierove transformacije časovno diskretnega signala

Iz dosedanjšega opazovanja Fourierove transformacije časovno diskretnega signala smo prišli do niza zaključkov, ki jih bomo zaradi kasnejšega lažjega dela, strnili v spisek vseh lastnosti.



Slika 6.5: Amplitudni in fazni spekter časovno diskretnega pravokotnega impulza $x(n)$

Slične lastnosti srečamo pri Fourierovi transformaciji energijsko omejenega in časovno zveznega signala.

Prevezemimo oznake:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.51)$$

oziroma

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega \quad (6.52)$$

V tem primeru govorimo o Fourierovem paru, za kar uporabimo prikaz

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (6.53)$$

kjer je $X(\omega)$ periodična funkcija s periodo 2π .

1) Simetrija Fourierove transformacije

Vzemimo signal $x(n)$ in njegov transform $X(\omega)$. Oba naj bosta kompleksna signala, ki ju izrazimo kot

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) \quad (6.54)$$

$$X(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega) \quad (6.55)$$

Če v enačbi (6.51) vstavimo za izraz

$$e^{-j\omega} = \cos \omega - j \sin \omega \quad (6.56)$$

in ju ločimo v realni in imaginarni del dobimo:

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x_R(n) \cdot \cos(\omega n) + x_I(n) \cdot \sin(\omega n)] \quad (6.57)$$

$$X_I(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x_R(n) \cdot \sin(\omega n) - x_I(n) \cdot \cos(\omega n)] \quad (6.58)$$

in v primeru (6.52) vstavimo izraz

$$e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega \quad (6.59)$$

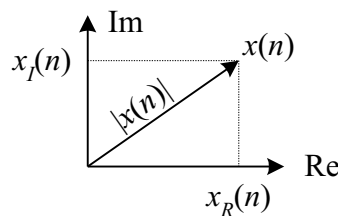
tedaj dobimo

$$x_R(n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \cdot \cos(\omega n) - X_I(\omega) \cdot \sin(\omega n)] d\omega \quad (6.60)$$

$$x_I(n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \cdot \sin(\omega n) + X_I(\omega) \cdot \cos(\omega n)] d\omega \quad (6.61)$$

Oglejmo si nekaj primerov

Realni signali Če je $x(n)$ realen, tedaj je $x_R(n) = x(n)$ in $x_I(n) = 0$



Slika 6.6:

Izraz (6.57) se skrči v

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \cos(\omega n) \quad (6.62)$$

in

$$X_I(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \sin(\omega n) \quad (6.63)$$

Ker sta kosinus soda in sinus liha funkcija, sledi iz (6.57) in (6.58)

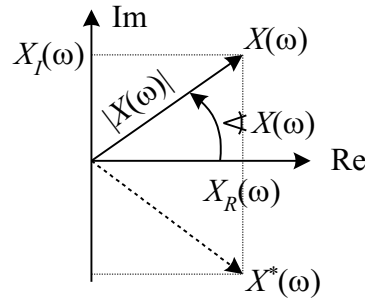
$$X_R(-\omega) = X_R(\omega) \quad \text{za sodi signal} \quad (6.64)$$

in

$$X_I(-\omega) = -X_I(\omega) \quad \text{za lihi signal} \quad (6.65)$$

Če kombiniramo oba izraza, dobimo da je

$$X^*(\omega) = X(-\omega) \quad (6.66)$$



Slika 6.7:

- realni, a sodi signali

V tem primeru je $x(-n) = x(n)$ in je $x(n) \cdot \cos(\omega n)$ soda funkcija in $x(n) \cdot \sin(\omega n)$ liha funkcija. Tako dobimo iz enačb (6.57) in (6.58)

$$X_R(\omega) = x(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \cdot \cos(\omega n) \quad (6.67)$$

$$X_I(\omega) = 0 \quad (6.68)$$

in

$$x(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_R(\omega) \cdot \cos(\omega n) d\omega \quad (6.69)$$

- realni in lihi signali

V tem primeru je $x(-n) = -x(n)$ in $x(n) \cdot \cos(\omega n)$ je liha funkcija in $x(n) \cdot \sin(\omega n)$ soda funkcija. Iz enačb (6.57) in (6.58) dobimo

$$X_R(\omega) = 0 \quad (6.70)$$

$$X_I(\omega) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \cdot \sin(\omega n) \quad (6.71)$$

in

$$x(n) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_I(\omega) \cdot \sin(\omega n) d\omega \quad (6.72)$$

Podobne so tudi lastnosti čisto imaginarnih signalov.

Imaginarni signali V tem primeru je $x_R(n) = 0$, $jx_I(n) = x(n)$. Torej po enačbah (6.57)

(6.58) (6.60) in (6.61) sledi

$$X_R(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_I(n) \cdot \sin(\omega n) \quad \text{za lihe signale} \quad (6.73)$$

$$X_I(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_I(n) \cdot \cos(\omega n) \quad \text{za sode signale} \quad (6.74)$$

in

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [X_R(\omega) \cdot \sin(\omega n) + X_I(\omega) \cdot \cos(\omega n)] d\omega \quad (6.75)$$

$$x_R(n) = 0 \quad (6.76)$$

V splošnem lahko poljuben kompleksni signal $x(n)$ razstavimo kot:

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) = \overset{\text{sod}}{x_R(n)} + \overset{\text{lih}}{x_R(n)} + j[\overset{\text{sod}}{x_I(n)} + \overset{\text{lih}}{x_I(n)}] = \overset{\text{sod}}{x(n)} + \overset{\text{lih}}{x(n)} \quad (6.77)$$

kjer je

$$\overset{\text{sod}}{x(n)} = \overset{\text{sod}}{x_R(n)} + j\overset{\text{sod}}{x_I(n)} = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)] \quad (6.78)$$

$$\overset{\text{lih}}{x(n)} = \overset{\text{lih}}{x_R(n)} + j\overset{\text{lih}}{x_I(n)} = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)] \quad (6.79)$$

ker so $\overset{\text{sod}}{x(n)} = \overset{\text{sod}}{x(-n)}$ in $\overset{\text{lih}}{x(n)} = -\overset{\text{lih}}{x(-n)}$ sledi iz enačbe (6.77), da so povezave

$$x(n) = [\overset{\text{sod}}{x_R(n)} + j\overset{\text{sod}}{x_I(n)}] + [\overset{\text{lih}}{x_R(n)} + j\overset{\text{lih}}{x_I(n)}] \quad (6.80)$$

$$X(\omega) = [\overset{\text{sod}}{X_R(\omega)} + j\overset{\text{sod}}{X_I(\omega)}] + [\overset{\text{lih}}{X_R(\omega)} - j\overset{\text{lih}}{X_I(\omega)}] \quad (6.81)$$

Iz tabele 6.1 so razvidne vse simetrijske lastnosti diskretne Fourierove transformacije.

2) Linearnost Fourierove transformacije

Vzemimo dva niza $\{x_1(n)\}$ in $\{x_2(n)\}$ ter njuna transformata

$$x_1(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) \quad (6.82)$$

$$x_2(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega) \quad (6.83)$$

potem velja za izraz relacija:

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega) \quad (6.84)$$

Niz	DTFT
$x(n)$	$X(\omega)$
$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
$x^*(-n)$	$X^*(\omega)$
$x_R(n)$	$X_e(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) + X^*(-\omega)]$
$jx_I(n)$	$X_o(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) - X^*(-\omega)]$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$	$X_R(\omega)$
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$	$X_I(\omega)$
Realni signali	
	$X(\omega) = X^*(-\omega)$
	$X_R(\omega) = X_R(-\omega)$
Poljubni realni signal	$X_I(\omega) = X_I(-\omega)$
$x(n)$	$ X(\omega) = X(-\omega) $
	$\angle X(\omega) = -\angle X(-\omega)$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$ (realni in sod)	$X_R(\omega)$ (realni in sodi)
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$ (realni in lih)	$jX_I(\omega)$ (imaginarni in lih)

Tabela 6.1: Lastnosti diskretne Fourierove transformacije

ki enostavno pravi, da Fourierova transformacija kombiniranih dveh ali več signalov je enaka Fourierovi transformaciji posamičnih in kasneje kombiniranih signalov. Ta lastnost linearnosti omogoča uporabo Fourierove transformacije tudi pri študiju linearnih sistemov.

3) Časovni premik in Fourierova transformacija

Če vzamemo Fourierov par

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (6.85)$$

potem se časovni zamik signala $x(n)$ kaže v

$$x(n - k) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \cdot e^{-j\omega k} \quad (6.86)$$

Dokaz je dokaj enostaven. Vzemimo premaknjen signal $x(n - k)$. Tedaj je Fourierova transformacija dejansko kar enaka izrazu

$$\mathcal{F}\{x(n - k)\} = X(\omega) \cdot e^{-j\omega k} = |X(\omega)| \cdot e^{j[\angle X(\omega - \omega k)]} \quad (6.87)$$

Vidimo, da se spekter signala zaradi časovnega pomika ne spremeni, spremeni se le fazni pomik. Matematično pa pomeni pomik signala v časovnem prostoru za k časovnih enot enak množenju spektra signala z $e^{-j\omega k}$ v frekvenčnem prostoru.

4) Časovna obrnljivost (reverznost)

Če vzamemo signal $x(n)$ in njegov par $X(\omega)$

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (6.88)$$

tedaj za časovno obrnjeni znak

$$x(-n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-\omega) \quad (6.89)$$

tudi nastopi njegov par v frekvenčno obrnjenem prostoru. Torej je pri zamenjavi seštevalnega indeksa l

$$\mathcal{F}\{x(-n)\} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) \cdot e^{j\omega l} = X(-\omega) \quad (6.90)$$

Če je $x(n)$ realen dobimo:

$$\mathcal{F}\{x(-n)\} = X(-\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{j\angle X(-\omega)} = X(-\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{-j\angle X(\omega)} = X(-\omega) \quad (6.91)$$

Vidimo, da se signal preslika okoli osi, ki je pravokotna na časovno os v $t = 0$. Sam spekter se ne spremeni, pride pa do preslikave faznega spektra.

5) Konvolucijski teorem in Fourierova transformacija

Vzemimo signalni niz $\{x_1(n)\}$ ter njemu pripadajoči par $X_1(\omega)$ ter drugi signalni niz $\{x_2(n)\}$ ter njegov par $X_2(\omega)$

$$\begin{aligned} x_1(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) \\ x_2(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega) \end{aligned} \quad (6.92)$$

Konvolucija obeh nizov se pokaže v frekvenčnem področju kot produkt njunih parov

$$x(n) = x_1(n) \star x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) \quad (6.93)$$

Dokažimo to relacijo z uporabo izreka konvolucijske vsote.

$$x(n) = x_1(n) \star x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n-k) \quad (6.94)$$

Obe strani pomnožimo z $e^{-j\omega n}$ in seštejmo (izvedemo diskretno Fourierovo transformacijo)

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n-k) \right] \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.95)$$

Če zamenjamo vrstni red seštevanja in če enostavno zamenjamo seštevalni indeks dobimo, da je desna stran predhodne enačbe enaka $X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$. Ta teorem tudi predstavlja eno najmočnejših orodij pri analizi linearnih sistemov.

6) Korelacijski teorem in Fourierova transformacija

Tudi tu sedaj vzemimo dva signalna niza $\{x_1(n)\}$, $\{x_2(n)\}$ ter njuna para

$$x_1(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) \quad (6.96)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega) \quad (6.97)$$

ter poiščemo korelacijo med nizoma, oziroma spekter.

$$r_{x_1x_2}(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(-\omega) \quad (6.98)$$

Dokaz je podoben dokazu konvolucije, le da v tem primeru imamo

$$r_{x_1x_2}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \cdot x_2(-k) \quad (6.99)$$

Pomnožimo obe strani z $e^{-j\omega n}$ in ju seštejemo po vseh n . Tako dobimo

$$S_{x_1x_2}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{x_1x_2}(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \cdot x_2(k-n) \right] \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.100)$$

Zamenjamo vrstni red seštevanja ter zamenjamo tudi seštevalni indeks. Tako se desna stran enačbe reducira v izraz $X_1(\omega) \cdot X_2(-\omega)$.

Izraz $S_{x_1x_2}$ se imenuje spekter križne energijske gostote signalov $x_1(n)$ in $x_2(n)$.

7) Wiener-Khintchinejev teorem in Fourierova transformacija

Če je $x(n)$ realni signal, potem je avtokorelacijski par niza:

$$r_{xx}(l) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_{xx}(\omega) \quad (6.101)$$

Ta par ponazarja, da je gostota energijskega spektra signala enaka Fourierovi transformaciji avtokorelacijskega niza, kar predstavlja poseben primer korelacijskega teorema.

Ta teorem pravi, da avtokorelacijski niz signala in njegova spektralna gostota vsebujeta isto informacijo o signalu. Ker pa ne vsebuje informacije o fazi signala, ne moremo enolično rekonstruirati signala iz avtokorelacijske funkcije ali iz gostote močnostnega spektra signala.

8) Frekvenčni pomik in Fourierova transformacija

Vzemimo signal $x(n)$ in njegov spekter $X(\omega)$

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (6.102)$$

potem je

$$e^{j\omega_0 n} \cdot x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega - \omega_0) \quad (6.103)$$

Lastnost premika pravi, da v primeru množenja signalnega niza $x(n)$ z $e^{j\omega_0 n}$ pridemo v frekvenčnem prostoru do frekvenčnega pomika spektra $X(\omega)$ za ω_0 . Ta premik je prikazan na sliki 6.8.

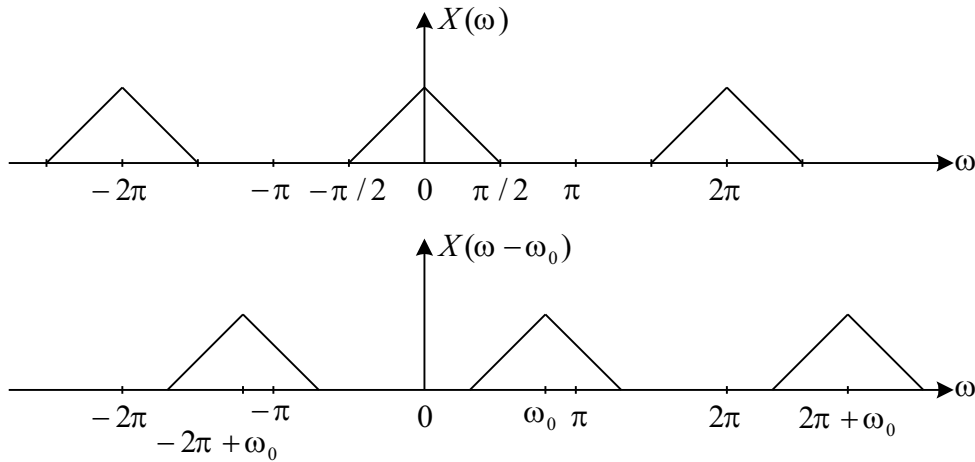
9) Modulacijski teorem in Fourierova transformacija

Vzemimo par

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega). \quad (6.104)$$

Signalni niz $x(n)$ pomnožimo s $\cos(\omega_0 n)$. To pomeni modulacijo, ki se odraža v frekvenčnem področju kot

$$x(n) \cdot \cos(\omega_0 n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) \quad (6.105)$$



Slika 6.8: Lastnost frekvenčnega pomika v frekvenčnem prostoru

Če želimo dokazati veljavnost tega para, moramo izraziti

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}). \quad (6.106)$$

Potem izvedemo diskretno Fourierovo transformacijo nad dobljenim izrazom, iz česar dobimo desni izraz para (6.105).

10) Parsevalov teorem in Fourierova transformacija

Ta govori o ohranjanju energije signala, ko je $x_1(n) = x_2(n)$. Vzemimo dva signalna niza in njegova para

$$x_1(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) \quad (6.107)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega) \quad (6.108)$$

ter tvorimo izraz, ki mu pravimo Parsevalov teorem:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega) \cdot X_2^*(\omega) d\omega \quad (6.109)$$

Če želimo dokazati to relacijo, uporabimo izraz

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.110)$$

Tako dobimo na desni strani enačbe (6.109)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot e^{-j\omega n} \right] \cdot X_2^*(\omega) d\omega &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_2^*(\omega) e^{-j\omega n} d\omega = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot x_2^*(n) \end{aligned} \quad (6.111)$$

V posebnem primeru, ko je $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$ se Parsevalov teorem skrči na

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (6.112)$$

Leva stran izraza (6.112) pomeni energijo E_x signala $x(n)$, ki je enaka avtokorelaciji signala pri $l = 0$.

Desna stran istega izraza pa predstavlja gostoto energijskega spektra na intervalu $-\pi \leq \omega \leq \pi$, kar pa tudi predstavlja vso energijo signala. Torej lahko rečemo, da je avtokorelacija signala pri $l = 0$ enaka gostoti energijskega spektra signala, to pa pomeni, da je energija signala enaka, ne glede ali smo v časovnem ali frekvenčnem prostoru.

11) Oknenje ali množenje dveh nizov

Vzemimo dva signalna niza $x_1(n)$ in $x_2(n)$ ter njuna para $X_1(\omega)$ ter $X_2(\omega)$

$$x_1(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega)$$

Tvorimo produkt med nizoma

$$x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$

$$x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) \cdot X_2(\omega - \lambda) d\lambda \quad (6.113)$$

Integral na desni pomeni konvolucijo med Fourierovima nizoma $X_1(\omega)$ in $X_2(\omega)$.

Izraz (6.113) je dualni izraz konvoluciji dveh nizov v časovnem prostoru.

Če želimo dokazati relacijo (6.113), torej, da je Fourierova transformacija produkta $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$, konvolucija spektrov obeh signalnih nizov $x_1(n)$ in $x_2(n)$, potem vzemimo, da je inverz

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) \cdot e^{j\lambda n} d\lambda$$

Torej je

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot x_2(n) \cdot e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) \cdot e^{j\lambda n} d\lambda \right] \cdot x_2(n) e^{-j\omega n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) d\lambda \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n) \cdot e^{-j(\omega-\lambda)n} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) \cdot X_2(\omega - \lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (6.114)$$

ker pa pomeni, da je izraz (6.114) enak konvolucijski vsoti in predstavlja periodično konvolucijo med $X_1(\omega)$ in $X_2(\omega)$.

12) Odvajanje v frekvenčnem prostoru

Vzemimo par

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (6.115)$$

potem je

$$n \cdot x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (6.116)$$

Tudi za ta par (6.115,6.116) lahko dokažemo z uporabo definicije diskretne Fourierove transformacije. Pri tem odvajamo niz po ω .

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \frac{d}{d\omega} e^{-j\omega n} = -j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.117)$$

Če obe strani pomnožimo z j dobimo izraz (6.117).

Vse omenjene lastnosti so združene v tabeli 6.3.

6.5 Diskretna Fourierova Transformacija

Do sedaj smo analizirali Fourierovo transformacijo zveznih periodičnih in aperiodičnih signalov, sedaj pa si oglejmo Fourierovo transformacijo končnega signalnega niza. To transformacijo imenujemo diskretno Fourierovo transformacijo - DFT.

DFT je dejansko transformacija niza N vzorcev in ni zvezna funkcija ter predstavlja enakomerno porazdeljene vzorce spektra $X(e^{j\omega})$ v točkah $\omega = \frac{2\pi k}{N}$, ki se ponavljajo s $2\pi r$. Kot bomo opazili, je Fourierova vrsta periodičnega niza predstavljena z DFT končnega niza.

Vzemimo nek periodičen niz $[x_p(n)]$ s periodo N tako, da je $x_p(n) = x_p(n + r \cdot N)$, kjer je r poljubno celo število. Fourierova vrsta dejansko predstavlja vsoto harmoničo povezanih eksponentnih nizov (fazorjev), ki so celoštevilčni mnogokratniki osnovne frekvence $\frac{2\pi}{N}$ periodičnega niza $[x_p(n)]$. Torej lahko periodičen niz $x_p(n)$ izrazimo s končno Fourierovo vrsto

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \cdot e^{j2\pi \cdot \frac{1}{N} \cdot k \cdot n} \quad (6.118)$$

kjer je $\omega_k = \frac{2\pi}{N} \cdot k$ kjer je k celo število in kjer $X_p(k)$ pomeni spekter periodičnega niza $x_p(n)$.

Če želimo izračunati koeficiente $X_p(k)$ Fourierove vrste iz samega periodičnega niza $x_p(n)$, potem moremo upoštevati že znano neodvisnost - ortogonalnost posameznih kompleksnih eksponentnih nizov. To dosežemo s standardnim postopkom in sicer po množenju izraza (6.118) z $e^{-j\frac{2\pi r}{N} \cdot n}$ in po sumiranju od 0 do $N - 1$ dobimo

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi r}{N} \cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot (k-r) \cdot n}. \quad (6.119)$$

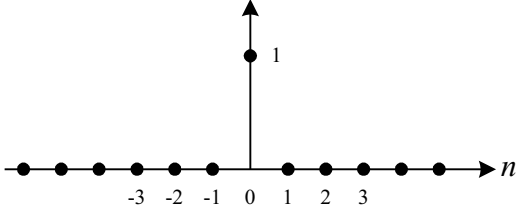
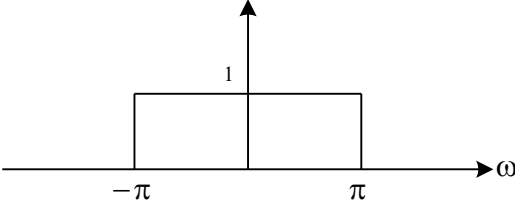
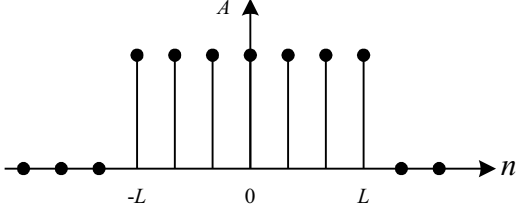
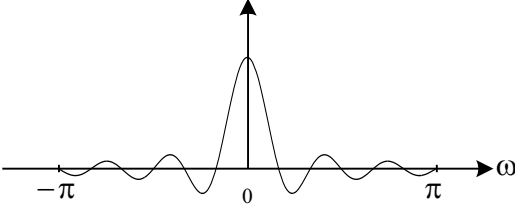
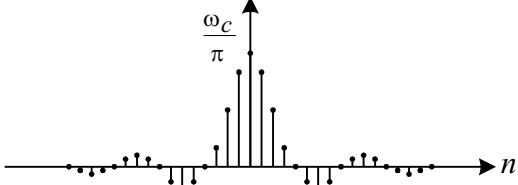
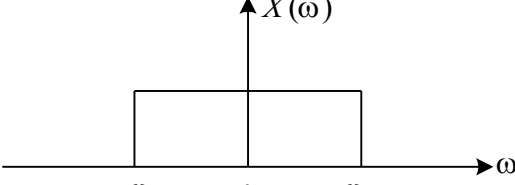
Signal $x(n)$	Spekter $X(\omega)$
 <p style="text-align: center;">$x(n) = \delta(n)$</p>	 <p style="text-align: center;">$X(\omega) = 1$</p>
 <p style="text-align: center;">$x(n) = \begin{cases} A, & n \leq L \\ 0, & n \geq L \end{cases}$</p>	 <p style="text-align: center;">$X(\omega) = A \frac{\sin(L + 1/2)\omega}{\sin(\omega/2)}$</p>
 <p style="text-align: center;">$x(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, & n < 0 \end{cases}$</p>	 <p style="text-align: center;">$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$</p>
<p style="text-align: center;">$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$</p>	<p style="text-align: center;">$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$</p>

Tabela 6.2: Fourierovi transformi nekaterih karakterističnih diskretnih časovno aperiodičnih signalov

Po zamenjavi znakov sumiranja dobimo

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi r}{N} \cdot n} = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot (k-r) \cdot n} \right]. \quad (6.120)$$

Ta izraz se poenostavi v primerih sovpadanja signala s fazorjem $e^{-j\frac{2\pi r}{N} \cdot n}$, ko je:

Lastnosti	Časovni prostor	Frekvenčni prostor
Niz	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(\omega)$ $X_1(\omega)$ $X_2(\omega)$
Linearnost	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Časovni pomik	$x(n - k)$	$e^{-j\omega k}X(\omega)$
Časovna obrnljivost	$x(-n)$	$X(-\omega)$
Konvolucija	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Korelacija	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$R_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega)$ $= X_1(-\omega)X_2^*(\omega)$ če je $x_2(n)$ realni
Wiener-Khintchine teorem	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
Frekvenčni pomik	$e^{j\omega_0n}x(n)$	$X(\omega - \omega_0)$
Modulacijski teorem	$x(n) \cos(\omega_0n)$	$\frac{1}{2}X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0)$
Množenje dveh nizov	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda)d\lambda$
Odvajanje v frekv. prostoru	$nx(n)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Konjugacija	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
Parsevalov teorem	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$	

Tabela 6.3: Lastnosti diskretne Fourierove transformacije

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot (k-r) \cdot n} = \begin{cases} 1 & \text{za } kr = mn, m, r \text{ sta celi števili} \\ 0 & \text{drugače} \end{cases}$$

Zgornji izraz se tako poenostavi:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi r}{N} \cdot n} = X_p(r) \quad (6.121)$$

Ker smo zaradi splošnosti in periodičnosti vpeljali konstanto r smemo koeficiente $X_p(k)$ (v enačbi 6.118) Fourierove vrste izračunati iz $x_p(n)$ z uporabo izraza:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \quad (6.122)$$

Niz koeficientov Fourierove vrste $X_p(k)$ je torej periodičen s periodo N .

Torej so ti koeficienti določeni za končno vrsto po enačbi (6.122) za $k = 0$ do $N - 1$, izven pa je njihova vrednost 0. Iz vsega tega vidimo dualnost med časovnim in frekvenčnim prostorom pri predstavitvi Fourierove vrste periodičnega niza.

Enačbi (6.118) in (6.122) sta torej par in jima pravimo para Diskretne Fourierove Vrste (DFV) periodičnega niza.

Običajno zaradi enostavnosti označimo kompleksni eksponent z N elementi kar z:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (6.123)$$

Tako lahko DFS para poenostavljeno zapišemo kot

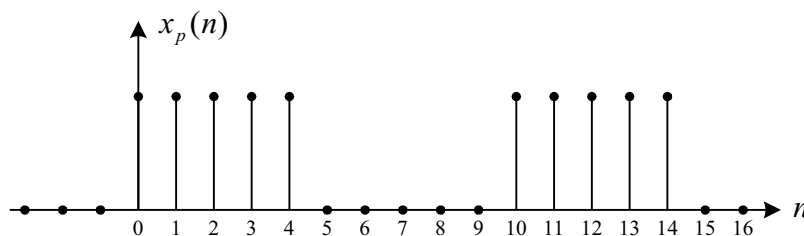
$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot (W_N)^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn} \quad (6.124)$$

in signalni niz

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \cdot W_N^{-kn} \quad (6.125)$$

Primer:

Vzemimo primer periodičnega niza $x_p(n)$, s slike 6.9, kjer indeks p pomeni periodičen niz, za periodo $N = 10$.



Slika 6.9: Periodičen diskretni niz z $N = 10$

Vzemimo izraz za analizo niza $X_p(k)$ (6.124)

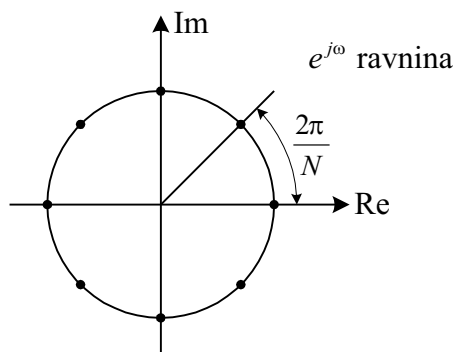
$$X_p[k] = \sum_{n=0}^4 W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi}{10} \cdot k \cdot n}$$

Če vzamemo enačbo za končno geometrijsko vrsto in njeno konvergenco dobimo:

$$X_p(k) = \frac{1 - W_{10}^{5k}}{1 - W_{10}^k} = e^{-j\frac{4\pi k}{10}} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi k}{2})}{\sin(\frac{\pi k}{10})}$$

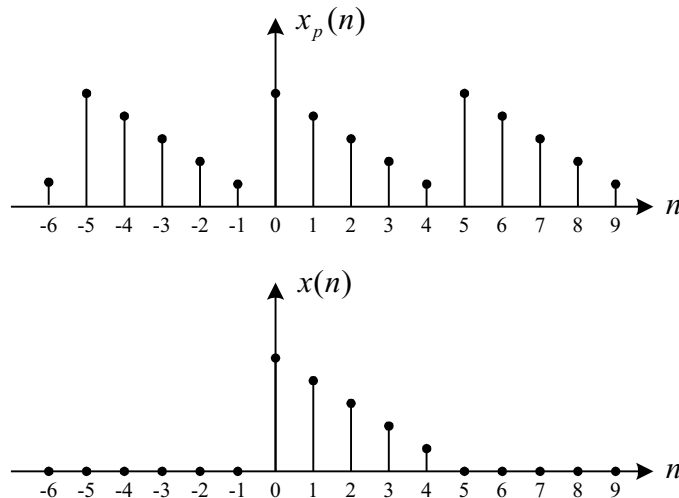
Periodičen niz $X_p(k)$ je predstavitev enakomerno porazdeljenih vzorcev Fourierove transformacije ene periode niza $x_p(n)$ (slika 6.10). Torej vzemimo le eno periodo signalnega niza

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & \text{za } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{drugače} \end{cases}$$



Slika 6.10: Točke na enotinem krogu, v katerih jemljemo vzorce $X_p(k)$ kažejo na periodičnost niza ($N = 8$)

kar prikazuje slika 6.11



Slika 6.11: Periodični niz $x_p(n)$ s periodo 5 oziroma primer aperiodičnega niza $x(n)$

Kjer je $x(n) = x_p(n)$ za $0 \leq n \leq N - 1$ in $x(n) = 0$ za ostale n , je iz predhodnega poglavja FT diskretnega signala

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (6.126)$$

in če ta izraz primerjamo z izrazom za $X(k)$ vidimo, da je

$$X_p(k) = X(e^{j\omega})_{\omega=\frac{2\pi}{N}\cdot k}. \quad (6.127)$$

To pa pomeni vzorčenje (slika 6.12) funkcije Fourierove transformacije po N enakomernih porazdeljenih korakih $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ in sicer od $\omega = 0$ do $\omega = 2\pi$.

Po analogiji smo torej periodičen niz zamenjali s končnim nizom in takoj prišli do Fourierove transformacije končnega niza $x(n)$, katerega vrednost je različna od nič le za $0 \leq n \leq N-1$. Pri tem smo predpostavili, da lahko vsak končni niz dolžine N predstavimo z ustreznim periodičnim nizom $x_p(n)$

$$x_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + r \cdot N) \quad (6.128)$$

oziroma

$$x_p(n) = x(n \bmod N) \quad (6.129)$$

Torej smemo prevzeti oba para DFT periodičnega niza tudi za končen niz dolžine N

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn} \quad (6.130)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-kn} \quad (6.131)$$

kjer je $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

6.6 Lastnosti Diskretne Fourierove Transformacije

Pri diskretni Fourierovi transformaciji smo ugotovili določene sličnosti s koeficienti Fourierove vrste diskretnega periodičnega signala.

Ugotovili smo, da imamo opraviti z N elementi tako v časovnem kot v frekvenčnem prostoru. Pri izračunu ali rekonstrukciji signalnega niza, smo tega rekonstruirali z N enako porazdeljenih frekvenčnih točk na krožnici z radijem $r = 1$ in s korakom $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$.

Tako smo dobili para enačb za DFT nad končnim nizom $x(n)$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn} \quad \text{za } k = 0, \dots, N-1 \quad (6.132)$$

in za inverz, ki rekonstruira signalni niz

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-kn} \quad \text{za } n = 0, \dots, N-1 \quad (6.133)$$

kjer je $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

Najprej ponovimo nekaj že znanih lastnosti kot so lastnost periodičnosti, linearnosti, itd. in sicer za nov primer z nizom N vzorcev.

1) Lastnost periodičnosti

Če sta $x(n)$ in $X(k)$ DFT para dolžine N , tedaj je

$$x(n + N) = x(n) \quad \text{za vse } n \quad (6.134)$$

$$X(k + N) = X(k) \quad \text{za vse } k \quad (6.135)$$

Lastnost periodičnosti sledi iz enačb (6.130) in (6.131) za DFT in IDFT.

2) Lastnost linearnosti

Vzemimo dva signalna niza $x_1(n)$ in $x_2(n)$ dolžine N . Če oba niza, ki jima pripada ustrezna DFT uteženo seštejemo, dobimo signalni niz. Tudi temu pripada DFT, ki je enak vsoti enakih utežnih DFT transformov obeh signalov tako da veljajo relacije:

če obstaja

$$x_1(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_1(k)$$

in

$$x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_2(k)$$

tedaj za poljubni realni ali kompleksni vrednosti a_1 in a_2 velja relacija

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$$

3) Lastnost Krožne simetrije končnega niza

Kot že vemo, N točkovna DFT transformacija končnega niza $x(n)$, dolžine $L \leq N$ je ekvivalentna N točkovni DFT transformaciji periodičnega niza $x_p(n)$ s periodo N . Tega dobimo s periodično razširitvijo signala $x(n)$

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(n - l \cdot N)$$

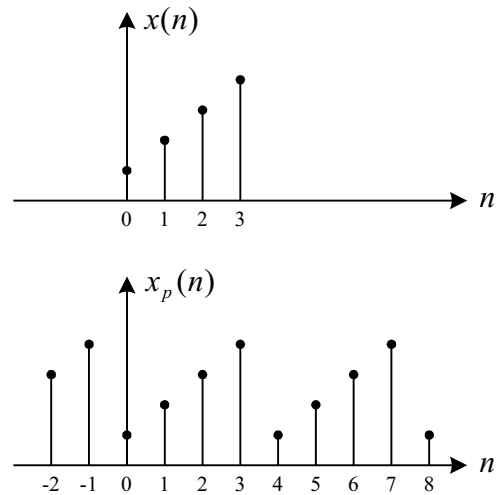
Pomaknimo periodični niz $x_p(n)$ za k mest desno in dobimo nov premaknjeni periodični niz

$$x'_p(n) = x_p(n - k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(n - k - l \cdot N)$$

Torej je končni niz

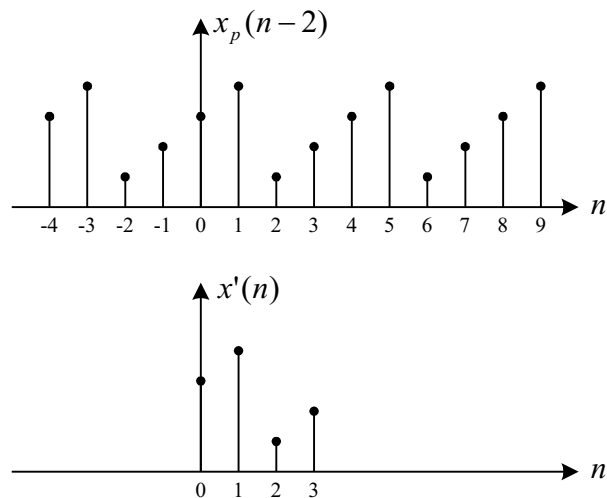
$$x'(n) = \begin{cases} x'_p(n) & \text{za } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{drugače} \end{cases}$$

povezan z originalnim nizom $x(n)$ tako, kot da bi izvedli krožni pomik. Primer je prikazan na sliki 6.13.



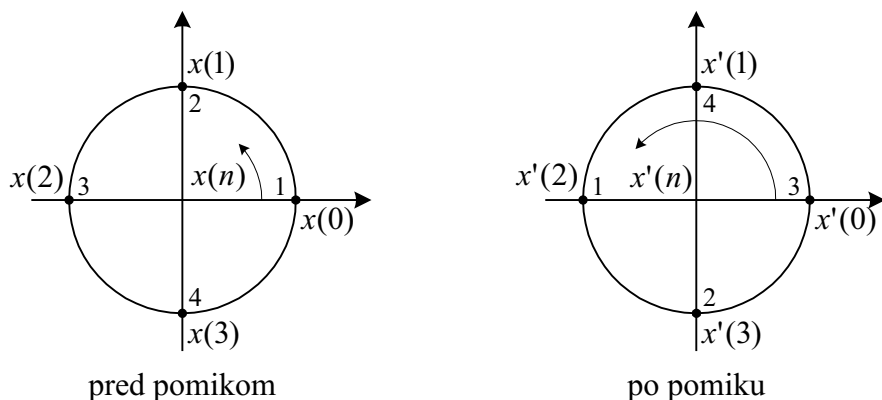
Slika 6.12:

premik za $k = 2$



Slika 6.13: Krožni pomik končnega niza

Krožni pomik imenujemo zato, ker se sistem obnaša zaradi svoje narave kot bi ga pomikali po krogu s slike 6.14.

Slika 6.14: Predstavitev krožnega pomika niza $x(n)$

Vsak krožni pomik lahko predstavimo z indeksom po modulu N . Torej zapišimo

$$x'(n) = x(n - k) \text{ modulu } N = (x(n - k))_N$$

V primeru, ko je $k = 2$ in $N = 4$ imamo

$$x'(n) = (x(n - 2))_4$$

oziroma

$$x'(0) = (x(-2))_4 = x(2)$$

$$x'(1) = (x(-1))_4 = x(3)$$

$$x'(2) = (x(0))_4 = x(0)$$

$$x'(3) = (x(1))_4 = x(1)$$

Glede na porazdelitev N -tih točk po krogu lahko govorimo o sodi ali o lihi simetriji. Če lastnosti še enkrat ponovimo, je N točkovni niz sod, če je simetričen okoli točke nič na krogu. To pa pomeni, da je

$$x(n - N) = x(n) \quad \text{za } 1 \leq n \leq N - 1$$

N točkovni niz je lahko liho simetričen, če velja:

$$x(n - N) = -x(n) \quad \text{za } 1 \leq n \leq N - 1$$

Časovna obrnljivost N točkovnega niza se dobi z obrnitvijo (preslikavo) vzorcev niza okoli ničle na krogu. Tako je niz $x((-n))_N$ enostavno določen kot

$$x((-n))_N = x(n - N) \quad \text{za } 0 \leq n \leq N - 1$$

To pa pomeni isto, kot če bi risali elemente niza $x(n)$ v smeri urinega kazalca.

Tako lahko govorimo o sodih in lihih nizih, ki jih povežemo s periodičnim nizom:

$$\text{sod: } x_p(n) = x_p(-n) = x_p(N - n)$$

$$\text{lih: } x_p(n) = -x_p(-n) = -x_p(N - n)$$

Če je periodični niz kompleksen, tedaj imamo sledeč primer:

$$\text{konjugirano sod niz: } x_p(n) = x_p^*(N - n)$$

$$\text{konjugirano lih niz: } x_p(n) = -x_p^*(N - n)$$

Torej lahko vsak niz $x_p(n)$ razstavimo na

$$x_p(n) = x_{p \text{ sodi}}(n) + x_{p \text{ lihi}}(n)$$

in tako

$$x_{p \text{ sodi}}(n) = \frac{1}{2} [x_p(n) + x_p^*(N - n)]$$

$$x_{p \text{ lihi}}(n) = \frac{1}{2} [x_p(n) - x_p^*(N - n)]$$

4) Simetrične lastnosti DFT

Simetrične lastnosti DFT lahko analiziramo po isti postopkih, kot smo jih pri Fourierovi transformaciji.

Vzemimo, da sta oba niza $x(n)$ in njegova DFT $X(k)$ dolžine N in kompleksna. Oba niza zapišemo v obliki:

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) \quad \text{za } 0 \leq n \leq N - 1$$

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k) \quad \text{za } 0 \leq k \leq N - 1$$

Če vstavimo gornja izraza v izraza, ki določata DFT par dobimo za DFT:

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} + x_I(n) \sin \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad (6.136)$$

$$X_I(k) = - \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \sin \frac{2\pi kn}{N} - x_I(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad (6.137)$$

in za IDFT:

$$x_R(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k) \cos \frac{2\pi kn}{N} - X_I(k) \sin \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad (6.138)$$

$$x_I(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k) \sin \frac{2\pi kn}{N} + X_I(k) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad (6.139)$$

Prav tako bi lahko še omenili probleme simetrije okoli niza realnih ali niza imaginarnih vrednosti. Pri tem bi lahko govorili o že znanem problemu niza realnih a sodih in niza realnih in lihih vrednosti, a smo te probleme obravnavali v predhodnem poglavju.

5) Krožna konvolucija in množenje dveh DFT nizov

Vzemimo zopet dva končna niza $x_1(n)$ in $x_2(n)$ dolžine N . Njuna DFT transformata sta:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}-N} \quad \text{za vse } k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}-N} \quad \text{za vse } k = 0, 1, \dots, N-1$$

Če pomnožimo dva DFT niza, dobimo nov DFT niz $X_3(k)$ dolžine N .

$$X_3(k) = X_1(k) \cdot X_2(k) \quad \text{za vse } k = 0, 1, \dots, N-1$$

IDFT tega niza pa je:

$$x_3(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3(k) \cdot e^{j\frac{2\pi km}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1(k) \cdot X_2(k) \cdot e^{j\frac{2\pi km}{N}} \quad (6.140)$$

Namesto $x_1(k)$ in $x_2(k)$ vstavimo izraza za DFT obeh nizov:

$$x_3(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) \cdot e^{-j\frac{2\pi kl}{N}} \right] \cdot e^{j\frac{2\pi km}{N}} = \quad (6.141)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot \sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k(m-n-l)}{N}} \right]$$

Vsota v oklepaju ima obliko:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N & \text{za } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{za } a \neq 1 \end{cases} \quad (6.142)$$

kjer je $a = e^{j\frac{2\pi(m-n-l)}{N}}$.

Če je $a = 1$, pomeni, da je $m - n - l$ mnogokratnik N , hkrati pa velja, da je $a^N = 1$ za kakršno koli vrednost $a \neq 0$. Izraz (6.142) se torej skrči v

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N & \text{za } l = m - n + pN = ((m - n))_N \\ 0 & \text{drugače} \end{cases}$$

Če vnesemo predhodni izraz v enačbo (6.141) dobimo izraz

$$x_3(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(n) \cdot x_2((m - n))_N \quad (6.143)$$

Izraz se imenuje krožna konvolucija zaradi izraza $((m - n))_N$.

Krožno konvolucijo lahko izračunamo v štirih korakih, prav tako kot smo izračunali linearno konvolucijo. Koraki so:

1. časovni preklap ali preslikava
2. pomik preslikanega niza
3. množenje dveh nizov
4. seštevanje produktov v končno vsoto koraka

Za krožno konvolucijo lahko zaključimo, da veljajo naslednje lastnosti, če velja

$$x_1(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_1(k)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_2(k)$$

potem je

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_1(k) \cdot X_2(k)$$

kjer $\cdot N \cdot$ predstavlja znak za krožno konvolucijo po modulu N .

6) Časovna obrnljivost niza

Če velja

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$$

potem je

$$x((-n))_N = x(N - n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X((-k))_N = X(N - k)$$

Torej pomeni obrnjenost v času niza z N elementi ekvivalentna obrnjenost DFT vrednosti.

7) Krožno časovni pomik niza

Če je

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$$

potem velja

$$x((n - l))_N \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k) \cdot e^{-j\frac{2\pi kl}{N}}$$

8) Krožno frekvenčni pomik niza

Če je

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$$

potem velja

$$x(n) \cdot e^{j\frac{2\pi ln}{N}} \xleftrightarrow[N]{DFT} X((k - l))_N$$

Množenje niza $x(n)$ s kompleksnim eksponentnim nizom $e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$ je ekvivalentno krožnemu pomiku DFT transformata za l enot v frekvenčnem prostoru.

To predstavlja dualnost k lastnosti krožno časovnega pomika.

9) Kompleksna konjugiranost

Če je

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$$

potem tudi velja, da je

$$x^*(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X^*((-k))_N = X^*(N - k)$$

10) Krožna korelacija

V splošnem velja za kompleksna niza $x(n)$ in $y(n)$, katerih DFT para sta

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$$

$$y(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} Y(k)$$

da je njuna korelacija

$$\tilde{r}_{xy}(l) \xleftrightarrow[N]{DFT} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot y^*((n-l))_N$$

11) Množenje dveh nizov

Če množimo niza $x_1(n)$ in $x_2(n)$ in njuna para DFT

$$x_1(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_1(k)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X_2(k)$$

potem je par produkta obeh nizov krožna konvolucija nizov v frekvenčnem prostoru

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} \frac{1}{N} X_1(k) \cdot N \cdot X_2(k)$$

12) Parsevalov teorem

Za kompleksne vrednosti nizov $x(n)$ in $y(n)$, velja, če obstajata para

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} X(k)$$

in

$$y(n) \xleftrightarrow[N]{DFT} Y(k)$$

da je

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot Y^*(k) \quad (6.144)$$

V posebnem primeru, ko je $y(n) = x(n)$ se izraz (6.144) poenostavi v

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

6.7 Metode računanja diskretne Fourierove transformacije

Diskretna Fourierova transformacija DFT igra pomembno vlogo pri analizi in sintezi sistemov za obdelavo časovno diskretnih signalov. Zelo pomembno je tudi dejstvo, da obstajajo tudi učinkoviti algoritmi računanja DFT transformata, kar omogoča njegova uporabnost v realnih aplikacijah.

Računanje DFT v N točkah je ekvivalentno računanju Fourierove transformacije v N enakomerno porazdeljenih frekvenčnih točkah $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ kompleksne ravnine imenovane \mathcal{Z} .

Metode hitrega računanja DFT se v literaturi imenujejo algoritmi hitre Fourierove transformacije (FFT - Fast Fourier Transform).

Po klasičnih postopkih računanja DFT moramo za signalni niz dolžine N opraviti N^2 množenj in $N(N - 1)$ seštevanj kompleksnih števil.

Algoritmi, ki omogočajo hitro računanje DFT, izkoriščajo lastnosti DFT, kot sta na primer periodičnost in simetričnost koeficientov.

6.7.1 Hitro računanje DFT

Kot smo omenili, je DFT končnega niza dolžine N določen z

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn} \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.145)$$

kjer je $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. Inverzna transformacija IDFT je določena z

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-kn} \quad \text{za } n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6.146)$$

Vidimo, da sta si enačbi zelo podobni. Razlikujeta se dejansko le v znaku eksponenta W_N in skalirnega faktorja $\frac{1}{N}$. Pri tem ne smemo pozabiti na kompleksnost obeh nizov $x(n)$ in $X(k)$.

Večina postopkov, ki skušajo izboljšati učinkovitost računanja DFT, izkorišča lastnosti simetrije in periodičnosti koeficientov W_N^{kn} , posebej pa:

- $W_N^{k[N-n]} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$ - simetrija
- $W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$ - periodičnost

Potrebe po hitrem računanju, kjer izkoriščamo lastnosti simetričnosti in periodičnosti, so bile prisotne pred današnjo računalniško tehnologijo. Runge in Lanczos sta računsko zahtevnost algoritma spravila z N^2 na $N \log N$ operacij. Največjo pohitritev pa sta leta 1965 napravila Cooley in Tukey, kjer sta objavila algoritem za izračun DFT, ki je bistveno pospešil uporabo DFT v teoriji signalov. Celoten algoritem se imenuje FFT (Fast Fourier Transform).

FFT algoritmi so zasnovani na osnovnem principu razstavljanja postopka računanja DFT na nize dolžine N v zaporedne in manjše diskretne Fourierove transforme. Način, kako izpeljemo to zaporednost računanja vodi v niz algoritmov. V bistvu ločimo dva tipa algoritmov:

- prvi se imenuje porazdeljevanje ali decimacija po času, saj niz $x(n)$ razstavimo v zaporedno manjše nize
- drugi se imenuje decimacija po frekvenci, saj predstavlja razred algoritmov, kjer nize koeficientov diskretnih Fourierovih transformov $X(k)$ razstavimo v zaporedno manjše nize

6.7.2 Goertzlov algoritem

Kot osnovni in zelo znani algoritem je bil dolgo časa Goertzlov algoritem izračuna DFT. Ta izhaja iz same enačbe za izračun DFT in sicer iz:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn} \quad (6.147)$$

Pri tem je Goertzl poizkušal izkoristiti lastnosti periodičnosti niza W_N^{kn} . Tako je uporabil izraz, ki je rezultat omenjene periodičnosti

$$W_N^{-kN} = e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot kN} = e^{j2\pi k} = 1$$

Pomnožimo desno stran izraza (6.147) z W_N^{-kN} , pri čemer njegove vrednosti ne spremenimo:

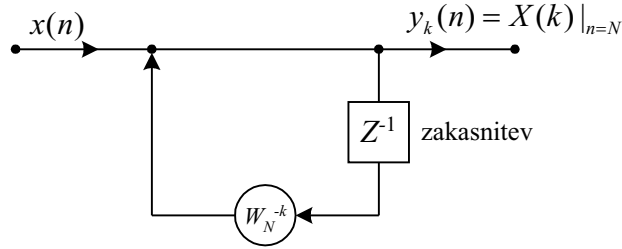
$$X(k) = W_N^{-kN} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{-k(N-n)}$$

Vidimo, da imamo opravka z nizom vhodnih vzorcev katere lahko razporedimo v vrsto:

$$\begin{aligned} X(k) &= x(0) \cdot W_N^{-kN} + x(1) \cdot W_N^{-k(N-1)} + \dots + x(N-1) \cdot W_N^{-k} = \\ &= \underbrace{\left(\dots \left(\underbrace{x(0) \cdot W_N^{-k}}_{y(0)} + x(1) \right) W_N^{-k} + x(2) \right) W_N^{-k} + \dots \right)}_{y(2)} \end{aligned}$$

Ta izraz, ki predstavlja vrsto, kjer sta $x(n)$ in W_N^{-k} kompleksna, je možno iterativno izračunati kot odziv $y_k(n)$ vezja s slike 6.15 na vhodni niz $x(n)$.

Vse vrednosti $y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(N-1)$ moramo predhodno izračunati, nakar šele izračunamo odziv $Y_k(N) = X(k)$. Zaradi iterativnega računanja je ta metoda slaba in manj učinkovita,



Slika 6.15: Osnovni Goertzlov algoritem

kot pa je učinkovita direktna metoda. Prednost te metode je v tem, da smo se izognili direktnemu računanju koeficientov W_N^{kn} , saj se ti računajo rekurzivno.

Če uporabimo prenosno funkcijo sistema s slike 6.16 in če pomnožimo števec in imenovalc z istim faktorjem lahko zmanjšamo število množenj za faktor 2.

Vzemimo zato funkcijo s slike 6.16

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} \cdot z^{-1}}$$

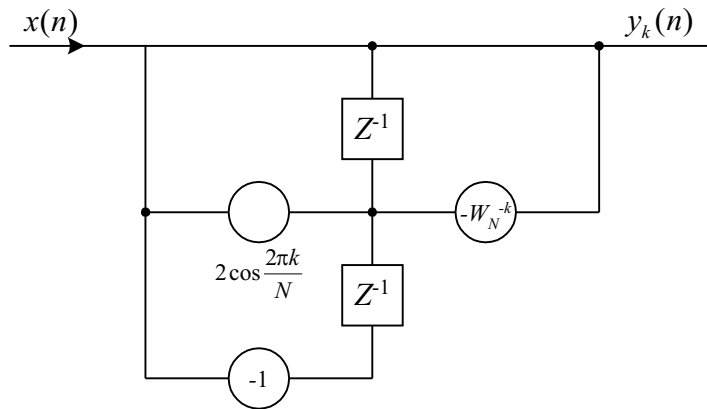
in jo pomnožimo in delimo z:

$$1 - W_N^k \cdot z^{-1}$$

Tako dobimo

$$H_k(z) = \frac{1 - W_N^k \cdot z^{-1}}{(1 - W_N^k \cdot z^{-1})(1 - W_N^{-k} \cdot z^{-1})} = \frac{1 - W_N^k}{1 - 2 \cos \frac{2\pi k}{N} \cdot z^{-1} + z^{-2}}$$

Prenosna funkcija je realizirana z vezjem s slike 6.16.



Slika 6.16: Vezje drugega reda za izračun Goertzlovega algoritma

V primeru, ko imamo kompleksni vhodni signal, moramo za eno komponento DFT transformo pri direktni metodi izračunati $4N$ realnih množenj, pri rekurzivni metodi 1. reda $4N$ realnih množenj s konstantnim koeficientom in pri metodi 2. reda le $2N + 4$ realnih množenj.

6.7.3 DFT in decimacija po času

Pri računanju DFT pridemo do bistvenega poboljšanja časa računanja, če računanje razbijemo na niz manjših DFT računanj.

V tem primeru izkoristimo simetričnost in periodičnost kompleksnega eksponenta $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k\cdot n}$.

Algoritem, kjer skušamo razstaviti niz $x(n)$ na manjše nize, se imenuje decimacija po času.

Dekompozicija po času je učinkovita, če je število vzorcev niza N potenca števila 2, $N = 2^m$.

Ker je 2 sodo število, lahko v postopku $X(k)$ predpostavimo delitev na $\frac{N}{2}$ točk, torej na lihe in sode elemente niza $x(n)$.

Transform DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.148)$$

tvorimo za vsak niz posebej

$$X(k) = \sum_{n=\text{sod}} x(n) \cdot W_N^{nk} + \sum_{n=\text{lih}} x(n) \cdot W_N^{nk} \quad (6.149)$$

Nadomestimo sedaj sode in lihe spremenljivke tako, da določimo nove spremenljivke in sicer

$$n = 2r \quad \text{za sode } n \text{ in}$$

$$n = 2r + 1 \quad \text{za lihe } n$$

Pri tem moramo paziti na mejo sumiranja

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) \cdot W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) \cdot W_N^{(2r+1)k} = \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) \cdot (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) \cdot (W_N^2)^{rk} \end{aligned} \quad (6.150)$$

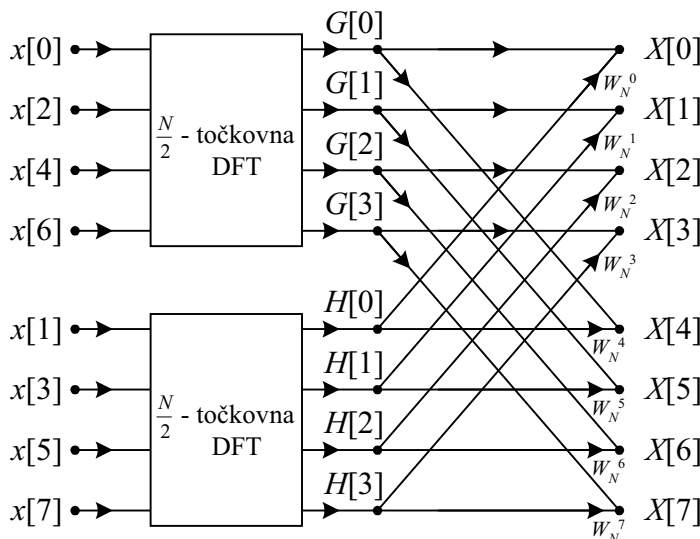
Kjer je $W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$.

Torej je

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) \cdot W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) \cdot W_{N/2}^{rk} = G(k) + W_N^k H(k) \quad (6.151)$$

Vsak izraz v (6.151) predstavlja $N/2$ DFT. Prva vsota predstavlja $N/2$ DFT transform sodih elementov niza $x(n)$, druga vsota pa predstavlja $N/2$ DFT transform lih elementov originalnega niza $x(n)$.

Ko tako izračunamo dva $N/2$ DFT transformata, lahko s postopkom nadaljujemo.

Slika 6.17: Decimacija po času z $N = 8$ in z razstavitvijo v dve $N/2$ enoti

$$X(0) = G(0) + W_N^k H(0)X(1) = G(1) + W_N^k H(1)X(2) = G(2) + W_N^k H(2) \quad (6.152)$$

Na sliki 6.17 smo z $G(k)$ označili 4 točke DFT transformata sodih elementov originalnega niza in s $H(k)$ pa smo označili 4 točke DFT transformata lihih elementov originalnega niza. Izhod $X(0)$ dobimo z množenjem $H(0)$ z W_N^0 , temu pa prištejemo $G(0)$. $X(1)$ dobimo z množenjem $H(1)$ z W_N^1 , temu produktu pa še prištejemo $G(1)$. Ta postopek ponavljamo vse dokler ne dobimo dvotočkovnega DFT.

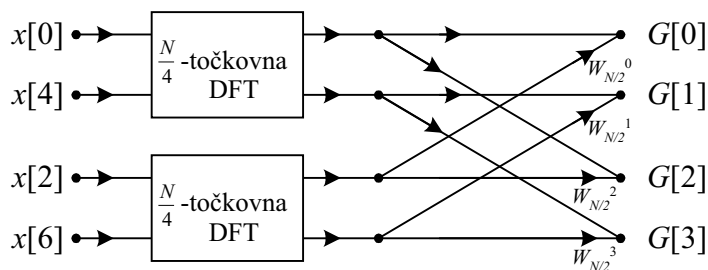
V originalnem algoritmu smo potrebovali N^2 množenj, tu pa smo število kompleksnih množenj zmanjšali na $N + N^2/2$ kompleksnih množenj.

S postopkom dekompozicije lahko nadaljujemo tako, da vsak blok $N/2$ DFT transformata razbijemo na dva $N/4$ bloka DFT. Tako lahko $G(k)$ v enačbi (6.151) razstavimo zopet na sode in lihe elemente vhodnega niza $g(r)$.

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} g(r) \cdot W_{N/2}^{rk} = \sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l) \cdot W_{N/2}^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l+1) \cdot W_{N/2}^{(2l+1)k} = \\ &= \sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l) \cdot W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l+1) \cdot W_{N/4}^{lk} \end{aligned}$$

Enako lahko storimo s $H(k)$, ki ga predstavimo kot:

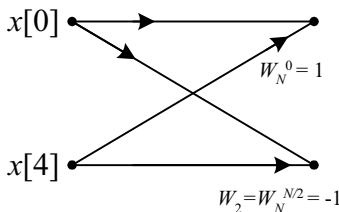
$$H(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} h(2l) \cdot W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{N/4-1} h(2l+1) \cdot W_{N/4}^{lk}$$



Slika 6.18: Razstavitev po času $N/2$ DFT transformna na dva $N/4$ DFT transformna

Sedaj transform DFT dimenzije $N/2$ s slike 6.17 nadomestimo s transformoma DFT dimenzije $N/4$, kot je prikazano na sliki 6.18.

Postopek razstavljanja nadaljujemo vse dokler ne pridemo do bloka dvo točkovnega DFT transformna s slike 6.19, ki ga vstavimo namesto predzadnjega bloka, v našem primeru v sliki 6.22.



Slika 6.19: Dvotočkovni DFT

Za naš primer 8 točkovnega DFT transformna smo po 2 korakih prišli do rezultatov s slike 6.20, kjer smo na mesto $N/2$ DFT vstavili blok z dvema $N/4$ DFT transformoma.

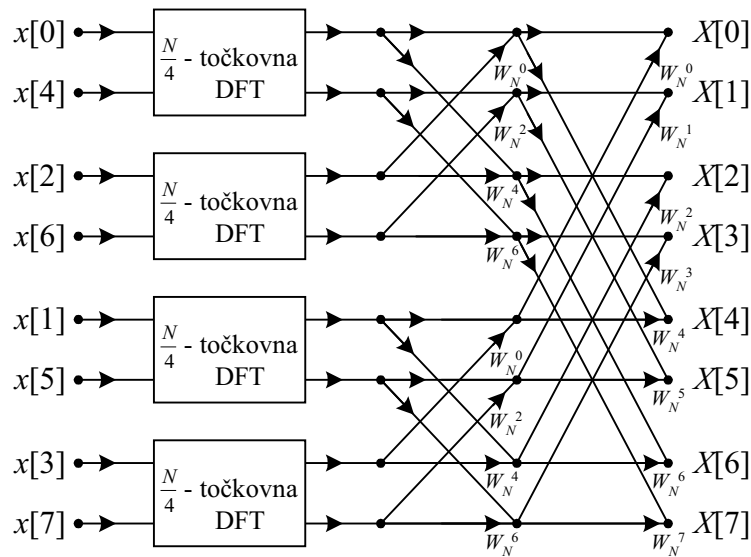
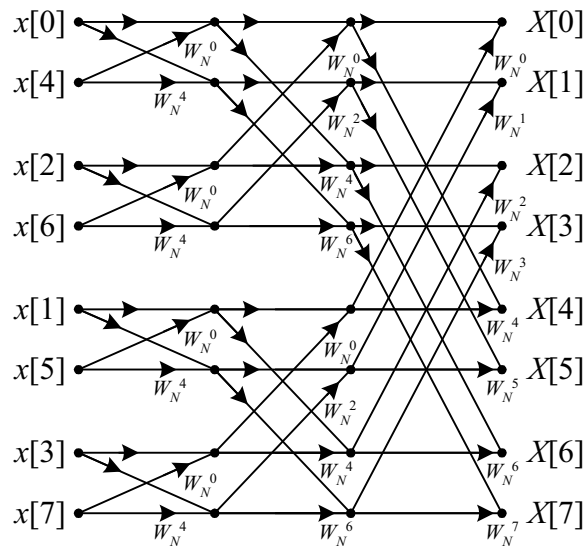
Ko smo v bloku $N/4$ DFT vstavili še bloke z 2 točkovnim DFT transformom, smo dobili celovito rešitev decimacije po času.

6.7.4 DFT in decimacija po frekvenci

Podobno kot smo izvedli decimacijo po času, lahko tudi izvedemo decimacijo po frekvenci. Pri tem delimo izhodni niz $X(k)$ v vedno in vedno manjše podnize in sicer na podoben način, kot smo to storili v predhodnem poglavju. Temu postopku pravimo algoritem decimacije po frekvenci.

Zopet se omejimo na niz N , katerega velikost je $N = 2^m$. Pri tem računamo posebej izhodne nize frekvenc s sodim indeksom in posebej z lihim indeksom. Celoten $X(k)$ razstavimo na dva enaka dela z indeksi od 0 do $N/2 - 1$ in od $N/2$ do $N - 1$. Pri tem je:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Slika 6.20: Rezultat vstavitve dveh blokov $N/4$ DFT namesto $N/2$ DFT bloka

Slika 6.21: Potek postopka decimacije po času za 8 točkovno računanje DFT transformacije

Za sode komponente transformata $X(k)$ velja pri $k = 2r$ zapis:

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{n \cdot 2r} \quad \text{za } r = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

oziroma

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) \cdot W_N^{2nr} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{2nr} =$$

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) \cdot W_N^{2nr} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) \cdot W_N^{2(n+N/2)r}.$$

Ker je zaradi periodičnosti

$$W_N^{2r(n+N/2)} = W_N^{2rn} \cdot W_N^{rN} = W_N^{2rn}$$

in ker je $W_N^2 = W_{N/2}$, je

$$\begin{aligned} X(2r) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) \cdot W_{N/2}^{nr} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2) \cdot W_{N/2}^{nr} = \\ X(2r) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x(n) + x(n+N/2)) \cdot W_{N/2}^{nr} \quad \text{za } r = 0, 1, \dots, N/2 - 1. \end{aligned} \quad (6.153)$$

Enačba (6.153) predstavlja $N/2$ DFT transform izhodnega niza, kjer seštevamo elemente vhodnega niza najprej po prvi polovici, nato pa še po drugi polovici tega vhodnega niza.

Vzemimo še liho oštevilčene točke v frekvenčnem nizu:

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{n(2r+1)} \quad \text{za } r = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \quad (6.154)$$

Če preuredimo enačbo (6.154)

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) \cdot W_N^{n(2r+1)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{n(2r+1)} \quad (6.155)$$

in namesto druge vsote pišemo

$$\sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{n(2r+1)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2) \cdot W_N^{(n+N/2)(2r+1)} = \quad (6.156)$$

dobimo:

$$W_N^{N/2 \cdot (2r+1)} \cdot \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2) \cdot W_N^{n(2r+1)} = - \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2) \cdot W_N^{n(2r+1)} \quad (6.157)$$

kjer smo upoštevali, da je $W_N^{(N/2) \cdot 2r} = 1$ in $W_N^{(N/2)} = -1$. Če ta rezultat druge vsote v enačbi (6.157) vstavimo v enačbo (6.154) dobimo

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x(n) - x(n+N/2)) \cdot W_N^{n(2r+1)}$$

kjer je $W_N^2 = W_{N/2}$ je

$$X(2r + 1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \{x(n) - x(n + N/2)\} \cdot W_N^n \cdot W_{N/2}^{nr} \quad \text{za } r = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \quad (6.158)$$

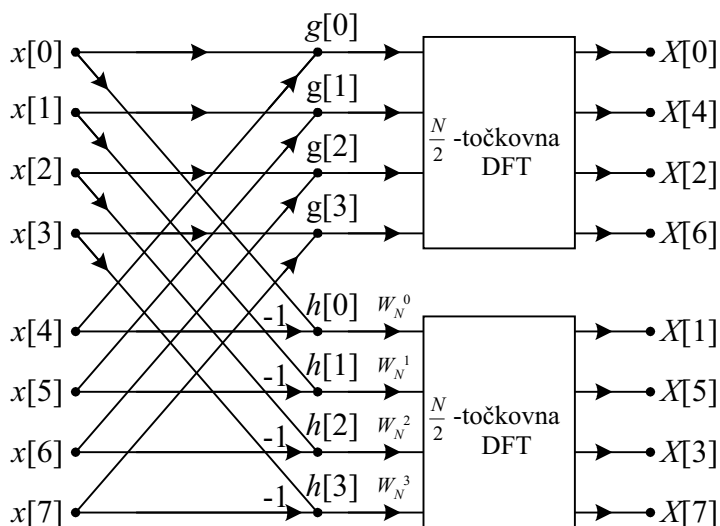
Lihe komponente v frekvenčnem prostoru torej dobimo z odštevanjem druge polovice vhodnega niza od prve polovice vhodnega niza, pri čemer rezultat odštevanja pomnožimo z W_N^n .

Tako dobimo na osnovi enačb (6.153) in (6.158) grupi:

$$g(n) = x(n) + x(n + N/2)$$

$$h(n) = x(n) - x(n + N/2)$$

DFT lahko izračunamo najprej z računanjem nizov $g(n)$ in $h(n)$, nakar izvedemo množenje $h(n) \cdot W_N^n$ ter nazadnje računanje $N/2$ DFT transformata, kar je razvidno s slike 6.22.



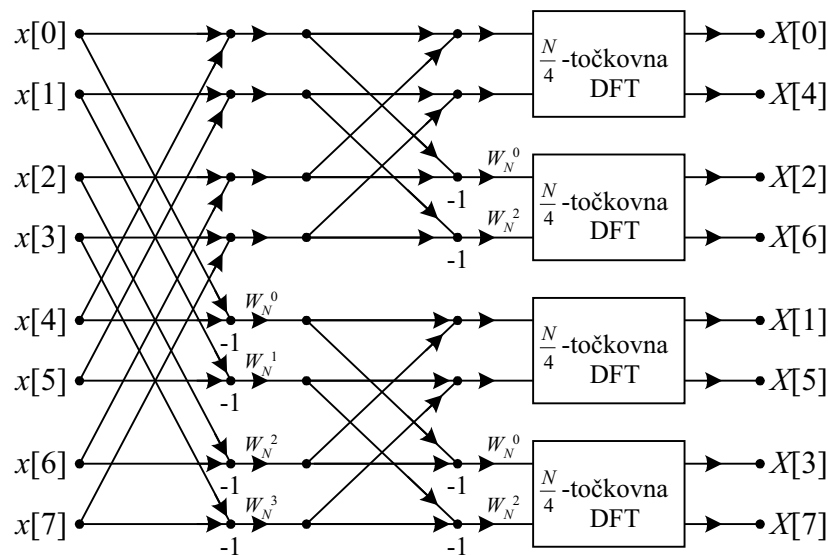
Slika 6.22: Postopek računanja DFT z decimacijo po frekvenci po enem koraku za $N = 8$

Če nadaljujemo tako, kot smo pri postopku decimacije po času, vidimo, da moramo preiti v računanje $N/2$ točkovne DFT transformacije z uporabo decimacije po frekvenci. Tako zopet razdelimo točke $N/2$ niza $X(k)$ v sode in lihe točke. Postopek vodi v enak rezultat, le da je $N/2$ DFT blok nadomeščen z utežnimi mešalnimi povezavami in z dvema $N/4$ DFT blokoma.

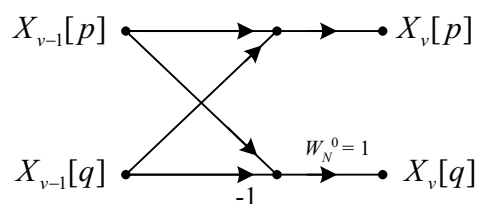
Računanje DFT transformata je bilo skrčeno na dvotočkovni DFT transform s slike 6.22.

Tako se je DFT postopek z $N/4$ točkami v našem primeru končal po analogiji z dvo točkovnim DFT transformom, kar je razvidno na sliki 6.23.

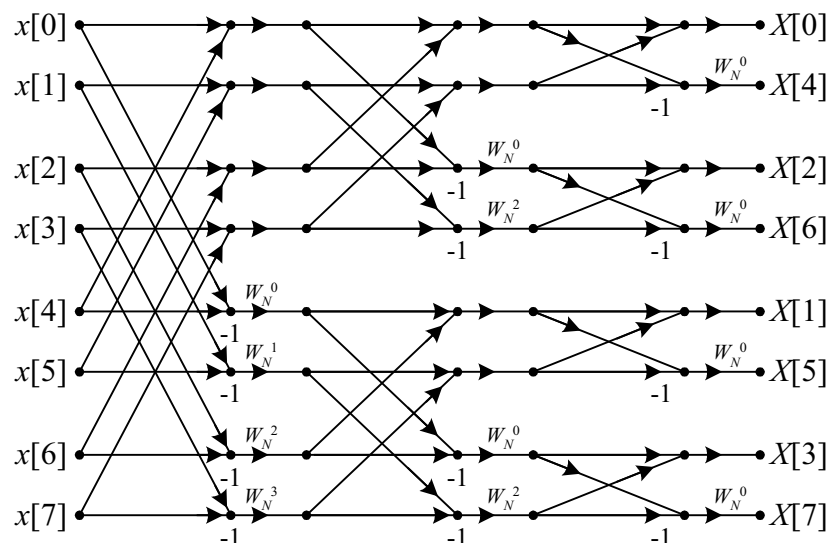
Če si ogledamo zahtevnost računanja opazimo, da v primeru dolžine niza $N = 2^m$ je zahtevnost računanja prikazana na sliki 6.25, kaže v $N/2 \cdot \log_2 N$ kompleksnih množenjih in v $N \cdot \log_2 N$ kompleksnih seštevanjih.



Slika 6.23: Postopek decimacije po frekvenci 8 točkovega niza v štiri 2 točkovne DFT transformacije



Slika 6.24: Postopek računanja 2 točkovega DFT, ki ga potrebujemo v zadnjem koraku



Slika 6.25: Celovit postopek računanja DFT transformata z decimacijo po frekvenci za $N = 8$

6.7.5 Hitro računanje odziva linearnih sit z uporabo DFT metode

Iz dosedanje snovi smo lahko spoznali, da je odziv sistema na vhodni signal kar konvolucija med prenosno funkcijo časovnega neodvisnega linearnega sistema in vhodno funkcijo - vhodnim signalom. Ena izmed lastnosti DFT transformata pa je tudi, da je produkt dveh DFT transformov enak krožni konvoluciji med prenosno funkcijo in vhodnim nizom.

Ker je linearno filtriranje postopek DFT nad blokom ali več bloki podatkov, saj imamo omejene kapacitete pomnilnika, moramo najti tak postopek DFT, ki bo omogočal blokovno obdelavo signalnega niza v frekvenčnem prostoru.

Pri tem se moramo še zavedati, da krožna konvolucija ni uporabna za določitev odziva linearnega sita na vhodni signal. V frekvenčnem prostoru moramo uporabiti postopek, ki je ekvivalenten linearni konvoluciji.

Vzemimo zato končen vhodni niz dolžine L v filter reda (dolžine) M . Pri tem predpostavimo, da imamo kavzalni niz:

$$x(n) = 0 \quad \text{za } n < 0 \text{ in } n \geq L$$

ter da je sistem v stanju

$$h(n) = 0 \quad \text{za } n < 0 \text{ in } n \geq M$$

kjer je $h(n)$ impulzni odziv sita FIR. Izhod iz sita je v časovnem prostoru izražen kot

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \cdot x(n-k)$$

Dolžina konvolucijskega niza je končna in je $L + M - 1$. V frekvenčnem prostoru je odziv enak:

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Če enolično predstavimo niz $y(n)$ v frekvenčnem prostoru z vzorci spektra $Y(\omega)$, ki so dejansko vzorci pri določenih diskretnih frekvencah, potem mora biti dolžina niza, oziroma število komponent pri različnih frekvencah, enako $L + M - 1$.

Torej je dolžina DFT $N \geq L + M - 1$, če predpostavimo odziv $\{y(n)\}$ v frekvenčnem prostoru.

Torej je

$$\begin{aligned} Y(k) &= Y(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi}{N} \cdot k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ Y(k) &= X(\omega) \cdot H(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi}{N} \cdot k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

kjer sta niza $\{X(k)\}$ in $\{H(k)\}$ N točkovna DFT transformata, ki pripadata nizoma $\{x(n)\}$ in $\{y(n)\}$.

Ker sta oba niza $\{h(n)\}$ in $\{x(n)\}$ krajša od N , ju običajno dopolnimo z ničlami do dolžine N . To dejansko poveča velikost niza, samo polnjenje z ničlami pa ne vpliva na njune spektre $X(\omega)$ in $H(\omega)$, ki pa sta zvezna, če sta niza periodična.

Z vzorčenjem njunih spektrov v N enakomerno porazdeljenih točkah, dejansko izračunavamo N točkovno DFT, pri čemer smo povečali število vzorcev, ki predstavljajo te nize.

Ker z $N = L + M - 1$ vzorci DFT transformacije enostavno predstavimo $y(n)$ v frekvenčnem prostoru, sledi da množenje transformov $X(k)$ in $H(k)$, ki mu sledi inverzna DFT transformacija daje pravi niz $\{y(n)\}$ v časovnem prostoru.

To pa pomeni, da N točkovna krožna konvolucija med $x(n)$ in $h(n)$ je ekvivalentna linearni konvoluciji nizov $x(n)$ in $h(n)$.

Torej lahko rečemo, da s povečanjem dolžine obeh nizov $x(n)$ in $h(n)$ na N točk z samimi ničlami in z uporabo krožne konvolucije lahko dobimo isti rezultat, kot če uporabimo linearno konvolucijo med obema osnovnima nizoma $x(n)$ in $h(n)$.

Torej lahko DFT uporabimo v analizi odzivov sistemov, če uporabimo metodo dopolnjevanja dolžine obeh nizov z ničlami do dolžine N .

S tem, ko smo analizirali uporabnost DFT transformata v procesu filtriranja signalnih nizov smo prišli do problema segmentacije signalnih nizov v bloke končnih dolžin in do vpliva segmentacije na DFT oziroma tudi na IDFT transformata.

V literaturi lahko zasledimo dve osnovni metodi in sicer metodo s prekrivanjem in shranjevanjem, ter metodo s prekrivanjem in prištevanjem.

V obeh primerih privzamemo, da ima sito dolžine M in da je dolžina signalnega niza L neprimerno večja od dolžine sita

$$L \gg M$$

Prekrivno shranjevalna metoda

Pri tej metodi predpostavimo, da je dolžina podatkovnega bloka $N = L + M + 1$ in da je dolžina DFT in inverzne DFT enaka N .

Vsak podatkovni blok vsebuje $M - 1$ podatek predhodnega bloka ter L podatkov novega bloka.

Tako je skupna dolžina podatkovnega niza $N = L + M - 1$. N točkovno DFT transformacijo računamo za vsak podatkovni blok.

Impulzni odziv sita FIR povečamo za $L - 1$ ničel, ki jih dodamo k osnovnemu odzivu dolžine M .

Po izračunu N točkovne DFT razširjenega odziva sita izvedemo množenje med N točkovnima transformoma, torej med $\{H(k)\}$ in $\{X_m(k)\}$, kjer indeks m pomeni m -ti blok signalnega

niza $\{x(n)\}$.

$$\hat{Y}_m(k) = H(k) \cdot X_m(k) \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Inverzna DFT transformacija pa daje sledeči niz odziva bloka m :

$$\hat{y}_m(n) = \{\hat{y}_m(0), \hat{y}_m(1), \dots, \hat{y}_m(M - 1), \hat{y}_m(M), \dots, \hat{y}_m(N - 1)\}$$

Niz je dolžine N . Prvih $M - 1$ vzorcev niza $y_m(n)$ je popačenih s podatki predhodnega, $m - 1$ bloka, zadnjih L točk pa predstavlja točke linearne konvolucije:

$$\hat{y}_m(n) = y_m(n) \quad \text{za } n = M, M + 1, \dots, N - 1$$

V začetku procesa napolnimo prvih $M - 1$ točk bloka s samimi ničlami.

Tako imamo opraviti z bloki podatkov, ki imajo sledečo strukturo:

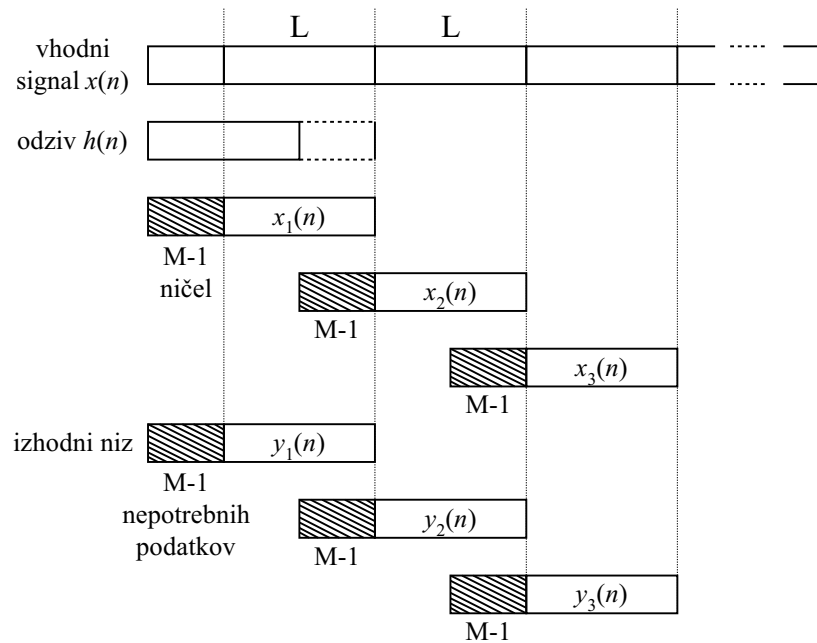
$$x_1(n) = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{M-1 \text{ ničel}}, x(0), x(1), \dots, x(L - 1)$$

$$x_2(n) = \underbrace{\{x(L - M + 1), \dots, x(L - 1)\}}_{M-1 \text{ podatkov iz } x_1(n)}, \underbrace{\{x(L), \dots, x(2L - 1)\}}_{L \text{ novih podatkov}}$$

$$x_3(n) = \{x(2L - M + 1), \dots, x(2L - 1), x(2L), \dots, x(3L - 1)\}$$

$$\vdots$$

ki pa je tudi razvidna s slike 6.26.



Slika 6.26: Izračun - filtriranje signala s prekrivno shranjevalno metodo

Prekrivno seštevalna metoda

Pri prekrivno seštevalni metodi je dolžina signalnega bloka L vzorcev, dolžina DFT in IDFT transformacij pa je $N = L + M - 1$.

V tem primeru vsakemu podatkovnemu bloku pripnemo vedno še $M - 1$ ničel, nakar izračunamo DFT. Struktura podatkovnega bloka je v prekrivno seštevalni metodi sledeča:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \{x(0), x(1), \dots, x(L-1), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M-1 \text{ ničel}}\} \\ x_2(n) &= \{x(L), x(L+1), \dots, x(2L-1), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M-1 \text{ ničel}}\} \\ x_3(n) &= \{x(2L), x(2L+1), \dots, x(3L-1), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M-1 \text{ ničel}}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Na osnovi tako razširjenih podatkov računamo N mestno DFT:

$$Y_m(k) = H(k) \cdot X_m(k) \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Z uporabo IDFT dobimo bloke dolžine $N = L + M - 1$, v katerih ni prekrivanja zaradi povečanja podatkovnega niza. Ker se je vsak podatkovni blok zaključil z $M - 1$ ničlami, moramo zadnjih $M - 1$ izhodnih podatkov predhodnega bloka prišteti k $M - 1$ izhodnim podatkom bloka, ki mu sledi. Zato se ta metoda imenuje prekrivno seštevalna metoda.

Tako dobimo izhodni niz $y(n)$:

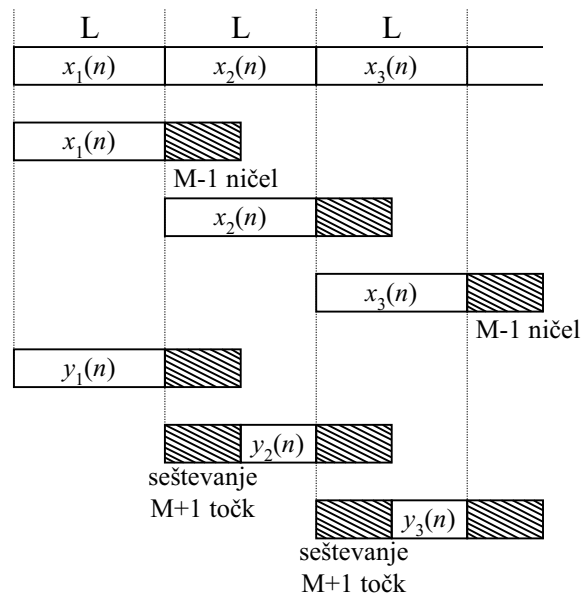
$$\begin{aligned} y(n) &= \{y_1(0), y_1(1), \dots, y_1(L-1), y_1(L) + y_2(0), y_1(L+1) + \\ &\quad + y_2(1), \dots, y_1(N-1) + y_2(M-1), y_2(M), y_2(M+1), \dots\} \end{aligned}$$

Porazdelitev vhodnega podatkovnega niza na bloke in kasnejše prirejanje izhodnega niza je razvidna s slike 6.27.

Vidimo, da je ta metoda filtriranja uporabna z uporabo algoritma hitre Fourierove transformacije FFT in IFFT. Tovrsten indirektn pristop preko frekvenčnega prostora je manj kompleksen kot pa je pristop v časovnem prostoru z uporabo linearne konvolucije, saj zahteva neprimerno manj množenj in seštevanj, kot pa direkten pristop.

6.8 Oknjenje

V dosedanjih poglavjih smo se ukvarjali predvsem z vrstami signalov, ki so bile neskončne, nikoli pa se nismo vprašali o realnih nizih signalov. V realnem življenju imamo običajno opravka s



Slika 6.27: Prikaz postopka računanja odziva sita FIR z uporabo prekrivno seštevalne metode končnimi nizi signalov, ali impulznih odzivov, kar pa dejansko pomeni množenje neskončnega niza $h = \{h(n)\}$ z okenskim nizom w_R . Tak končni niz je določen z izrazom:

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & \text{če je } |n| \leq N \\ 0 & \text{če je } |n| > N. \end{cases} \quad (6.159)$$

Torej je oknjeni odziv $h_o(n)$ podan kot

$$h_o(n) = h(n)w_R(n), \quad (6.160)$$

kjer predstavlja $w_R(n)$ pravokotno okno. Splošneje lahko napišemo za poljubno okno $\{w(n)\}$ sledeč izraz:

$$h_w(n) = h(n)w(n). \quad (6.161)$$

Če upoštevamo transformacijo Z produkta dveh nizov

$$Z\{h, w\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [h(n)w_R(n)]z^{-n}, \quad (6.162)$$

dobimo prenosno funkcijo oknjenega (omejenega) niza

$$H_w(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_C H(v)W(z/v)v^{-1}dv, \quad (6.163)$$

kjer je C kontura skupnega področja konvergence $H(v)$ in $W(z/v)$. Če vzamemo, da je $v = e^{j\Omega T}$ in da je $z = e^{j\omega T}$, dobimo

$$H_w(e^{j\omega T}) = \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{T}} H(e^{j\Omega T})W(e^{j(\omega-\Omega)T})d\Omega. \quad (6.164)$$

Primer:

Vzemimo pravokotno okno. Zanj velja zapis v frekvenčnem prostoru

$$\begin{aligned}
 W_R(e^{j\omega T}) &= \sum_{n=-N}^N (e^{-j\omega n T}) \\
 &= \frac{(e^{j\omega N T} - e^{-j\omega(2N+1)T})}{1 - e^{-j\omega T}} \\
 &= \frac{\sin(\omega(2N+1)T/2)}{\sin(\omega T/2)}.
 \end{aligned} \tag{6.165}$$

Iz primera vidimo, da ima frekvenčni spekter pravokotnega okna velike stranske alternirajoče boke. To pa vodi k Gibbsovemu fenomenu, saj imamo opraviti z omejenim odzivom idealnega nizkega sita, saj je v primeru H_w konvolucija idealnega odziva H in okna W . Običajno si želimo minimalnen vpliv stranskih bokov in čim večji vpliv osrednjega pasu spektra. Takšno funkcijo dobimo z oknom

$$w_H(nT) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos(\pi n/N) & \text{če je } |n| \leq N \\ 0 & \text{če je } |n| > N. \end{cases} \tag{6.166}$$

Za $\alpha = 0.5$ imenujemo to okno *Hann-ovo okno* in za $\alpha = 0.54$ imenujemo to okno *Hamming-ovo okno*. Spekter okna je podan z izrazom

$$\begin{aligned}
 W_H(e^{j\omega T}) &= \alpha \times \frac{\sin(\omega(2N+1)T/2)}{\sin(\omega T/2)} \\
 &+ \frac{(1-\alpha)}{2} \times \frac{\sin[\omega(2N+1)T/2 - (2N+1)\pi/2N]}{\sin[\omega T/2 - \pi/2N]} \\
 &+ \frac{(1-\alpha)}{2} \times \frac{\sin[\omega(2N+1)T/2 + (2N+1)\pi/2N]}{\sin[\omega T/2 + \pi/2N]}.
 \end{aligned} \tag{6.167}$$

Prvi člen enačbe ima ničlo pri $\omega = m\omega_s/(2N+1)$, drugi in tretji člen enačbe pa imata ničlo pri

$$\omega = \left(m + \frac{2N+1}{2N}\right) \frac{\omega_s}{(2N+1)}$$

$$\omega = \left(m - \frac{2N+1}{2N}\right) \frac{\omega_s}{(2N+1)}$$

in sicer za vse $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Glavni pas ima torej pasovno širino $4\omega_s/(2N+1)$. Sicer pa imajo kar trije členi skupno ničlo pri $2\omega_s/(2N+1)$ če je N zelo velik.

Blackman-ovo okno določeno z izrazom

$$w_B(nT) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(n\pi/N) + 0.08 \cos(2n\pi/N) & \text{za } |n| \leq N \\ 0 & \text{za } |n| > N \end{cases} \tag{6.168}$$

močno zmanjša prenihaje (ripples) glede na preje omenjeni okni, dočim pa je sam osnovni pas širši, to pa tudi pomeni, da je je prehodno področje med zapornim in prepustnim pasom širše, karakteristična krivulja pa jr tudi manj strma.

Želena razmerja med pasovno širino prepustnega pasu in med prenihaji dosežemo s *Kaiserjevimi oknom*:

$$w_K(nT) = \begin{cases} I_0(\beta)/I_0(\alpha) & za |n| \leq N \\ 0 & za |n| > N \end{cases} \quad (6.169)$$

kjer je α parameter in $\beta = \alpha(1 - (n/N)^2)^{1/2}$.

$I_0(x)$ predstavlja Besselovo funkcijo ničtega reda, ki je določena z nizom

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k!} (x/2)^k \right\}^2. \quad (6.170)$$

Spekter okna w_k je podan z izrazom

$$W_k(e^{j\omega T}) = w_k(0) + 2 \sum_{n=1}^N w_k(nT) \cos(\omega nT). \quad (6.171)$$

Diskretni niz $\{w_k(nT)\}$ je vzorčena oblika časovno zvezne funkcije.

$$w_K(t) = \begin{cases} I_0(\beta)/I_0(\alpha) & za |t| \leq \tau \\ 0 & za |t| > \tau \end{cases} \quad (6.172)$$

kjer sta $\beta = \alpha(1 - (t/\tau)^2)^{1/2}$ in $\tau = NT$. Spekter okna je sedaj podan v obliki

$$\frac{W_k(j\omega) = \frac{2}{I_0(\alpha)} \cdot \sin[\tau(\omega^2 - \omega_a^2)^{1/2}]}{(\omega^2 - \omega_a^2)^{1/2}} \quad (6.173)$$

kjer je $\omega_a = \alpha/\tau$.

Če je

$$W_k(j\omega) \approx 0 \text{ ali } |\omega| \geq \omega_s/2 \quad (6.174)$$

tedaj smemo po teoremu vzorčenja zapisati

$$W_k(j\omega) \approx \frac{1}{T} W_k(j\omega) 0 \leq |\omega| \leq \omega_s/2 \quad (6.175)$$

in tako je

$$W_k(e^{j\omega T}) \approx \frac{2N}{\alpha I_0(\alpha)} \cdot \frac{\sin[\alpha\{(\omega/\omega_a)^2 - 1\}^{1/2}]}{\{(\omega/\omega_a)^2 - 1\}^{1/2}}. \quad (6.176)$$

Z izbiro ustreznega α se spreminja razmerje prenihajev napram glavnemu pasu.

Poglavje 7

Transformacija \mathcal{Z}

Omenjena transformacija je zelo pomembna za analizo časovno diskretnih signalov, kot tudi linearno časovno neodvisnih sistemov. Kot pri Fourierovi transformaciji je tudi tu pomembna lastnost konvolucije, ki jo pri omenjeni analizi in sintezi veliko uporabljamo.

7.1 Postopek transformacije \mathcal{Z}

Transformacija \mathcal{Z} je uporabna zato, ker lahko sisteme ali signale opazujemo glede na lego polov in ničel karakterističnega polinoma, oziroma kvocientov polinoma.

Oglejmo si transformacijo \mathcal{Z} časovno diskretnih sistemov, njene konvergenčne lastnosti, povezanost s Fourierovo transformacijo, hkrati pa si še oglejmo njen par, to je inverzna transformacija \mathcal{Z}^{-1} .

Transformacija \mathcal{Z} časovno diskretnega signala $x(n)$ je določena s potenčno vrsto

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} \quad (7.1)$$

kjer je z kompleksna spremenljivka tipa $z = r \cdot e^{j\omega}$. Izraz (7.1) je znan kot direktna transformacija \mathcal{Z} , saj preslika signal $x(n)$ iz časovnega v kompleksni prostor $X(z)$. Splošneje ga zapišemo z $z = r \cdot e^{j\omega}$

$$X(r \cdot e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot (r \cdot e^{j\omega})^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} [x(n) \cdot r^{-n}] \cdot e^{-j\omega n} \quad (7.2)$$

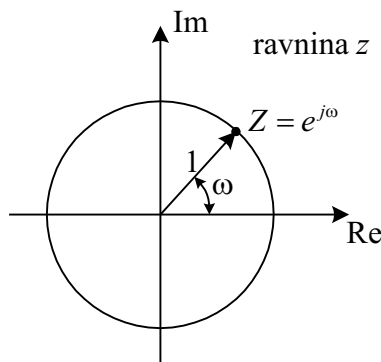
Transformacijo \mathcal{Z} signala $x(n)$ zapišemo v obliki

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] \quad (7.3)$$

ker imamo povezavo med obema omenjenima prostoroma ravno preko te transformacije

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

Ker je po enačbi (7.2) transformacija \mathcal{Z} funkcija dveh kompleksnih spremenljivk, jo obravnavamo v kompleksnem prostoru z . V primeru, ko je $|z| = 1$, imamo v tem prostoru krog z radijem ena, kar predstavlja enotin krog v kompleksni ravnini. V primeru, ko je $r = 1$, se



Slika 7.1: Enotin krog v kompleksni ravnini z

enačba (7.2) reducira na primer Fourierove transformacije signala $x(n)$. S slike 7.1 je razvidno, da je ω kot med vektorjem, ki kaže v točko $z = e^{j\omega}$ in med realno osjo kompleksne ravnine z .

Če pregledujemo vrednosti transformacije $X(z)$ po točkah enotinega kroga in sicer od začetka pri $\omega = 0$ v korakih do $\omega = \pi$ ($z = -1$) preko $\omega = \pi/2$, kjer je $z = j$, potem dobimo Fourierovo transformacijo za $\omega = \pi$ do $\omega = 2\pi$ oziroma od $-\omega = \pi$ do $\omega = 0$.

Fourierovo transformacijo lahko torej razlagamo kot transformacijo \mathcal{Z} na enotinem krogu ravnine z . To pa dejansko pomeni preslikavo linearne frekvenčne osi okoli enotinega kroga z $\omega = 0$ pri $z = 1$ in $z = \omega = \pi$ pri $z = -1$.

Vrsta, s katero je predstavljena transformacija \mathcal{Z} je neskončna, zato ta transformacija obstaja le za tiste vrednosti z -ja, za katere ta vrsta konvergira. Zato vse vrednosti z , pri katerih vrsta konvergira tvorijo **področje konvergence** POK $X(z)$.

Torej je področje konvergence področje vrednosti z pri katerih $X(z)$ doseže končno vrednost. Oglejmo si tri enostavne primere:

1.

$$x(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5},$$

kjer je področje POK celotno področje razen $z = 0$.

2.

$$x(n) = \{2, 4, 5, 7, 0, 1\}$$

$$X(z) = 2z^2 + 4z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3},$$

kjer je področje POK celotna ravnina z razen za $z = 0$ in $z = \infty$.

3.

$$\begin{aligned} x(n) &= \delta(n - k) \quad k > 0 \\ X(z) &= z^{-k} \quad [\delta(n - k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-k}] \quad k > 0, \end{aligned}$$

kjer je področje POK celotna ravnina z razen za $z = 0$.

Vidimo, da je področje konvergence končnega signala celotna ravnina z razen v točkah $z = 0$ ali/in $z = \infty$.

\mathcal{Z} transformacija je enostavna predstavitev časovno diskretnega signala, kjer vidimo povezave med časom n in koeficientom pri z^{-n} , kjer vrednost v eksponentu vsebuje časovno informacijo signala.

Primer:

Vzemimo vrsto $x(n) = \frac{1}{2}^n \cdot u(n)$

$$x(n) = \left[1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots \right]$$

Transformacija \mathcal{Z} neskončne potenčne vrste je

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

To predstavlja neskončno geometrijsko vrsto, katere limita za $|a| < 1$ je

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1 - a} \quad \text{če je } |a| < 1$$

Torej je $|\frac{1}{2}z^{-1}| < 1$, oziroma sledi da je $|z| > 1/2$ in

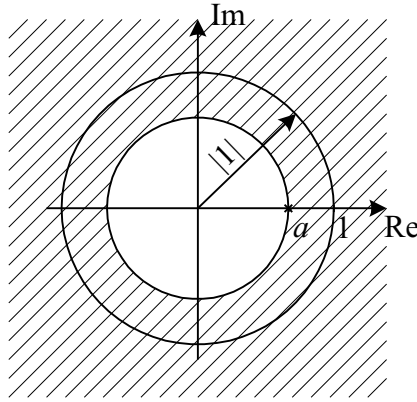
$$X(z) = \frac{1}{1 - a} \Big|_{a=\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad \text{pri POK: } |z| > 1/2$$

Vidimo, da s transformacijo \mathcal{Z} lahko predstavimo signal $x(n)$.

Vidimo, da je neskončna vsota enaka racionalni funkciji znotraj področja konvergence ravnine z . Pri tem je zapis v obliki racionalne funkcije prikladnejši od zapisa neskončne vrste.

Vidimo, da lahko vsak niz, ki ga zapišemo z vsoto eksponentov, predstavimo tudi kot racionalno transformacijo \mathcal{Z} . Taka transformacija pa je predstavljena s poli in ničlami.

V prikazanem primeru je $X(z) = \frac{1}{1-a}$ imamo ničlo pri 0 in pol pri $z = a$. Prikaz lege pola in ničle je razviden s slike 7.2. Če ponovimo definicijo spremenljivke



Slika 7.2: Lega pola in ničle in področje konvergence za $X(z) = \frac{1}{1-a}$

$$z = r \cdot e^{j\Theta} = r \cdot e^{j\omega}$$

kjer je $r = |z|$ in $\Theta \angle z$, potem lahko zapišemo transformacijo

$$X(z)|_{re^{j\Theta}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\Theta n}$$

Področje konvergence $X(z)$ je za vse $|X(z)| < \infty$

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\Theta n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\Theta n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n) \cdot r^{-n}|$$

Niz $|x(n)|$ je končen in niz $x(n) \cdot r^{-n}$ konvergira.

Iskanje področja konvergence lahko spremenimo v področje vrednosti r za katere niz $x(n) \cdot r^{-n}$ konvergira.

Zato si oglejmo absolutno vrednost transformacije \mathcal{Z} tako, da razbijemo to definicijo na dve področji

$$|X(z)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n) \cdot r^{-n}| + \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n) \cdot r^{-n}|$$

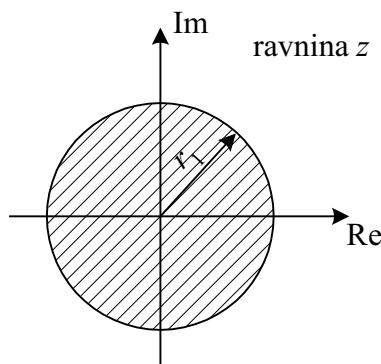
Če obrnemo seštevanje dobimo

$$|X(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n) \cdot r^n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n) \cdot r^{-n}| \quad (7.4)$$

Vzemimo, da oba izraza konvergirata h končni vrednosti te geometrijske vrste.

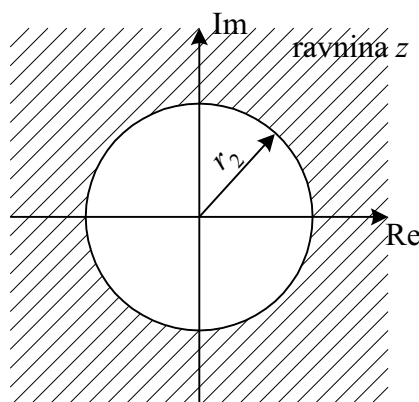
Če vzamemo prvi izraz v enačbi (7.4) in če ta konvergira h končni vrednosti, potem mora biti r majhen, tako da je produkt $x(-n) \cdot r^n$, ki je element v nizu za vse $1 \leq n \leq 0$ tak, da niz konvergira h končni vrednosti.

Področje konvergence POK velja torej za vse točke znotraj kroga (slika 7.3) z radijem r_1 , kjer mora biti $r_1 < \infty$. Če vzamemo sedaj drugi izraz v enačbi (7.4), potem ta izraz konvergira,



Slika 7.3: Področje konvergence, kjer vsota $\sum_{n=1}^{\infty} |x(-n) \cdot r^n|$ konvergira h končni vrednosti

če je r dovolj velik, tako da niz z elementi $x(n) \cdot r^{-n}$ konvergira za vse $0 \leq n \leq \infty$. Torej je področje konvergence določeno izven nekega področja določenega z r_2 , torej velja za vse $r > r_2$ (slika 7.4).



Slika 7.4: Področje konvergence vrste $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n) \cdot r^{-n}|$ za $r > r_2$

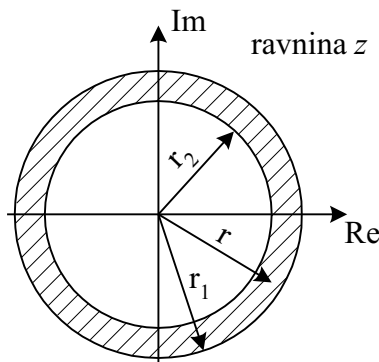
Področje konvergence obeh izrazov v enačbi (7.4) je torej področje, za katerega izraz (7.4) konvergira h končni vrednosti in je določen z r , za katerega velja

$$r_2 < r < r_1$$

S slike 7.5 vidimo, da je področje konvergence določeno s skupnim področjem obeh vsot izraza (7.4), na kateremu obe vsoti konvergirata h končni vrednosti. V primeru, ko pa je $r_2 > r_1$, tedaj obe vsoti ne konvergirata in s tem ni področja konvergence transformacije \mathcal{Z} . To pa pomeni, da transformacija $X(z)$ v tem primeru ne obstaja.

Primer:

Določimo transformacijo \mathcal{Z} kavzalnega signala



Slika 7.5: Področje konvergence vrste (7.4) je določeno z $r_2 < r < r_1$

$$x(n) = \alpha^n \cdot u(n) = \begin{cases} \alpha^n & \text{za } n \geq 0 \\ 0 & \text{za } n < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \cdot z^{-1})^n$$

Če je $|\alpha z^{-1}| < 1$ oziroma $|z| > |\alpha|$ potem vrsta konvergira k izrazu $\frac{1}{(1-\alpha \cdot z^{-1})}$.

Tako sta par

$$x(n) = \alpha^n \cdot u(n)$$

in

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \alpha \cdot z^{-1})} \quad \text{za } |z| > |\alpha|$$

Področje konvergence je določeno s krogom z $r = |\alpha|$ in je izven tega kroga. V tem primeru je α realen. Torej je

$$x(n) = \alpha^n \cdot u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{1}{(1 - \alpha \cdot z^{-1})} \quad \text{za POK: } |z| > |\alpha|$$

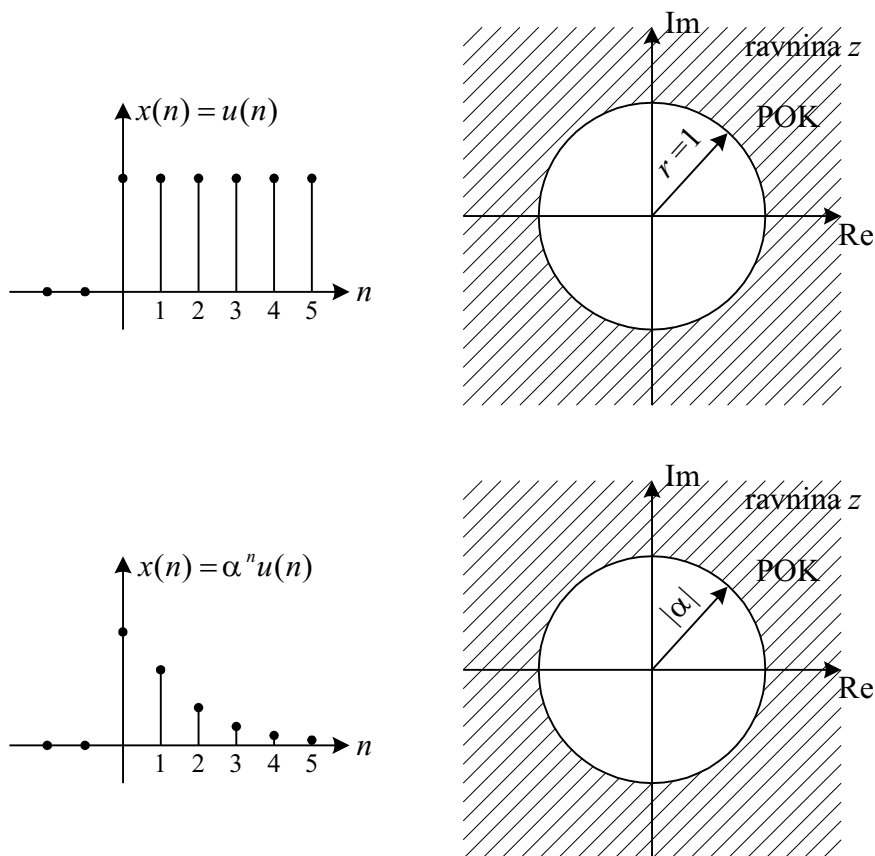
V primeru $\alpha = 1$ pa je par

$$x(n) = u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{za POK: } |z| > |1|$$

Primer:

Določimo transformacijo \mathcal{Z} antikavzalnega signala

$$x(n) = -\alpha^n \cdot u(-n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{za } n \geq 0 \\ -\alpha^n & \text{za } n \leq -1 \end{cases}$$



Slika 7.6: Primera dveh signalov $x(n) = u(n)$ in $x(n) = \alpha^n \cdot u(n)$ ter obe področji konvergence POK

Po definiciji je

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n \cdot z^{-n} = - \sum_{l=1}^{\infty} (\alpha^{-1} \cdot z)^l$$

kjer je $l = -n$.

Če vzamemo vrsto

$$a + a^2 + a^3 + \dots = a(1 + a + a^2 + \dots) = \frac{a}{1 - a}$$

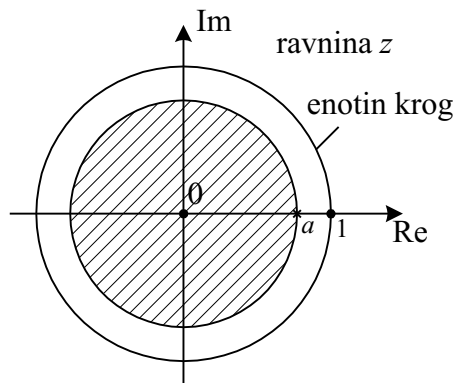
Za $|a| < 1$ dobimo

$$X(z) = - \frac{\alpha^{-1} \cdot z}{1 - \alpha^{-1} \cdot z} = \frac{1}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$

kjer je $|\alpha^{-1}z| < 1$ oziroma $|z| < |\alpha|$. Torej imamo transformacijo

$$x(n) = -\alpha^n \cdot u(-n - 1) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{1}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} \quad \text{za POK: } |z| < |\alpha|$$

Področje konvergence je torej znotraj kroga z $r = |\alpha|$.



Slika 7.7: Področje konvergence antikavzalnega signala

Če še v tem primeru pogledamo lego polov in ničel transformacije $X(z) = \frac{z}{z-\alpha}$, potem vidimo s slike 7.7

da za $|\alpha| < 1$ bo sekvenca $-\alpha^n \cdot u(-n-1)$ eksponentno naraščala, če bo šel $n \rightarrow \infty$, kar pomeni, da transformacija \mathcal{Z} ne obstaja.

Na področju, ki določa $|r| \leq |a|$, pa pridemo do konvergence vrste, kar pa pomeni, da obstaja transformacija \mathcal{Z} .

Iz obeh primerov lahko pridemo do pomembnih zaključkov in sicer:

Za kavzalni signal $\alpha^n \cdot u(n)$, ter za antikavzalni signal $-\alpha^n \cdot u(-n-1)$ pridemo do identične transformacije \mathcal{Z} in sicer:

$$\mathcal{Z}\{\alpha^n \cdot u(n)\} = \mathcal{Z}\{-\alpha^n \cdot u(-n-1)\} = \frac{1}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} \quad (7.5)$$

Iz tega lahko sklepamo, da sama transformacija \mathcal{Z} ni enolična. Da se znebimo dvoma, moramo še določiti področje konvergence, za katerega velja transformacija \mathcal{Z} .

To pa pomeni, da ima časovno diskretni signal $x(n)$ enolično transformacijo $\mathcal{Z} X(z)$ samo, če je zanj tudi določeno področje konvergence POK.

Primer:

Poiščimo transformacijo \mathcal{Z} signala

$$x(n) = \alpha^n \cdot u(n) + b^n \cdot u(-n-1) \quad (7.6)$$

Transformacija \mathcal{Z} je določena z izrazom:

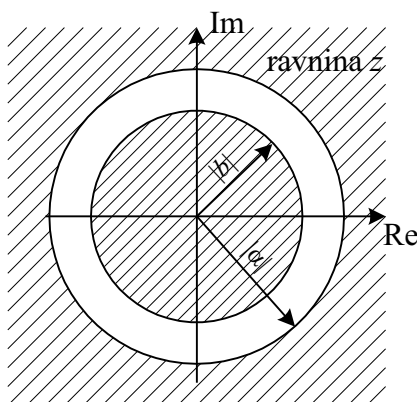
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n} \quad (7.7)$$

kjer vstavimo zgornji izraz (7.7) v (7.6)

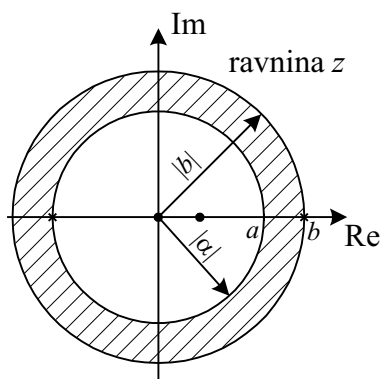
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot u(n) \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cdot u(-n-1) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n \cdot z^{-n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \cdot z^{-1})^n + \sum_{l=1}^{\infty} (b^{-1} \cdot z)^l$$

Kot že vemo iz predhodnih primerov, za prvi člen vrsta konvergira, če je $|\alpha| < 1$, oziroma v našem primeru $|\alpha z^{-1}| < 1$ ali $|z| > |\alpha|$. Za drugi člen vrsta konvergira, če je $|b^{-1}z| < 1$ oziroma $|z| < |b|$. Iz obeh pogojev, lahko dobimo dva primera in sicer ko ne pride do prekrivanja obeh področij konvergence (POK) $b < \alpha$ s slike 7.8, in ko pride do prekrivanja področja konvergence, ker je $b > \alpha$ razvidno na sliki 7.9.



Slika 7.8: Primer področja konvergence, ko je $|b| < |\alpha|$



Slika 7.9: Primer področja konvergence, ko je $|b| > |\alpha|$ s poli in ničlami $X(z)$

V prvem primeru s slike 7.8, ko je $|b| < |\alpha|$ ne moremo izračunati transformacije \mathcal{Z} , saj vrsti ne konvergirata k skupnem področju, v drugem primeru s slike 7.9 pa obstaja področje, kamor

konvergirata obe vsoti. Tu dobimo, da je

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} - \frac{1}{1 - b \cdot z^{-1}} = \frac{b - \alpha}{\alpha + b - z - \alpha b z^{-1}} \quad \text{kjer je POK: } |a| < |z| < |b|$$

Iz primera lahko tako sklepamo, da je področje konvergence dvostranskega neskončnega signala kolobar v ravnini \mathcal{Z} .

Po vseh teh primerih lahko rečemo, da je POK signala odvisen od tega, ali ima signal neskončno trajanje na desni strani časovne osi ($x(n) = 0$ za $n < n_0 < 0$). Drugi primer je signal, katero neskončno trajanje je na levi strani časovne osi, na desni strani pa signala ni ($x(n) = 0$ za $n > n_1 > 0$). Obstaja pa še tretji primer, ki smo ga videli nazadnje in sicer, da ima signal končno trajanje na obeh straneh časovne osi ($x(n) = 0$ za $n < n_0 < 0$ in $n > n_1 > 0$). Ta tip signala imenujemo dvostranski signal s končnim trajanjem.

Primer:

Določimo transformacijo \mathcal{Z} signala s končnim trajanjem:

$$x(n) = \begin{cases} a^n & \text{za } 0 < n < N - 1 \\ 0 & \text{drugače} \end{cases}$$

Po definiciji je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (a \cdot z^{-1})^n = \frac{1 - (a \cdot z^{-1})^N}{a \cdot z^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \cdot \frac{z^n - a^n}{z - a}$$

Področje konvergence je določeno z vrednostimi \mathcal{Z} , za katere velja:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |a \cdot z^{-1}|^n < \infty$$

Ker je končno število neničelnih izrazov, bo vsota končna vse dokler bo $|az^{-1}|$ končen, kar pomeni, da je $|a| < \infty$ in $z \neq 0$.

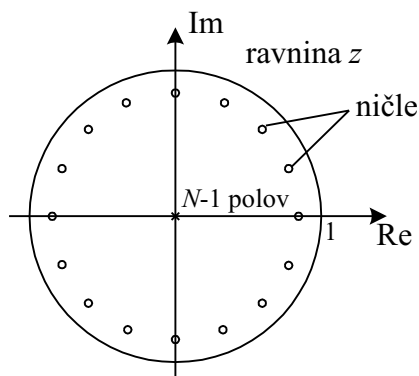
Pri tej predpostavki, ko je a končen, področje konvergence POK vsebuje celotno ravnino z razen izhodišča v $z = 0$.

Prikaz lege polov in ničel transformata $X(z)$ za $n = 16$ in za realni $0 < a < 1$ je razviden na sliki 7.10

Koreni polinoma v imenovalcu so v tem primeru

$$z_k = a \cdot e^{j \frac{2\pi k}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Pari transformacije \mathcal{Z} so prikazani v tabeli 7.1.



Slika 7.10: Področje konvergence je ravnina z razen v $z = 0$

Še preden preidemo na inverzno transformacijo \mathcal{Z} , povzemimo lastnosti transformacije na področju konvergence POK.

Predpostavimo, da je algebrajski izraz transformacije \mathcal{Z} racionalna funkcija in da ima niz $x(n)$ končno amplitudo razen pri $n = \pm\infty$.

Lastnosti:

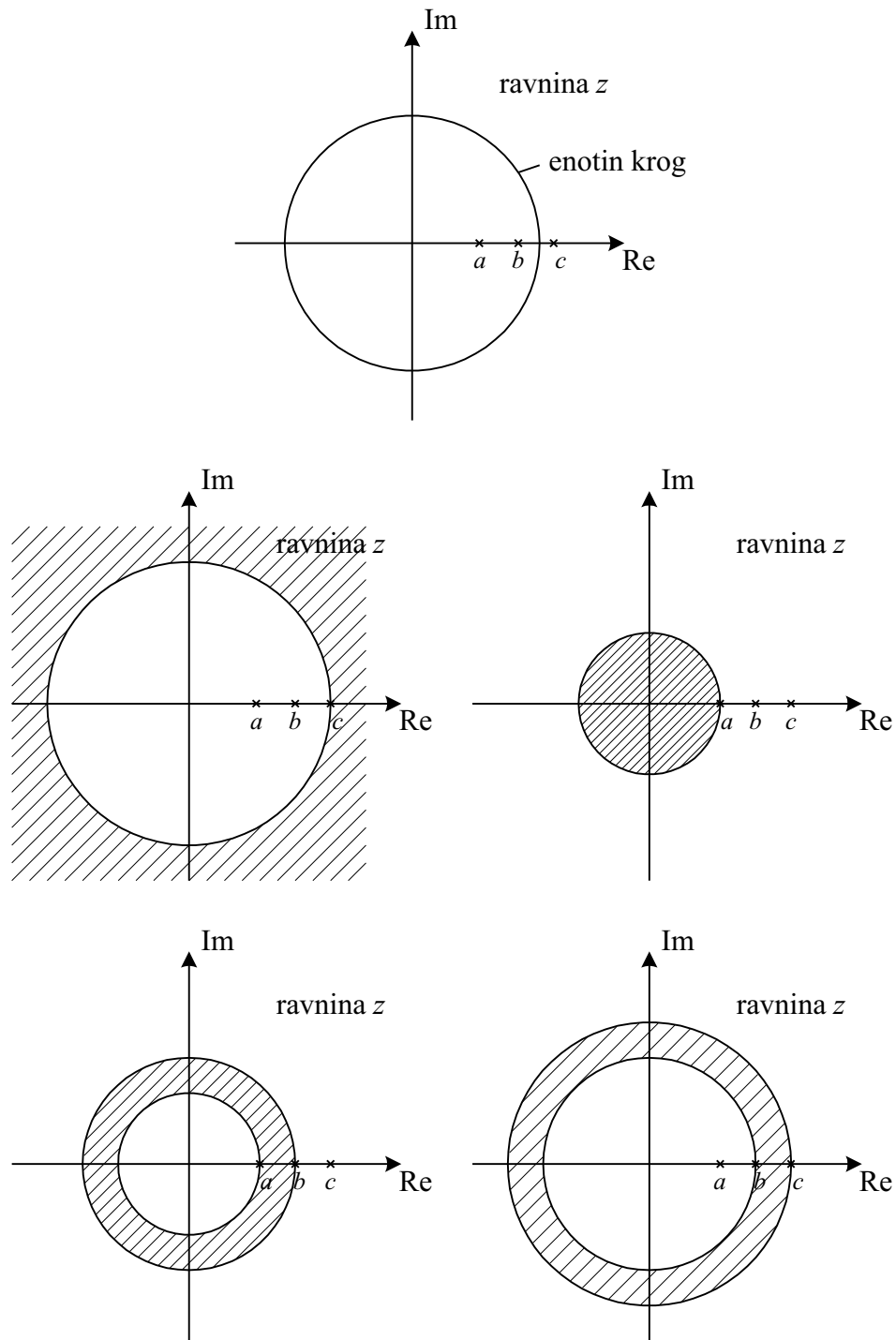
1. POK je obroč ali disk v ravnini z s centrom v izhodišču.
2. Fourierov transform niza $x(n)$ konvergira absolutno če in samo če POK transformacije \mathcal{Z} vsebuje enotni krog.
3. POK ne more vsebovati polov
4. Če je signalni niz $x(n)$ končen, pomeni, da je vrednost signala nič izven nekega področja do neskončnosti $-\infty < N_2 \leq n \leq N_1 \leq \infty$ potem je področje konvergence POK cela ravnina z razen pri $z = 0$ in $z = \infty$.
5. Če je $x(n)$ niz, ki velja za vse pozitivne n na področju med $0 \leq n \leq N_1 \leq \infty$, tedaj POK določimo z največjo vrednostjo pola $X(z)$, ki določa radij kroga, zunaj katerega je vrsta konvergentna.
6. Če pa je $x(n)$ niz, ki velja za vse negativne n $-\infty \leq N_2 \leq n \leq 0$, tedaj je področje konvergence določeno s polom najmanjše vrednosti, ki določa radij r znotraj katerega je vrsta konvergentna.
7. V primeru dvostranskega niza je POK določeno z obročem, ki je navznotraj in navzven omejen s poloma, znotraj obroča pa se ne nahaja nikakršen pol.
8. POK mora biti povezano področje (slika 7.11)

Sekvenca	Transform	POK
1. $\delta[n]$	1	vsa ravnina z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	vsa ravnina z razen 0 (če je $m > 0$) ali ∞ (če je $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $[\cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $[\sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $r^n [\cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $[r^n \sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r \sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{drugače} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$

Tabela 7.1: Pari transformacije \mathcal{Z}

7.2 Inverzna transformacija \mathcal{Z}

Često se srečujemo s problemom transformacije iz \mathcal{Z} signalnega niza nazaj v časovni prostor. Postopek iskanja časovnega signalnega niza imenujemo inverzna transformacija.



Slika 7.11: Vpliv lege polov na področje konvergence

To dobimo iz same definicije transformacije \mathcal{Z} , če izraz transformacije množimo z z^{n-1} in ga integriramo po obroču POK, pri tem pa še uporabimo Cauchyjev integralni teorem. Vzemimo

torej izraz za izračun transformacije \mathcal{Z} .

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k}$$

$$\oint_c X(z) \cdot z^{n-1} dz = \oint_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot z^{n-1-k} dz$$

Integracija po obroču c , znotraj področja konvergence objema izhodišče ravnine z .

Ker vrsta konvergira na področju integriranja smemo zamenjati vrstni red integriranja in sumiranja:

$$\oint_c X(z) \cdot z^{n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \oint_c z^{n-1-k} dz$$

Če upoštevamo Cauchyjev integralski teorem:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{n-1-k} dz = \begin{cases} 1, & \text{za } n = k \\ 0, & \text{za } n \neq k \end{cases}$$

in če ta teorem upoštevamo v predhodnem izrazu dobimo:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

Kljub temu, da smo dobili izraz za izračun inverzne transformacije \mathcal{Z} , ki podaja niz $x(n)$, žal ni uporaben. Zato si bomo v naslednjih poglavjih pogledali poenostavljene postopke iskanja inverza iz racionalnih funkcij in njihovih korenov.

7.2.1 Enostranska transformacija \mathcal{Z}

Transformacija \mathcal{Z} je določena z izrazom

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

in jo tudi imenujemo dvostranska transformacija \mathcal{Z} . V nasprotju s to transformacijo določimo enostransko transformacijo \mathcal{Z} kot

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Ta se razlikuje od dvostranske transformacije po tem, da vsebuje le vrednosti $x(n)$ za katere je $n \geq 0$. V primeru, da imamo opravka z enostranskim kavzalnim signalom $x(n) = 0$ za $n < 0$, tedaj sta eno in dvostranska transformacija enaki, v primeru, ko je $x(n) \neq 0$ za $n < 0$ pa si nista enaki.

Področje konvergence enostranske transformacije \mathcal{Z} je določeno z $|z| > r$ in za racionalne enostranske transforme \mathcal{Z} je meja konvergence določena z mejo področja konvergence, ki jo določa pol, ki je najdlje od izhodišča ravnine z .

Enostransko transformacijo \mathcal{Z} uporabljamo predvsem pri analizi sistemov podanih z linearnimi diferenčnimi enačbami s konstantnimi koeficienti.

Izhod iz teh sistemov izračunamo za $n \geq 0$ z upoštevanjem začetnih pogojev.

7.3 Lastnosti transformacije \mathcal{Z}

Večina lastnosti transformacije \mathcal{Z} je uporabnih pri študiju časovno diskretnih signalov in sistemov. Pogosto jih tudi uporabljamo pri iskanju inverzne transformacije \mathcal{Z} . Oglejmo si nekaj najpomembnejših lastnosti in njihovo uporabnost preverimo na posameznih problemih.

V tem poglavju $X(z)$ pomeni transformacijo \mathcal{Z} signalnega niza $x(n)$, področje konvergence $X(z)$ pa označimo s POK. Pri tem POK predstavlja niz vrednosti z , za katere je $r_2 < |z| < r_1$.

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \quad \text{POK: } r_2 < |z| < r_1$$

1) Linearnost

Če vzamemo niza $x_1(n)$, $x_2(n)$ in njuna para $X_1(z)$, $X_2(z)$, potem lastnost linearnosti določa izraz s parom:

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$$

za poljubni konstanti a_1 in a_2 . Področje konvergence je določeno s presekom konvergenčnih področij obeh sumandov.

Lastnost linearnosti se da razširiti na več členov oziroma na več signalov. V osnovi vidimo, da je transformacija \mathcal{Z} linearno kombiniranih signalov $x_i(n)$, enaka linearni kombinaciji njihovih transformov \mathcal{Z} . Linearna lastnost nam pomaga iskati transformacijo \mathcal{Z} signala izraženega z vsoto osnovnih signalov, za katerega pa že poznamo transformacijo \mathcal{Z} .

Primer linearnosti: Določimo transformacijo \mathcal{Z} signalov

$$x(n) = [\cos(\omega_0 n)] \cdot u(n)$$

in

$$x(n) = [\sin(\omega_0 n)] \cdot u(n)$$

Vzemimo prvi signal in ga razstavimo, ter naredimo transformacijo \mathcal{Z} .

$$x(n) = [\cos(\omega_0 n)] \cdot u(n) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) \cdot u(n)$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{j\omega_0 n} \cdot u(n)\} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{-j\omega_0 n} \cdot u(n)\}$$

Če vzamemo, da je $\alpha = e^{\pm j\omega_0 n}$ in $|\pm j\omega_0 n| \leq 1$ tedaj dobimo rešitev za geometrijsko vrsto $\frac{1}{1-\alpha \cdot z^{-1}}$. Torej je par

$$e^{\pm j\omega_0 n} \cdot u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - e^{\pm j\omega_0} \cdot z^{-1}} \quad \text{za POK: } |z| > 1$$

S tem je

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} \cdot z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} \cdot z^{-1}} \quad \text{za POK: } |z| > 1$$

in par transformacije \mathcal{Z} po ureditvi izraza zgoraj je:

$$x(n) = [\cos(\omega_0 n)] \cdot u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1 - z^{-1} \cdot \cos \omega_0 n}{1 - 2z^{-1} \cdot \cos \omega_0 n + z^{-2}} \quad \text{za } |z| > 1$$

Po podobnem postopku dobimo par drugega signala

$$x(n) = [\sin(\omega_0 n)] \cdot u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1 - z^{-1} \cdot \sin \omega_0 n}{1 - 2z^{-1} \cdot \cos \omega_0 n + z^{-2}} \quad \text{za } |z| > 1$$

2) Časovni pomik

Če je

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

tedaj je

$$x(n - k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \cdot z^{-k}$$

Področje konvergence izraza $X(z) \cdot z^{-k}$ je isto kot je področje konvergence za $X(z)$ razen za $z = 0$, če je $k > 0$ in za $z = \infty$ za $k < 0$.

Primer:

Določimo transformacijo \mathcal{Z} signala

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{za } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{drugače} \end{cases}$$

Transformacijo lahko določimo z uporabo izraza za definicijo transformacije \mathcal{Z} .

$$x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot z^{-n} =$$

$$1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)} = \begin{cases} N, & \text{za } z = 1 \\ \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}, & \text{za } z \neq 1 \end{cases}$$

Področje konvergence je ravnina z razen v $z = 0$. Isti problem lahko rešimo še na drugi način in sicer tako, da dva zamaknjena signala enotine stopnice odštejemo

$$\begin{aligned}x(n) &= u(n) - u(n - N) \\X(z) &= \mathcal{Z}\{u(n)\} - \mathcal{Z}\{u(n)\} \cdot z^{-N} = (1 - z^{-N})\mathcal{Z}\{u(n)\} \\X(z) &= \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad \text{kjer je } \mathcal{Z}\{u(n)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}\end{aligned}$$

Vidimo, da je v primeru končnega signala področje konvergence določeno z naravo končnega signala.

3) Skaliranje v prostoru \mathcal{Z}

Če je

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \quad \text{POK: } |r_1| < |z| < r_2$$

potem je

$$a^n \cdot x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(a^{-1}z) \quad \text{POK: } |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

kjer je a realna ali kompleksna konstanta.

Če želimo boljše razumeti problem skaliranja, potem vzemimo za $a = r_0 \cdot e^{j\omega_0}$ in za $z = r \cdot e^{j\omega}$. Pri tem vpeljimo novo kompleksno spremenljivko $w = a^{-1} \cdot z$. Torej sta $\mathcal{Z}\{x(n)\} = X(z)$ in $\mathcal{Z}\{a^n \cdot x(n)\} = X(w)$.

To lahko razumemo, če zapišemo v obliki

$$w = a^{-1} \cdot z = \left(\frac{1}{r_0} \cdot r \right) \cdot e^{j(\omega - \omega_0)}$$

Glede na vrednost r_0 se vektor $\frac{r}{r_0}$ po absolutni vrednosti manjša ali večja. Odvisno je od vrednosti r_0 , dočim ω_0 vpliva na rotacijo vektorja znotraj področja $0 - 2\pi$ za ω_0 .

Primer:

$$x(n) = a^n \cdot [\cos(\omega_0 n)] \cdot u(n)$$

Rešitev dobimo z upoštevanjem lastnosti skaliranja in transformacije \mathcal{Z} funkcije $\cos(\omega_0 n)$

$$a^n \cdot [\cos(\omega_0 n)] \cdot u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1 - a \cdot z^{-1} \cdot \cos(\omega_0 n)}{1 - 2a \cdot z^{-1} \cdot \cos(\omega_0 n) + a^2 \cdot z^{-2}} \quad \text{za } |z| < |a|$$

4) Časovna preslikava

Če je

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \quad \text{POK: } r_1 < |z| < r_2$$

je

$$x(-n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z^{-1}) \quad \text{POK: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

Napravimo kar miselni dokaz. Če preslikamo signal okoli časovne osi, potem koeficient z^{-n} postane koeficient z^n . Torej preslikava pomeni zamenjavo spremenljivke z z z^{-1} v formuli za transformacijo \mathcal{Z} . To pa pomeni, da preslikava v časovnem prostoru pomeni obrnljivost (preslikavo) v prostoru \mathcal{Z} .

Primer:

$$x(n) = u(-n)$$

Če je

$$u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{za } |z| > 1$$

je

$$u(-n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - z} \quad \text{za } |z| < 1$$

5) Odvod v prostoru \mathcal{Z}

Če je

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

tedaj je

$$n \cdot x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

Dokaz:

Z odvajanjem

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

po z dobimo

$$\begin{aligned} \frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot (-n) \cdot z^{-n-1} = -z^{-1} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [n \cdot x(n)] \cdot z^{-n} = \\ &= -z^{-1} \mathcal{Z}\{n \cdot x(n)\} \quad \text{kjer POK ostaja isto} \end{aligned}$$

Primer:

$$\begin{aligned}x(n) &= n \cdot [a^n \cdot u(n)] = n \cdot x_1(n) \\x_1(n) &= a^n \cdot u(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \quad \text{za } |z| > a \\n \cdot a^n \cdot u(n) &\xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = -z \frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{a \cdot z^{-1}}{(1 - a \cdot z^{-1})^2} \quad \text{za } |z| > a\end{aligned}$$

Če je $a = 1$ dobimo transformacijo \mathcal{Z} rampe

$$n \cdot u(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

6) Konvolucija dveh nizov

Če imata

$$x_1(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X_2(z)$$

tedaj je

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X_3(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

Področje konvergence je določeno s presekom področij $X_1(z)$ in $X_2(z)$.

Dokaz:

$$\begin{aligned}x_3(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n - k) \\X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n - k) \right] \cdot z^{-n}\end{aligned}$$

Po zamenjavi znakov \sum dobimo

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n - k) \cdot z^{-n} \right] = X_2(z) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot z^{-k} = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

Lastnost konvolucije je ena bolj uporabnih lastnosti transformacije \mathcal{Z} , saj pomeni konvolucija v časovnem prostoru produkt v kompleksnem prostoru \mathcal{Z} .

Postopek izračuna konvolucije izvedemo v treh korakih:

1. Izračunaj $X_1(z)$, $X_2(z)$ nizov $x_1(n)$, $x_2(n)$.
2. Pomnoži $X_3(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$.
3. Izračunaj inverzno \mathcal{Z} transformacijo: $x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X_3(z)\}$

7) Korelacija dveh nizov

Če obstaja

$$x_1(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_2(z)$$

potem je korelacija med nizoma

$$r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot x_2(n-l) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} R_{x_1x_2}(z) = X_1(z) \cdot X_2(z^{-1})$$

Dokaz lahko izpeljemo iz relacije: $r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$.

Primer:

$$x(n) = a^n \cdot u(n) \quad \text{za } -1 < a < 1$$

$$R_{xx}(z) = \mathcal{Z}\{r_{xx}(l)\} = X(z) \cdot X_2(z^{-1})$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \quad \text{za } |z| > |a| \text{ - kavzalni niz}$$

$$X(z^{-1}) = \frac{1}{1 - a \cdot z} \quad \text{za } |z| < \frac{1}{|a|} \text{ - antikavzalni niz}$$

Torej je

$$R_{xx}(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - a \cdot z} = \frac{1}{1 + a \cdot (z + z^{-1}) + a^2} \quad \text{za } |a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

Kljub temu, da je POK $R_{xx}(z)$ obroč, je $r_{xx}(l)$ dvostranski signal, pa če tudi je $x(n)$ kavzalni signalni niz.

8) Množenje dveh nizov

Če je

$$x_1(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_2(z)$$

potem je

$$x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) \cdot X_2\left(\frac{z}{v}\right) \cdot v^{-1} dv$$

kjer je c področje integracije okoli izhodišča in leži znotraj POK.

Integral v transformu \mathcal{Z} se imenuje kompleksna konvolucija. To se zreducira na periodično konvolucijo, če vsebuje enotin krog, ki določa Fourierov transform in je enak $X(z)$ za $|z| = 1$. Če uporabimo za $z = e^{j\omega}$ in $v = e^{j\Theta}$ se ta izraz poenostavi

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_1(\omega) \cdot X_2(\omega - \Theta) d\Theta$$

kar pa predstavlja periodično konvolucijo Fourierovih transformov $X_1(\omega)$ in $X_2(\omega)$.

V primeru kompleksnih nizov $x_1(n)$ in $x_2(n)$, lahko določimo produkt obeh nizov kot $x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2^*(n)$ kompleksni konvolucijski integral

$$x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2^*(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) \cdot X_2\left(\frac{z^*}{v^*}\right) \cdot v^{-1} dv$$

9) Parsevalov teorem

Če sta $x_1(n)$ in $x_2(n)$ kompleksna niza, potem je

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) \cdot X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right) \cdot v^{-1} dv$$

kjer je $r_{1l} < |z| < r_{1n}$ in $r_{2l} < |z| < r_{2n}$ pri $r_{1l} \cdot r_{2l} < 1 < r_{1n} \cdot r_{2n}$ in r_{-i} določajo meje področja konvergence. Če $X_1(z)$ in $X_2(z)$ konvergirata na enotinem krogu, tedaj je kontura, po kateri integriramo, enotin krog. Tako se poenostavi parsevalov teorem v:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_1(\omega) \cdot X_2^*(\omega) d\omega$$

10) Teorem začetne vrednosti

Če je $x(n)$ kavzalni signalni niz (za $n < 0$ je $x(n) = 0$) potem je

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

To lahko dokažemo z uporabo definicije transformacije \mathcal{Z} . Za kavzalni niz velja:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = x(0) + x(1) \cdot z^{-1} + x(2) \cdot z^{-2} + \dots$$

Če gre $z \rightarrow \infty$ gre $z^{-n} \rightarrow 0$ in ker je $n > 0$ je $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$.

Vse lastnosti transformacije \mathcal{Z} so zbrane v tabeli 7.2. Zaradi priročnosti so pa v tabeli 7.3 zbrane najčešče uporabljene transformacije \mathcal{Z} različnih signalnih nizov. Ti pari omogočajo lažje iskanje transformacije \mathcal{Z} , kot tudi njenega inverza.

Lastnosti	Časovni prostor	prostor \mathcal{Z}	POK
Simboli	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	$r_2 < z < r_1$ POK ₁ POK ₂
Linearnost	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	Presek POK ₁ in POK ₂
Časovni pomik	$x(n - k)$	$z^{-k}X(z)$	$X(z)$ razen $z = 0$ če je $k > 0$ in $z = \infty$ če je $k < 0$
Skaliranje v prostoru \mathcal{Z}	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$ a r_2 < z < a r_1$
Časovna obrnljivost	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < z < \frac{1}{r_2}$
Konjugacija	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	POK
Realni del	$\Re\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	POK
Imaginarni del	$\Im\{x(n)\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	POK
Odvod v prostoru \mathcal{Z}	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < z < r_1$
Konvolucija	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Presek POK ₁ in POK ₂
Korelacija	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$	Presek POK od $X_1(z)$ in $X_2(z^{-1})$
Teorem začetne vrednosti	Če je $x(n)$ kavzalen	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	
Množenje dveh nizov	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	$r_1r_2l < z < r_1r_2u$
Parsevalov teorem	$\sum_{-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v)X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$		

Tabela 7.2: Lastnosti transformacije \mathcal{Z}

7.4 Racionalna transformacija \mathcal{Z}

V mnogih primerih naletimo na transformacije, ki predstavljajo racionalne funkcije dveh polinomov po z . Zato si oglejmo pomen rešitev korenov racionalne funkcije po z .

	Signal, $x(n)$	\mathcal{Z} transform, $X(z)$	POK
1	$\delta(n)$	1	vsa ravnina z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
6	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
7	$(\cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
8	$(\sin \omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
9	$a^n (\cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1} \cos \omega_0}{1-2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
10	$(a^n \sin \omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1} \sin \omega_0}{1-2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

Tabela 7.3: Pari transformacije \mathcal{Z}

Poli in ničle racionalne funkcije so zelo pomembni, saj vplivajo na obnašanje sistema. Če vzamemo racionalno funkcijo $X(z)$

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_M \cdot z^{-M}}{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_N \cdot z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-k}}$$

tedaj dobimo ničle, ko je $X(z) = 0$. Pole pa dobimo pri vrednostih z za katere je $X(z) = \infty$.

Običajno ne operiramo z negativnimi potencami in v primeru, ko sta $a_0 \neq 0$ in $b_0 \neq 0$ lahko

števec in imenovalc faktoriziramo z $b_0 \cdot z^{-M}$ in $a_0 \cdot z^{-N}$. Tako je

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 \cdot z^{-M} (z^M + \frac{b_1}{b_0} \cdot z^{M-1} + \dots + \frac{b_M}{b_0})}{a_0 \cdot z^{-N} (z^N + \frac{a_1}{a_0} \cdot z^{N-1} + \dots + \frac{a_N}{a_0})} =$$

$$\frac{b_0}{a_0} \cdot z^{-M+N} \cdot \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_m)}$$

$$X(z) = G \cdot z^{-M+N} \cdot \frac{\prod_{k=1}^M (z - z_k)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)}$$

kjer je $G = \frac{b_0}{a_0}$ ojačanje in kjer ima $X(z)$ M ničel pri $z = z_1, z_2, \dots, z_M$ ter N polov pri $z = p_1, p_2, \dots, p_N$ ter $M - N$ ničel, če je $N > M$, oziroma polov, če je $N < M$ v samem izhodišču $z = 0$. Poli in ničle lahko nastopijo tudi pri $z = \infty$.

Običajno predstavimo pole in ničle $X(z)$ tudi grafično v ravnini z . Pri tem označimo pole $z \times$ in ničle $z \circ$. Večkratne pole in ničle pa označujemo s številko poleg grafičnega znaka. Po definiciji področje konvergence ne vsebuje polov, lahko pa vsebuje kakšno ničlo.

Oglejmo si uporabo grafičnega prikaza lege polov in ničel v ravnini \mathcal{Z} na primeru.

Primer:

Določimo diagram lege polov in ničel signalnega niza

$$x(n) = a^n u(n) \quad \text{za } a > 0$$

Rešitev:

$$X(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad \text{za POK } |z| > a$$

Racionalna funkcija $X(z)$ ima ničlo v števcu pri $z = 0$ in pol v imenovalcu pri $z = a$

$$z_1 = 0, \quad p_1 = a$$

Diagram lege polov in ničel je prikazan na sliki 7.12.

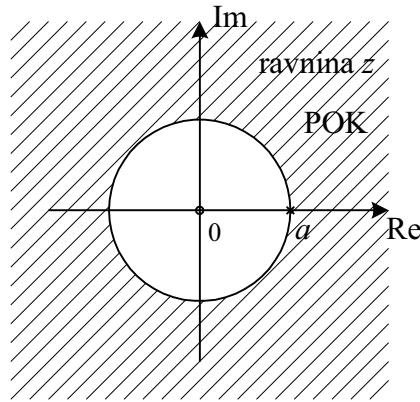
Pol $p = a$ ni vsebovan v POK, saj transformacija \mathcal{Z} ne konvergira k polu.

Vzemimo še drugi primer z več ničlami in z večkratnimi poli.

Primer:

Določimo diagram lege polov in ničel signalnega niza

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & \text{za } 0 \leq n \leq M - 1 \\ 0, & \text{drugače.} \end{cases}$$



Slika 7.12: Diagram lege polov in ničel

kjer je $a > 0$.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} (a^{-1} \cdot z)^{-n} = \frac{1 - (a \cdot z^{-1})^M}{1 - a \cdot z^{-1}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z - a)}$$

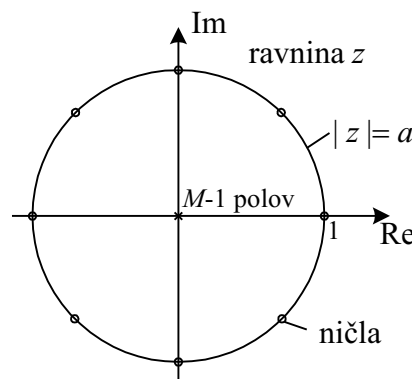
Ker je $a > 0$ ima izraz $z^M - a^M = 0$ M korenov v točkah

$$z_k = a \cdot e^{j\frac{2\pi}{M} \cdot k} \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, M-1$$

V $z_0 = 0$ se ničla odstrani s polom $p = a$. Torej je

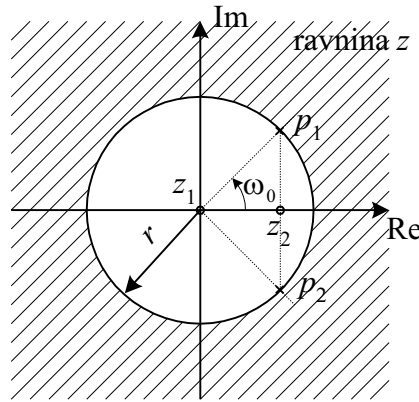
$$X(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{M-1})}{z^{M-1}}$$

To pa pomeni, da imamo $M - 1$ ničel razporejenih po krogu z radijem $|z| = a$, in $M - 1$ polov v izhodišču. V primeru $M = 8$ je lega polov in ničel racionalne funkcije prikazana na sliki 7.13.



Slika 7.13: Lega polov in ničel signala s končnim trajanjem

Zanimiv je tudi primer s konjugiranim kompleksnim parom polov. Zato vzemimo primer s slike 7.14.



Slika 7.14: Primer s konjugiranim kompleksnim parom polov

Za $M = 2$ ničli ležita v $z_1 = 0$ in $z_2 = r \cdot \cos \omega_0$

Za $N = 2$ pola ležita v $p_1 = r \cdot e^{j\omega_0}$ in $p_2 = r \cdot e^{-j\omega_0}$.

Vstavimo pola in ničli v enačbo

$$X(z) = G \cdot \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

in dobimo

$$X(z) = G \cdot \frac{z(z - r \cdot \cos \omega_0)}{(z - r \cdot e^{j\omega_0})(z - r \cdot e^{-j\omega_0})} \quad \text{za } |z| > r$$

Rezultat produkta v imenovalcu daje realne koeficiente, saj sta p_1 in p_2 kompleksno konjugirana. Zato sklepamo, da ima polinom realne koeficiente, če so njihovi koreni ali realni, ali pa se pojavljajo v kompleksno konjugiranih parih.

$|X(z)|$ je odvisen od polov in ničel in predstavlja nekakšno lupino v kompleksnem prostoru \mathcal{Z} in $X(z)$. Tovrstno lupino si za omenjeni primer lahko predstavimo kot šotorsko platno podprto z dvema neskončnima podpornikoma v točkah, kjer ležita pola in pritrjeno v nič, na mestu ničel.

$$X(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 + 1.2732z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

Ničla je pri $z_1 = 1$ in pola sta pri $p_{1,2} = 0.9 \cdot e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$.

7.5 Vpliv lokacije polov na časovno obnašanje signala

Oglejmo si še vpliv lege polov v kompleksnem prostoru \mathcal{Z} na časovno obnašanje signala.

Analiza sloni predvsem na dosedanjih spoznanjih, kjer obravnavamo samo realne in kavzalne signale. Videli bomo, da je obnašanje signala odvisno od področja lege polov. Ti lahko ležijo znotraj področja $|z| < 1$ ali zunaj tega področja, kjer je $|z| > 1$, ali pa celo na krogu $|z| = 1$, na enotnem krogu.

Če imamo opravka z realnimi signali, tedaj je lahko pol ali samo realen ali pa nastopa v konjugirano kompleksnem paru. Signal z enim polom je realen, eksponentni signal

$$x(n) = a^n \cdot u(n),$$

katerega par je $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ in POK je $|z| > |a|$. Signal ima ničlo pri $z_1 = 0$ in pol pri $p_1 = a$. Ta leži na realni osi. Na sliki 7.15 so prikazani primeri za razne a . Pri tem vidimo, da signal v času upada, če je $a > 0$ a leži znotraj enotnega kroga, da je konstanten, če je $a = 1$ in da signal narašča s časom, če je $a > 1$.

V primeru, ko je pol negativen, se pojavi + in - izmenjevanje signala, saj je signal določen z $a^n \cdot u(n)$.

Vidimo, da so kavzalni sistemi z realnim polom izven kroga nestabilni, zato se tovrstnih polov izogibamo.

Kavzalni sistem z dvojnimi poloma ima obliko $x(n) = n \cdot a^n \cdot u(n)$. Ta signal je stabilen le za $a < 1$, za $a = 1$ pa že postane nestabilen.

V primeru para konjugirano kompleksnih polov, pa vemo, da imamo opravka z eksponentno uteženim kosinusoidnim signalom.

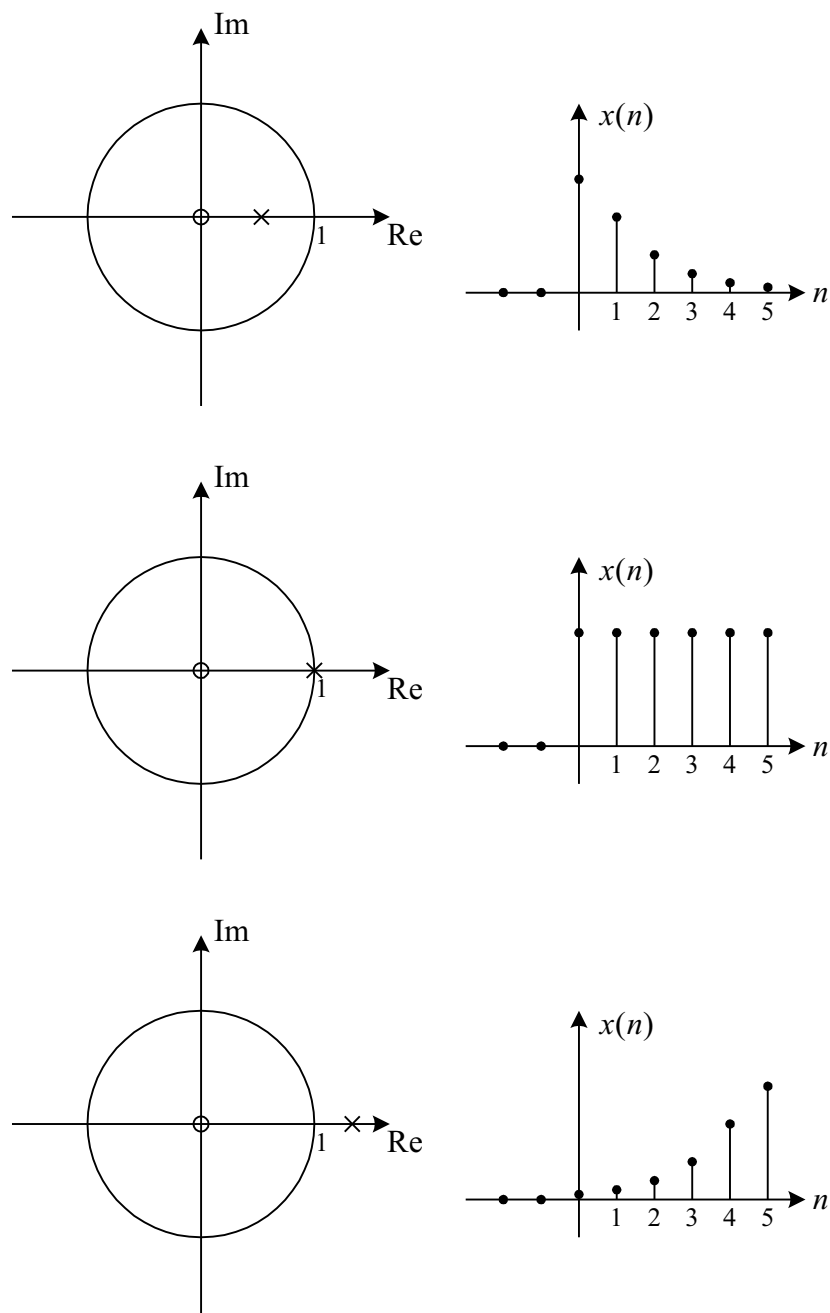
Na sliki 7.17 je prikazan primer s kompleksno konjugiranimi poloma.

Razdalja $|z| = r$ polov, določa ovojnico kosinusoidnega signala, kot $|z|$ z realno osjo pa njegovo relativno frekvenco ω .

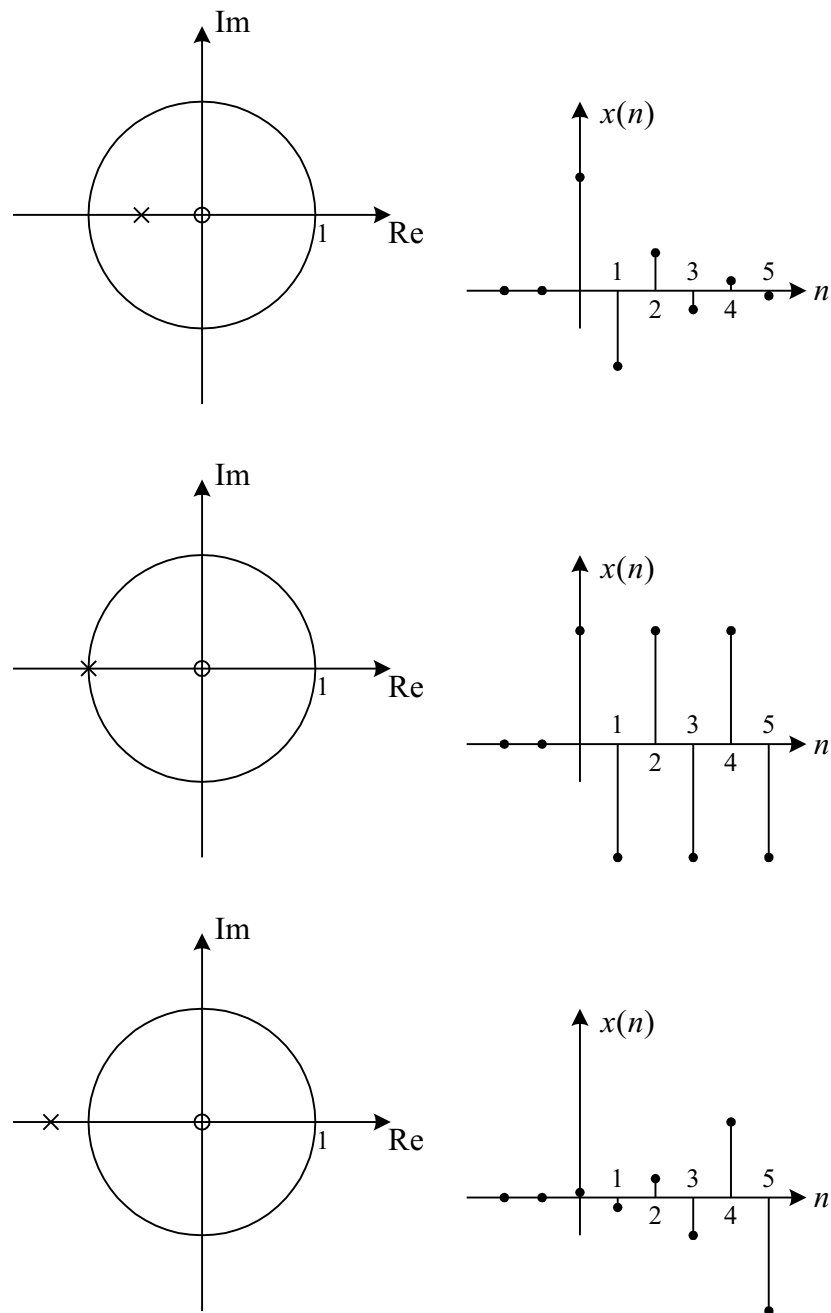
Amplituda signala upada, če je $r < 1$, amplituda narašča, če je $r > 1$ in amplituda kosinusnega signala je konstantna, če je $r = 1$. Obnašanje signala je razvidno s slike 7.17.

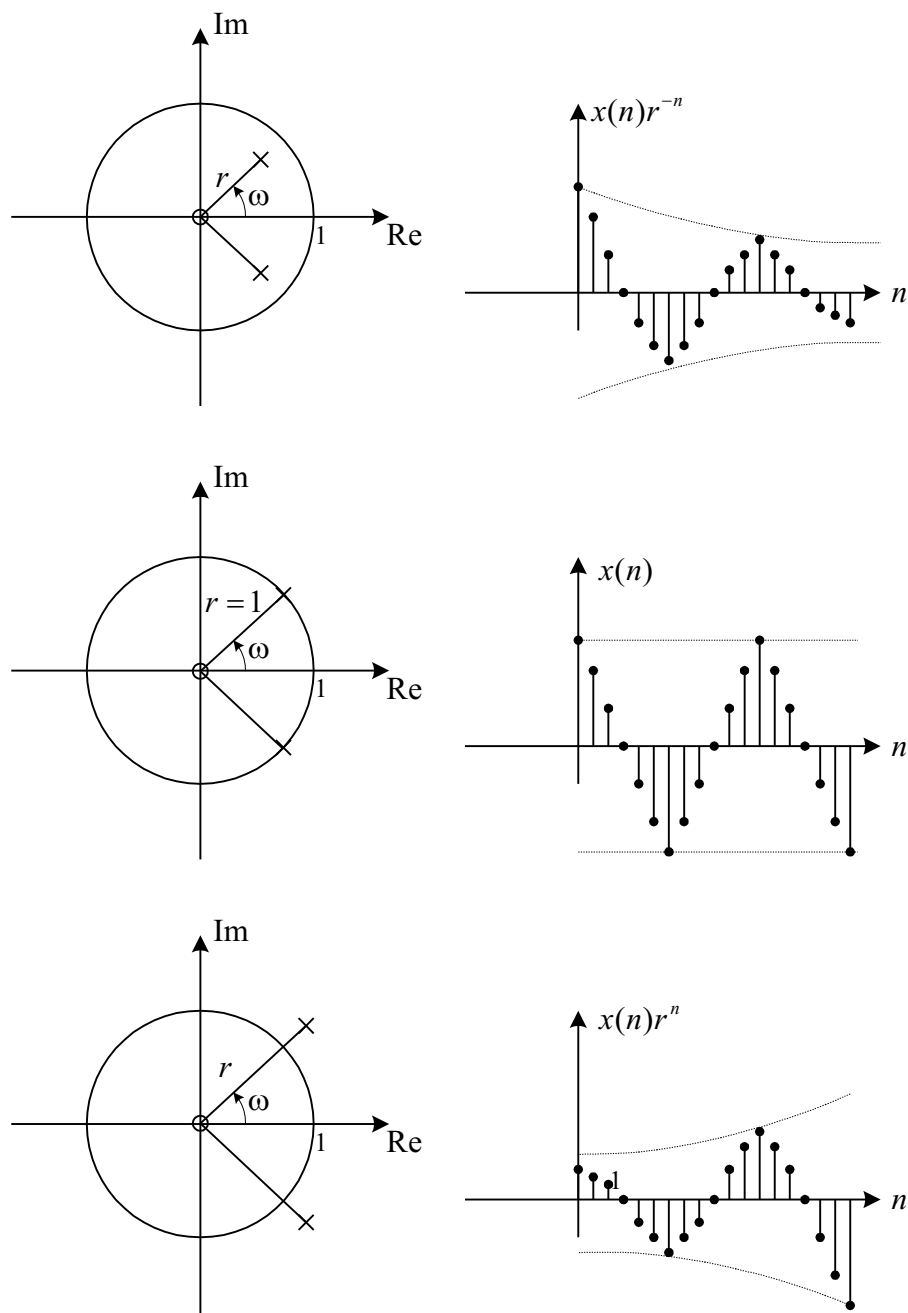
V primeru kavzalnega signala z dvojnimi kompleksno konjugiranimi poloma na enotnem krogu, postane sistem nestabilen. Tovrstnim polom se moramo izogibati v vseh sistemih, kajti povzročajo nestabilnost. Vidimo, da je časovno obnašanje signala odvisno od lege polov glede na enotni krog.

Ničle prav tako vplivajo na obnašanje sistema vendar ne tako močno kot vplivajo poli. Ničle imajo predvsem močnejši vpliv na fazo trenutnega signala.



Slika 7.15: Časovno obnašanje signala glede na lego realnega pola

Slika 7.16: Časovno izmenjevanje predznaka signala pri realnem polu $a < 0$



Slika 7.17: Prikaz vpliva lege kompleksno konjugiranih polov na časovno obnašanje signala

Poglavje 8

Analiza in sinteza časovno diskretnih sistemov v frekvenčnem prostoru

8.1 Prenosna funkcija

V predhodnem poglavju smo ugotovili, da izhod časovno neodvisnega in linearnega sistema lahko izračunamo kot konvolucijo med vhodnim signalom $x(n)$ in med odzivom sistema $h(n)$ na enotni impulz. Lastnost konvolucije se v kompleksnem prostoru \mathcal{Z} odraža kot produkt

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \quad (8.1)$$

kjer so $Y(z)$, $H(z)$ in $X(z)$ \mathcal{Z} transformi izhodnega niza $y(n)$, odziv sistema $h(n)$ ter vhodnega niza $x(n)$.

Prav tako lahko dobimo odziv sistema na enotni impulz, če poznamo $x(n)$ in opazujemo izhod $y(n)$.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (8.2)$$

z izračunom inverzne transformacije $H(z)$ pa dobimo želeni odziv.

Ker je po definiciji

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot z^{-n} \quad (8.3)$$

je očitno, da $H(z)$ določa kompleksne lastnosti sistema, dočim $h(n)$ predstavlja časovno obnašanje sistema. $H(z)$ in $h(n)$ sta enaka opisa istega sistema v dveh prostorih. $H(z)$ imenujemo sistemska funkcija.

Definicija (8.1) je primerna za opis sistema z linearnimi diferenčnimi enačbami s konstantnimi koeficienti:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (8.4)$$

oziroma z

$$Y(z) = - \sum_{k=1}^N a_k \cdot Y(z) \cdot z^{-k} + \sum_{k=0}^M b_k \cdot X(z) \cdot z^{-k} \quad (8.5)$$

Od tu sledi

$$Y(z) \left[1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \right] = X(z) \left[\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \right] \quad (8.6)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} \quad (8.7)$$

Vidimo, da smo enačbo časovnega linearnega sistema, podanega v obliki diferenčne enačbe s konstantnimi koeficienti predstavili z racionalno prenosno funkcijo sistema $H(z)$.

Enačba (8.7) predstavlja splošno obliko prenosne funkcije iz katere lahko dobimo dve posebni obliki.

Prvo dobimo za $a_k = 0$ za $1 \leq k \leq N$. V tem primeru se izraz (8.7) zreducira na

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} = \frac{1}{z^M} \cdot \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{M-k} \quad (8.8)$$

Vidimo, da v primeru (8.8) imamo M ničel, določenih s parametri b_k in pol M -tega reda pri $z = 0$.

Ker sistem vsebuje le trivialne pole in M netrivialnih ničel ga imenujemo “all zeros system”. Ta sistem ima končen impulzni odziv (finite impulse response - FIR) zato ga imenujemo sistem s končnim odzivom - FIR, včasih pa ga zaradi lastnosti povprečevanja tudi imenujemo “moving average - MA” sistem, ali povprečevalnik.

V primeru, če pa je v enačbi (8.7) $b_k = 0$ za vse $1 \leq k \leq M$, potem se enačba poenostavi v

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} = \frac{b_0 \cdot z^N}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{N-k}} \quad \text{pri } a_0 = 1 \quad (8.9)$$

V tem primeru ima $H(z)$ N polov, katere določajo parametri a_k in N kratno ničlo pri $z = 0$.

Ti netrivialni poli določijo sistemsko funkcijo, ki jo imenujemo “all - pole system”. Glede na prisotnost polov ima ta sistem neskončen odziv in ga zato imenujemo sistem z neskončnim odzivom (infinite impulse response - IIR).

8.2 Odziv sistema z racionalno sistemsko funkcijo

Predstavimo prenosno funkcijo $H(z)$ kot kvocient dveh polinomov

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (8.10)$$

Prav tako predstavimo vhodni signal $x(n)$ v prostoru \mathcal{Z} kot kvocient dveh polinomov

$$X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)} \quad (8.11)$$

Vzemimo, da je sistem v ničelnem začetnem stanju in da je odziv sistema na vhodni signal $x(n)$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot \frac{N(z)}{Q(z)} \quad (8.12)$$

Predpostavimo, da sistem vsebuje enojne pole p_1, p_2, \dots, p_N , vhodni signal pa vsebuje pole q_1, q_2, \dots, q_L , kjer so poli $p_k \neq q_m$ za vse $k = 1, \dots, N$ in $m = 1, \dots, L$. Prav tako predpostavimo, da ničle ne sovpadajo s poli p_k ali q_k . Sedaj napravimo parcialni frakcijski (delni) zapis sistema

$$Y(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k \cdot z^{-k}} + \sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1 - q_k \cdot z^{-1}} \quad (8.13)$$

Inverz izraza je

$$y(n) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot p_k^n \cdot u(n) + \sum_{k=1}^L Q_k \cdot q_k^n \cdot u(n) \quad (8.14)$$

Prvi del izraza (8.13) s poli p_k predstavlja naravni odziv, drugi del istega izraza s poli q_k , pa predstavlja vzbujen odziv sistema.

Skalarni členi $\{A_k\}$ in $\{Q_k\}$ so odvisni od obeh nizov polov $\{p_k\}$ in $\{q_k\}$. V primeru, ko je $X(z) = 0$, vhod je enak nič, potem je izhod sistema $Y(z) = 0$ in s tem je izhodni signal nič.

Seveda je naravni odziv sistema nič, kar pomeni, da je drugačen od odziva sistema na ničelni vhodni signal.

V primeru, ko je sistem v neničelnem začetnem stanju, kar pomeni, da se na začetnih pogojih $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ pozna vpliv predhodnih vhodnih signalov, pa dobimo z uporabo enostranske transformacije \mathcal{Z} izraz

$$Y^+(z) = - \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \left[y^+(z) + \sum_{n=1}^N y(-n) \cdot z^n \right] + \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \cdot X^+(z) \quad (8.15)$$

Ker je $x(n)$ kavzalni niz, lahko izenačimo $X^+(z) = X(z)$. Tako lahko izrazimo enačbo (8.15) kot

$$Y^+(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} \cdot X(z) - \frac{\sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k} \cdot \sum_{n=1}^N y(-n) \cdot z^n}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} \quad (8.16)$$

$$Y^+(z) = H(z) \cdot X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)} \quad (8.17)$$

Iz izraza (8.16) je očitno, da izhod sistema z neničelnimi začetnimi pogoji lahko razdelimo na dva dela; prvi del predstavlja odziv sistema z ničelnim začetnim pogojem

$$Y_{zs}(z) = H(z) \cdot X(z) \quad (8.18)$$

in drugi del, ki predstavlja izhod sistema glede na neničelno začetno stanje.

$$Y_{zi}^+(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} \quad (8.19)$$

Celoten odziv je vsota obeh odzivov v časovnem prostoru.

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n) \quad (8.20)$$

Ker je imenovalc v $Y_{zi}^+(z)$ kar $A(z)$ s poli p_1, p_2, \dots, p_N , lahko posledično ugotovimo, da je odziv sistema z ničelnim vhomom

$$y_{zi}(n) = \sum_{k=1}^N D_k \cdot p_k^n \cdot u(n) \quad (8.21)$$

Če ta izraz vstavimo v enačbo (8.14), dobimo odziv

$$y(n) = \sum_{k=1}^N A'_k \cdot p_k^n \cdot u(n) + \sum_{k=1}^L Q_k \cdot q_k^n \cdot u(n) \quad (8.22)$$

kjer je $A'_k = A_k + D_k$.

Izraz (8.22) kaže, da je vpliv začetnih pogojev na odziv sistema enak vplivu skalarne faktorja na naravni odziv sistema.

Seveda z začetnimi pogoji nismo uvedli novih polov, zato ni vpliva na obnašanje sistema. Prav tako ni vpliva začetnih pogojev na odziv sistema na vhodni signal.

8.3 Stabilnost sistemov

Kavzalen, časovno neodvisen in linearen sistem je tisti, katerega odziv na enotin impulz $\delta(n)$ je $h(n)$ in zadošča pogoju, da je

$$h(n) = 0 \quad \text{za } n < 0 \quad (8.23)$$

Prav tako smo opazili, da je področje konvergence kavzalnega niza zunaj enotnega kroga.

Torej je linearen, časovno neodvisen sistem kavzalen, če in samo če je POK sistemske funkcije zunaj kroga z radijem $r < \infty$, vsebuje tudi $z = \infty$.

Stabilnost se da izraziti z lastnostmi sistemske funkcije. Če se spomnimo potreben in zadošten pogoj za BIBO stabilnost linearnega, časovno neodvisnega sistema, je:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \quad (8.24)$$

To pa pomeni, da mora $H(z)$ vsebovati enotin krog v svojem področju konvergence. Ker je

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot z^{-n} \quad (8.25)$$

sledi

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n) \cdot z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \cdot |z^{-n}| \quad (8.26)$$

Če ocenjujemo ta izraz na enotinem krogu, kjer je $|z| = 1$

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \quad (8.27)$$

Ker je sistem BIBO stabilen, je enotin krog vsebovan v POK $H(z)$. Za kavzalne sisteme lahko ta pogoj stabilnosti le še nekoliko zožimo.

Kavzalni sistem, podan s $H(z)$, ima POK zunaj kroga z radijem r . Za stabilne sisteme mora POK vsebovati enotin krog. Torej mora sistemska funkcija kavzalnega in stabilnega sistema konvergirati za $|z| > r > 1$.

Ker POK ne more vsebovati polov $H(z)$, sledi, da je kavzalni linearni, časovno neodvisen sistem BIBO stabilen, če in samo če leže poli $H(z)$ znotraj enote kroga.

8.3.1 Stabilnost sistemov drugega reda

Oglejmo si stabilnost sistemov z dvema poloma. Ti predstavljajo osnovne gradnike pri sintezi sistemov višjih redov.

Vzemimo kavzalni dvopolni sistem podan z diferenčno enačbo drugega reda:

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) \quad (8.28)$$

Prenosna funkcija sistema je:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} = \frac{b_0 \cdot z^2}{z^2 + a_1 \cdot z + a_2} \quad (8.29)$$

s poloma

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}} \quad (8.30)$$

Sistem je BIBO stabilen, če leže poli znotraj enotnega kroga, kar pomeni, da sta

$$|p_1| < 1 \quad \text{in} \quad |p_2| < 1 \quad (8.31)$$

To pa se odraža v vrednostih koeficientov a_1 in a_2 .

$$\begin{aligned} a_1 &= -(p_1 + p_2) \\ a_2 &= p_1 \cdot p_2 \end{aligned} \quad (8.32)$$

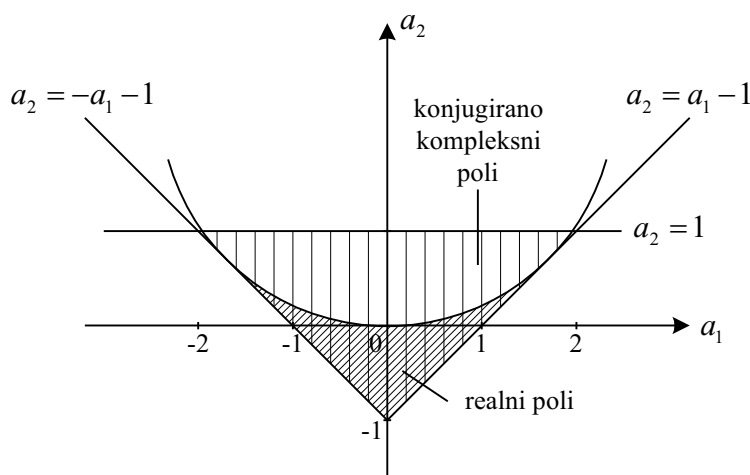
Iz teh dveh izrazov dobimo pogoja za stabilnost:

$$|a_2| = |p_1 \cdot p_2| = |p_1| \cdot |p_2| < 1 \quad (8.33)$$

in

$$|a_1| = 1 + a_2 \quad (8.34)$$

Oba pogoja določata področje vrednosti koeficientov a_1 in a_2 v ravnini a_1, a_2 . Vidimo, da je sistem stabilen, če in samo če je točka (a_1, a_2) v ravnini a_1, a_2 (slika 8.1) leži znotraj trikotnika, imenovanega trikotnik stabilnosti.



Slika 8.1:

Lastnost sistema z dvema poloma je odvisna od položaja polov v trikotniku s slike 8.1. Poli so lahko realni ali konjugirano kompleksni, odvisno od vrednosti pod korenem v enačbi (8.30). Parabola $a_2 = a_1^2/4$ deli trikotnik stabilnosti na dva položaja (slika). Področje pod parabolo, kjer je $a_1^2 > 4a_2$ pripada realnim a dvojnim polom, področje nad parabolo pa konjugirano kompleksnim polom.

8.4 Frekvenčni odziv linearnega, časovno neodvisnega sistema

Kot smo ugotovili, lahko odziv sistema v kompleksnem prostoru izrazimo kot transformacijo \mathcal{Z} odziva na enotin impulz

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot z^{-n} \quad (8.35)$$

S pomočjo te systemske funkcije pa dobimo izhod sistema $Y(z)$, ki je odziv $H(z)$ na vzbujanje na vhodu z $X(z)$ vhodnim nizom

$$Y(z) = H(z) \cdot Xz \quad (8.36)$$

Vsi $Y(z)$, $H(z)$ in Xz so ustrezne transformacije vhodnih, izhodnih nizov in odziva sistema na enotin impulz. Področje konvergence $Y(z)$ mora sovpadati s področjem konvergence $X(z)$ in $H(z)$.

Kot vemo, je sistem $H(z)$ stabilen in kavzalen, če POK vsebuje enotin krog in če se poli nahajajo znotraj kroga z $r < 1$. Posebna oblika LTI sistemov pa je podana z linearnimi diferenčnimi enačbami s konstantnimi koeficienti

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (8.37)$$

iz katere dobimo funkcijo sistema $H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} \quad (8.38)$$

V primeru razstavitve izraza na korene (faktorizacija) lahko zapišemo

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k \cdot z^{-1})}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k \cdot z^{-1})} \quad (8.39)$$

kjer so $\{p_k\}$ in $\{z_k\}$ poli oziroma ničle sistema.

Če so poli različni, tedaj lahko $H(z)$ razbijemo na delne vsote:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k \cdot z^{-k} + \sum_{k=1}^N \frac{D_k}{1 - p_k \cdot z^{-1}} \quad (8.40)$$

Prvi člen izgine, če je $M < N$.

Če je sistem kavzalen, dobimo z inverzno transformacijo izraza $H(z)$, odziv sistema na enotin impulz

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k \cdot \delta_{n-k} + \sum_{k=1}^N D_k \cdot p_k^n \cdot u(n) \quad (8.41)$$

Zopet vidimo, da je sistem stabilen, če poli drugega sumanda enačbe (8.41) leže znotraj enotinega kroga.

V primeru, da vzamemo v enačbi (8.37) parametre $a_k = 0$ za $k = 1, 2, \dots, N$ potem se izraz poenostavi v

$$H(z) = B(z) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} \quad (8.42)$$

v tem primeru je impulzni odziv sistema

$$h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{drugače} \end{cases} \quad (8.43)$$

Kot smo omenili je to sistem s končnim odzivom tipa FIR (finite impulse response). Sistem tipa FIR ima pole le v izhodišču v $z = 0$.

V primeru, ko pa vzamemo, da je vsaj eden ali več elementov $a_k \neq 0$, potem imamo enega ali več neničelnih polov, tako, da je $h(n)$ podan v splošni obliki (8.41). Ker imajo eksponentni členi $h(n)$ neskončno trajanje, pravimo takemu sistemu sistem z neskončnim odzivom IIR (infinite impulse response) sistem.

8.4.1 Frekvenčni odziv sistema

Oglejmo si povezavo med amplitudnim potekom $|H(\omega)|$ v odvisnosti od ω nekega sistema določenega kot

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (8.44)$$

Kot vemo, je ta funkcija periodična s periodo 2π . Izhod linearnega časovno neodvisnega sistema s periodičnim odzivom $H(\omega)$ na signal končne energije z Fourierovo transformacijo $X(\omega)$ je

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (8.45)$$

V tem primeru vidimo linearni sistem kot linearno sito, katerega amplitudni in fazni potek sta odvisna tudi od vhodnega signala $X(\omega)$.

Frekvenčni odziv, ki mu pravimo tudi amplitudni potek, običajno označimo z $|H(\omega)|$ in fazni odziv pa s $\Theta(\omega)$, kjer je

$$H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\Theta(\omega)} \quad (8.46)$$

Običajno amplitudni potek rišemo v logaritemski skali:

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(\omega)| = 10 \log_{10} |H(\omega)|^2 \quad (8.47)$$

kjer se srečamo z enoto "decibeli" (dB). Običajno tudi potek $|H(\omega)|$ normiramo z maksimalno vrednostjo tako, da ta predstavlja 0 dB na področju $-\pi \leq \omega \leq \pi$. V tem primeru dobimo slabljenje sita, ki je frekvenčno odvisno. Pri frekvenci, kjer je $|H(\omega)|_{dB} = 1$ je slabljenje nič.

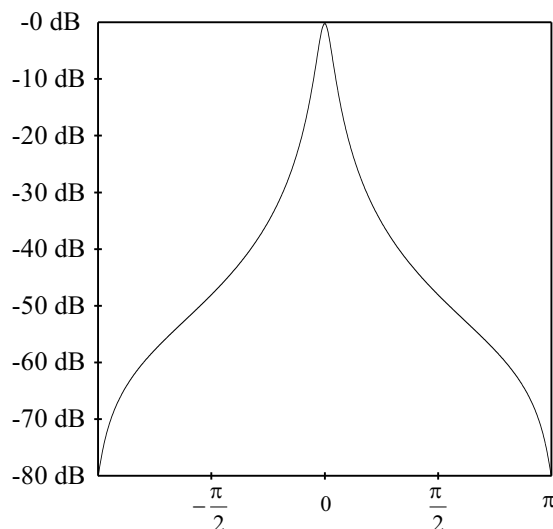
Amplitudni odziv sistema je

$$|H(\omega)| = \frac{\sqrt{1.9025 + 1.9 \cos(\omega)}}{1.82 - 1.81 \cos(\omega)} \quad (8.48)$$

Maksimalno vrednost doseže $H(\omega)$ pri $\omega = 0$ in je $H(0) = H(\omega)_{\max} = 195$. Običajno prenosno funkcijo normiramo z maksimalno vrednostjo

$$20 \log \frac{|H(\omega)|}{H(\omega)_{\max}} \quad (8.49)$$

in jo logaritmiramo, kot to prikazuje slika 8.2.



Slika 8.2: Normiran frekvenčni odziv sistema

8.4.2 Povezava med prenosno funkcijo in frekvenčnim odzivom sistema

V preteklih poglavjih smo prišli do spoznanja, da funkcija sistema $H(z)$ v primeru $z = r \cdot e^{j\omega} |_{|z|=1}$ podaja frekvenčni odziv sistema.

Torej je

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad (8.50)$$

V splošni racionalni obliki je

$$H(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot e^{-j\omega k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k \cdot e^{-j\omega})}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k \cdot e^{-j\omega})} \quad (8.51)$$

V tem primeru so elementi $\{a_k\}$ in $\{b_k\}$ realni, $\{z_k\}$ in $\{p_k\}$ pa so lahko kompleksni.

Včasih izražamo amplitudo kvadrata prenosne funkcije $H(z)$:

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega) \cdot H^*(\omega) \quad (8.52)$$

V primeru racionalne funkcije je

$$H^*(\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k^* \cdot e^{-j\omega})}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k^* \cdot e^{-j\omega})} \quad (8.53)$$

V primeru torej, ko je niz $\{h(n)\}$ realen, oziroma ekvivalentno, ko sta niza $\{a_k\}$ in $\{b_k\}$ realna, se kompleksni poli in ničle pojavljajo v kompleksno konjugiranih parih. V tem primeru je $H^*(1/z^*) = H(z^{-1})$ in posledično tudi $H^*(\omega) = H(-\omega)$.

Tako je $|H(\omega)|^2 = H(\omega) \cdot H^*(\omega) = H(\omega) \cdot H(-\omega) = H(z) \cdot H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}}$. Glede na lastnost transformacije \mathcal{Z} in glede na korelacijski teorem predstavlja izraz $H(z) \cdot H(z^{-1})$ transformacijo z avtokorelacijo niza $\{r_{nn}(m)\}$ na enotin odziv $\{h(n)\}$.

Po Wiener-Kintchinovem teoremu je $|H(\omega)|^2$ Fourierova transformacija avtokorelacijskega niza $\{r_{nn}(m)\}$.

V primeru racionalne funkcije

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (8.54)$$

Sta transformata $D(z) = B(z) \cdot B(z^{-1})$ in $C(z) = A(z) \cdot A(z^{-1})$ transformata \mathcal{Z} avtokorelacijskih nizov $\{c_l\}$ in $\{d_l\}$. Pri tem sta

$$c_l = \sum_{k=0}^{N-|l|} a_k \cdot a_{k+l} \quad -N \leq l \leq N \quad (8.55)$$

$$d_l = \sum_{k=0}^{M-|l|} b_k \cdot b_{k+l} \quad -M \leq l \leq M \quad (8.56)$$

Ker sta parametra $\{a_k\}$ in $\{b_k\}$ realna niza, sledi, da sta

$$\begin{aligned} c_l &= c_{-l} \\ d_l &= d_{-l} \end{aligned} \quad (8.57)$$

Z uporabo lastnosti simetrije, lahko $|H(\omega)|^2$ izrazimo kot:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{d_0 + 2 \sum_{k=1}^M d_k \cdot \cos(k\omega)}{c_0 + 2 \sum_{k=1}^N c_k \cdot \cos(k\omega)} \quad (8.58)$$

$\cos(k\omega)$ pa lahko izrazimo kot polinom funkcije $\cos \omega$

$$\cos(k\omega) = \sum_{m=0}^k \beta_m \cdot (\cos \omega)^m \quad (8.59)$$

V enačbi (8.58) lahko števec kot imenovalc smatramo kot polinomske funkciji $\cos \omega$.

8.5 Računanje frekvenčnega odziva sistema

Frekvenčni odziv $H(\omega)$ časovno neodvisnega in linearne sistema z oceno funkcije sistema $H(z)$ na enotinem krogu.

Predpostavimo splošno racionalno obliko funkcije frekvenčnega odziva sistema

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot e^{-j\omega k}} \quad (8.60)$$

Ker ocenjujemo posebej amplitudni in fazni odziv, kot tudi skupinsko zakasnitev, v odvisnosti od frekvence je primerno, da napišemo enačbo (8.60) v obliki korenov obeh polinomov

$$H(\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k \cdot e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k \cdot e^{-j\omega})} \quad (8.61)$$

$$H(\omega) = b_0 \cdot e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)} \quad (8.62)$$

Označimo izraza v oklepaju

$$\begin{aligned} e^{j\omega} - z_k &= V_k(\omega) \cdot e^{j\Theta_k(\omega)} \\ e^{j\omega} - p_k &= U_k(\omega) \cdot e^{j\Phi_k(\omega)} \end{aligned} \quad (8.63)$$

kjer je

$$\begin{aligned} V_k(\omega) &= |e^{j\omega} - z_k|; & \Theta_k(\omega) &= \angle(e^{j\omega} - z_k) \\ U_k(\omega) &= |e^{j\omega} - p_k|; & \Phi_k(\omega) &= \angle(e^{j\omega} - p_k) \end{aligned} \quad (8.64)$$

Če opazujemo amplitudni odziv, tedaj je amplituda določena z:

$$|H(\omega)| = |b_0| \frac{V_1(\omega) \cdot V_2(\omega) \cdots V_M(\omega)}{U_1(\omega) \cdot U_2(\omega) \cdots U_N(\omega)} \quad (8.65)$$

ker je amplituda $e^{j\omega(N-M)} = 1$.

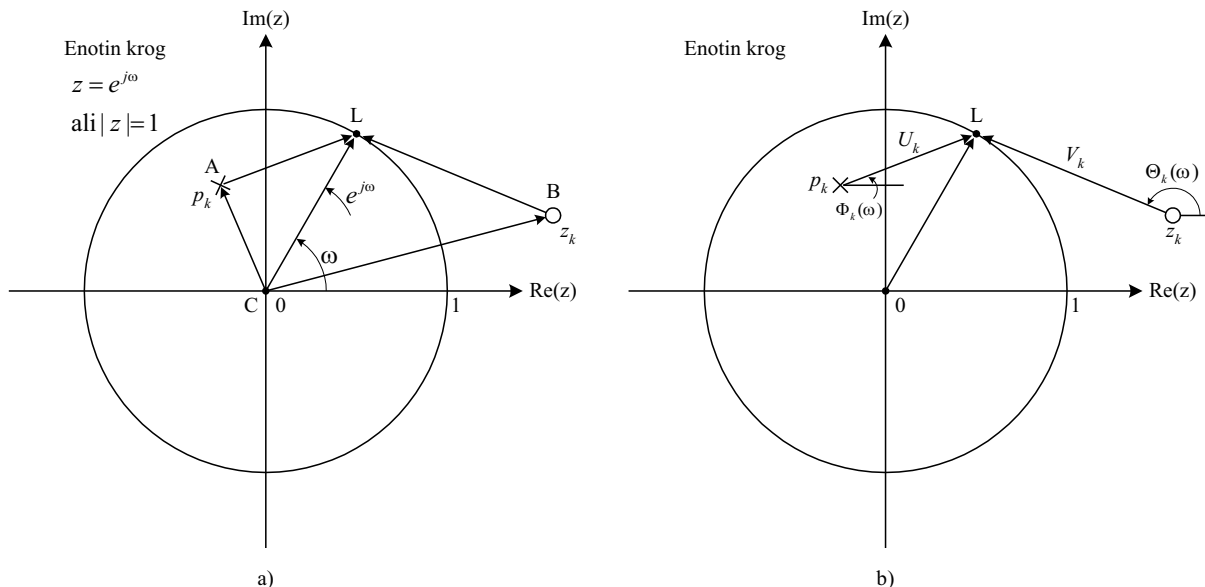
Na sliki 8.3 je prikazan vpliv polov in ničel na odziv sistema pri dani ω .

Faza $H(\omega)$ je ekvivalentna vsoti posameznih faz, ki jih prispevajo ničle od katerih odštejemo vsoto vseh faz, ki jih prispevajo poli v imenovalcu.

$$\begin{aligned} \angle H(\omega) &= \angle b_0 + \omega(N - M) + \Theta_1(\omega) + \Theta_2(\omega) + \cdots + \Theta_M(\omega) - \\ &\quad - [\Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) + \cdots + \Phi_N(\omega)] \end{aligned} \quad (8.66)$$

Fazni prispevek ojačanja b_0 je lahko 0 ali π , kar je odvisno od pozitivne ali negativne vrednosti b_0 . Oblejmo si geometrijsko predstavitev izrazov (8.65) in (8.66) na sliki 8.3.

Vzemimo, da se pol nahaja v točki A in ničla v točki B ravnine z (slika 8.3 a). Vzemimo, da iščemo $H(\omega)$ pri točno določeni frekvenci ω (točka L). To frekvenco določa kot $e^{j\omega}$ in določa točko L na krogu enote. Ocenitev vrednosti $H(\omega)$ pomeni oceno $H(z)$ v točki L . Vzemimo



Slika 8.3: Geometrijska predstavitev prispevkov polov in ničel k amplitudni analizi Fourierove transformacije a); oziroma k fazni analizi b)

vektorja AL in BL , ki povezujeta pol oziroma ničlo s točko na enotinem krogu, ki pripada frekvenci ω . Vidimo, da sta oba vektorja vsebovana v izrazu

$$CL = CA + AL \quad (8.67)$$

in

$$CL = CB + BL \quad (8.68)$$

Razdalja $CL = e^{j\omega}$ in razdalja $CA = p_k$, $CB = z_k$. Tako sta

$$AL = e^{j\omega} - p_k \quad (8.69)$$

in

$$BL = e^{j\omega} - z_k \quad (8.70)$$

kar je razvidno s slike 8.3. Če oba izraza upoštevamo v delnih izrazih racionalne funkcije dobimo:

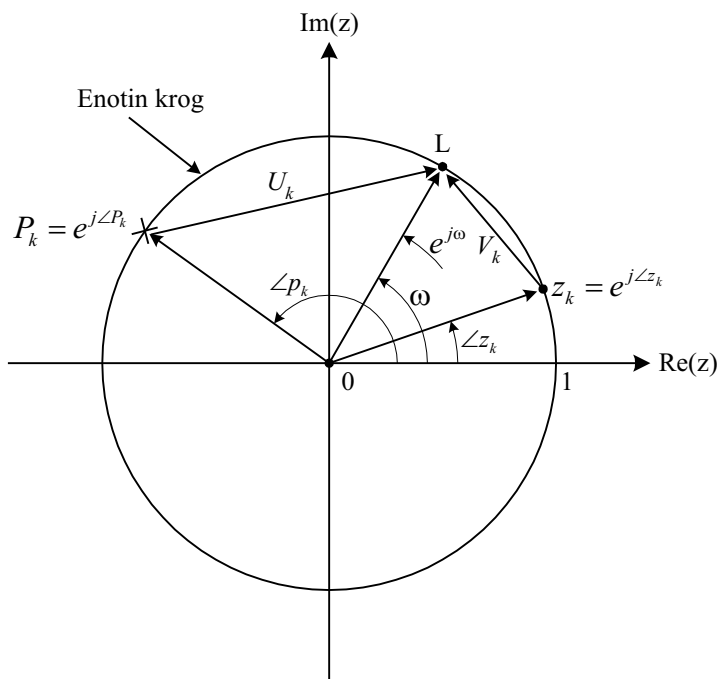
$$\begin{aligned} AL &= e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega) \cdot e^{j\Phi_k(\omega)} \\ BL &= e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega) \cdot e^{j\Theta_k(\omega)} \end{aligned} \quad (8.71)$$

V izrazu (8.65) nastopajoč člen $U_k(\omega)$ predstavlja dolžino AL , torej razdaljo med polom p_k in točko L , ki pripada frekvenci ω . Enako velja za člen $V_k(\omega)$, ki predstavlja dolžino BL in pomeni razdaljo med ničlo z_k ter isto točko L .

Faze $\Phi_k(\omega)$ in $\Theta_k(\omega)$ so koti, ki jih tvorijo vektorji AL in BL s pozitivno realno osjo.

Iz samega poteka izračuna $H(\omega)$ za različne ω , lahko iz geometrijske predstavitve na sliki 8.3 hitro sklepamo, kakšen bo amplitudni potek spektra $H(\omega)$.

Oglejmo si primer poteka amplitudnega spektra, ko pol p_k in ničla z_k ležita na enotskem krogu (slika 8.4).



Slika 8.4: Poteka amplitudnega spektra, ko pol p_k in ničla z_k ležita na enotskem krogu

Iz slike vidimo, da pri $\omega = \angle z_k$ postane $V_k(\omega)$ nič in s tem je $H(\omega) = 0$. Podobno je pri $\omega = \angle p_k$. Tedaj je dolžina $U_k(\omega)$ nič, kar pomeni da je $H(\omega) = \infty$.

Tako lahko opazimo, da prisotnost ničle blizu kroga enote povzroča zmanjševanje spektralne amplitude za frekvence blizu te ničle. V nasprotju pa prisotnost pola blizu enotinega kroga povzroča povečanje spektralne amplitude za frekvence blizu tega pola. Prav tako postavljanje ničel blizu polov, zmanjšuje učinek teh polov in obratno.

Vidimo, da prisotnost ničel in polov daje veliko možnih oblik amplitudnih spektrov. Vse to je odvisno od njihovega števila in njihove lege v ravnini \mathcal{Z} .

Primer:

Ocenimo potek frekvenčnega odziva funkcije sistema:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8 \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.8} \quad (8.72)$$

Vidimo, da je ničla pri $z = 0$ in pol pri $p = 0.8$. Sistem je glede na enačbo (8.65) določen s parametri: $b_0 = 1$, $M = 1$, $N = 1$, $z_1 = 0$ in $p_1 = 0.8$.

Odziv sistema merimo v decibelih

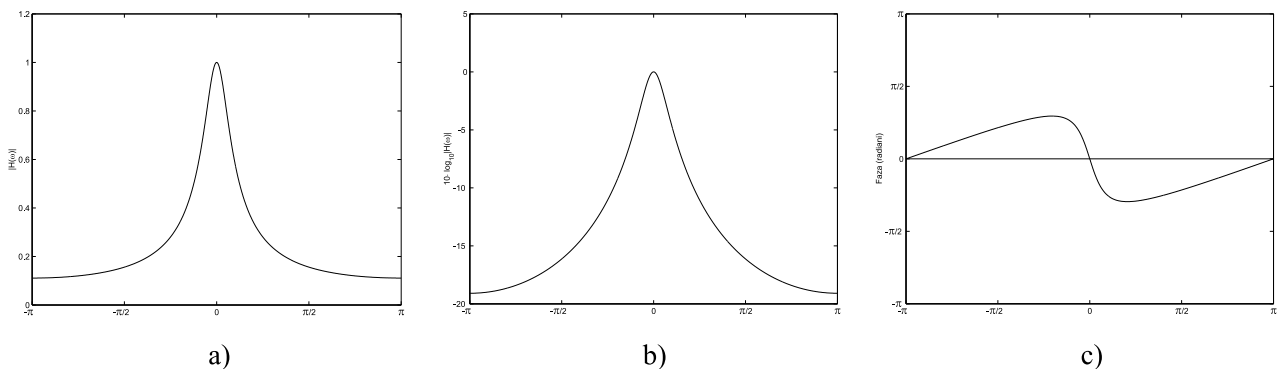
$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |b_0| + 20 \sum_{k=1}^M \log_{10} V_k(\omega) - 20 \sum_{k=1}^N \log_{10} U_k(\omega) \quad (8.73)$$

Če bi izračunali $H(\omega)$ za celotno področje od $\omega = 0$ do $\omega = \pi$ po korakih $\Delta\omega$, bi dobili amplitudni potek spektra, ki je razviden s slike 8.5a, oziroma njen logaritemski potek 8.5b.

Fazo izračunamo za vsak $\Delta\omega$ po enačbi (8.66). Potek faze je prikazan na sliki 8.5c.

Skupinsko zakasnitev $\tau_g(\omega)$ dobimo z odvajanjem $\angle H(\omega)$ po ω . Rezultat je podan v izrazu

$$\tau_g(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{|p_k|^2 - \text{Re}(p_k \cdot e^{-j\omega})}{1 + |p_k|^2 - 2\text{Re}(p_k \cdot e^{-j\omega})} - \sum_{k=1}^M \frac{|z_k|^2 - \text{Re}(z_k \cdot e^{-j\omega})}{1 + |z_k|^2 - 2\text{Re}(z_k \cdot e^{-j\omega})} \quad (8.74)$$



Slika 8.5: Amplitudni in fazni potek sistema $H(z) = \frac{1}{1-0.8z^{-1}}$

8.5.1 Ničle in poli prvega reda

Vzemimo ničlo znotraj enotinega kroga ($r < 1$) $z = r \cdot e^{j\omega}$. Če vzamemo enačbo

$$H(\omega_0) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k \cdot e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k \cdot e^{-j\omega})} \quad (8.75)$$

V tem primeru je

$$\begin{aligned} H_z(\omega) &= 1 - z_k \cdot e^{-j\omega} \\ &= 1 - r \cdot e^{j\theta} \cdot e^{-j\omega} \\ &= 1 - r \cdot \cos(\omega - \theta) + jr \sin(\omega - \theta) \end{aligned} \quad (8.76)$$

Amplitudni potek je

$$|H_z(\omega)| = \sqrt{1 - 2r \cos(\omega - \theta) + r^2} \quad (8.77)$$

oziroma

$$20 \log_{10} |H_z(\omega)| = 10 \log_{10} [1 - 2r \cos(\omega - \theta) + r^2] \quad (8.78)$$

Fazni potek je podan z

$$\Theta_z(\omega) = \arctan\left[\frac{r \cdot \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}\right] \quad (8.79)$$

Skupinsko zakasnitev dobimo z odvajanjem (8.77)

$$\tau_g^2(\omega) = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 - 2r \cos(\omega - \theta) + r^2} \quad (8.80)$$

Potek amplitudnega in faznega spektra je razviden s slike 8.6 in sicer za $r = 0.7$ in $\theta = 0$, $\frac{\pi}{2}$ in π . Maksimalna vrednost amplitudnega spektra $|H(\omega)|$ je pri $\omega = \pi + \theta$ in minimalna pri $\omega = \theta$.

Iz slik 8.6 vidimo, da se s približevanjem r k enotnemu krogu ostri oblika negativnega vrha amplitudnega poteka. Na sliki 8.7 pa je prikazana geometrijska razlaga vseh potekov. Ker vemo, da imamo v našem primeru $H(z) = 1 - r \cdot e^{j\theta} \cdot z^{-1}$ in pol v $z = 0$ in eno ničlo, sledi, da je

$$|H_z(\omega)| = \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = V(\omega) \quad (8.81)$$

ter

$$\theta_z(\omega) = \theta(\omega) - \omega \quad (8.82)$$

$V(\omega)$ ima najmanjšo vrednost pri $\omega = \theta$ in največjo pri $\omega = \theta + \pi$. V primeru, ko pa ničla leži zunaj enotnega kroga ($r > 1$), je tudi potek $H(\omega)$ ekvivalenten poteku $V(\omega)$. Amplitudni potek spektra je enak kot v predhodnem primeru z $r < 1$, kar lahko sklepamo po sliki 8.6, le fazni potek pozna preskok čim pridemo s področja z $r < 1$ na področje z $r > 1$.

Namesto ničel lahko tudi govorimo o polih. V tem primeru je po analogiji

$$H_p(\omega) = \frac{1}{1 - p \cdot e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - r \cdot e^{j\theta} \cdot e^{-j\omega}} \quad (8.83)$$

Potem lahko tudi postavimo analogijo za vse tri odzive:

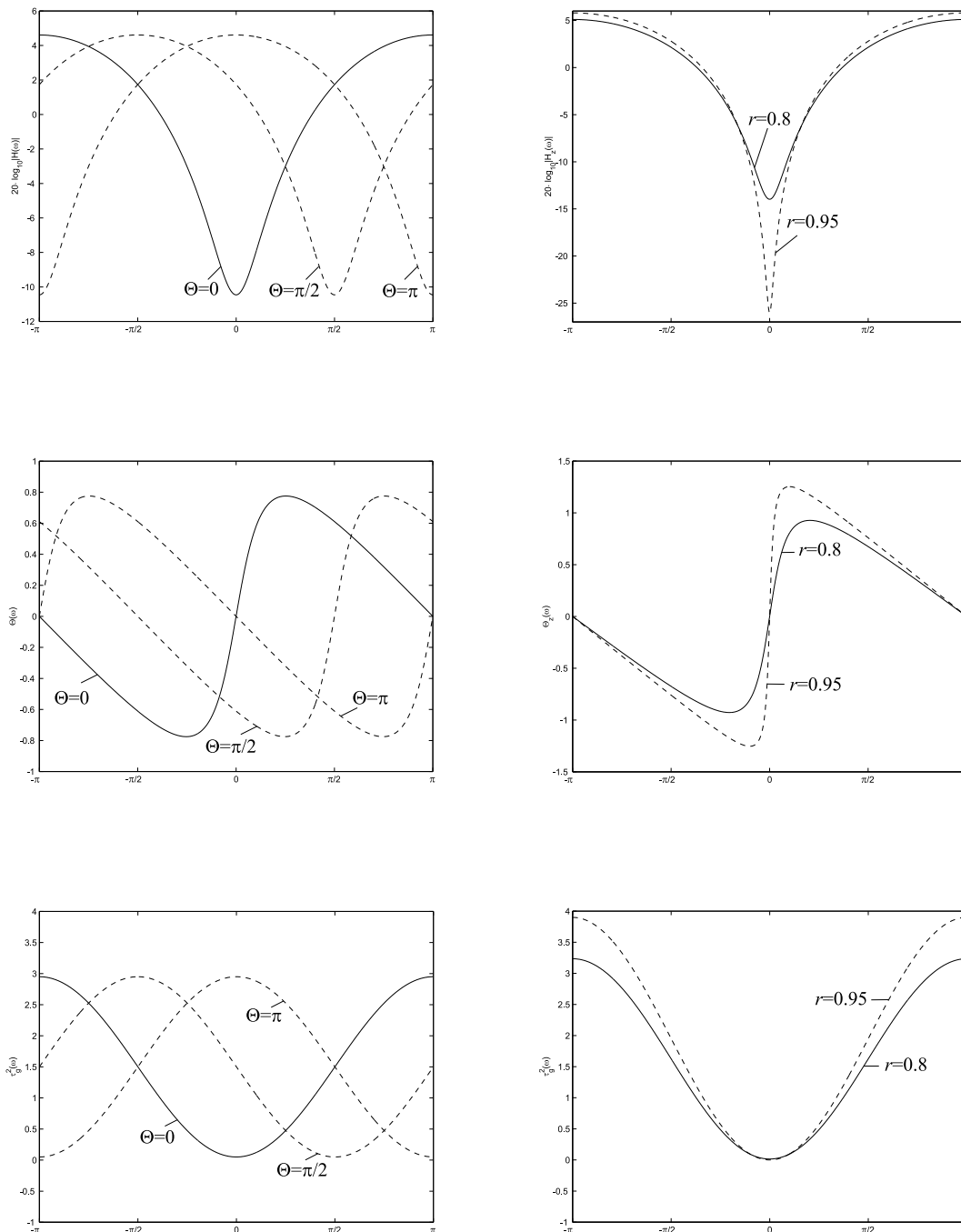
$$\begin{aligned} |H_p(\omega)|_{dB} &= -|H_z(\omega)|_{dB} \\ \angle H_p(\omega) &= -\angle H_z(\omega) \\ \tau_g^p(\omega) &= -\tau_g^z(\omega) \end{aligned} \quad (8.84)$$

Vidimo, da so poteki enaki, le da za primer polov pomnožimo poteke ničel s faktorjem -1.

8.5.2 Kompleksno konjugirani pari polov in ničel

Kot v predhodnem poglavju, tudi sedaj predpostavimo primer prenosne funkcije s kompleksno konjugiranim parom ničel

$$H_z(\omega) = (1 - r \cdot e^{j\theta} \cdot e^{-j\omega})(1 - r \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\omega}) \quad (8.85)$$



Slika 8.6: Amplitudni in fazni poteki ter skupinske zakasnitve za različne r in za $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

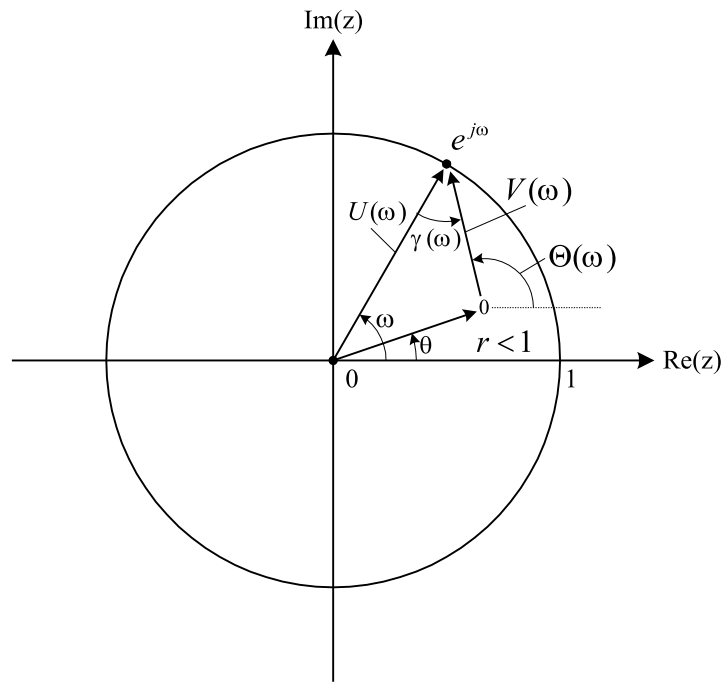
Lego ničel kaže slika 8.9

Amplitudni potek v decibelih je podan z izrazom:

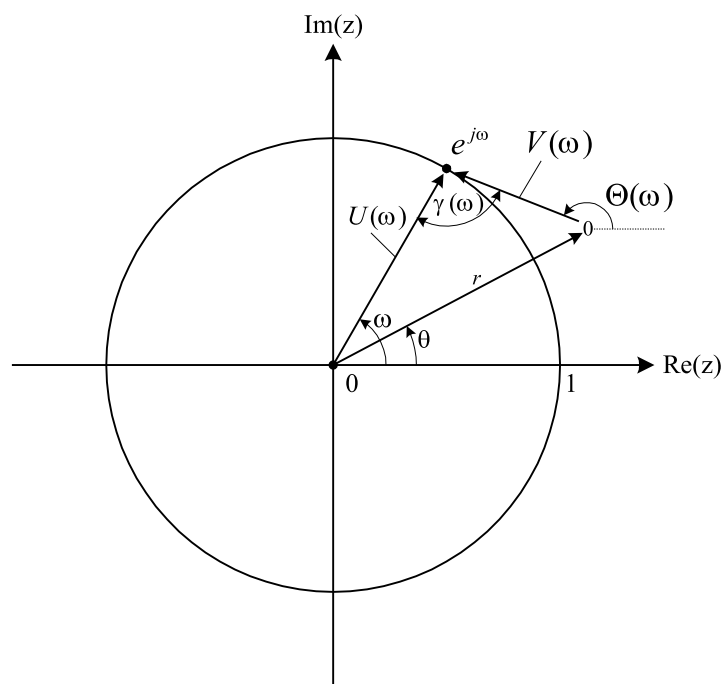
$$|H_z(\omega)|_{dB} = 10 \log_{10}[1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)] + 10 \log_{10}[1 + r^2 - 2r \cos(\omega + \theta)] \quad (8.86)$$

Fazni potek je podan z:

$$\theta_z(\omega) = \arctan\left(\frac{r \cdot \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cdot \cos(\omega - \theta)}\right) + \arctan\left(\frac{r \cdot \sin(\omega + \theta)}{1 - r \cdot \cos(\omega + \theta)}\right) \quad (8.87)$$

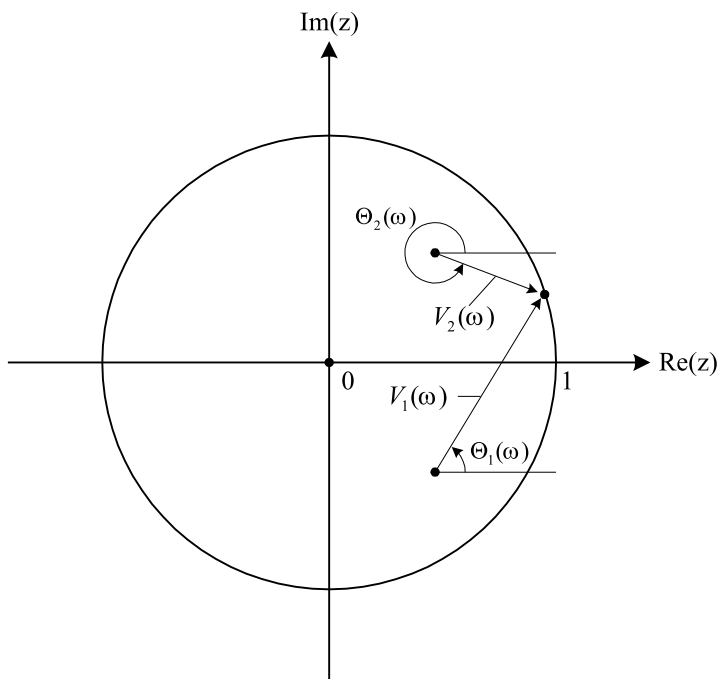


Slika 8.7: Geometrijski prikaz poteka $H_z(\omega) = V(\omega)$, v primeru, ko je ničla znotraj kroga $z = 1$.



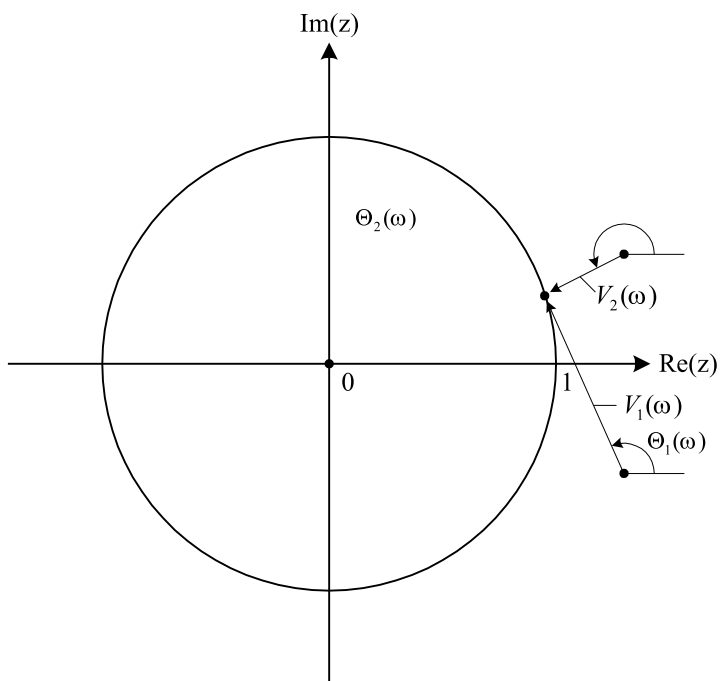
Slika 8.8: Potek $H(\omega)$ za ničlo $z = r > 1$ (geometrijski prikaz).

in skupinska zakasnitev:



Slika 8.9: Kompleksno konjugiran par ničel znotraj kroga $r < 1$.

$$\tau_g^2(\omega) = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 - 2r \cos(\omega - \theta) + r^2} + \frac{r^2 - r \cos(\omega + \theta)}{1 - 2r \cos(\omega + \theta) + r^2} \quad (8.88)$$

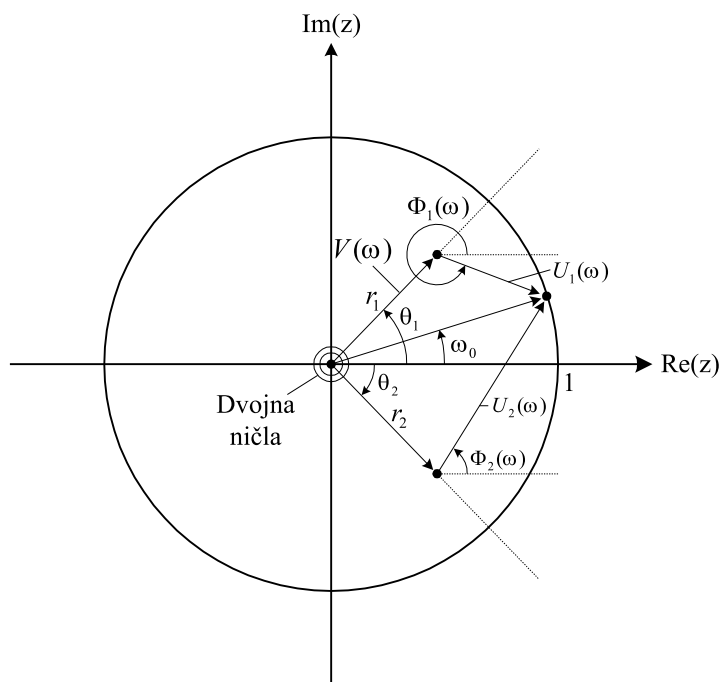


Slika 8.10: Kompleksno konjugirani pari ničel zunaj kroga $r > 1$.

Če imamo pole kot kompleksno konjugirane pare, tedaj dobimo po analogiji poteke, ki so podobni potekom kompleksno konjugiranih ničel:

$$\begin{aligned} |H_p(\omega)|_{dB} &= -|H_z(\omega)|_{dB} \\ \theta_p(\omega) &= -\theta_z(\omega) \\ \tau_g^p(\omega) &= -\tau_g^z(\omega) \end{aligned} \quad (8.89)$$

Geometrijska predstavitev kompleksno konjugiranih parov polov je prikazana na sliki 8.11



Slika 8.11: Geometrijska predstavitev amplitudnega in faznega poteka pri kompleksno konjugiranih polih.

Frekvenčni odziv je maksimalen pri $\omega = 0$. Člena $U_1(\omega)$ in $U_2(\omega)$ lahko izrazimo kot:

$$\begin{aligned} U_1(\omega) &= [1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)]^{\frac{1}{2}} \\ U_2(\omega) &= [1 + r^2 - 2r \cos(\omega + \theta)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (8.90)$$

$U_1(\omega)$ ima maksimalno vrednost $(1 - r)$ pri $\omega = \theta$, $U_2(\omega)$ pa ima maksimalno vrednost $(1 - r)$ pri $\omega = -\theta$. Produkt $U_1(\omega) \cdot U_2(\omega)$ ima maksimalno vrednost pri

$$\omega_r = \cos^{-1}\left(\frac{1 + r^2}{2r} \cdot \cos \theta\right) \quad (8.91)$$

kar je resonančna frekvenca z največjim amplitudnim odzivom.

Vidimo, da so sita 1. in 2. reda osnovni bloki, s katerimi gradimo druga sita, predstavljena v splošni obliki:

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{b_{k0} + b_{k1} \cdot z^{-1} + b_{k2} \cdot z^{-2}}{1 + a_{k1} \cdot z^{-1} + a_{k2} \cdot z^{-2}} \quad (8.92)$$

Poglavje 9

Frekvenčno selektivna sita

Filter je sistem, ki ločuje nekatere objekte ali parametre vhodnega signala od dela, ki ga dobimo na izhodu sistema. Najlaže si razložimo delovanje mehanskih sit, ki ali čistijo zrak prašnih delcev, ali pa ločujejo večje objekte od drobnejše vsebine.

V komunikacijskih sistemih običajno poizkušamo iz vhodnega signala odstraniti dele signala, ki so ali moteči, ali pa želimo identificirati določene signale v vhodnem signalu.

Običajno obravnavamo linearna, časovno neodvisna sita, kjer spekter vhodnega signala $X(\omega)$ spremenimo glede na prenosno funkcijo sita $H(\omega)$.

Tako dobimo odziv sistema:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (9.1)$$

$H(\omega)$ je prenosna funkcija sistema v frekvenčnem prostoru in jo tudi imenujemo utežna funkcija oziroma funkcija z oblikovanim spektrom. Običajno tovrstna sita uporabimo za spektralno oblikovanje frekvenčno izbranega signala. Sita uporabljamo za odpravljanje neželenega šuma v signalu, za spektralno izravnavo signalov v komunikacijskih kanalih, za detekcijo signala npr. pri radarju, raznih sprejemnikih, za spektralno analizo, itd.

9.1 Popačitev amplitude in faze

Najpreprostejše sito izvaja nalogo ojačanja ali zakasnitve signala. Tovrstna idealna sita se imenujejo sita brez popačenja. V takem situ je izhod signala določen z izrazom:

$$y[n] = C \cdot x[n - n_0] \quad (9.2)$$

kjer je $x[n]$ vhodni signal, $y[n]$ izhodni signal, C faktor ojačenja oziroma skalirni faktor, ter n_0 zakasnitev sita. Frekvenčni odziv sita je v tem primeru:

$$H(\omega) = C \cdot e^{-j\omega n_0} \text{ za } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (9.3)$$

Amplitudni odziv tovrstnega sita (9.2) je konstanten na celotnem območju frekvenčnega pasu, faza pa je na tem področju linearno odvisna od frekvence. Fazni odziv idealnega zakasnitvenega sita je linearna funkcija frekvence: $\theta(\omega) = -\omega \cdot n_0$. Vsako odstopanje sita od idealnega $H(\omega)$ (9.3) pomeni popačitev signala. Če se znotraj opazovanega frekvenčnega pasu pojavijo amplitudna nihanja, govorimo o amplitudnem popačenju. V primeru, da potek faze ni linearno odvisen od frekvence znotraj opazovanega frekvenčnega pasu, pa govorimo o faznem popačenju. Namesto, da analiziramo fazni odziv, raje uporabimo kot orodje analize popačenja kar zakasnitev ovojnice, oziroma skupinsko zakasnitev. Ta je določena z izrazom:

$$\tau_g = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (9.4)$$

Če nastopijo spremembe τ_g v odvisnosti od frekvence, govorimo o popačenju zakasnitve.

Drug primer popačitve faze je takoimenovana popačitev zakasnitve faze določene z izrazom:

$$\tau_{ph} = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad (9.5)$$

Običajno uporabljamo kot merilo popačitve faze skupinsko zakasnitev (group delay), kjer predpostavljamo, da je faza $\theta(\omega)$ linearna in zvezna funkcija na področju $0 \leq \omega \leq \pi$.

9.2 Vzročnost in sita

V predhodnih poglavjih smo že večkrat nakazali, da je nemogoče realizirati idealna sita, lahko pa se tej realizaciji le približamo. Ponovno si oglejmo ta problem: Vzemimo impulzni odziv $h[n]$ idealnega nizkopasovnega sita s frekvenčno karakteristiko:

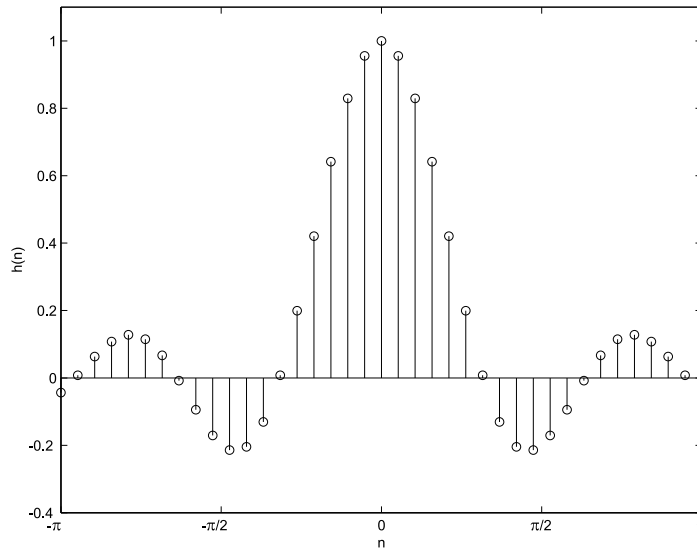
$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (9.6)$$

Impulzni odziv $h[n]$ takšnega sita je sinc funkcija:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & \text{za } n = 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n}, & \text{za } n \neq 0 \end{cases} \quad (9.7)$$

Tovrstno sito bi moralo imeti koeficiente, katerih indeks bi tekkel od $-\infty$ do ∞ . V tem primeru tudi $h[n]$ ni absolutno konvergenten; iz obeh razlogov torej tovrstno sito ni izvedljivo v realnih aplikacijah.

Idealno sito je nekavzalno in to je tudi vzrok, da takega sita ne moremo realizirati. Očitno je tudi, da je širina $h[n]$ obratno proporcionalna pasovni širini sita ω_c . Z naraščanjem pasovne širine sita se oži impulzni odziv sita $h[n]$, ki se s širjenjem širine ω_c vedno bolj oži. V primeru



Slika 9.1: Odziv idealnega sita na enotin impulz.

vseprepustnega sita $0 \leq \omega \leq \pi$ dobimo impulzni odziv enak enotnemu impulzu. V primeru zakasnitve vzorcev n_0 ima idealno nizko sito linearno fazo (9.2, 9.3), ki pa je tudi realno neizvedljiva, saj vsa idealna sita niso kavzalna. Zato se vprašamo, kakšnemu pogoju moramo zadostiti, da je $H(\omega)$ kavzalno sito. Odgovor daje Wiener-Paleyev teorem, ki pravi: Če vsebuje $h[n]$ končno energijo in če velja da je $h[n] = 0$ za $n < 0$ potem je:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln |H(\omega)|| d\omega < \infty \quad (9.8)$$

To pa pomeni, da če je $|H(\omega)|$ integrabilen in če je izraz (9.8) končen, potem obstaja za tak amplitudni potek $|H(\omega)|$ ustrezen fazni potek $\theta(\omega)$ tako, da je sito z obliko

$$H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \quad (9.9)$$

kavzalno. To pa pomeni, da je lahko amplituda $|H(\omega)|$ pri nekaterih frekvencah tudi nič, vendar ne more biti nič na poljubnem uporabnem frekvenčnem pasu, saj bi v tem primeru izraz (9.8) šel proti ∞ .

Kavzalnost sistema postavlja določene pogoje, oziroma omejitve linearnega časovno neodvisnega sistema. Kavzalnost postavlja v soodvisnost realno $H_R(\omega)$ in imaginarno $H_I(\omega)$ komponento frekvenčnega odziva $H(\omega)$. Oglejmo si to soodvisnost na primeru razstavitve impulznega odziva $h[n]$ na sode in lihe komponente:

$$h[n] = h_S[n] + h_L[n] \quad (9.10)$$

kjer sta:

$$h_S[n] = \frac{1}{2}[h[n] + h[-n]] \quad (9.11)$$

in

$$h_L[n] = \frac{1}{2}[h[n] - h[-n]] \quad (9.12)$$

Če je $h[n]$ kavzalen, tedaj ga lahko rekonstruiramo iz njegovega sodega dela $h_S[n]$ za vse $0 \leq n \leq \infty$, ali iz lihih komponent $h_L[n]$ za vse $1 \leq n \leq \infty$.

Torej lahko vidimo, da:

$$h[n] = 2h_S[n] \cdot u[n] + h_S[0] \cdot \delta[n] \quad n \geq 0 \quad (9.13)$$

in

$$h[n] = 2h_L[n] \cdot u[n] - h_L[0] \cdot \delta[n] \quad (9.14)$$

Ker je $h_L[n] = 0$ za $n = 0$ ne moremo rekonstruirati $h[n]$ iz $h_L[n]$, saj moramo poznati $h[0]$.

Če primerjamo izraze (9.11) in (9.12) vidimo, da so $h_S[n] = h_L[n]$ za $n \geq 1$. Torej obstaja povezava med $h_S[n]$ in $h_L[n]$.

Če vsota $h[n]$ konvergira k končni vrednosti (BIBO stabilnost), obstaja frekvenčni odziv $H(\omega)$, ki je kompleksen:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega). \quad (9.15)$$

Če pa je $h[n]$ realen in kavzalen, potem iz lastnosti simetrije Fourierove transformacije sledi:

$$\begin{aligned} h_S[n] &\xleftrightarrow{FT} H_R(\omega) \\ h_L[n] &\xleftrightarrow{FT} H_I(\omega) \end{aligned} \quad (9.16)$$

Ker je $h[n]$ popolnoma določen že z $h_S[n]$ sledi, da je $H(\omega)$ popolnoma določen s poznavanjem $H_R(\omega)$.

Torej sta $H_R(\omega)$ in $H_I(\omega)$ soodvisna in ju ne moremo ločeno določevati, če naj bo sistem kavzalen (vzročen). Pri kavzalnih sistemih (sitih) sta tudi amplituda in faza odziva soodvisna. Vzemimo, da imamo poznan $H_R(\omega)$ ustreznega realnega in sodega niza $h_S[n]$ s končno vsoto. Na osnovi tega lahko določimo $H(\omega)$.

Postopek si pogledjmo na primeru:

Primer:

Vzemimo linearen, stabilen in časovno neodvisen sistem z impulznim odzivom $h[n]$. Določimo $H(\omega)$ na osnovi znanega

$$H_R(\omega) = \frac{1 - a \cdot \cos(\omega)}{1 - 2a \cdot \cos(\omega) + a^2} \quad \text{za } |a| < 1 \quad (9.17)$$

Najprej določimo $h_S[n]$. Kot vemo velja

$$H_R(\omega) = H_R(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (9.18)$$

kjer je

$$H_R(z) = \frac{1 - a(z + z^{-1}) \cdot \frac{1}{2}}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2} = \frac{z - a(z^2 + 1)\frac{1}{2}}{(z - a)(1 - az)} \quad (9.19)$$

Področje konvergence je omejeno z lego polov $p_1 = a$ ter $p_2 = \frac{1}{a}$, hkrati pa vemo, da mora vsebovati enotin krog. Področje je omejeno s poloma $|a| < |z| < |\frac{1}{a}|$.

Ker je $h_S[n]$ dvostranski niz s polom $p_1 = a$, ki določa kavzalni del in s polom $p_2 = \frac{1}{a}$, ki določa antikavzalni del, uporabimo razširitev $h_S[n]$ v delno vsoto

$$h_S[n] = \frac{1}{2} \cdot a^{|n|} + \frac{1}{2} \cdot \delta[n] \quad (9.20)$$

Če ta izraz vstavimo v predhodno enačbo, dobimo

$$h[n] = a^2 \cdot u[n] \quad (9.21)$$

in njegov transform

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} \quad (9.22)$$

Iz vseh dosedanjih izvajanj lahko pridemo do pomembnih zaključkov, ki jih moramo upoštevati pri oblikovanju frekvenčno selektivnih sit. Ti so:

- frekvenčni odziv $H(\omega)$ ne more biti nič, razen na nekaterih končnih intervalih na frekvenčni osi.
- amplituda $H(\omega)$ ni konstantna na končnem frekvenčnem področju, v prehodnem pasu pa ne more preiti iz prepustnega v zaporni pas neskončno hitro.
- realni in imaginarni del $H(\omega)$ sta soodvisna in ju povezuje diskretni Hilbertov transform:

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cdot \cot \frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda \quad (9.23)$$

Posledica te soodvisnosti je medsebojna povezanost amplitudnega in faznega odziva.

Ker lastnost kavzalnosti vpliva na lastnosti frekvenčnega odziva in ker v praksi ne moremo realizirati idealnih sit, se bomo omejili na razred časovno neodvisnih sistemov določenih z diferenčno enačbo:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k \cdot y[n - k] + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n - k] \quad (9.24)$$

katerega frekvenčni odziv je

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot e^{-j\omega k}} \quad (9.25)$$

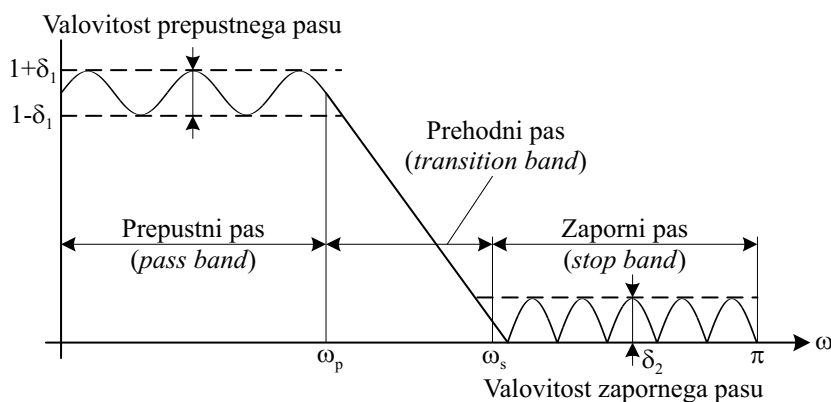
Pri načrtovanju sit je torej potrebno najti take koeficiente sita (9.25) v predhodnem izrazu, ki se bodo čim bolj približali idealnemu frekvenčnemu odzivu sistema.

V naslednjem podpoglavju si oglejmo nekaj enostavnih metod načrtovanja sit.

9.3 Praktični postopki načrtovanja ter lastnosti sit

Kot smo spoznali, idealnega sita v praksi ne moremo realizirati. Posledica kavzalnosti je tudi dejstvo, da ne moremo imeti ničelnega frekvenčnega odziva $H(\omega) = 0$; to se lahko zgodi le na določenih frekvenčnih intervalih. Posledica kavzalnosti pa je tudi dejstvo, da prehodni pas med prepustnim in zapornim pasom ne more biti neskončno ozek.

Pri načrtovanju sita kljub temu težimo k idealnim lastnostim sita. Dostikrat ne zahtevamo povsem konsistentnega amplitudnega poteka $|H(\omega)|$ znotraj prepustnega ali zapornega pasu. Zaradi lažje realizacije dopuščamo določeno valovitost v prepustnem pasu δ_1 (ripple), v zapornem pasu pa tudi dopuščamo odstopanje znotraj pasu.



Slika 9.2: Amplitudne lastnosti fizično realizirajočega sita.

V prehodnem pasu opazujemo amplitudni potek odziva med prepustnim in zapornim pasom. Frekvenca ω_p določa mejo prepustnega pasu, frekvenca ω_s pa določa začetek zapornega pasu. Širina prehodnega pasu je torej $\omega_s - \omega_p$. Širina prepustnega pasu določa pasovno širino sita. Valovitost, ki jo dopuščamo v prepustnem pasu je $\pm\delta_1$, v zapornem pasu pa dopuščamo le valovitost δ_2 . Ker opazujemo amplitudni potek v logaritemski skali, je ena ali druga valovitost določena kot $20 \log_{10} \delta_1$ in $20 \log_{10} \delta_2$.

Pri realizaciji sita moramo določiti maksimalno valovitost prepustnega pasu, maksimalno valovitost zapornega pasu, mejno frekvenco prepustnega pasu ω_p , ter začetno frekvenco zapornega pasu ω_c .

Na osnovi teh podatkov izberemo parametre sita $\{a_k\}$ in $\{b_k\}$, ki omogočajo tako izbiro, da bo realni odziv čim manj odstopal od zaželenega odziva sita (frekvenčnega poteka amplitude sita).

Oglejmo si, kako nastavljamo parametre sita v programskem okolju Matlabu.

Funkcija FILTER predstavlja enodimenzionalni digitalni filter.

$Y = FILTER(B, A, X)$ filtrira podatke v vektorju X s filtrom opisanim z vektorji A in B . Vektorja A in B vsebujeta koeficiente standardne diferenčne enačbe:

$$\begin{aligned} a(1) \cdot y(n) &= b(1) \cdot x(n) + b(2) \cdot x(n-1) + \dots + b(nb+1) \cdot x(n-nb) \\ &\quad - a(2) \cdot y(n-1) - \dots - a(na+1) \cdot y(n-na) \end{aligned} \quad (9.26)$$

če $a(1)$ ni enako 1, `FILTER` normira vse koeficiente na $a(1)$.

Imamo še dve filterski funkciji in sicer `FILTER2`, ki predstavlja dvodimenzionalni digitalni filter in `FILTFILT`, ki predstavlja 'forward and reverse' digitalni filter z ničelno fazo.

Vektorja A in B določamo s funkcijami `CHEBY1` (izdelava Chebyshevega digitalnega in analognega filtra tipa I), `CHEBY2` (izdelava Chebyshevega digitalnega in analognega filtra tipa II), `BUTTER` (izdelava Butterworthovega digitalnega in analognega filtra) in `ELLIP` (izdelava eliptičnega ali Causerjevega digitalnega in analognega filtra).

$[B, A] = CHEBY1(N, R, W_N)$ izdelava nizko Chebyshevo sito N . reda z R decibeli valovitosti v prepustnem pasu. `CHEBY1` vrne koeficiente filtra v vektorjih A in B dolžine $N + 1$. Zaporna frekvenca W_N mora biti $0.0 < W_N < 1.0$, kjer 1.0 odgovarja polovici vzorčne frekvence. Če je W_N vektor z dvema elementoma, $W_N = [W_1 \ W_2]$, nam `CHEBY1` vrne pasovno sito reda $2N$.

$[B, A] = CHEBY1(N, R, W_n, 'high')$ izdelava visoko sito.

$[B, A] = CHEBY1(N, R, W_n, 'stop')$ izdelava pasovno zaporno sito, če je $W_N = [W_1 \ W_2]$.

Red filtra `CHEBY1` določamo s funkcijo `CHEB1ORD`.

$[N, W_n] = CHEB1ORD(W_p, W_s, R_p, R_s)$ vrne red N digitalnega Chebyshevega filtra tipa I najnižjega reda, ki ima valovitost v prepustnem pasu največ R_p [dB] in slabljenje v zapornem pasu najmanj R_s [dB]. W_p in W_s sta robni frekvenci prepustnega in zapornega pasu, normirani od 0 do 1, kjer 1 odgovarja π radianom. Na primer,

Nizko sito: $W_p = .1, W_s = .2$

Visoko sito: $W_p = .2, W_s = .1$

Pasovno sito: $W_p = [.1 \ .8], W_s = [.2 \ .7]$

Pasovno zaporno sito: $W_p = [.2 \ .7], W_s = [.1 \ .8]$

`CHEB1ORD` vrne tudi W_N , Chebyshevo naravno frekvenco.

$[B, A] = CHEBY2(N, R, W_N)$ izdelava nizko Chebyshevo sito N . reda z R decibeli slabljenja v zapornem pasu. `CHEBY2` vrne koeficiente filtra v vektorjih A in B dolžine $N + 1$. Zaporna frekvenca W_N mora biti $0.0 < W_N < 1.0$, kjer 1.0 odgovarja polovici vzorčne frekvence. Če je W_N vektor z dvema elementoma, $W_N = [W_1 \ W_2]$, nam `CHEBY2` vrne pasovno sito reda $2N$.

$[B, A] = CHEBY2(N, R, Wn, 'high')$ izdelava visoko sito.

$[B, A] = CHEBY2(N, R, Wn, 'stop')$ izdelava pasovno zaporno sito, če je $W_N = [W_1 \ W_2]$.

Red filtra CHEBY2 določamo z uporabo funkcije CHEB2ORD.

$[B, A] = BUTTER(N, Wn)$ izdelava nizko Butterworthovo sito N . reda in vrne koeficiente sita v vektorjih A in B dolžine $N + 1$. Koeficienti so razvrščeni po padajoči potenci z . Zaporna frekvenca W_N mora biti $0.0 < W_N < 1.0$, kjer 1.0 odgovarja polovici vzorčne frekvence. Če je W_N vektor z dvema elementoma, $W_N = [W_1 \ W_2]$, nam BUTTER vrne pasovno sito reda $2N$.

$[B, A] = BUTTER(N, R, Wn, 'high')$ izdelava visoko sito.

$[B, A] = BUTTER(N, R, Wn, 'stop')$ izdelava pasovno zaporno sito, če je $W_N = [W_1 \ W_2]$.

Red filtra BUTTER določamo z uporabo funkcije BUTTORD.

$[B, A] = ELLIP(N, Rp, Rs, Wn)$ izdelava nizko eliptično sito N . reda z R_p decibeli valovitosti v prepustnem pasu in R_s decibeli slabljenja v zapornem pasu. ELLIP vrne koeficiente sita v vektorjih A in B dolžine $N + 1$. Zaporna frekvenca W_N mora biti $0.0 < W_N < 1.0$, kjer 1.0 odgovarja polovici vzorčne frekvence. Če je W_N vektor z dvema elementoma, $W_N = [W_1 \ W_2]$, nam ELLIP vrne pasovno sito reda $2N$.

$[B, A] = ELLIP(N, Rp, Rs, Wn, 'high')$ izdelava visoko sito.

$[B, A] = ELLIP(N, Rp, Rs, Wn, 'stop')$ izdelava pasovno zaporno sito, če je $W_N = [W_1 \ W_2]$.

Red filtra ELLIP določamo z uporabo funkcije ELLIPORD.

Primer:

Oglejmo si funkcijo v Matlabu, ki filtrira audio signal. Najprej vodimo signal skozi "antialiasing" sito, nakar ga paket Matlab reproducira s pomočjo standardne naprave WAVE (zvočnika).

Datoteko WAVE najprej prenesemo v okolje Matlab. To izvedemo s pomočjo funkcije "wavread":

```
in = wavread('imeWAVEdatoteke')
```

(Opozorilo: datoteka WAVE se mora nahajati v trenutnem Matlabovem direktoriju), nakar pristopimo k dejanskemu filtriranju datoteke WAVE:

```

function filter_play(in, Fs, Wp, Ws, Rp, Rs)
    %in..vhodna matrika, dobljena z uporabo funkcije 'wavread'
    %Fs...frekvenca vzorčenja, mora odgovarjati frekvenci vzorčenja originalne datoteke WAVE
    %Wn...zaporna frekvenca, mora biti 0.0 < Wn < 1.0, kjer 1.0 odgovarja polovici vzorčne
    frekvence
    %Wp,Ws...robni frekvenci prepustnega in zapornega pasu, normirani od 0 do 1, kjer 1
    odgovarja pi radianom, za nizko sito mora biti Wp < Ws
    %Rp...valovitost v prepustnem pasu v [dB]
    %Rs...slabljenje v zapornem pasu v [dB]
    [N, Wn] = cheb1ord(Wp, Ws, Rp, Rs);
    [B, A] = cheby1(N, Rp, Wn);
    out = filter(B, A, in);
    wavplay(out, Fs);

```

9.4 Realizacija FIR sit z linearno fazo

Sita tipa FIR lahko realiziramo z linearno fazo, medtem ko sita tipa IIR nimajo linearne faze.

V mnogih rešitvah prenosa signalov potrebujemo sita z linearno fazo. Pri kodirnih ali modulacijskih postopkih je velikokrat linearnost faze zelo pomembna za pravilno razpoznavanje signala, zato se sita tipa FIR često uporabljajo. Vzemimo FIR sito dolžine M :

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot e^{-j\omega k} \quad (9.27)$$

Koeficienti $\{b_k\}$ so ekvivalentni vrednostim impulznega odziva tega sita:

$$h[n] = \begin{cases} b_k, & 0 \leq k \leq M - 1 \\ 0, & \text{drugače} \end{cases} \quad (9.28)$$

Lastnost linearne poteka faze dobimo z upoštevanjem simetričnosti koeficientov sita. Kot že vemo, poznamo sodo in liho simetričnost koeficientov oziroma $h[n]$. Vzemimo simetričnost

$$h[n] = h[M - 1 - n] \quad (9.29)$$

Če sito zadosti omenjenim pogojem ima sito linearno fazo.

Pri tem imamo lahko liho ali sodo število koeficientov, na primer pri $M = 5$ (liho) imamo sledečo simetrijo: $h[0] = h[4]$; $h[1] = h[3]$ in $h[2]$. Simetrija koeficientov je okoli koeficienta $h[2]$. Odziv sistema v frekvenčnem prostoru je

$$\begin{aligned} H(\omega) &= h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega} + h[4]e^{-j4\omega} = \\ &= e^{-j2\omega} (h[2] + h[0]e^{j2\omega} + h[4]e^{-j2\omega} + h[1]e^{j\omega} + h[3]e^{-j\omega}) \end{aligned} \quad (9.30)$$

Če upoštevamo že omenjeno simetrijo koeficientov dobimo:

$$H(\omega) = e^{-j2\omega}(h[2] + 2h[0]\cos(2\omega) + 2h[1]\cos\omega) \quad (9.31)$$

Izraz v oklepajih je realen za vse ω in mu lahko dodamo indeks r , kar ne pomeni realnega dela $H_R(\omega)$ splošnega izraza $H(\omega)$.

$$H_r(\omega) = (h[2] + 2h[0]\cos(2\omega) + 2h[1]\cos\omega) \quad (9.32)$$

oziroma tako je

$$H(\omega) = e^{-j2\omega} \cdot H_r(\omega) \quad (9.33)$$

kjer sta amplitudni potek frekvenčnega odziva:

$$|H(\omega)| = |H_r(\omega)| \quad (9.34)$$

in fazna karakteristika sita:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -2\omega, & \text{če je } H_r(\omega) > 0 \\ -2\omega + \pi, & \text{če je } H_r(\omega) < 0 \end{cases} \quad (9.35)$$

Vidimo, da je fazna karakteristika $\theta(\omega)$ linearna funkcija ω in je odvisna le od predznaka $H_r(\omega)$. Pri spremembi predznaka pride do faznega preskoka za π radianov.

Če je M sodo število imamo sledečo simetrijo koeficientov: $h[0] = h[3]$, $h[1] = h[2]$.

Frekvenčni odziv takega sistema je:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega} \\ &= e^{-j\frac{3\omega}{2}}(h[0]e^{j\frac{3\omega}{2}} + h[3]e^{-j\frac{3\omega}{2}} + h[1]e^{j\frac{\omega}{2}} + h[2]e^{-j\frac{\omega}{2}}) \end{aligned} \quad (9.36)$$

Z upoštevanjem simetrije koeficientov dobimo

$$H(\omega) = e^{-j\frac{3\omega}{2}} [2h[0]\cos(\frac{3\omega}{2}) + 2h[1]\cos(\frac{\omega}{2})] \quad (9.37)$$

Kot v prejšnjem primeru je tudi sedaj izraz v oklepaju realen za vse ω . Tako lahko zapišemo

$$H(\omega) = e^{-j\frac{3\omega}{2}} \cdot H_r(\omega) \quad (9.38)$$

kjer sta odziva:

$$|H(\omega)| = |H_r(\omega)| \quad (9.39)$$

in

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{3\omega}{2}, & \text{če je } H_r(\omega) > 0 \\ -\frac{3\omega}{2} + \pi, & \text{če je } H_r(\omega) < 0 \end{cases} \quad (9.40)$$

Kot vidimo je fazni potek linearen, vse dokler ne pride do spremembe znaka $H_r(\omega)$. V tem primeru pride do preskoka faze za π .

Iz obeh primerov lahko sklepamo, da je odziv sistema FIR z M simetričnimi koeficienti podan v obliki

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{-j\omega\frac{(M-1)}{2}} \quad (9.41)$$

kjer je

$$H_r(\omega) = h\left[\frac{M-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \cdot \cos\left(\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right) \quad \text{za lihe } M \quad (9.42)$$

oziroma

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] \cdot \cos\left(\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right) \quad \text{za sode } M \quad (9.43)$$

Fazni potek pa je za sode in lihe M podan z izrazoma

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \omega\left(\frac{M-1}{2}\right), & \text{za } H_r(\omega) > 0 \\ \pi - \omega\left(\frac{M-1}{2}\right), & \text{za } H_r(\omega) < 0 \end{cases} \quad (9.44)$$

Vidimo, da moramo v primeru lihega števila M poznati le $\frac{M+1}{2}$ koeficientov, v primeru sodega števila M pa le $\frac{M}{2}$ koeficientov.

V primeru antisimetričnega odziva je $h\left[\frac{M+1}{2}\right] = 0$ če imamo liho število koeficientov M .

Izbira simetričnega ali antisimetričnega odziva je odvisna od področja uporabe sita. Tako antisimetrični odziv ni uporaben za nizkoprepustna sita FIR, simetrični odziv pa vodi k neničelnemu odzivu pri $\omega = 0$. V tem primeru je

$$H_r(0) = h\left[\frac{M-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \quad \text{za lihe } M \quad (9.45)$$

$$H_r(0) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] \quad \text{za sode } M. \quad (9.46)$$

Iz zgornjih enačb dobimo niz linearnih enačb, katerih rešitev daje vrednosti koeficientov sita FIR. Torej da rešimo sistem enačb za $\frac{M+1}{2}$ ali $\frac{M-1}{2}$ ali $\frac{M}{2}$ vrednosti $H_r(\omega)$ enakomerno porazdeljenih po frekvenčni osi na področju $0 \leq \omega \leq \pi$.

Torej če izberemo točke ω_k na frekvenčni osi, kjer je

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{2\pi}{M} \cdot k, & \text{pri } k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2} & \text{za lihe } M \\ & & \text{in } k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1 & \text{za sode } M \end{aligned} \quad (9.47)$$

in ko določimo koeficiente a_{kn} v izrazih:

$$\begin{aligned} a_{kn} &= 2 \cos\left(\omega_k\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right) \\ a_{kn} &= 1 \quad \text{pri } n = \frac{M-1}{2} \quad \text{za vse } k \end{aligned} \quad (9.48)$$

tedaj lahko zapišemo niz linearnih enačb v obliki:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a_{kn} h[n] &= H_r(\omega_k) & k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2} & \text{ za lihe } M \\ \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} a_{kn} h[n] &= H_r(\omega_k) & k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1 & \text{ za sode } M \end{aligned} \quad (9.49)$$

V primeru antisimetričnega odziva moramo določiti vrednost tega odziva v točkah $\frac{(M-1)}{2}$ za lihi M , ter v $\frac{M}{2}$ točkah za sodi M .

V tem primeru je $H_r(0) = 0$ neodvisen od izbire $\{h(n)\}$. Pri lihih M določitev v $\omega = 0$ ne igra vloge če imamo opraviti z antisimetričnim odzivom $H_r(\omega)$ v $\frac{M-1}{2}$ enakomerno razmaknjenih točkah. Točke določimo z

$$\omega_v = \frac{2\pi}{M} k \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, M - \frac{1}{2} \quad (9.50)$$

V primeru sodega M pa potrebujemo $\frac{M}{2}$ točk na frekvenčni osi. V tem primeru, če ne moremo uporabiti točke $\omega = 0$, pa uporabimo točko pri $\omega = \pi$.

Tako določimo frekvenčne točke v katerih določimo $H_r(\omega)$ in iz njih niz $\{b_k\}$

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{2\pi k}{M}, & k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} & \text{ za lihe } M \\ & & k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} & \text{ za sode } M \end{aligned} \quad (9.51)$$

Druga možnost izbire točk na frekvenčni osi, pri kateri se izognemo problemu pri $\omega = 0$, ali pri $\omega = \pi$ je predstavljena s premikom $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right), & k = 0, 1, \dots, \frac{M-3}{2} & \text{ za lihe } M \\ & & k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1 & \text{ za sode } M \end{aligned} \quad (9.52)$$

To predstavlja premik za $\frac{\pi}{M}$ iz osnovnega niza $\frac{2\pi}{M}$. Tako dobimo nov izraz za koeficiente

$$b_{kn} = 2 \sin \omega_k \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad (9.53)$$

Z uporabo tega izraza v predhodnih enačbah dobimo nov niz enačb za antisimetrično sito tipa FIR:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} b_{kn} h[n] &= H_r(\omega_k), & k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} & \text{ za lihe } M \\ \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} b_{kn} h[n] &= H_r(\omega_k), & k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} & \text{ za sode } M. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Primer:

Določi enotin odziv $\{h[n]\}$ sita FIR z linearno fazo dolžine $M = 4$, katerega frekvenčni odziv je v $\omega = 0$ in $\omega = \frac{\pi}{2}$: $H_r(0) = 1$ in $H_r(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.

Problem je enostaven, saj rešujemo sistem z dvema parametroma $h(0)$ in $h(1)$. Tako dobimo niz enačb

$$\begin{aligned} a_{00} h[0] + a_{01} h[1] &= H_r(0) = 1 \\ a_{10} h[0] + a_{11} h[1] &= H_r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (9.55)$$

kjer so

$$\begin{aligned} a_{00} &= 2, & a_{01} &= 2 \\ a_{10} &= -\sqrt{2}, & a_{11} &= \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Matrična enačba, ki jo dobimo iz enačb je

$$A \cdot h = H_r \quad (9.57)$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} \quad H_r = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (9.58)$$

Rešitev sistema enačb je

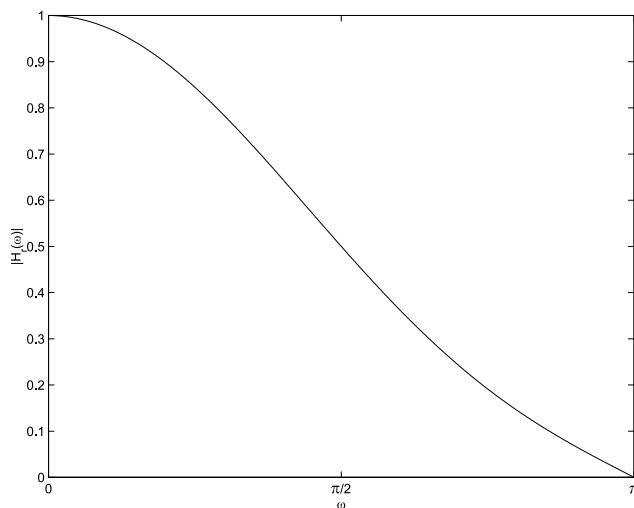
$$\begin{aligned} h[0] &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1) = 0.0732232 = h[3] \\ h[1] &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 1) = 0.4267766 = h[2] \end{aligned} \quad (9.59)$$

Frekvenčni odziv sistema je:

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{-j\frac{3\omega}{2}} \quad (9.60)$$

kjer je

$$H_r(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{4}[(\sqrt{2} - 1)\cos\frac{3\omega}{2} + (\sqrt{2} + 1)\cos\frac{\omega}{2}] \quad (9.61)$$



Slika 9.3:

Primer:

Določi enotin odziv $\{h[n]\}$ sita FIR z linearno fazo dolžine $M = 5$, katerega frekvenčni odziv je v $\omega = 0 : H_r(0) = 1$, v $\omega = \frac{2\pi}{5} : H_r(\frac{2\pi}{5}) = \frac{3}{5}$ in v $\omega = \frac{4\pi}{5} : H_r(\frac{4\pi}{5}) = \frac{1}{5}$.

Zaradi simetrije velja: $h[4] = h[0]$ in $h[3] = h[1]$, zato iščemo samo tri parametre, $h[0], h[1]$ in $h[2]$. Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} a_{00}h[0] + a_{01}h[1] + a_{02}h[2] &= H_r(0) = 1 \\ a_{10}h[0] + a_{11}h[1] + a_{12}h[2] &= H_r\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{3}{5} = 0.6 \\ a_{20}h[0] + a_{21}h[1] + a_{22}h[2] &= H_r\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{5} = 0.2 \end{aligned} \quad (9.62)$$

kjer so

$$\begin{aligned} a_{00} &= 2, & a_{01} &= 2, & a_{02} &= 1 \\ a_{10} &= -1.6180, & a_{11} &= 0.6180, & a_{12} &= 1 \\ a_{20} &= 0.6180, & a_{21} &= -1.6180, & a_{22} &= 1 \end{aligned} \quad (9.63)$$

Matrična enačba je

$$A \cdot h = H_r \quad (9.64)$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1.6180 & 0.6180 & 1 \\ 0.6180 & -1.6180 & 1 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \end{bmatrix} \quad H_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad (9.65)$$

Rešitev sistema enačb je

$$\begin{aligned} h[0] &= 0.0306 = h[4] \\ h[1] &= 0.2094 = h[3] \\ h[2] &= 0.5200 \end{aligned} \quad (9.66)$$

Frekvenčni odziv sistema je:

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{-j2\omega} \quad (9.67)$$

kjer je

$$H_r(\omega) = (0.5200 + 0.0612 \cdot \cos(2\omega) + 0.4188 \cdot \cos\omega) \quad (9.68)$$

9.5 Projektiranje digitalnih sit z metodo razvrščanja polov in ničel v ravnini Z

Kot smo spoznali v poglavju o vplivu lege polov in ničel na časovno obnašanje signala, lahko iz vseh dosedanjih razmišljanj zaključimo, da moramo pri poudarjenih frekvenčnih odzivih postaviti pole blizu enotnega kroga, kjer želimo poudariti ali ojačiti določena frekvenčna področja. V primeru, ko pa želimo zmanjšati vpliv posameznih frekvenc, moramo na tem področju postaviti ničlo na enotin krog. Seveda moramo upoštevati spoznanja iz že omenjenega poglavja, kjer smo ugotovili, da moramo vse pole postaviti znotraj kroga enote, če želimo realizirati stabilno sito. Prav tako moramo v primeru kompleksnih polov ali ničel upoštevati še njegov konjugirano kompleksni par. S tem dosežemo da so koeficienti sita realni.

Če se povrnemo k zapisu prenosne funkcije $H(z)|_{r=1}$ s poli in ničlami:

$$H(z)|_{r=1} = H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} \Big|_{r=1} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k \cdot z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k \cdot z^{-1})} \Big|_{r=1} \quad (9.69)$$

Koeficient b_0 uporabimo kot normirano vrednost prenosne funkcije $H(z)$ pri izbrani frekvenci ω_0 . Pri tem je absolutna vrednost amplitudnega frekvenčnega poteka

$$|H(\omega_0)| = 1. \quad (9.70)$$

Običajno je $N \geq M$, kar pomeni, da ima sito več netrivialnih polov kot ničel.

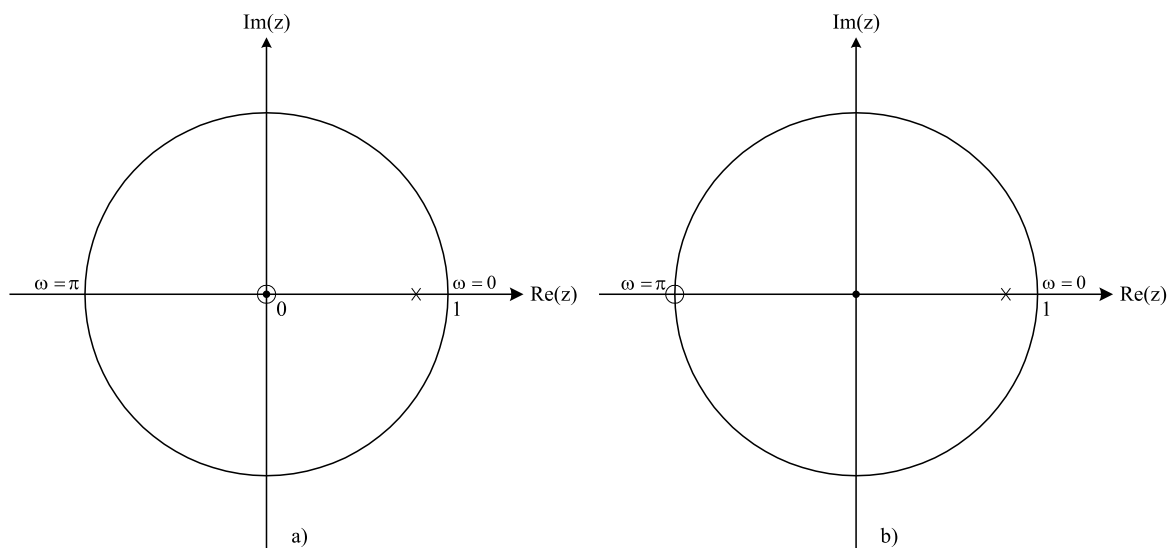
Oglejmo si nekaj primerov razvrstitve polov in ničel za enostavna nizka, visoka ali pasovna sita. Hkrati pa še pogledjmo sita, ki jih pogosto srečujemo v komunikacijskih ali merilnih sistemih kot so sita z zarezo, resonator, oscilator, v posebnem poglavju pa smo si že ogledali tudi sita z minimalno fazo.

Kot smo že dejali, moramo z ničlami zadušiti frekvence, ki jih želimo potisniti v amplitudnem poteku $|H(\omega)|$, s poli pa frekvence poudarimo. Tako pole postavimo v bližino enotnega kroga, ničle pa na enotin krog. Pri nizkem situ postavimo pole blizu nizkih frekvenc, torej z radijem pola $r_p < 1$ in blizu ($\omega = 0$), ničle pa postavimo v področju $\omega = \pi$ na sam krog enote.

Vzemimo enostavno nizko sito s prenosno funkcijo

$$H_a(z) = \frac{1 - a}{1 - a \cdot z^{-1}}. \quad (9.71)$$

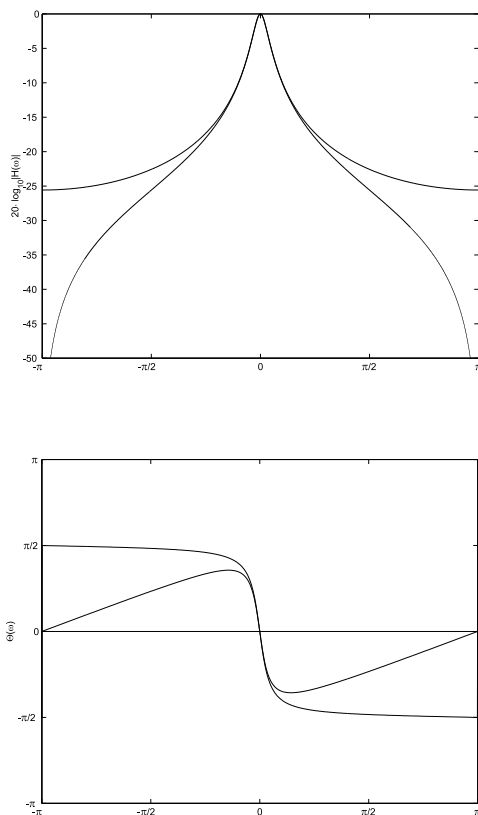
Sito ima pol na pozitivni realni osi z radijem a in ničlo v izhodišču. Za $a = 0.9$ dobimo razpored polov in ničel s slike 9.4a.



Slika 9.4: Lega polov in ničel dveh nizkopasovnih sit.

Če si ogledamo potek amplitude in faze vidimo, da amplitudni potek ne zagotavlja ničelnega odziva pri $\omega = \pi$, zato moramo prestaviti ničlo iz izhodišča v točko $\omega = \pm\pi$. Tovrstno razporeditev korenov vidimo na sliki 9.4b, fazni potek pa na sliki 9.5. Prenosna funkcija nizkega sita s premaknjenim polom v $\omega = \pi$ je:

$$H_b(\omega) = \frac{1-a}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-a \cdot z^{-1}}. \quad (9.72)$$



Slika 9.5: Amplitudni in fazni odziv sit $H_a(\omega)$ in $H_b(\omega)$.

Z zrcaljenjem polov in ničel okoli vertikalne (imaginarne) osi v ravnini Z , dobimo iz nizkega visoko in iz visokega nizko sito. V tem primeru dobimo iz nizkega sita visoko sito, katerega prenosna funkcija je

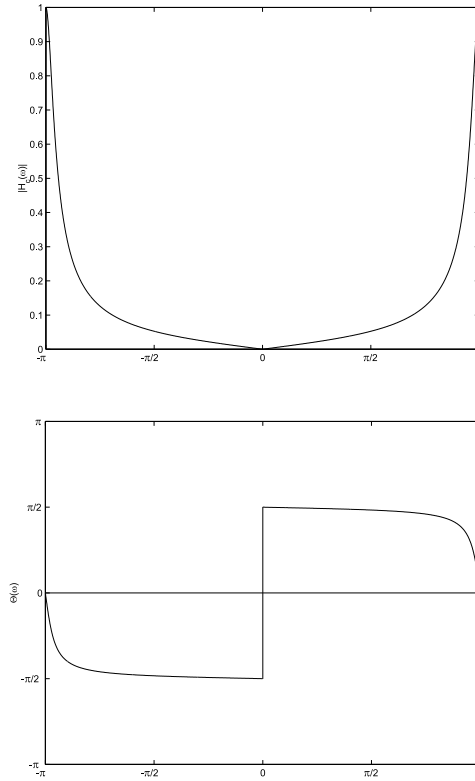
$$H_c(\omega) = \frac{1-a}{2} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+a \cdot z^{-1}}. \quad (9.73)$$

Frekvenčni in fazni odziv tega sita sta razvidna s slike 9.6.

Enak postopek uporabimo pri pasovnih sitih. Pri tem moramo vsakemu kompleksnemu korenu prirediti še njemu kompleksno konjugiran par, če želimo imeti realen pol. Tudi v tem primeru se poli nahajajo znotraj, a blizu enotinega kroga.

Oglejmo si primer postopka izvedbe pasovnega sita.

Naj bo $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ osrednja frekvenca pasovnega sita. V frekvenčnih točkah $\omega = 0$ in $\omega = \pi$ je odziv 0 in pri $\omega = \frac{4\pi}{9}$ je odziv $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Slika 9.6: Amplitudni in fazni potek $H_c(\omega)$ in $\theta_c(\omega)$

Jasno je, da imamo pola $p_{1,2} = r \cdot e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$ in ničle pri $z_1 = 1$ in $z_2 = -1$.

Prenosna funkcija $H(\omega)$ sistema je:

$$H(\omega) = G \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - jre^{-j\omega}z^{-1})(1 + jre^{+j\omega}z^{-1})} = G \frac{(z - 1)(z + 1)}{(z - jr)(z + jr)} = G \frac{z^2 - 1}{z^2 + r^2} \quad (9.74)$$

Ojačenje G določimo iz odziva $H(\omega)$ pri $\omega = \frac{\pi}{2}$. Tako dobimo izraz

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = G \frac{2}{1 - r^2} = 1 \quad \rightarrow \quad G = \frac{1 - r^2}{2} \quad (9.75)$$

Vrednost radija pola r določimo iz odziva v $\omega = \frac{4\pi}{9}$

$$\left|H\left(\omega = \frac{4\pi}{9}\right)\right|^2 = \frac{(1 - r^2)^2}{4} \cdot \frac{2 - 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{1 + r^4 + 2r^2\cos\frac{8\pi}{9}} = \frac{1}{2} \quad (9.76)$$

Iz tega izraza dobimo

$$r^2 = 0.7 \quad (9.77)$$

Prenosna funkcija ustreznega sita je torej:

$$H(z) = 0.15 \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.7z^{-2}}. \quad (9.78)$$

Iz dosedanjega razmišljanja smo le spoznali, kako vplivajo poli in ničle na same lastnosti sita. Sami prikazani postopki niso primerni za načrtovanje realnega sita, saj je red realnega

sita neprimerno večji, kot pa smo jih obravnavali do sedaj. Dosedanje razmišljanje le omogoča izdelavo računalniških programov in pravilno razumevanje tako dobljenih rezultatov.

9.6 Transformacija nizkega v visoko sito

Ta postopek je primeren le tedaj, ko imamo znano strukturo nizkega sita in želimo na osnovi frekvenčnega pomika realizirati visoko sito.

Vzemimo impulzni odziv nizkega sita $h_{lp}[n]$, katerega frekvenčni odziv je $H_{lp}(\omega)$. Če si zamislimo ravnino Z , s krogom enote in poli blizu $\omega = 0$, tedaj lahko s premikom polov in ničel za π radianov dobimo iz nizkega sita visoko sito. Torej namesto ω pišemo $\omega - \pi$. Z izrazom

$$H_{hp}(\omega) = H_{lp}(\omega - \pi) \quad (9.79)$$

dobimo visoko sito katerega frekvenčni odziv je $H_{hp}(\omega)$. Frekvenčni pomik za π radianov pa je ekvivalenten množenju $h_{lp}[n]$ z $e^{j\pi n}$. Na osnovi tega spoznanja dobimo impulzni odziv visokega sita

$$h_{hp}[n] = e^{j\pi n} \cdot h_{lp}[n] = (-1)^n \cdot h_{lp}[n] \quad (9.80)$$

Vidimo, da se impulzni odziv nizkega sita pretvori v impulzni odziv visokega sita tako, da lihim koeficientom niza $\{h[n]\}$ spremenimo predznak.

Splošen izraz frekvenčnega odziva visokega sita je

$$H_{hp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M (-1)^k b_k \cdot e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k \cdot e^{-j\omega k}} \quad (9.81)$$

oziroma njegov odziv v času

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k \cdot y[n-k] + \sum_{k=0}^M (-1)^k b_k \cdot x[n-k] \quad (9.82)$$

Primer:

Imamo nizko sito podano s prenosno funkcijo

$$H_{lp}(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}, \quad a < 1 \quad (9.83)$$

Z zrcaljenjem polov in ničel preko imaginarne osi v ravnini Z dobimo prenosno funkcijo visokega sita:

$$H_{hp}(z) = - \frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}} \quad (9.84)$$

ker je

$$H_{lp}(z) = - \frac{a - z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad (9.85)$$

in če z^{-1} nadomestimo $z - z^{-1}$ dobimo zgornji izraz za $H_{hp}(z)$.

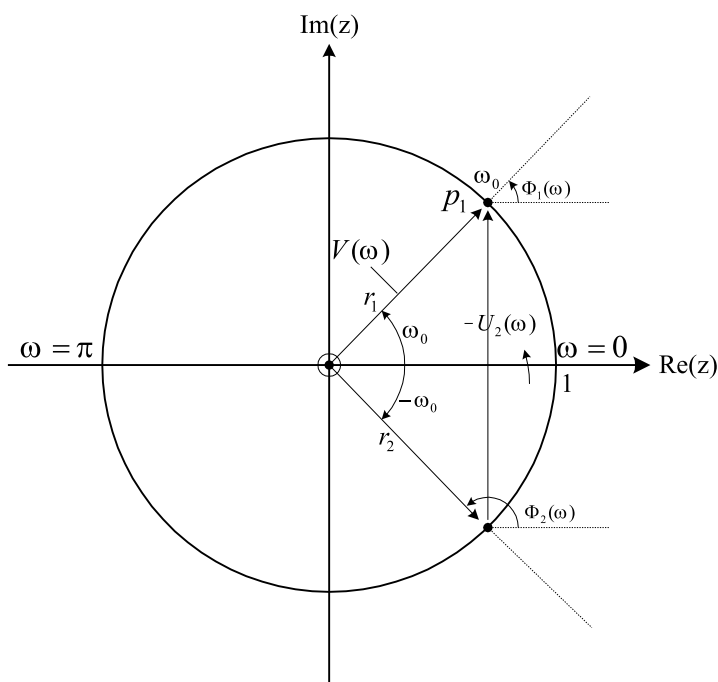
Do istega rezultata pridemo če uporabimo enačbo (9.79):

$$H_{hp}(\omega) = H_{lp}(\omega - \pi) = \frac{1 - ae^{j(\omega-\pi)}}{e^{j(\omega-\pi)} - a} = \frac{1 - ae^{j\omega}e^{-j\pi}}{e^{j\omega}e^{-j\pi} - a} = \frac{1 + ae^{j\omega}}{-e^{j\omega} - a} = -\frac{1 + ae^{j\omega}}{e^{j\omega} + a}. \quad (9.86)$$

9.7 Primeri nekaterih tipičnih sit

9.7.1 Digitalni resonator

To sito je tipično ozkopasovno sito s konjugirano kompleksnima poloma, katerih radij je nekoliko manjši od radija enotinega kroga (slika 9.7).



Slika 9.7: Razpored polov in ničel digitalnega resonatorja.

Največji odziv doseže resonator pri $\omega = \omega_0$, torej pri paru polov določenim s

$$p_{1,2} = r \cdot e^{\pm j\omega_0} \quad 0 < r < 1 \quad (9.87)$$

Običajno je ničla locirana v izhodišču ravnine Z ali pa pri $z = -1$.

Prenosna funkcija resonatorja je določena z izrazom:

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0}z^{-1})} = \frac{b_0}{1 - (2r\cos\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}. \quad (9.88)$$

Ker opazujemo frekvenčni potek $H(\omega)$ po enotinem krogu, dobimo ojačenje b_0 iz predpostavke, da je $|H(\omega_0)| = 1$.

Tako dobimo

$$H(\omega_0) = \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0}e^{-j\omega_0})(1 - re^{-j\omega_0}e^{-j\omega_0})} = \frac{b_0}{(1 - r)(1 - re^{-j2\omega_0})}. \quad (9.89)$$

Ker je

$$|H(\omega)| = 1 = \frac{b_0}{(1 - r)\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos 2\omega_0}}. \quad (9.90)$$

Od tu izračunamo

$$b_0 = (1 - r)\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos 2\omega_0}. \quad (9.91)$$

S slike 9.7 vidimo, da je

$$|H(\omega_0)| = \frac{b_0}{|U_1(\omega)| \cdot |U_2(\omega)|} \quad (9.92)$$

kjer sta $U_1(\omega)$ in $U_2(\omega)$ vektorja, ki kažeta iz polov p_1 in p_2 v točko na enotinem krogu ω_0 .

Potek faze določa izraz

$$\theta(\omega) = 2\omega - \phi_1(\omega) - \phi_2(\omega) \quad (9.93)$$

kjer sta $\phi_1(\omega)$ in $\phi_2(\omega)$ kota, ki ju objemata pola z absciso. Največji odziv $|H(\omega)|$ dobimo, ko je v (9.92) produkt $U_1(\omega) \cdot U_2(\omega)$ minimalen. Produkt pa je minimalen pri resonančni frekvenci $\omega_r = \omega_0$

$$\omega_r = \arccos\left(\frac{1 + r^2}{2r} \cos(\omega_0)\right). \quad (9.94)$$

Čim bližje je r_1 krogu enote, tem ostrejši je odziv (strmejši so boki frekvenčnega odziva resonatorja na sliki 9.8).

9.7.2 Sito z zarezo

Sito z zarezo ima ravno nasprotno lastnosti, kot smo jih videli pri resonančnem situ. Tako sito z zarezo enako poudarja vse signale, razen signal ω_0 , ki ga želimo izsejati iz vhodnega signala. Signal lahko izsejemo tako, da signal s frekvenco ω_0 zadušimo s prisotnostjo ničel na enotinem krogu pri $\omega = \omega_0$. Tako je konjugirano kompleksni par ničel: $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$ in frekvenčni odziv sita z zarezo je:

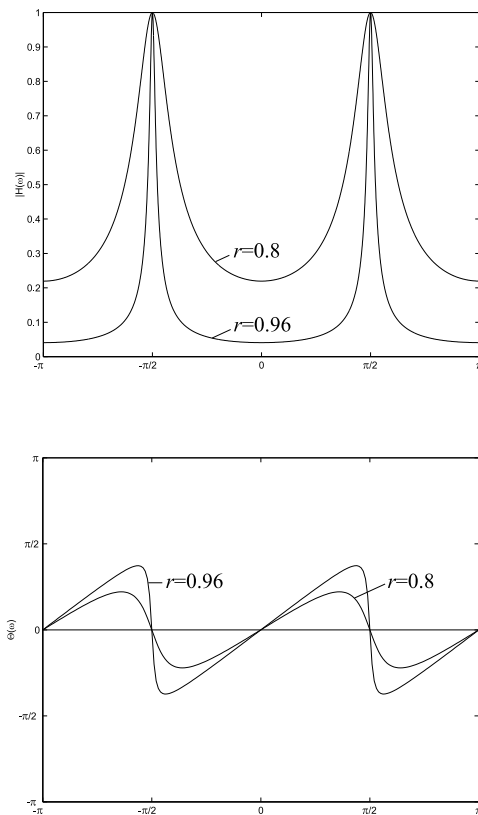
$$H(z)|_{r=1} = b_0(1 - e^{j\omega_0}z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}) = b_0(1 - 2\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}) \quad (9.95)$$

Če želimo iz signala odpraviti frekvenčno komponento $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ postavimo ničlo na enotin krog pri $\omega = \omega_0$.

Kot lahko sami opazimo je pasovna širina tega sita prevelika, saj z njim dušimo frekvence, ki jih hočemo ohraniti.

Če želimo zožiti pasovno širino, moramo povečati red FIR sita, ali pa vpeljemo poleg ničel še kompleksno konjugiran par polov:

$$p_{1,2} = r \cdot e^{\pm j\omega_0}. \quad (9.96)$$



Slika 9.8: Potek frekvenčnega in faznega odziva resonatorja za različne r : $r_1 = 0.8$ in $r_2 = 0.96$.

S tem ko smo vpeljali pol v bližino ničle, se je povečala strmina sita okoli zareze ω_0 . V tem primeru je prenosna funkcija tako dopolnjenega sita z zarezo:

$$H(z) = \frac{1 - 2\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 \cdot z^{-1} + r^2 z^{-2}}. \quad (9.97)$$

V našem primeru, ko želimo izsejati frekvenco $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ je potek frekvenčnega in amplitudnega spektra razviden s slike 9.10 in sicer za $r = 0.95$.

9.7.3 Vsespasovno sito

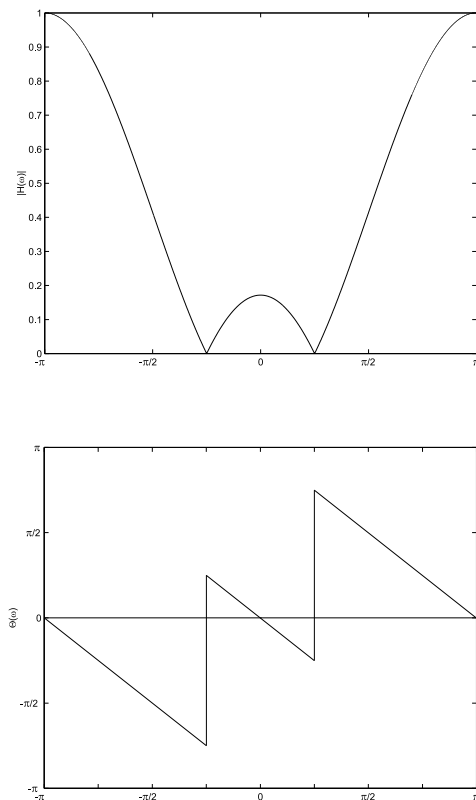
Lastnost vsespasovnega sita je v konstantnem amplitudnem odzivu na celotnem frekvenčnem področju $0 \leq \omega \leq \pi$.

$$|H(\omega)| = 1 \quad \text{za vse } 0 \leq \omega \leq \pi \quad (9.98)$$

Najenostavnejše vsespasovno sito je zakasnilni člen s prenosno funkcijo

$$H(z) = z^{-k} \quad (9.99)$$

Ta sistem prepušča vse signale, le da jih zakasni. Zanimivejše pa je vsespasovno sito s



Slika 9.9: frekvenčni in fazni odziv sita z zarezo pri $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ ($f = \frac{1}{8}$).

prenosno funkcijo:

$$H(z) = \frac{a_N + a_{N-1} \cdot z^{-1} + a_{N-2} \cdot z^{-2} + \dots + a_1 \cdot z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_N \cdot z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-k}} \quad \text{pri } a_0 = 1 \quad (9.100)$$

Vsi koeficienti $\{a_k\}$ so realni. Kot je razvidno iz enačbe (9.100) je imenovalac izraza kar transformacija Z niza $\{a_k\}$:

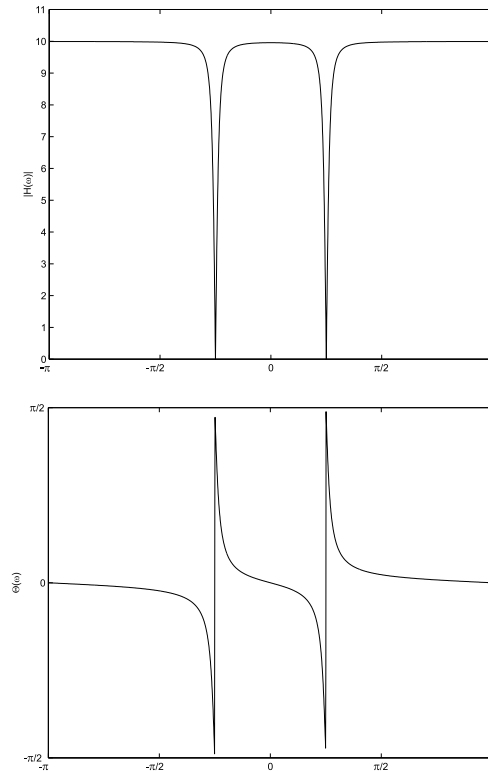
$$A(z) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-k} \quad a_0 = 1 \quad (9.101)$$

števec pa lahko zapišemo kot $z^{-N} \cdot A(z^{-1})$. Tako je izraz (9.101) podan kot:

$$H(z) = \frac{z^{-N} A(z^{-1})}{A(z)} \quad (9.102)$$

Ker je $|H(\omega)|^2 = H(z) \cdot H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} = 1$ predstavlja izraz (9.102) dejansko vsepasovno sito. Vidimo, da če je pol v točki a_k , potem je ničla pri $\frac{1}{a_k}$. Razporeditev polov in ničel za sistem vsepasovnega sita prvega, drugega in osnovnega reda je prikazana na sliki 9.11.

Potek frekvenčnega in faznega odziva je razviden s slik 9.12



Slika 9.10: Potek amplitudnega in faznega spektra sita z zarezo z dvema ničloma in dvema poloma pri $r = 0.95$.

Primer:

Za naslednja sita, podana s prenosnimi funkcijami ugotovite za katere vrste sita gre.

1. primer:

$$H(z) = \frac{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.9\sqrt{2}z^{-1} + 0.81z^{-2}} \quad (9.103)$$

$$H(z) = \frac{z^2 - \sqrt{2}z + 1}{z^2 - 0.9\sqrt{2}z + 0.81} \quad (9.104)$$

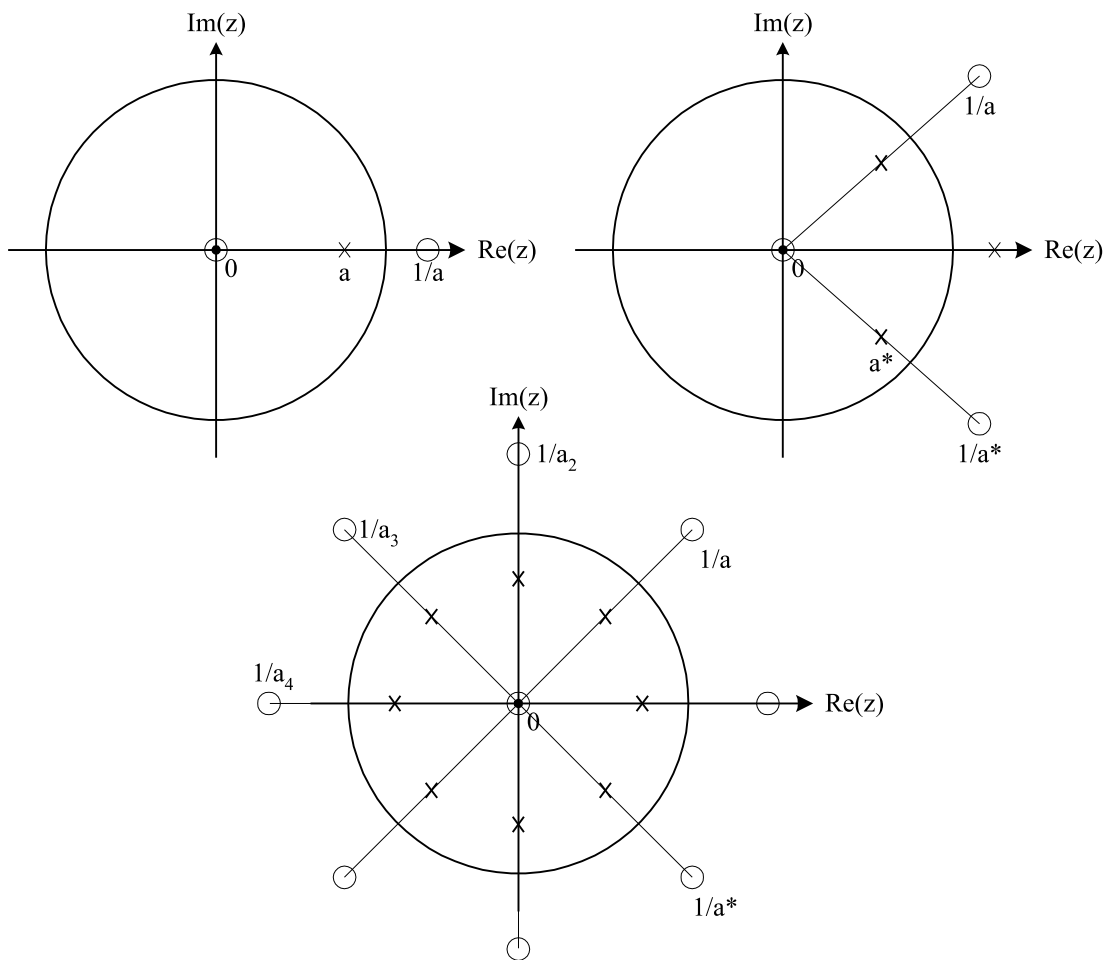
Ničle sita so pri:

$$z_{n_{1,2}} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (9.105)$$

$$|z_{n_1}| = |z_{n_2}| = 1 \quad (9.106)$$

poli pa pri:

$$z_{p_{1,2}} = \frac{0.9\sqrt{2} \pm \sqrt{0.9^2 \cdot 2 - 4 \cdot 0.81}}{2} = 0.9\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j0.9\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (9.107)$$



Slika 9.11: Razporeditev polov in ničel treh vsepasovnih sit

Iz lege polov in ničel vidimo, da gre za sito z zarezo (notch filter).

2. primer:

$$H(z) = \frac{1 - 2a^{-1}z^{-1} + 2a^{-2}z^{-2}}{1 - 2az^{-1} + 2a^2z^{-2}}, \quad 0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (9.108)$$

$$H(z) = \frac{z^2 - 2a^{-1}z + 2a^{-2}}{z^2 - 2az + 2a^2} \quad (9.109)$$

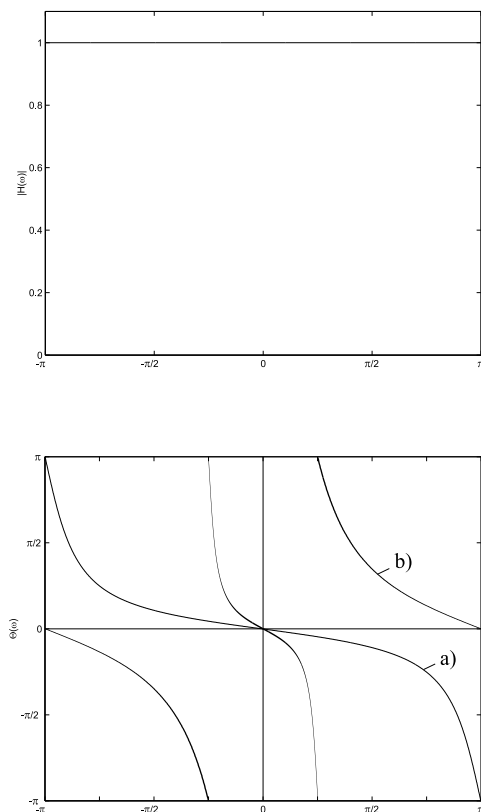
Ničle sita so pri:

$$z_{n_{1,2}} = \frac{2a^{-1} \pm \sqrt{4a^{-2} - 8a^{-2}}}{2} = a^{-1} \pm ja^{-1} \quad (9.110)$$

poli pa pri:

$$z_{p_{1,2}} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 8a^2}}{2} = a \pm ja \quad (9.111)$$

Iz lege polov in ničel in pogoja $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ vidimo, da gre za vsepasovno sito.



Slika 9.12: Frekvenčni in fazni odziv dveh vsepasovnih sit: a.) z enim parom ničle in pola, b.) z dvema paroma ničle in pola.

3. primer:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.8\sqrt{3}z^{-1} + 0.64z^{-2}} \quad (9.112)$$

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{z^2 - 0.8\sqrt{3}z + 0.64} \quad (9.113)$$

Poli sita so pri:

$$z_{p1,2} = \frac{0.8\sqrt{3} \pm \sqrt{0.8^2 \cdot 3 - 4 \cdot 0.64}}{2} = 0.8 \frac{\sqrt{3}}{2} \pm j0.8 \frac{1}{2} \quad (9.114)$$

Vidimo da gre za digitalni resonator z $\omega_0 = 30^\circ$.

Poglavje 10

Načrtovanje digitalnih sit

10.1 Uvod v načrtovanje digitalnih sit

Čeprav so bila digitalna sita sprva zgolj matematični nadomestek namenjen simulaciji obnašanja analognih sit na prvih splošnonamenskih računalnikih, pa se je njihova uporaba s povečevanjem zmogljivosti analogno-digitalnih pretvornikov in predvsem pojavom digitalnih signalnih procesorjev izjemno hitro razširila na praktično vsa področja elektrotehnike. K temu so v veliki meri pripomogli

- možnost relativno enostavnega spreminjanja osnovnih lastnosti digitalnih sit ne da bi bili pri tem potrebni kakršnikoli posegi v njihovo zgradbo,
- relativno velika zanesljivost delovanja in neobčutljivost digitalnih sit na vplive okolice, natančnost izdelave in staranja osnovnih gradnikov in
- enostavnejša in predvsem cenejša velikoserijska proizvodnja digitalnih sit, ki jih ni potrebno uglaševati.

Navkljub izredno hitremu razvoju digitalnih signalnih procesorjev in vse večji izrabi prednosti, ki jih uporaba VLSI tehnologije pri gradnji digitalnih sit ponuja, pa le-ta predvsem zaradi omejene hitrosti izvajanja še vedno niso primerna za uporabo v področju radijskih frekvenc, kjer še vedno prevladujejo analogna sita.

10.1.1 Sita s končnim in neskončnim impulznim odzivom

Glede na obliko sistemske funkcije $H(z)$ digitalnega sita, ki jo navadno zapišemo v obliki

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}, \quad (10.1)$$

lahko le-ta razdelimo v dve skupini; v prvo skupino uvrščamo sita s končnim impulznim odzivom $h(n)$, za katere velja $a_i = 0$; $i = 1, 2, \dots, N$, tako da lahko sistemsko funkcijo $H(z)$ zapišemo kot polinom, in sita z neskončnim impulznim odzivom $h(n)$, katerih sistemska funkcija $H(z)$ je v vsakem primeru racionalna funkcija. Čeprav so v splošnem kavzalna sita z neskončnim impulznim odzivom pri realizaciji glede pomnilniškega prostora manj zahtevna in imajo navadno ožji prehodni pas kot sita s končnim impulznim odzivom, pa v zameno ne ponujajo možnosti realizacije sit z linearno fazno karakteristiko in so pri realizaciji na signalnih procesorjih s stalno vejico zaradi rekurzivnosti pogosto nagnjena tako k nestabilnosti kot tudi velikim kvantizacijskim pogreškom.

10.1.2 Aproksimacijski in realizacijski problem

Načrtovanje digitalnih sit lahko v grobem razdelimo na dva dela. Prvi del, ki si ga bomo v nadaljevanju podrobneje ogledali, in ga pogosto označujemo kot aproksimacijski problem, zajema izbiro parametrov ali koeficientov sistemske funkcije $H(z)$ digitalnega sita, ki bodo kar najbolj aproksimirali željeno sistemsko funkcijo $H_d(z)$, ki je navadno definirana v frekvenčnem prostoru kot $H_d(\omega)$. Drugi del, ki ga navadno označujemo kot realizacijski problem, pa obsega izbiro strukture, ki bo sistemsko funkcijo $H(z)$ digitalnega sita realizirala.

Aproksimacijski problem lahko v najbolj splošni obliki definiramo kot iskanje kompleksnega polinoma (za sita s končnim impulznim odzivom) ali racionalne funkcije (za sita z neskončnim impulznim odzivom) $H(z)$, ki se bo kar najbolj približala željeni sistemski funkciji $H_d(z)$. Če kot merilo za odstopanje na ta način dobljene sistemske funkcije $H(z)$ od sistemske funkcije $H_d(z)$ definiramo kar normo razlike obeh sistemskih funkcij

$$\|E(z)\| = \|H_d(z) - H(z)\|, \quad (10.2)$$

potem iskanje koeficientov a_i in b_i prevedemo na izrazito nelinearen problem, ki vse do danes ni bil zadovoljivo rešen. V praksi zato običajno aproksimacijski problem definiramo kot iskanje realne amplitudne karakteristike $|H(\omega)|$, ki kar najbolj aproksimira željeno amplitudno karakteristiko $|H_d(\omega)|$ pri minimalni in karseda linearni fazni karakteristiki $\Theta(\omega)$. Če sta pri tem najbolj kritična valovitost v prepustnem ali zapornem pasu δ_1 ali δ_2 , potem navadno pri reševanju aproksimacijskega problema, definiranega z enačbo (10.2), uporabljamo Čebiševa normo, v nasprotnem primeru pa aproksimacijski problem rešujemo po metodi najmanjših kvadratov z uporabo Evklidske norme.

10.2 Sita s končnim impulznim odzivom

Sita s končnim impulznim odzivom so v praksi predvsem zaradi možnosti doseganja popolnoma linearne fazne karakteristike $\Theta(\omega)$ in posledično konstantne skupinske zakasnitve τ_g izjemno pomembna. Zaradi načina uporabe takih sit, ki ne vsebujejo povratnih povezav, jih pogosto imenujemo tudi nerekurzivna ali konvolucijska sita. Ker je trajanje impulznega odziva takih sit po definiciji končno, lahko njihov odziv $y(n)$ na vzbujanje $x(n)$ zapišemo kot

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n-m), \quad (10.3)$$

njihova sistemska funkcija $H(z)$ pa je enaka

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}. \quad (10.4)$$

Čeprav ima sistemska funkcija $H(z)$ pol, reda $N-1$, v koordinatnem izhodišču kompleksne ravnine Z , le-ta na frekvenčno karakteristiko $H(\omega)$ nima vpliva, tako da sita s končnim impulznim odzivom v nobenem primeru ne morejo postati nestabilna.

10.2.1 Sita s končnim impulznim odzivom in linearno fazno karakteristiko

Izhajajoč iz relacije med frekvenčnim spektrom $H(\omega)$ in impulznim odzivom $h(n)$ sita

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \quad (10.5)$$

za impulzni odziv $h(n)$ sita s končnim impulznim odzivom in linearno fazno karakteristiko sledi

$$h(n) = \pm h(N-1-n); \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (10.6)$$

Glede na lihost ali sodost impulznega odziva $h(n)$ in red sita N , lahko torej sita s končnim impulznim odzivom in linearno fazno karakteristiko, katerih frekvenčno karakteristiko $H(\omega)$ zgolj zaradi zahteve po zveznosti fazne karakteristike $\Theta(\omega) \in (-\infty, \infty)$ navadno zapisujemo s pomočjo predznačene amplitudne karakteristike $A(\omega) \in (-\infty, \infty)$, razdelimo na štiri tipe:

- tip I, v katerega spadajo sita lihega reda N , katerih impulzni odziv $h(n)$ je sodo simetričen glede na točko $n = (N-1)/2$. Predznačeno amplitudno in fazno karakteristiko $H(\omega)$ in $\Theta(\omega)$ takih sit lahko zapišemo kot

$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] \quad (10.7)$$

$$\Theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega. \quad (10.8)$$

Dobljena predznačena amplitudna karakteristika $H(\omega)$ je periodična funkcija s periodo 2π , prav tako pa je zanjo značilna sodo simetričnost glede na točko $\omega = 0$ in točko $\omega = \pi$.

- tip II, v katerega uvrščamo sita sodega reda N , katerih impulzni odziv je sodo simetričen glede na točko $(N-1)/2$, ki pa v tem primeru ni celo število. Za predznačeno amplitudno karakteristiko $H(\omega)$ takih sit velja

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \cos \left[\omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right], \quad (10.9)$$

fazna karakteristika $\Theta(\omega)$ pa je enaka kot pri sitih tipa I. Čeprav je dobljena predznačena amplitudna karakteristika $H(\omega)$ podobno kot pri sitih tipa I periodična in sodo simetrična glede na točko $\omega = 0$, pa je njena perioda enaka 4π , simetričnost glede na točko $\omega = \pi$ pa je liha.

- tip III, v katerega spadajo sita lihega reda N , katerih impulzni odziv $h(n)$ je liho simetričen glede na točko $n = (N-1)/2$. Predznačeno amplitudno in fazno karakteristiko $H(\omega)$ in $\Theta(\omega)$ takih sit lahko zapišemo kot

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \sin \left[\omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right], \quad (10.10)$$

$$\Theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}. \quad (10.11)$$

Dobljena predznačena amplitudna karakteristika $H(\omega)$ je periodična funkcija s periodo 2π , prav tako pa je zanjo značilna liha simetričnost glede na točko $\omega = 0$ in točko $\omega = \pi$.

- tip IV, v katerega uvrščamo sita sodega reda N , katerih impulzni odziv $h(n)$ je liho simetričen glede na točko $(N-1)/2$, ki podobno kot pri sitih tipa II ni celo število, tako da impulzni odziv $h(n)$ v njej sami ni definiran. Za predznačeno amplitudno karakteristiko $H(\omega)$ takih sit velja

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \sin \left[\omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right], \quad (10.12)$$

fazna karakteristika $\Theta(\omega)$ pa je enaka kot pri sitih tipa III. Dobljena predznačena amplitudna karakteristika $H(\omega)$ je podobno kot pri sitih tipa II periodična s periodo 2π in liho simetrična glede na točko $\omega = 0$ ter sodo simetrična glede na točko $\omega = \pi$.

Specifične lastnosti posameznih tipov sit s kočnim impulznim odzivom in linearno fazno karakteristiko v veliki meri določajo tudi njihovo praktično uporabnost. Sita tipa III in IV, za katera zaradi lihe simetričnosti glede na točko $\omega = 0$ velja $H(0) = 0$, so neprimerna za uporabo nizkih sit, podobno kot so sita tipa II in III, za katera zaradi lihe simetričnosti glede na točko $\omega = \pi$ velja $H(\pi) = 0$, neprimerna za uporabo visokih sit.

Metoda s Fourierovim transformom

Pri načrtovanju sit s končnim impulznim odzivom in linearno fazno karakteristiko s Fourierovim transformom izhajamo iz povezave med časovno diskretnim impulznim odzivom sita $h'(n)$ in njegovo frekvenčno karakteristiko $H'(\omega)$, med katerima veljata relaciji

$$H'(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h'(n)e^{-j\omega n}, \quad (10.13)$$

$$h'(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H'(\omega)e^{j\omega n} d\omega. \quad (10.14)$$

Impulzni odziv $h'(n)$ torej ob podanih načrtovalskih zahtevah sita zlahka izračunamo iz enačbe (10.14). Težave pri uporabi Fourierove transformacije za načrtovanje sit s končnim impulznim odzivom pa se navadno začnejo prav pri slednjem, saj na ta način izračunani impulzni odzivi $h'(n)$ navadno ni končen. Da bi se omenjenemu problemu izognili, dobljeni impulzni odziv $h'(n)$ smiselno omejimo z množenjem z ustrezno okensko funkcijo $w(n)$, tako da je impulzni odziv dobljenega sita $h(n)$ enak

$$h(n) = h'(n) \cdot w(n). \quad (10.15)$$

Vse težave pa s tem še zdaleč niso odpravljene. Ker se množenje impulznega odziva $h'(n)$ z okensko funkcijo $w(n)$ v časovnem prostoru odraža kot konvolucija frekvenčne karakteristike sita $H'(\omega)$ in okenske funkcije $W(\omega)$ v frekvenčnem prostoru, za katero velja

$$H(\omega) = H'(\omega) * W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H'(\nu)W(\omega - \nu)d\nu, \quad (10.16)$$

je pri izboru okenske funkcije $w(n)$ potrebno biti posebej pazljiv predvsem na širino osnovnega snopa in hitrost upadanja stranskih snopov v frekvenčni karakteristiki okenske funkcije $W(\omega)$. Uporaba pravokotne okenske funkcije je tako najpogostejša pri načrtovanju sit s končnim impulznim odzivom, pri katerih je zahtevan relativno ozek osnovni snop. Po drugi strani pa je uporaba Hanningove, Hammingove in Blackmannove okenske funkcije nujna pri načrtovanju sit, kjer sta hitrost upadanja stranskih snopov in valovitost v prepustnem in zapornem pasu veliko bolj kritični kot širina osnovnega pasu.

Okenska funkcija	Teme največjega stranskega snopa [dB]	Širina osnovnega snopa
Pravokotna	-13	$4\pi/N$
Trikotna	-27	$8\pi/N$
Hannova	-32	$8\pi/N$
Hammingova	-43	$8\pi/N$
Blackmanova	-57	$12\pi/N$

Metoda frekvenčnega vzorčenja

V nasprotju s pravkar opisano metodo načrtovanja sit s končnim impulznim odzivom, pri kateri impulzni odziv sita $h(n)$ izračunamo iz želene zvezne frekvenčne karakteristike $H_d(\omega)$ z uporabo Fourierovega transformata in ustreznih okenskih funkcij, pa pri metodi frekvenčnega vzorčenja izhajamo iz enakomerno vzorčene frekvenčne karakteristike $H_d(\omega_k)$.

Čeprav bi impulzni odziv sita $h(n)$ iz N vzorcev želene predznačene amplitudne karakteristike $H_d(\omega_k)$ lahko za posamezne vrste sit izračunali neposredno iz enačb (10.7), (10.9), (10.10) in (10.12) z reševanjem sistema N linearnih enačb, pa le-tega v praksi mnogo pogosteje računamo z uporabo diskretnega Fourierovega transformata, za katerega velja

$$H(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega_k n}, \quad (10.17)$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(\omega_k) e^{j\omega_k n}. \quad (10.18)$$

Če bi namreč v prvem primeru potrebovali reda N^3 aritmetičnih operacij za rešitev linearnega sistema reda N , potem bi pri uporabi diskretnega Fourierovega transformata, uporabljenega v obliki FFT algoritma, potrebovali za izračun impulznega odziva $h(n)$ le še reda $N \log N$ aritmetičnih operacij.

Za impulzni odziv sita $h(n)$ tipa I in II, katerih predznačeni amplitudni karakteristiki $H(\omega)$ sta sodo oziroma liho simetrični glede na točko $\omega = \pi$, potemtakem ob upoštevanju enačb (10.7 - 10.9) in (10.18) dobimo izraza

$$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ H_d(\omega_0) + \sum_{k=1}^{(N-3)/2} 2H_d(\omega_k) \cos \left[\omega_k \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right] \right\}, \quad (10.19)$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ H_d(\omega_0) + \sum_{k=1}^{N/2-1} 2H_d(\omega_k) \cos \left[\omega_k \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right] \right\}, \quad (10.20)$$

kjer za krožno frekvenco vzorcev ω_k velja

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (10.21)$$

Na podoben način bi za sita tipa III in IV, katerih predznačena amplitudna karakteristika $H(\omega)$ je liho oziroma sodo simetrična glede na točko $\omega = \pi$, dobili izraza

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{(N-3)/2} 2H_d(\omega_k) \sin \left[\omega_k \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right], \quad (10.22)$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ H_d(\omega_{N/2}) \sin \left[\pi \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right] + \sum_{k=1}^{N/2-1} 2H_d(\omega_k) \sin \left[\omega_k \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right] \right\}. \quad (10.23)$$

Navkljub enostavnosti izračuna impulznega odziva $h(n)$ z metodo frekvenčnega vzorčenja, pri kateri želimo predznačeno amplitudno karakteristiko $H_d(\omega)$ najprej vzorčimo, iz dobljenih N vzorcev pa ob upoštevanju zahteve po linearnosti fazne karakteristike $\Theta(\omega)$, rekonstruiramo časovno zvezno frekvenčno karakteristiko sita $H(\omega)$ reda N , omenjena metoda v praksi ni pretirano uporabna, saj med samim načrtovanjem ne ponuja možnosti spremljanja frekvenčne karakteristike $H(\omega)$ izven vzorčenih točk. Po vsem povedanem je torej popolnoma jasno, da je metoda frekvenčnega vzorčenja rešitev interpolacijskega in ne aproksimacijskega problema pri iskanju frekvenčne karakteristike $H(\omega)$, ki bi kar najbolje aproksimirala želeno frekvenčno karakteristiko $H_d(\omega)$.

Postopek načrtovanja sita z uporabo metode najmanjših kvadratov

Opisani problem je seveda možno na izjemno eleganten način rešiti s povečanjem števila vzorcev L zelene predznačene amplitudne karakteristike $H_d(\omega_k)$ in definiranjem kriterija za oceno odstopanja izračunane frekvenčne karakteristike $H(\omega)$ od zelene frekvenčne karakteristike $H_d(\omega)$. Če za oceno omenjenega odstopanja frekvenčnih karakteristik uporabimo kar v praksi najpogostejšo Evklidsko normo, lahko aproksimacijski problem definiramo kot iskanje najmanjše vrednosti funkcije

$$E = \sum_{k=0}^{L-1} |H(\omega_k) - H_d(\omega_k)|^2, \quad (10.24)$$

kjer za krožno frekvenco vzorcev ω_k velja

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{L}; \quad k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (10.25)$$

Oglejmo si torej na primeru sita z linearno fazno karakteristiko tipa I iskanje impulznega odziva $h(n)$, katerega frekvenčna karakteristika $H(\omega)$ minimizira vrednost funkcije (10.24). Enačbo (10.7), ki povezujejo predznačeno amplitudno karakteristiko $H(\omega)$ takega sita z njegovim impulznim odzivom $h(n)$, lahko v matrični obliki zapišemo kot

$$\mathbf{ah} = F, \quad (10.26)$$

kjer vsebuje vektor \mathbf{h} $(N + 1)/2$ neodvisnih koeficientov impulznega odziva $h(n)$, vektor \mathbf{a} L vzorčenih vrednosti predznačene amplitudne karakteristike $H(\omega_k)$, matrika F dimenzij $L \times (N + 1)/2$ pa vrednosti trigonometričnih faktorjev iz enačbe (10.7). Če v enačbi (10.24) smiselno zamenjamo frekvenčni karakteristiki $H(\omega)$ in $H_d(\omega)$ z vektorjema predznačenih amplitudnih karakteristik \mathbf{a} in \mathbf{a}_d , lahko enačbo (10.26) zapišemo kot

$$F\mathbf{h} - \mathbf{a}_d = \mathbf{e}, \quad (10.27)$$

kjer za vektor odstopanja frekvenčnih karakteristik \mathbf{e} velja

$$E = \mathbf{e}^T \mathbf{e}. \quad (10.28)$$

Izkaže se, da bo odstopanje frekvenčnih karakteristik E najmanjše, kadar bo vektor \mathbf{e} pravokoten na stolpce matrike F , tako da bo takrat $F^T \mathbf{e} = 0$. Če obe strani enačbe (10.27) pomnožimo z leve strani z F^T , za vektor impulznega odziva \mathbf{h} ob upoštevanju pravkar navedene relacije med vektorjem odstopanja frekvenčnih karakteristik \mathbf{e} in matrike F dobimo

$$\mathbf{h} = [F^T F]^{-1} F^T \mathbf{a}_d. \quad (10.29)$$

Dobljeni vektor impulznega odziva \mathbf{h} , katerega koeficienti zaradi simetričnosti tvorijo ravno polovico impulznega odziva $h(n)$, torej aproksimira želeni impulzni odziv $h_d(n)$ sita z željeno frekvenčno karakteristiko $H_d(\omega)$ v smislu minimizacije razlike moči signalov obeh sit pri vzorčenih frekvencah.

Čeprav je bil postopek iskanja impulznega odziva $h(n)$ prikazan na situ z linearno fazno karakteristiko, pri katerem je matrika F povsem realna, pa se le-ta v praksi uporablja tudi za izračun impulznega odziva $h(n)$ sit s končnim impulznim odzivom, katerih fazna karakteristika ni linearna, matrika F pa je posledično kompleksna.

10.3 Sita z neskončnim impulznim odzivom

Sita z neskončnim impulznim odzivom zaradi svoje rekurzivne zgradbe pri enakih načrtovalskih zahtevah pogosto nudijo možnost bistveno cenejše in enostavnejše realizacije v primerjavi s siti s končnim impulznim odzivom. Ker je trajanje impulznega odziva takega sita po definiciji neskončno, lahko njihov odziv $y(n)$ na vzbujanje $x(n)$ zapišemo kot

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) x(n - m), \quad (10.30)$$

njihova sistemska funkcija $H(z)$ pa je enaka

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (10.31)$$

Ker je območje konvergence sistemske funkcije $H(z)$ v kompleksni ravnini z omejeno na zunanost kroga, ki ima središče v koordinatnem izhodišču in vsebuje od izhodišča najbolj oddaljeni pol sistemske funkcije $H(z)$, moramo biti pri določanju koeficientov a_k in b_k posebno pazljivi, saj lahko v nasprotnem primeru pri praktični realizaciji takih sit, ko moramo upoštevati tudi končno natančnost digitalnih signalnih procesorjev, s katerimi tovrstna sita navadno realiziramo, le-ta kaj kmalu postanejo nestabilna.

10.3.1 Posredno načrtovanje

Čeprav sita z neskončnim impulznim odzivom načrtujemo na zelo podoben način kot sita s končnim impulznim odzivom, tako da najprej določimo želeni odziv sita, navadno v frekvenčnem prostoru, nato izberemo tip sita njegov in red N ter ob določenem kriteriju za ocenjevanje odstopanja tako izračunanega odziva od želenega odziva optimiramo njegove parametre, pa pri njihovem načrtovanju zelo pogosto izhajamo iz analognih sit, ki jih z ustreznimi transformacijami preslikamo v digitalna sita.

V nadaljevanju si bomo torej najprej ogledali temeljne lastnosti različnih tipov analognih sit in se pri tem omejili zgolj na nizka sita, saj lahko le-ta z ustreznimi frekvenčnimi transformacijami predelamo v visoka ali pasovna sita želenih karakteristik.

Časovno zvezna prototipna sita

Butterworthova sita Amplitudno karakteristiko $|H(\Omega)|$ Butterworthovih nizkih sit reda N , ki jih odlikuje predvsem konstantno ojačenje v celotnem prepustnem pasu brez kakršnekoli valovitosti, značilne za Čebiševa in eliptična sita, lahko zapišemo kot

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}}}, \quad (10.32)$$

kjer je Ω_p mejna frekvenca prepustnega pasu, ε pa korekcijski faktor ojačenja prepustnega pasu, ki ga z valovitostjo v prepustnem pasu δ_1 povezuje enačba

$$1 - \delta_1 = |H(\Omega_p)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}. \quad (10.33)$$

Če kot mejno frekvenco prepustnega pasu Ω_p definiramo kar mejno frekveno Ω_c , pri kateri velja $|H(\Omega_c)| = -3dB$, dobimo v skladu z enačbo (10.33) za korekcijski faktor vrednost $\varepsilon = 1$, tako da se enačba (10.32) poenostavi v

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}}. \quad (10.34)$$

Sistemska funkcija $H(s)$ Butterworthovega sita, ki jo dobimo ob upoštevanju enakosti med frekvenčno karakteristiko $H(\Omega)$ in sistemsko funkcijo $H(z)$ pri $z = e^{j\Omega}$, nima ničel z_k , poli p_k pa v kompleksni z -ravnini ležijo enakomerno razporejeni po levi polovici kroga z radijem $r = \Omega_c$, tako da zanje velja

$$p_k = re^{j\phi_k}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (10.35)$$

pri

$$\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (10.36)$$

Za enolično karakterizacijo lastnosti sit moramo torej le še izračunati red sita N , tako da bo valovitost v zapornem pasu δ_2 enaka

$$\delta_2 = |H(\Omega_s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2(\Omega_s/\Omega_p)^{2N}}}. \quad (10.37)$$

Red Butterworthovega nizkega sita N s frekvencama prepustnega in zapornega pasu Ω_p in Ω_s ter valovitostima v prepustnem in zapornem pasu δ_1 in δ_2 je torej enak

$$N = \frac{\log(\delta/\varepsilon)}{2 \log(\Omega_s/\Omega_p)}, \quad (10.38)$$

pri

$$\delta = \sqrt{1/\delta_2^2 - 1}. \quad (10.39)$$

Na tem mestu velja opozoriti, da je uporaba izraza za valovitost v prepustnem in zapornem pasu pri Butterworthovih sitih lahko zavajajoča, saj je amplitudna karakteristika $|H(\Omega)|$ le-teh kot smo že večkrat jasno poudarili, izrazito monotona in potemtakem ne izkazuje klasične valovitosti, značilne za Čebiševa in eliptična sita.

Čebiševa sita Precej drugačne lastnosti od pravkar opisanih Butterworthovih sit pa izkazujejo Čebiševa sita. Če je namreč bila amplitudna karakteristika $|H(\Omega)|$ Butterworthovih sit tako v prepustnem kot tudi zapornem pasu monotona, pa temu pri Čebiševih sitih ni tako; medtem ko je za Čebiševa sita tipa I značilna enakomerno valovita amplitudna karakteristika $|H(\Omega)|$ v prepustnem pasu in monotona zunaj njega, je za Čebiševa sita tipa II le-ta monotona v prepustnem pasu in enakomerno valovita zunaj njega.

Amplitudno karakteristiko $|H(\Omega)|$ Čebiševih sit tipa I lahko zapišemo kot

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)}, \quad (10.40)$$

kjer je $T_N(x)$ Čebišev polinom reda N , za katerega velja

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1, \\ \cosh(N \cosh^{-1} x) & |x| > 1. \end{cases} \quad (10.41)$$

Kot lahko zaključimo že iz amplitudne karakteristike $|H(\Omega)|$ Čebiševih sit tipa I, sistemska funkcija $H(s)$ podobno kot pri Butterworthovih sitih nima ničel z_k , za pole p_k pa se izkaže, da v kompleksni s -ravnini ležijo na levi polovici elipse s polosema

$$r_1 = \Omega_p \frac{\beta^2 + 1}{2\beta}, \quad (10.42)$$

$$r_2 = \Omega_p \frac{\beta^2 - 1}{2\beta}, \quad (10.43)$$

kjer je parameter β posredno odvisen od valovitosti δ_1 v prepustnem pasu

$$\beta = \left(\frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1}{\varepsilon} \right)^{1/N}. \quad (10.44)$$

Njihovo lego najenostavneje določimo, če v kompleksni s -ravnini najprej poiščemo pole pripadajočih Butterworthovih nizkih sit, ki leže na krogih z radijema r_1 in r_2 , in le-te nato v smeri realne in imaginarne osi preslikamo na elipso s polosema r_1 in r_2 , tako da dobimo

$$\Re(p_k) = r_2 \cos \phi_k; \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (10.45)$$

$$\Im(p_k) = r_1 \sin \phi_k; \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (10.46)$$

V nasprotju z obema zgoraj opisanima tipoma sit, Butterworthovim in Čebiševim tipa I, katerih sistemska funkcija $H(s)$ ni imela ničel, pri Čebiševih nizkih sitih tipa II temu ni tako. Omenjena sita, katerih amplitudna karakteristika je enaka

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_N^2(\Omega_s/\Omega_p)/T_N^2(\Omega_s/\Omega)]} \quad (10.47)$$

imajo namreč v kompleksni s -ravnini ničle z_k na imaginarni osi

$$z_k = j \frac{\Omega_s}{\sin \phi_k}, \quad (10.48)$$

za pole p_k pa velja

$$\Re(p_k) = \frac{\Omega_s x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}; \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (10.49)$$

$$\mathfrak{S}(p_k) = \frac{\Omega_s y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (10.50)$$

kjer je parameter β neposredno odvisen od valovitosti δ_2 v zapornem pasu

$$\beta = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \delta_2^2}}{\delta_2^2} \right)^{1/N}. \quad (10.51)$$

Če na smiselno enak način kot v enačbi (10.36) izračunamo red Čebiševskega nizkega sita N , ki ustreza načrtovalskim zahtevam po frekvenci prepustnega in zapornega pasu Ω_p in Ω_s ter valovitosti v prepustnem in zapornem pasu δ_1 in δ_2 , dobimo

$$N = \frac{\cosh^{-1}(\delta/\varepsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)}. \quad (10.52)$$

Eliptična sita Če je bilo pri obeh dosedaj obravnavanih vrstah časovno zveznih sit področje, na katerem amplitudna karakteristika $|H(\Omega)|$ ni bila monotona, vselej omejeno na prepustno ali zaporno področje, pa izkazujejo eliptična ali Cauerjeva sita enakomerno valovitost tako v prepustnem kot tudi v zapornem področju. Amplitudna karakteristika $|H(\Omega)|$ takih sit je enaka

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N(\Omega/\Omega_p)}, \quad (10.53)$$

kjer je U_N Jacobijeva eliptična funkcija reda N .

Ker je matematična izražava lege ničel in polov prevajalne funkcije $H(s)$ zaradi same narave eliptičnih funkcij zelo zahtevna in je njihov izračun danes prepuščen računalniškemu orodjem namenjenim načrtovanju sit, si v nadaljevanju pogledimo le red eliptičnega sita N , ki zadošča načrtovalskim zahtevam po krožni frekvenci prepustnega in zapornega pasu Ω_p in Ω_s ter valovitostima v prepustnem in zapornem pasu δ_1 in δ_2 . Za red sita N tako dobimo

$$N = \frac{K(\Omega_p/\Omega_s) K(\sqrt{1 - \varepsilon^2/\delta^2})}{K(\varepsilon/\delta) K(\sqrt{1 - (\Omega_s/\Omega_p)^2})}, \quad (10.54)$$

kjer za popolni eliptični integral prve vrste $K(x)$ velja

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \Phi}}. \quad (10.55)$$

In kakšno analogno sito je po vsem povedanem najuporabnejše? Enostavnega odgovora na to vprašanje ne gre iskati, saj ima vsako od opisanih sit svoje dobre in slabe lastnosti. Če je namreč pri načrtovanju sita zahteva po zvezni in karseda linearni fazni karakteristiki postavljena na prvo mesto, so navadno najboljša izbira Butterworthova sita. Po drugi strani pa zahtevo po kar največjem dušenju v zapornem pasu najbolje izpolnjujejo eliptična sita, katerih fazna karakteristika je zaradi kompleksnih ničel sistemske funkcije $H(s)$ izrazito nezvezna in

nelinearna. Dober kompromis med zveznostjo in linearnostjo fazne karakteristike in dušenjem v zapornem pasu ponujajo Čebiševa sita, med katerimi so glede zveznosti in linearnosti fazne karakteristike v prepustnem pasu posebno primerna Čebiševa sita tipa II. Da pa bi se prednosti, ki jih ponujajo posamezni tipi sit v praksi lahko kar najbolj izrabile, se pogosto različne vrste sit združujejo. Posebno pripravna se v tem smislu izkaže kombinacija eliptičnih sit, za katere je značilen relativno ozek prehodni pas in posledično relativno velika selektivnost, in sit za kompenzacijo fazne karakteristike eliptičnih sit.

Impulzna invariantna transformacija

Najenostavnejša pot za transformacijo systemske funkcije analognega sita $H(s)$, dobljene na podlagi podanih načrtovalskih zahtev sita, v systemsko funkcijo digitalnega sita $H(z)$ vodi preko impulznega odziva sita. Če torej s pomočjo inverzne Laplaceove transformacije poiščemo impulzni odziv analognega sita $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, lahko systemsko funkcijo digitalnega sita $H(z)$ izračunamo iz vzorčenega impulznega odziva $h(n)$, tako da velja

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}. \quad (10.56)$$

Ker pa je systemska funkcija analognega sita $H(s)$ vedno racionalna funkcija, ki jo lahko zapišemo kot

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - p_k}. \quad (10.57)$$

za impulzni odziv takega sita $h(t)$ velja

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k t} \cdot u(t). \quad (10.58)$$

Systemska funkcija ustreznega digitalnega sita $H(z)$ je potemtakem enaka

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\} = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k T_s} z^{-1}}. \quad (10.59)$$

Da pa bi bila ob upoštevanju teorema o vzorčenju frekvenčna spektra prototipnega analognega in digitalnega sita znotraj Nyquistovega pasu enaka, je dobljeno systemsko funkcijo $H(z)$ potrebno dopolniti v skladu z enačbo (10.59), tako da se le-ta za systemsko funkcijo (10.57) s poli p_k glasi

$$H(z) = T_s \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k T_s} z^{-1}}. \quad (10.60)$$

Uporaba impulzne invariantne transformacije za načrtovanje digitalnih sit je zaradi prekrivanja frekvenčnega spektra kot posledice vzorčenja smiselna predvsem za nizka sita katerih slabljenje v zapornem področju relativno hitro ali vsaj monotono upada (Butterworthova in Čebiševa sita tipa I).

Bilinearna transformacija

Da pa izjemno obširna znanja o načrtovanju analognih sit pri razvoju digitalnih sit ne bi ostala neizkoriščena in bi bilo iz prototipnih analognih sit mogoče razviti tudi visoka in pasovna digitalna sita, je bila med kompleksno s - in z -ravnino definirana bilinearna preslikava

$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right). \quad (10.61)$$

Če poljubno kompleksno število v s -ravnini zapišemo kot $s = \sigma + j\Omega$, v z -ravnini pa kot $z = re^{j\omega}$, neposredno iz enačbe (10.61) sledi

$$\sigma = \frac{2}{T_s} \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega}, \quad (10.62)$$

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega}. \quad (10.63)$$

Kot vidimo, so pri bilinearni preslikavi vse točke v notranjosti enotnega kroga v kompleksni z -ravnini $r < 1$ slike točk iz levega dela kompleksne s -ravnine $s < 0$, vse točke v zunanosti pa slike točk iz desnega dela kompleksne s -ravnine $s > 0$. Med krožnima frekvencama časovno zveznega in diskretnega sita Ω in ω pa pri $r = 1$ neposredno iz enačbe (10.63) sledi

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega}{2}. \quad (10.64)$$

Ker frekvenčni spekter digitalnega sita $H(\omega)$, dobljenega z bilinearno transformacijo prototipnega analognega sita, v skladu z enačbo (10.64) ni periodična funkcija, je opisana metoda posrednega načrtovanja sit z neskončnim impulznim odzivom v praksi izjemno uporabna.

10.4 Frekvenčne transformacije sit

Ker je bila dosedanja obravnava časovno zveznih prototipnih sit predvsem zaradi enostavnosti omejena zgolj na nizka sita, si v nadaljevanju pogledjmo, kako izbrano nizko sito pretvorimo v odgovarjajoče visoko ali pasovno sito.

10.4.1 Frekvenčne transformacije časovo zveznih sit

Transformacijo časovno zveznega Butterworthovega, Čebiševskega ali eliptičnega nizkega sita z mejno frekvenco prepustnega pasu Ω_p v visoko ali pasovno sito definira preslikava systemske funkcije $H(s)$, za katero velja

$$s \longrightarrow \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s} \quad (\text{nizko sito-visoko sito}) \quad (10.65)$$

$$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)} \quad (\text{nizko sito-pasovno prepustno sito}) \quad (10.66)$$

$$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u} \quad (\text{nizko sito-pasovno zaporno sito}) \quad (10.67)$$

kjer je Ω'_p mejna frekvenca prepustnega pasu visokega sita, Ω_l in Ω_u pa sta spodnja in zgornja mejna frekvenca prepustnega oziroma zapornega pasu pasovno prepustnega in pasovno zapornega sita.

10.4.2 Frekvenčne transformacije časovo diskretnih sit

Čeprav je pri posrednem načrtovanju časovno diskretnih sit z bilinearno transformacijo opisana frekvenčna transformacija časovno zveznih nizkih sit v visoka ali pasovna sita, ki so v praksi pogosto uporabljana, pa pri uporabi impulzne invariantne metode za preslikavo systemske funkcije časovno zveznega sita $H(s)$ v systemsko funkcijo časovno diskretnega sita $H(z)$ ne gre tako enostavno. Da pa bi kljub prekrivanju frekvenčnega spektra z impulzno invariantno metodo načrtovali tudi visoka in pasovna časovno diskretna sita, izhodiščno časovno zvezno nizko sito najprej preslikamo v časovno diskretno nizko sito, z uporabo omenjene metode, tega pa naprej frekvenčno transformiramo v ustrezno visoko ali pasovno časovno diskretno sito.

Transformacijo časovno diskretnega nizkega sita z mejno frekvenco prepustnega pasu ω_p v visoko ali pasovno sito definira preslikava systemske funkcije $H(z)$, za katero velja

$$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}; \quad a = -\frac{\cos [(\omega_p + \omega'_p)/2]}{\cos [(\omega_p - \omega'_p)/2]} \quad (\text{nizko sito-visoko sito}) \quad (10.68)$$

$$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}; \quad K = \cot \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_p}{2} \quad (\text{nizko sito-pasovno prepustno sito}) \quad (10.69)$$

$$z^{-1} \longrightarrow \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} - a_2}{-a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}; \quad K = \tan \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_p}{2} \quad (\text{nizko sito-pasovno prepustno sito}) \quad (10.70)$$

kjer je ω'_p mejna frekvenca prepustnega pasu visokega sita, ω_l in ω_u sta spodnja in zgornja mejna frekvenca prepustnega oziroma zapornega pasu pasovno prepustnega in pasovno zapornega sita, za konstante α , a_1 in a_2 pa velja

$$\alpha = \frac{\cos [(\omega_u + \omega_l)/2]}{\cos [(\omega_u - \omega_l)/2]}, \quad (10.71)$$

$$a_1 = -\frac{2\alpha K}{K + 1}, \quad (10.72)$$

$$a_2 = \frac{K - 1}{K + 1}. \quad (10.73)$$

Poglavje 11

Diskretni naključni procesi

11.1 Statistika naključnih procesov

Naključni proces ali signal si najlažje predstavljamo kot naključno spremenljivko, ki je razširjena z dimenzijo časa. Zamislimo si npr. neko časovno diskretno zaporedje $x[n]$. To zaporedje imenujemo naključni signal, če lahko za vsako vrednost zaporedja $x[n]$ (pri poljubno izbranem parametru n) trdimo, da je naključna spremenljivka. Naključni proces in naključno spremenljivko si torej lahko zamišljamo v precej podobnem smislu. V obeh primerih gre za rezultat eksperimenta, le da je pri naključni spremenljivki to neka konkretna vrednost, pri naključnem procesu pa niz (sekvenca) vzorcev.

Zamislimo si lahko množico vseh možnih izidov neke naključne spremenljivke. Podobno obstaja tudi množica vseh možnih realizacij naključnega procesa, ki jo za diskreten primer označimo kot $X(n, S)$. Oznaka S v tem primeru predstavlja t.i. vzorčni prostor ali neko množico v kateri za vsak naključni proces najdemo ustrezno vrednost s_i . Poskusimo pravkar povedano predstaviti nekoliko bolj strnjeno:

- $X(n, S)$ pri znanem $n = n_i$ in v poljubnem vzorčnem prostoru zapišemo kot $x(n_i, S)$ kar nam predstavlja naključno spremenljivko
- $X(n, S)$ pri poljubnem n in v znanem vzorčnem prostoru $s = s_i$ označimo kot $x(n, s_i)$, to pa predstavlja naključni niz
- $X(n, S)$ pri znanem $n = n_i$ in v znanem vzorčnem prostoru $s = s_i$ pa predstavlja konkretno številsko vrednost oz. rezultat $x(n_i, s_i)$.

Običajno pa zaradi enostavnosti zapisov spremenljivko s izpuščamo, tako npr. najdemo napisano le $X(n)$ in $x(n)$.

11.1.1 Povprečna vrednost

Glede na to, da se naključne spremenljivke podrejajo statističnim zakonom je tudi naključne signale možno ovrednotiti na tak način. Povprečno vrednost naključnega procesa lahko dobimo, če poleg samega procesa poznamo še potrebne funkcije gostote verjetnosti. Povprečno vrednost procesa računamo pri določenem n in preko cele množice S , tako kot rezultat dobimo determinističen niz, ki predstavlja povprečno vrednost naključnega procesa. Povprečna vrednost je definirana kot niz:

$$m_x[n] = E\{x[n]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot f_{x[n]}(x_n) dx_n \quad (11.1)$$

Upoštevati velja, da je v splošnem gostota verjetnosti $f_{x[n]}$ različna za vsako vrednost n . Vendar pa v praktičnih primerih funkcije gostote verjetnosti običajno ne poznamo, oziroma jo je težko, če ne celo nemogoče, določiti. Če obstaja možnost večkratne ponovitve poskusa, potem na tak način lahko generiramo nekaj naključnih nizov in povprečno vrednost tako določimo na podlagi povprečenja teh rezultatov. Slednja metoda se tudi praktično zelo dobro obnese.

11.1.2 Stacionarnost in ergodičnost

Stacionarnost in ergodičnost sta še dva izredno pomembna koncepta pri obravnavi naključnih procesov. Za obravnavo teh dveh pojmov pa najprej naredimo še nekaj definicij in predpostavk.

Kot prvo moramo imeti opravka z naključnim procesom katerega povprečje je konstantno za vsak n ; $m[n] = \text{konst.}$ Tak proces izkazuje neke vrste enakomernost, kar poenostavlja statistični opis. Naj niz obstaja za vsak n od $-\infty$ do $+\infty$, trikotni oklepaji pa naj označujejo povprečje, izračunano preko enega vzorčnega prostora (s). Opraviti imamo s časovnim povprečjem enega signala (niz pri konkretnem $s = s_i$):

$$\langle x[n] \rangle_{n_0, n_1} = \frac{1}{n_1 - n_0 + 1} \sum_{n=n_0}^{n_1} x[n] \quad (11.2)$$

$$\langle x[n] \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \langle x[n] \rangle_{-M, M} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M + 1} \sum_{n=-M}^M x[n] \quad (11.3)$$

To povprečje imenujemo povprečje signala, pri tem pa se je potrebno zavedati, da so to še vedno naključne spremenljivke. Povprečja signalov izračunanih preko posameznih vzorčnih prostorov so lahko enaka ali pa tudi ne, neglede na to ali je bil interval n -jev končen ali neskončen. Vkolikor so rezultati enaki, lahko celotno povprečje naključnega procesa nadomestimo kar s povprečjem signala enega vzorčnega prostora.

Za naključni proces pravimo, da je stacionaren v ožjem pomenu, če njegov statistični opis ni funkcija spremenljivke n . Denimo, da imamo dva zvezna naključna signala (iz dveh vzorčnih

prostorov), ki pripadata istemu naključnemu procesu. Prvi diskretni niz pridobimo z vzorčenjem prvega signala v trenutkih n_0, n_1, \dots, n_L ; drugi diskretni niz pa z vzorčenjem drugega signala v trenutkih $n_0 + l, n_1 + l, \dots, n_L + l$. Če sta gostoti verjetnosti slučajnega vektorja nizov enaki za poljubno izbiro razmika l in za poljubno izbiro nizov pravimo, da je proces stacionaren v ožjem smislu:

$$f_{x[n_0], x[n_1], \dots, x[n_L]} = f_{x[n_0+l], x[n_1+l], \dots, x[n_L+l]} \quad (11.4)$$

Povedano z drugimi besedami je naključni proces stacionaren v ožjem smislu, če so njegove karakteristike neobčutljive na premik po časovni osi.

Naključni proces je ergodičen, če so momenti, izračunani iz povprečja signala enega vzorčnega prostora, enaki ustreznim povprečjem preko cele množice S . Naključnemu procesu, ki ustreza samo pogoju

$$\langle x[n] \rangle = E\{x[n]\} \quad (11.5)$$

pravimo, da je ergodičen na povprečno vrednost, medtem ko se izpolnitev pogoja

$$\langle x[n]x[n+l] \rangle = E\{x[n]x[n+l]\} \quad (11.6)$$

imenuje ergodičnost na korelacijo.

Da je naključni proces lahko ergodičen v ožjem smislu mora najprej izpolnjevati zahteve stacionarnosti, povprečje naključnega procesa namreč ne more biti enako povprečju signalov iz celega vzorčnega prostora, če je slednje funkcijsko odvisno od spremenljivke n . Pravkar napisano pa ne velja v obratnem smislu. Koncept ergodičnosti je nepogrešljiv v aplikacijah kjer ni možno izvesti večjega števila poskusov ali pa je tako izvajanje nepraktično. Običajno imamo tudi pri digitalni obdelavi signalov največkrat opravka z enim (zelo dolgim) zapisom podatkov. Če torej tak signal vsebuje vse potrebne statistične parametre, ki bi se pojavili tudi v drugih vzorcih (proces je ergodičen), potem je vse nadaljne analize možno opraviti z uporabo izračuna statistike enega samega signala.

11.2 Analiza momentov drugega reda

Analiza naključnih procesov s pomočjo momentov (zlasti prvih nekaj redov) se obnese predvsem kadar nimamo na voljo gostote verjetnosti ali porazdelitvene funkcije. Kot primer lahko navedemo, da je Gaussov naključni proces popolnoma opisan z momenti prvega in drugega reda. V splošnem sicer momenti drugega reda še ne dajejo vseh podatkov o naključnem procesu, vendar pa v večini primerov dajejo zadosti informacij o najpomembnejših lastnostih. Momenta drugega reda sta korelacija in kovarianca, ki omogočata opis naključnega procesa v časovnem prostoru. Kadar pa imamo opravka s stacionarnim signalom pa je možen tudi opis v frekvenčnem prostoru in s transformom Z .

11.2.1 Korelacija in kovarianca

Korelacija med dvema vzorcema $x[n_0]$ in $x[n_1]$ naključnega signala je izražena kot korelacijska funkcija (tudi avtokorelacijska funkcija):

$$R_x[n_1, n_0] = E\{x[n_1]x^*[n_0]\} \quad (11.7)$$

Funkcija ima običajno različne vrednosti za različne izbire spremenljivke n . Konjugirana vrednost v definiciji korelacijske funkcije se nanaša na simetrične lastnosti momentov drugega reda za kompleksne signale. Kadar imamo opravka z realnimi funkcijami konjugacija nima vpliva.

Običajen pomen korelacijske funkcije je brez težav možno razširiti tudi na naključne procese. Kadar je vrednost $R_x[n_1, n_0]$ pozitivna in velika to pomeni, da sta si vzorca v omenjenih točkah zelo podobna - po velikosti in po predznaku. Majhna vrednost $R_x[n_1, n_0]$ predstavlja različnost vzorcev, velika negativna vrednost $R_x[n_1, n_0]$ pa pomeni podobnost v absolutni vrednosti velikosti in različnost v predznaku. V primeru $R_x[n_1, n_0] = 0$ pa sta vzorca $x[n_0]$ in $x[n_1]$ ortogonalna. Definicija (avto) kovariance je sledeča:

$$C_x[n_1, n_0] = E\{(x[n_1] - m_x[n_1]) \cdot (x[n_0] - m_x[n_0])^*\} \quad (11.8)$$

Kadar velja enakost $C_x[n_1, n_0] = 0$ pravimo, da sta vzorca $x[n_1]$ in $x[n_0]$ nekorelirana. Nadalje je povsem enostavno možno pokazati sledeče:

$$R_x[n_1, n_0] = C_x[n_1, n_0] - m_x[n_1]m_x^*[n_0] \quad (11.9)$$

Naključni signal $x[n]$ je stacionaren v širšem smislu, če je njegova povprečna vrednost $m_x[n] = \text{konst.}$ in njegova avtokorelacijska funkcija odvisna le od razmika med vzorci, $R_x[n_1, n_0] = R_x[n_1 - n_0]$. Od tod sledi naslednji zapis:

$$R_x[n_1, n_0] = R_x[n_1 - n_0] = R_x[l] \quad (11.10)$$

Funkcija R_x je odvisna samo od ene spremenljivke, razlike med n_1 in n_0 . Glede na vse to se izkaže, da je za stacionarni naključni proces končno tudi kovarianca funkcija razmika:

$$C_x[n_1, n_0] = C_x[n_1 - n_0] = C_x[l] \quad (11.11)$$

Zadnji dve lastnosti tako zagotavljata definicijo stacionarnosti v širšem smislu.

Očitno je, da stacionarnost v ožjem smislu vsebuje tudi stacionarnost v širšem smislu, kar pa ne velja v obratnem vrstnem redu, razen če ne gre za Gaussov naključni proces. V splošni rabi termina stacionarnost se pojem običajno nanaša na stacionarnost v širšem smislu, še posebej to velja kadar analiza temelji samo na momentih drugega reda.

Sicer pa za stacionarne naključne procese lahko zapišemo povprečno vrednost, korelacijo in kovarianco na nekoliko bolj enostaven način:

$$m_x = E\{x[n]\} \quad (11.12)$$

$$R_x[l] = E\{x[n]x^*[n-l]\} \quad (11.13)$$

$$C_x[l] = E\{(x[n] - m_x) \cdot (x[n-l] - m_x)^*\} \quad (11.14)$$

Lastnosti

Korelacija in kovarianca imata precej pomembnih lastnosti. Najosnovnejši lastnosti sta simetričnost in pozitivna semidefinitnost iz katerih je možno izpeljati še ostale lastnosti.

Simetričnost zapišemo takole:

$$R_x[l] = R_x^*[-l] \quad (11.15)$$

$$C_x[l] = C_x^*[-l] \quad (11.16)$$

Ta lastnost sledi neposredno iz definicije, za realne naključne procese pa to pomeni, da je korelacija soda funkcija razmika oz. da je korelacija med $x[n_1]$ in $x[n_2]$ enaka v obeh smereh.

Pozitivno semidefinitnost si lahko razlagamo s sledečim primerom. Denimo, da imamo naključni signal $x[n]$, ki ga vodimo preko linearne časovno neodvisnega sistema (LTI) kar nam kot rezultat da nov naključni signal $y[n]$. Zahteva po pozitivni povprečni moči izhodnega signala vsiljuje določeno zahtevo za korelacijsko funkcijo vhodnega signala. Ta zahteva se imenuje pozitivna semidefinitnost. Za popoln matematičen zapis te lastnosti najprej zapišimo izhodni signal v odvisnosti od vhodnega: $y[n] = \sum_{n_0=-\infty}^{+\infty} a[n_0]x[n-n_0]$, potem sta pogoja za pozitivno semidefinitnost:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_0=-\infty}^{+\infty} a^*[n_1]R_x[n_1-n_0]a[n_0] \geq 0 \quad (11.17)$$

$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_0=-\infty}^{+\infty} a^*[n_1]C_x[n_1-n_0]a[n_0] \geq 0 \quad (11.18)$$

Zahtevi za simetričnost in pravkar zapisani zahtevi za pozitivno semidefinitnost skupaj tvorijo potreben in zadosten pogoj, da kakršenkoli diskretni niz poimenujemo kot korelacijsko ali kovariančno funkcijo.

Pokazati se da tudi naslednje:

$$R_x[0] \geq |R_x[l]|, \quad \text{za vsak } l \neq 0 \quad (11.19)$$

$$C_x[0] = \text{Var}[x[n]] \geq |C_x[l]|, \quad \text{za vsak } l \neq 0 \quad (11.20)$$

Kadar je naključni proces periodičen so tudi vsi njegovi momenti periodični, torej postaneta korelacija in kovarianca periodični funkciji. Taka funkcija pa ima neskončno število maksimumov, ki so po velikosti enaki $R_x[0]$ oz. $C_x[0]$. Kot je bilo pokazano, iz kovariančne funkcije dobimo korelacijsko funkcijo naključnega procesa, če odstranimo povprečno vrednost. Tako je vsaka lastnost, ki jo dokažemo za korelacijo, tudi lastnost kovariance, kar pa ne velja v obratnem vrstnem redu.

11.2.2 Križna korelacija in križna kovarianca

Križna korelacija in križna kovarianca prideta do izraza kadar iščemo korelacijo ali kovarianco med dvema ali več naključnimi procesi. Križna korelacija in križna kovarianca sta glede na naključna procesa $x[n]$ in $y[n]$ definirani takole:

$$R_{xy}[n_1, n_0] = E\{x[n_1]y^*[n_0]\} \quad (11.21)$$

$$C_{xy}[n_1, n_0] = E\{(x[n_1] - m_x[n_1]) \cdot (y[n_0] - m_y[n_0])^*\} \quad (11.22)$$

Relacija med obema funkcijama pa je sledeča:

$$R_{xy}[n_1, n_0] = C_{xy}[n_1, n_0] + m_x[n_1]m_y^*[n_0] \quad (11.23)$$

Dva naključna procesa sta ortogonalna, če je njuna križna korelacija enaka 0, nekorelirana pa sta kadar je 0 njuna križna kovarianca. Glede na to lahko nekoreliranost dveh naključnih procesov definiramo tudi kot:

$$R_{xy}[n_1, n_0] = m_x[n_1]m_y^*[n_0] \quad (11.24)$$

Nadalje lahko definiramo stacionarnost vektorja naključnih procesov z elementoma $x[n]$ in $y[n]$, ki je stacionaren v širšem smislu, če velja:

1. $x[n]$ in $y[n]$ sta vsak zase stacionarna v širšem smislu
2. križna korelacija med njima je zgolj funkcija razmika med vzorci $R_{xy}[n_1, n_0] = R_{xy}[n_1 - n_0]$

Križna korelacija in križna kovarianca kot funkciji razmika sta torej definirani kot:

$$R_{xy}[l] = E\{x[n]y^*[n - l]\} \quad (11.25)$$

$$C_{xy}[l] = E\{(x[n] - m_x) \cdot (y[n - l] - m_y)^*\} \quad (11.26)$$

Zveza med njima pa je:

$$R_{xy}[l] = C_{xy}[l] + m_x m_y^* \quad (11.27)$$

Med lastnostmi omenjenih funkcij ni opaziti kakšne posebne simetrije, sicer pa sta glavni lastnosti sledeči:

$$R_{xy}[l] = R_{yx}^*[-l] \quad (11.28)$$

$$C_{xy}[l] = C_{yx}^*[-l] \quad (11.29)$$

Tu je še posebej potrebno opozoriti na pazljivost pri indeksih! Poudariti velja tudi to, da korelacija med $x[n_1]$ in $y[n_0]$ ni enaka korelaciji med $y[n_1]$ in $x[n_0]$. Čeprav to na prvi pogled morda ni videti smiselno si lahko pomagamo s primerom. Denimo, da imamo naključni signal $x[n]$, ki ga vodimo preko kavzalnega sistema in kot rezultat dobimo $y[n]$. Če sedaj predpostavimo, da je $n_1 > n_0$ potem je jasno, da ima vrednost $x[n_0]$ vpliv na vrednost $y[n_1]$, vendar pa zaradi kavzalnosti $x[n_1]$ nima nobenega vpliva na $y[n_0]$. To pa pomeni tudi to, da sta vrednosti korelacijske funkcije v obeh primerih različni, v primeru $x[n_1]$ in $y[n_0]$ je korelacija enaka 0. Prav tako je pomembno dejstvo, da maksimum križne korelacije ne nastopa nujno v izhodišču (pri $l = 0$), kar pa morda niti ni presenetljivo, saj v splošnem ta funkcija ni pozitivno semidefinitna. Sicer pa je vrednost križne korelacije omejena z geometrično in aritmetično sredino avtokorelacijskih funkcij nastopajočih naključnih procesov:

$$|R_{xy}[l]| \leq \sqrt{R_x[0]R_y[0]} \quad (11.30)$$

$$|R_{xy}[l]| \leq \frac{1}{2} (R_x[0] + R_y[0]) \quad (11.31)$$

11.3 Opis naključnih procesov v frekvenčnem prostoru

Opis naključnih procesov v frekvenčnem prostoru se nanaša na povprečno moč naključnega procesa, to pa opišemo s funkcijo gostote moči. Tak opis nam predstavlja zastopanost frekvenčnih komponent v naključnem signalu oziroma nam pove o frekvenčnih komponentah, ki si jih naključni procesi (v primeru križnega spektra) delijo.

Spekter gostote moči naključnega procesa dobimo s pomočjo Fourierove transformacije:

$$S_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_x[k]e^{-j\omega k} \quad (11.32)$$

Ta zveza se imenuje tudi Einstein - Wiener - Khintchine-ov teorem. Inverzna relacija pa je podana takole:

$$R_x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_x(e^{j\omega})e^{j\omega k} d\omega \quad (11.33)$$

Spekter gostote moči v najbolj splošnem primeru lahko zapišemo kot vsoto zveznega dela spektra in uteženih diskretnih črt. Črte v spektru so posledica periodičnih ali skoraj-periodičnih

komponent naključnega signala. Podobno v naključnem procesu s povprečno vrednostjo različno od 0 pričakujemo spektralno črto v izhodišču, pri frekvenci 0. Ta črta se nanaša na srednjo moč procesa ($|m_x|^2$), torej mora naključni proces imeti povprečno vrednost enako 0, če želimo povsem zvezen spekter gostote moči. Vendar pa samo z analizo momentov drugega reda (korelacija, spekter gostote moči) ni možno nedvoumno ugotoviti kakšna je povprečna vrednost naključnega procesa, če ta ni podana posebej. V izogib tej dvoumnosti pogosto privzamemo, da je bila povprečna vrednost naključnega procesa odstranjena in da potencialna diskretna črta v izhodišču predstavlja diskretno komponento naključnega signala. Omeniti kaže še, da je spekter gostote moči periodičen s periodo 2π , poleg tega pa sta njegovi glavni značilnosti, da je vedno realen in nenegativen. Slednji dve lastnosti spektru zagotavljata fazo nič. Za realne naključne procese velja tudi, da je S_x soda funkcija.

Primerjava spektrov gostote moči naključnih procesov z različnimi korelacijskimi funkcijami pokaže, da "širok spekter" korelacijske funkcije daje ozek frekvenčni spekter, kar je seveda posledica počasnega spreminjanja naključnega procesa. Podobno ozek spekter korelacije predstavlja širok frekvenčni spekter. Širok spekter korelacijske funkcije z nenehnim menjavanjem predznaka pa pomeni samo visoke frekvence.

Križni spekter gostote moči pa je uporaben za podajanje odvisnosti dveh ali več naključnih procesov v frekvenčnem prostoru. Definicija je sledeča:

$$S_{xy}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{xy}[k]e^{-j\omega k} \quad (11.34)$$

Tudi križni spekter gostote moči je periodična funkcija s periodo 2π , je to v splošnem kompleksna funkcija, pa tudi faza ni enaka 0. Velja zveza:

$$S_{xy}(e^{j\omega}) = S_{yx}^*(e^{j\omega}) \quad (11.35)$$

Za realne naključne procese je funkcija križne korelacije R_{xy} realna. Iz tega preko Fourierovega transformata sledi, da je potek amplitude križnega spektra gostote moči za realne naključne signale sod, potek faze pa lih. Inverzna relacija med križno korelacijo in križnim spektrom gostote moči pa je:

$$R_{xy}[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_{xy}(e^{j\omega})e^{j\omega k} d\omega \quad (11.36)$$

11.4 Enostavni naključni procesi

11.4.1 Bernoullijev proces in binarni beli šum

Bernoullijev proces je eden enostavnejših naključnih procesov, vendar pa ga kljub temu dostikrat srečamo v telekomunikacijskih problemih. Definiran je kot neskončen binarni niz $x[n]$, pri čemer

je n v mejah $-\infty < n < \infty$, vrednosti, ki ju zavzame niz pa sta dve, najpogosteje 1 in -1 (tudi 1 in 0). Verjetnost nastopa vrednosti 1 označimo s P , od tod pa sledi, da je vrednost nastopa -1 podana z $(1 - P)$. V posebnem primeru, ko je $P = 1/2$ proces poimenujemo binarni beli šum. Kot je bilo omenjeno je ta proces precej uporaben model pri digitalni obdelavi signalov. Denimo, da imamo pretok podatkov, ki je kodiran z enim bitom. Kadar so podatki, potrebni za prenos, med seboj povsem neodvisni je Bernoullijev proces primeren model za opis takega problema.

Bernoullijev proces je stacionaren in ergodičen. Za prikaz obstoja prve lastnosti si zamislimo diskretni niz $\{1, 1, -1, 1\}$ in določimo verjetnost njegovega nastopa:

$$P[(x[n_0] = 1), (x[n_0 + 1] = 1), (x[n_0 + 2] = -1), (x[n_0 + 3] = 1)] = P \cdot P \cdot (1 - P) \cdot P = P^3(1 - P) \quad (11.37)$$

Kot vidimo je verjetnost nastopa takega niza neodvisna od tega kje se nahaja, torej neodvisna od n . Da bi se prepričali še o ergodičnosti Bernoullijevega procesa si ponovno zamislimo vse možne nize Bernoullijevega procesa, ki se jih da generirati pri določenem n . Če velja, da so vzorci vsakega niza med seboj neodvisni in imajo enako porazdelitev (torej so to dejansko naključne spremenljivke), potem si prav lahko mislimo, da je povprečje preko vseh nizov pri določenem n enako povprečju preko vzorcev enega samega niza.

Zapišimo še prva dva (centralna) mometa (povprečno vrednost in varianco) za Bernoullijev proces:

$$E\{x[n]\} = 2P - 1 \quad (11.38)$$

$$Var\{x[n]\} = 4P(1 - P) \quad (11.39)$$

Za binarni beli šum je povprečna vrednost enaka 0, varianca pa 1. Sicer pa še vedno velja, da kadarkoli je naključni proces stacionaren te vrednosti niso odvisne od n .

11.4.2 Naključno premikanje in diskretni Wienerjev proces

Pri obravnavi Bernoullijevega procesa smo imeli primer prenosa po en bit. Lahko si zamislimo tak primer prenosa bitov kjer sprejeti bit prištejemo ali odštejemo (+1, -1) trenutni vrednosti. Tak model je uporaben pri rekonstrukciji signalov, ki je znan pod imenom modulacija delta. Če so posamezni koraki med seboj neodvisni lahko trdimo, da gre za Bernoullijev proces, rekonstrukcijo pa modeliramo s procesom, ki mu pravimo naključno premikanje (angl. *random walk*).

Za analizo naključnega premikanja si naključni proces zapišemo takole:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi[k] \quad (11.40)$$

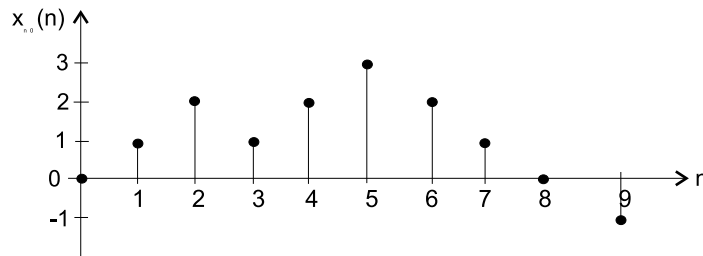
Pri tem je niz $\xi[k]$ Bernoullijev proces, ki zavzame vrednosti 1 in -1 z verjetnostima P in $(1-P)$. Iz definicije procesa sledi, da so tudi vsote oz. razlike $x[n] - x[n-1], x[n-1] - x[n-2], \dots, x[k] - x[k-1], \dots$ med sabo neodvisne.

Če pogledamo obnašanje funkcije glede na razliko $x[n] - x[n_0]$ za $n > n_0$, vidimo, da tak niz za konkretno vrednost n_0 predstavlja nov naključni proces:

$$x_{n_0}[n] = x[n] - x[n_0] = \sum_{k=n_0+1}^n \xi[k]; \quad \text{za } n > n_0 \quad (11.41)$$

Predpostavimo lahko $x_{n_0}[n_0] = 0$. Tak proces je poznan pod imenom naključno premikanje in je običajno definiran za $n_0 = 0$ ali $n_0 = -1$. V posebnem primeru, ko je $P = 1/2$ je $\xi[k]$ binarni beli šum, $x_{n_0}[n]$ pa se imenuje diskretni Wienerjev proces. Glede na to, da je naključno premikanje definirano kot $x[n+k_0] - x[n_0+k_0]$ za vsako celo vrednost k_0 , so njegove statistične lastnosti enake lastnostim osnovnega procesa $x[n]$.

Trenutno vrednost procesa naključnega premikanja si lahko zamislimo kot točko z vrednostjo, ki se bo v naslednjem koraku spremenila za +1 ali -1. Slika 11.1 prikazuje tipičen odsek naključnega premikanja $x_{n_0}[n]$, kjer je $n_0 = 0$.



Slika 11.1: Naključno premikanje

Za izračun porazdelitve verjetnosti pri naključnem premikanju ($Pr[x_{n_0}[n] = r]$, r predstavlja celoštevilsko vrednost procesa po končanem naključnem premikanju), si definirajmo nekaj novih spremenljivk. Najprej definirajmo dolžino intervala niza:

$$l = n - n_0 \quad (11.42)$$

Privzamemo, da je osnovni naključni proces Bernoullijev proces, $\xi[k] = \{1, -1\}$. Če je niz zavzel vrednost +1 natanko q -krat, potem je zavzel vrednost -1 natanko $(l - q)$ -krat. Od tod za prej omenjeno spremenljivko r lahko zapišemo:

$$r = q - (l - q) = 2q - l \quad (11.43)$$

Število pozitivnih vrednosti, ki nastopijo v nizu je torej:

$$q = \frac{l + r}{2} \quad (11.44)$$

število negativnih vrednosti pa:

$$l - q = \frac{l - r}{2} \quad (11.45)$$

Od tod izračunamo število vseh možnih kombinacij (število vseh možnih nizov v katerih q -krat nastopa vrednost $+1$ in $(l - q)$ -krat vrednost -1) vrednosti $+1$ in -1 na intervalu dolžine l . Rezultat dobimo s pomočjo binomskega koeficienta:

$$\binom{l}{q} = \frac{l!}{q!(l - q)!} \quad (11.46)$$

Verjetnost, da bo vrednost naključne spremenljivke po preteku niza dolžine l enaka r , je torej sledeča:

$$Pr[x_{n_0}[n_0 + l]] = r = \begin{cases} \binom{l}{\frac{l+r}{2}} P^{\frac{l+r}{2}} (1 - P)^{\frac{l-r}{2}}, & r = -l, -l + 2, \dots, l - 2, l \\ 0, & \text{drugače.} \end{cases} \quad (11.47)$$

Povprečno vrednost in varianco naključnega premikanja najlaže izračunamo, če upoštevamo neodvisnost vzorcev v nizu $\xi[k]$, poleg tega pa upoštevamo še rezultate, ki smo jih pridobili pri obravnavi Bernoullijevega procesa:

$$E\{x_{n_0}[n]\} = \sum_{k=n_0+1}^n E\{\xi[n]\} = (2P - 1)(n - n_0) \quad (11.48)$$

$$Var\{x_{n_0}[n]\} = \sum_{k=n_0+1}^n Var\{\xi[n]\} = 4P(1 - P)(n - n_0) \quad (11.49)$$

V primeru $P \neq 1/2$ sta tako povprečna vrednost kot varianca odvisni od $(n - n_0)$, v primeru $P = 1/2$ (diskretni Wienerjev proces) pa je povprečna vrednost enaka 0, varianca pa enaka $(n - n_0)$. V obeh primerih imamo torej opravka z nestacionarnim procesom. Zanimiv primer diskretnega Wienerjevega procesa je limitna vrednost, ko so razmiki med vzorci niza infinitezimalno majhni. Takrat tak proces preide v zvezni naključni signal, ki je znan kot Brownovo gibanje ali zvezni Wienerjev proces, ki je še posebno pomemben pri modeliranju šuma v analizi zveznih signalov in sistemov.

11.5 Markovski procesi

Bernoullijev proces je sam po sebi precej enostaven naključen proces z neodvisnimi vzorci. Tak model se v nekaterih primerih povsem dobro obnese, vendar pa za čisto vsak binarni podatkovni niz ni primeren. Pri binarnih podatkovnih nizih imamo večinoma opravka z vzorci, ki so med

seboj precej dobro korelirani, kar pomeni, da je vrednost trenutnega vzorca pogojena s predhodnimi vzorci. V najenostavnejšem primeru je vrednost trenutnega vzorca odvisna zgolj od vrednosti prejšnjega vzorca - prav ta vrsta odvisnosti je poznana pod imenom Markovski procesi. Modeliranje z Markovskimi procesi se izredno dobro obnese v mnogih praktičnih problemih s področja procesiranja signalov, komunikacij in vodenja.

Sicer pa ni potrebe, da bi bili Markovski procesi omejeni izključno na binarne vrednosti. Kot primer Markovskega procesa si lahko zamislimo proces katerega vzorci zvezno zavzemajo realne vrednosti.

Definicija Markovskega procesa pravi, da je naključni proces Markovski proces, če je porazdelitev $x[n]$, ki je pogojena z neskončno preteklostjo, odvisna samo od enega vzorca prej, torej od $x[n-1]$:

$$f_{x[n]|x[n-1],x[n-2],\dots}(x_n|x_{n-1},x_{n-2},\dots) = f_{x[n]|x[n-1]}(x_n|x_{n-1}) \quad (11.50)$$

Iz enačbe ugotovimo, da je niz neodvisnih naključnih spremenljivk (niz katerega vzorci so med seboj povsem neodvisni) Markovski proces. Vendarle se niz neodvisnih naključnih spremenljivk ne pojmuje kot Markovski proces (kljub temu, da je s to izjavo matematično vse v redu). Definicija pove tudi, da je gostota verjetnosti slučajnega vektorja za katerokoli kombinacijo dveh vzorcev povsem določena z gostoto verjetnosti $f_{x[n]}$ in pogojno gostoto verjetnosti $f_{x[n]|x[n-1]}$. Za prikaz tega dejstva si najprej zamislimo niz vzorcev $x[0], x[1], \dots, x[n]$. Za vsak naključni proces velja sledeča zveza:

$$f_{x[0],x[1],\dots,x[n]} = f_{x[n]|x[n-1],\dots,x[0]} \cdot f_{x[n-1]|x[n-2],\dots,x[0]} \cdot \dots \cdot f_{x[n-2]|x[n-3],\dots,x[0]} \quad (11.51)$$

Vkolikor je naključni proces Markovski proces (zadovoljuje ustrezne pogoje), lahko trdimo sledeče:

$$f_{x[0],x[1],\dots,x[n]} = f_{x[n]|x[n-1]} \cdot f_{x[n-1]|x[n-2]} \cdot \dots \cdot f_{x[1]|x[0]} \cdot f_{x[0]} \quad (11.52)$$

Gostoto verjetnosti za niz vzorcev naključnega procesa, ki se začne pri n_0 potem zapišemo:

$$f_{x[n_0+1],x[n_0+2],\dots,x[n]|x[n_0],x[n_0-1],\dots} = f_{x[n]|x[n-1]} \cdot f_{x[n-1]|x[n-2]} \cdot \dots \cdot f_{x[n_0+1]|x[n_0]} \quad (11.53)$$

Povedano z besedami to pomeni, da je gostota verjetnosti slučajnega vektorja v trenutkih kasnejših od n_0 (ta je pogojen s preteklimi vzorci), odvisna le od $x[n_0]$ in hkrati neodvisna od kateregakoli vzorca pred n_0 . To predstavlja bistveno lastnost Markovskih procesov.

11.5.1 Verige Markovskih procesov

V primeru, ko vrednosti spremenljivke $x[n]$ zavzemajo končno število diskretnih vrednosti, naključni Markovski proces poimenujemo Markovska veriga. Kadar imamo opravka z digitalnimi sistemi je temu vedno tako, saj je vsaka vrednost predstavljena s končnim številom bitov.

Začnimo torej s povsem formalno definicijo Markovske verige, ki ima v primeru diskretnih vrednosti tudi verjetnostno porazdelitev diskretno. Definicija pravi, da je naključni proces, ki zavzema le diskretne vrednosti Markovska veriga, če ustreza pogoju:

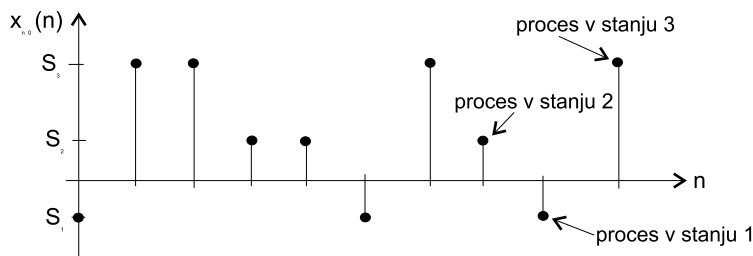
$$\begin{aligned} Pr[(x[n] = x_n)|(x[n-1] = x_{n-1})(x[n-2] = x_{n-2}) \dots] = \\ Pr[(x[n] = x_n)|(x[n-1] = x_{n-1})] \end{aligned} \quad (11.54)$$

Tako je verjetnost, da niz zaporednih vzorcev $x[0], x[1], \dots, x[n]$ zavzame določeno vrednost določena takole:

$$\begin{aligned} Pr[(x[0] = x_0)(x[1] = x_1) \dots (x[n] = x_n)] = \\ Pr[(x[n] = x_n)|(x[n-1] = x_{n-1})] \dots Pr[(x[1] = x_1)|(x[0] = x_0)] \cdot Pr[x[0] = x_0] \end{aligned} \quad (11.55)$$

Pred nadaljno obravnavo pa si oglejmo še nekaj terminologije, ki je povezana z Markovskimi procesi. Možne vrednosti, ki jih zavzame $x[n]$ oziroma x_n označimo tudi s S_1, S_2, \dots, S_Q in kadar velja $x[n] = S_i$ pravimo, da je Markovska veriga v stanju i . Tedaj lahko definiramo pogojne verjetnosti, ki jih poimenujemo verjetnosti prehoda stanj:

$$P_{ij}[n] = Pr[(x[n] = S_j)|(x[n-1] = S_i)] \quad (11.56)$$



Slika 11.2: Stanja v Markovski verigi

Vrednost P_{ij} predstavlja verjetnost prehoda iz stanja j v stanje i . Razliko pri označevanju s P oz. Pr uvedemo iz razloga, ker je verjetnost prehoda stanj P parameter porazdelitve, ne pa porazdelitev sama. Vrednost $Pr[x_n|x_{n-1}]$ dejansko predstavlja pogojno verjetnost med dvema konkretnima vrednostima, v našem primeru pa taista vrednost predstavlja prehod med stanjema, kar pa je dejansko posledica poprejšnjega definiranja stanj (stanja so predstavljena z diskretnimi vrednostmi). Markovska veriga je stacionarna, če je njena verjetnostna porazdelitev neodvisna od spremenljivke n in ima prav tako od n neodvisne verjetnosti prehodov stanj P_{ij} .

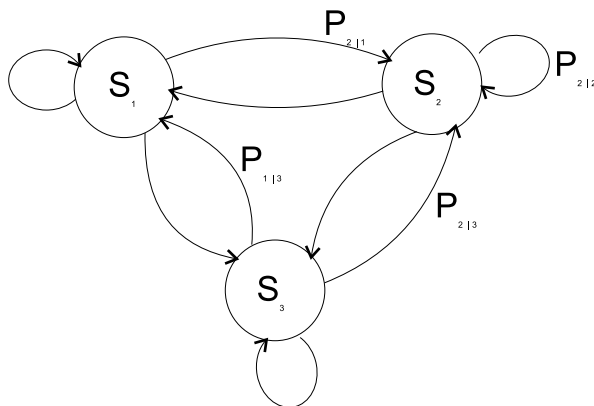
V splošnem pa verjetnosti prehodov stanj najlažje opišemo z matriko katere elementi so vrednosti verjetnosti prehodov stanj P_{ij} definirani na prej opisan način. Oglejmo si matriko P

v primeru Markovske verige s tremi stanji:

$$P = \begin{bmatrix} P_{1|1} & P_{2|1} & P_{3|1} \\ P_{1|2} & P_{2|2} & P_{3|2} \\ P_{1|3} & P_{2|3} & P_{3|3} \end{bmatrix} \quad (11.57)$$

To matriko imenujemo tudi stohastična matrika, ima pa dve opazni lastnosti: elementi so vsi nenegativni in vsota posameznih vrstic je 1. Vendar pa je v splošnem za uporabo bolj primerna transponirana oblika stohastične matrike - prehodna matrika: $\Pi = P^T$.

Prehode med stanji Markovskega procesa lahko ponazorimo tudi grafično, podobno kot to izvajamo pri ponazarjanju stanj avtomatov. Primer t. i. prehodnega diagrama stanj kaže slika 11.3, kjer so tudi vpisani parametri oz. verjetnosti prehodov stanj. Kadar pa nastopa verjetnost prehoda stanj z vrednostjo 0, le-te v diagramu ne označujemo.



Slika 11.3: Prehodni diagram stanj

Verjetnosti prehodov višjih redov

Pri analizi Markovskih verig je večkrat potrebno poznati tudi verjetnosti prehodov višjih redov, ki so definirani na sledeč način:

$$P_{j|i}^{(k)} = Pr[(x[n] = S_j) | (x[n-k] = S_i)] \quad (11.58)$$

Verjetnosti prehodov višjih redov računamo na osnovi običajnih verjetnosti prehodov (prvega reda). Za boljšo razumljivost oz. preglednost si oglejmo verjetnost prehoda drugega reda na primeru že predstavljene Markovske verige s tremi stanji. Začetno stanje naj bo 1, končno pa 2.

Verjetnost, da bo proces ki je startal iz stanja 1, po dveh korakih prišel v stanje 2 je torej:

$$P_{2|1}^{(2)} = P_{1|1} \cdot P_{2|1} + P_{2|1} \cdot P_{2|2} + P_{3|1} \cdot P_{2|3} \quad (11.59)$$

prehod	verjetnost
1, 1, 2	$P_{1 1} \cdot P_{2 1}$
1, 2, 2	$P_{2 1} \cdot P_{2 2}$
1, 3, 2	$P_{3 1} \cdot P_{2 3}$

Izračunano vrednost se da določiti tudi s pomočjo matrik, tako stohastične kot prehodne. Če torej zapišemo kvadrat stohastične matrike $(P \cdot P)$, dobimo verjetnost prehoda drugega reda iz stanja 1 v stanje 2 kot produkt prve vrstice prve matrike z drugim stolpcem druge matrike. Enako, vendar v transponirani obliki, gre tudi z uporabo matrike Π .

V splošnem velja, da matriki P^k in Π^k vsebujeta vse verjetnosti prehodov k -tega reda. Z uporabo prejšnjega postopka bi bil dokaz te trditve zamuden, zato rezultat izpeljimo drugače, pri tem upoštevamo, da imamo opravka s Q -stanji. Definirajmo vektor $p[n]$:

$$p[n] = \begin{bmatrix} p_1[n] \\ p_2[n] \\ \vdots \\ p_Q[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pr[(x[n] = S_1)] \\ Pr[(x[n] = S_2)] \\ \vdots \\ Pr[(x[n] = S_Q)] \end{bmatrix} \quad (11.60)$$

Ta zapis pravzaprav predstavlja dejstvo, da so komponente vektorja $p[n]$ verjetnosti, da je proces v trenutku n v stanju i . Nadalje lahko zapišemo tudi tole enačbo, ki sledi iz definicije prehodne matrike:

$$p[n] = \prod p[n-1] \quad (11.61)$$

Če v enačbo uvedemo še iteracije, pa dobimo:

$$p[n] = \prod^k p[n-k] \quad (11.62)$$

Pridobljeni rezultat kaže, da je matrika Π^k prehodna matrika k -tega reda, njeni elementi pa so verjetnosti prehodov stanj k -tega reda.

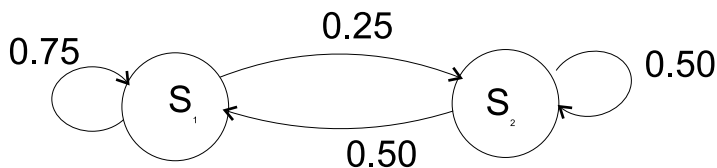
Verjetnosti končnih stanj

Kadar verjetnosti prehodov Markovske verige ustrezajo določenim zahtevam je pri velikem številu korakov opaziti poseben primer obnašanja Markovskih verig. Tokrat za primer

vzemimo Markovski proces z dvema stanjema in opazujmo verjetnosti prehodov višjih redov.

Rezultate podaja tabela:

Iz tabele je razvidno, da prehodne verjetnosti dovolj visokih redov konvergirajo proti določeni vrednosti in takorekoč postanejo konstantne, poleg tega pa ta vrednost ni odvisna od začetnega stanja. Po dovolj dolgem času se verjetnost, da se proces nahaja v določenem stanju,



Slika 11.4: Diagram prehoda stanj Markovske verige z dvema stanjema

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
$P_{1 1}^{(k)}$	0.750	0.688	0.672	0.668	0.667	0.667	0.667	0.667
$P_{2 1}^{(k)}$	0.250	0.312	0.328	0.332	0.333	0.333	0.333	0.333
$P_{1 2}^{(k)}$	0.500	0.625	0.656	0.664	0.666	0.667	0.667	0.667
$P_{2 2}^{(k)}$	0.500	0.375	0.344	0.336	0.334	0.333	0.333	0.333

približuje konstantni vrednosti. To pa kaže na to, da ima proces omejen spomin glede svojega začetnega stanja. Denimo, da začnemo proces opazovati ob času $n = n_0$, potem vektor $p[n_0]$ lahko poimenujemo začetno stanje, vektor verjetnosti končnih stanj Markovskega procesa pa je, kadar limita obstaja in je neodvisna od $p[n_0]$, definiran kot:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n_0}^{n-n_0} p[n_0] \quad (11.63)$$

Verjetnost končnih stanj pa ne obstaja za vsako Markovsko verigo. Primeri takih verig so npr. stanja kjer je možen prehod iz enega v drugega po naprej določenem zaporedju (periodično), ali pa veriga kjer začnemo iz nekega stanja potem pa ne moremo več nazaj v to stanje. Če bi računali verjetnost končnih stanj po zgornji enačbi bi ugotovili, da so vrednosti odvisne od začetnega stanja ali pa bi bil vektor $p[n]$ periodičen. Skratka, če vektor $p[n]$ ne konvergira tudi verjetnosti končnih stanj ne moremo določiti.

Obstoj verjetnosti končnih stanj lahko izrazimo tudi algebraično s pomočjo lastnih vrednosti prehodne matrike. Pokazati se da, da so lastne vrednosti matrike Π , ki je lahko tudi kompleksna, manjše ali enake 1, oziroma ima matrika vsaj eno lastno vrednost enako 1. Za prikaz tega označimo vektor lastnih vrednosti s \bar{p} in opazujmo enačbo pri lastni vrednosti 1:

$$\Pi \bar{p} = \bar{p} \quad (11.64)$$

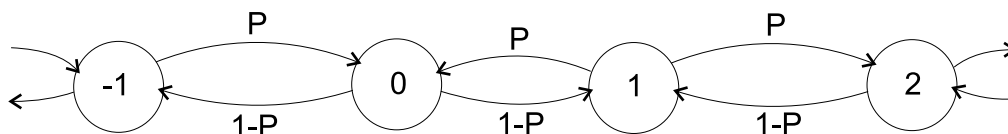
Enačba ima rešitev samo v primeru, ko je determinanta $|\Pi - I| = 0$ (I - enotska matrika). To je vedno res, če je le vsota elementov posameznih stolpcev matrike Π enaka 1. Zaradi $(\Pi - I)$ tako postane vsota po stolpcih enaka 0, vrstice so linearno odvisne in determinanta je 0. Rešitev torej obstaja in \bar{p} je lastni vektor, ki ustreza lastni vrednosti 1. Pokazati se da, da je konvergenca verjetnosti prehodov odvisna od začetnih pogojev samo, če je le ena lastna

vrednost enaka 1 in ne obstaja nobena kompleksna lastna vrednost z absolutno vrednostjo 1. V primeru, ko je \bar{p} rešitev enačbe je hkrati to tudi vektor verjetnosti končnih stanj. Za prehodne matrike višjih redov pa velja, da so stolpci med seboj enaki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod^{n-n_0} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{p} & \bar{p} & \cdots & \bar{p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (11.65)$$

Naključno premikanje kot primer Markovske verige

Naključno premikanje smo že omenili, s pomočjo znanj o Markovskih procesih pa lahko ugotovimo da naključno premikanje lahko opišemo z Markovsko verigo, pri čemer se je treba zavdati, da imamo opravka z neskončnim številom stanj. Med drugim se da pokazati, da je vsak proces, ki se mu vrednost spreminja neodvisno od koraka do koraka, Markovski proces. Obratno pa seveda ne drži.

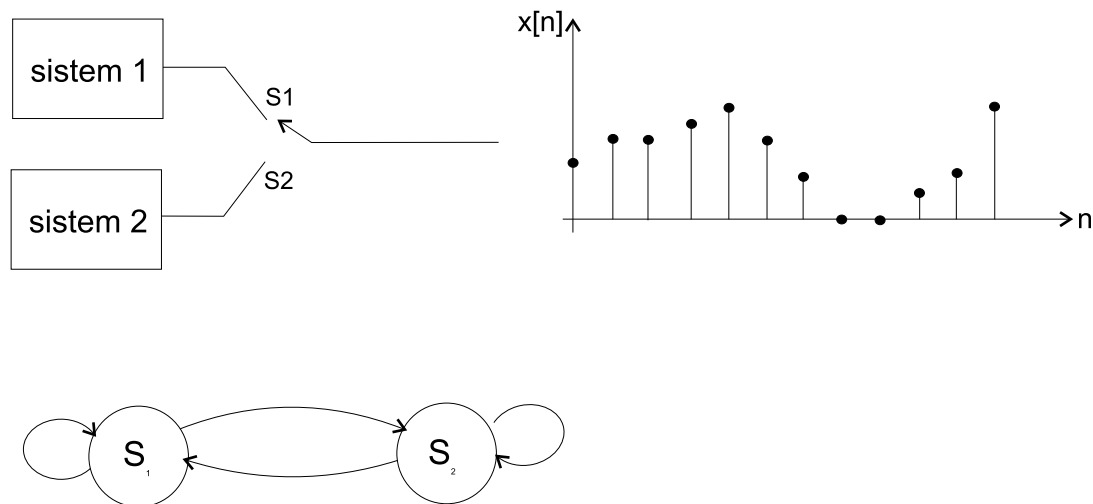


Slika 11.5: Diagram prehodov stanj za naključno premikanje

Slika 11.5 prikazuje diagram prehodov stanj za naključno premikanje. Taka Markovska veriga lahko služi kot model za preučevanje populacije, opravka imamo z rojstvi in smrtjo. Model za preučevanje populacije pa ima končno število stanj in tudi povratna stanja (se zaključujejo sama vase).

11.5.2 Zakriti Markovski modeli

Skupina naključnih procesov, ki jih poimenujemo zakriti Markovski modeli, je pomembna v aplikacijah s področja procesiranja govora, dvodimenzionalni zakriti modeli pa so uporabni pri obdelavi slik. Osnovno idejo zakritega Markovskega modela kaže slika 11.6. Imamo dva generatorja naključnih signalov z določenimi statističnimi zakonitostmi. Katerega od dveh signalov opazujemo pa je odvisno od položaja stikala, ki ima stanja opisana z Markovsko verigo. Diagram prehajanja stanj kaže slika iz katere razberemo, da stikalo lahko v danem trenutku ostane v položaju v katerem je ali pa se preklopi v drug položaj. Uporaba podobnega modela (z več stanji) se zelo dobro obnese pri analizi govora, ker so opazovani nizi vzorcev stacionarni v omejenem času. Predpostavimo lahko, da je pridobljeni signal v majhnem času, ko se stikalo nahaja v enem od položajev, stacionaren, to pa pomeni, da so si sosednji intervali statistično lahko silno različni.



Slika 11.6: Zakriti Markovski model

Glede na to, da imamo opravka z dvema nivojema naključnih signalov, rečemo da je tak sistem dvakratno stohastičen. Imamo namreč naključni proces $s[n]$, ki predstavlja položaj stikala in je opisan z Markovsko verigo, in imamo naključni proces $x[n]$, ki je produkt dveh naključnih procesov (preklopi stikala in signal sistema 1 ali 2). Osnovna Markovska veriga $s[n]$ razpolaga s končnim številom stanj (v našem primeru sta to dve stanji), ki pa jih iz $x[n]$ ne moremo razbrati neposredno, zato takemu procesu pravimo zakriti Markovski model. Sicer pa je naključni proces $x[n]$ po vrednostih, ki jih zavzema, lahko zvezen ali diskreten, odvisno od generatorjev naključnih signalov. $x[n]$ tudi ni nujno Markovski proces, nujno Markovski je le osnovni model od koder tudi pride poimenovanje.

Eden izmed pomembnejših problemov v zvezi z zakritimi Markovskimi procesi je izračun niza $s[n]$ iz procesa $x[n]$. Tak problem se npr. pojavi vedno kadar so komunikacijska sporočila podvržena šumu, sprejeti signal $x[n]$ je vsota podatkovnega niza $s[n]$ in šuma. V primeru binarnega podatkovnega niza ima osnovni signal $s[n]$ dve različni stanji, v sprejetem signalu $x[n]$ pa je stanj precej več. Označimo torej vrednosti procesa $x[k]$ z x_k za $0 \leq k \leq n$, vrednost $s[k]$ pa označimo s s_k , pri čemer je k v enakem območju kot prej. Zaradi enostavnosti predpostavimo še, da vrednosti s_k lahko zavzamejo le celoštevilčne vrednosti:

$$S_i = i \quad i = 1, 2, \dots, Q \quad (11.66)$$

Računanje naključne spremenljivke (kot je to s_k) iz zašumljenega signala temelji na računanju pogojne verjetnosti:

$$Pr[(s[0] = s_0) \dots (s[n] = s_n) | (x[0] = x_0) \dots (x[n] = x_n)] \quad (11.67)$$

To pogojno verjetnost pa lahko določimo tudi iz Bayesove formule:

$$Pr[s_0 \dots s_n | x_0 \dots x_n] = \frac{f_{x|s}(x_0, \dots, x_n | s_0, \dots, s_n) \cdot Pr[s_0 \dots s_n]}{f_x(x_0, \dots, x_n)} \quad (11.68)$$

Izračun tega izraza je možen z maksimizacijo pogojne verjetnosti, kar pa še zdaleč ni enostavno. Najenostavnejši postopek temelji na dinamičnem programiranju, kot npr. Viterbijev algoritem.

Naslednji problem, ki je zanimiv pri študiju zakritih Markovskih modelov, pa je računanje gostote verjetnosti $f_x(x_0, x_1, \dots, x_n)$ za dani niz zakritega Markovskega modela. Na tak problem naletimo npr. pri problemih iz razvrščanja. Denimo, da imamo več zakritih Markovskih modelov, ki predstavljajo različne razrede podatkov, npr. izgovorjene besede. Ugotoviti je potrebno kateri model najbolj ustreza nekemu opazovanemu nizu. Primerna pot reševanja bi bila z določitvijo gostote $f_x(x_0, x_1, \dots, x_n)$ za vsak model in nato izbira razreda za katerega je ta vrednost največja. Funkcijo f_x v tem kontekstu imenujemo funkcija podobnosti.

Vsakega od naštetih dveh problemov pa lahko obdelamo na sledeč način. Najprej zapišimo izraz za verjetnost niza stanj:

$$Pr[s_0 s_1 \dots s_n] = \overline{p}_{s_0} \left(\prod_{k=1}^n P_{s_k | s_{k-1}} \right) \quad P_{s_k | s_{k-1}} = P_{i|j} \quad (11.69)$$

Enačbo ponazorimo s primerom, ko imamo v osnovi opravka z Markovskim modelom s tremi stanji, zanima pa nas verjetnost sekvence $\{2, 3, 3, 1, 2\}$: $Pr[2, 3, 3, 1, 2] = \overline{p}_2 P_{3|2} P_{3|3} P_{1|3} P_{2|1}$

Predpostavimo, da sistem ne spreminja svojega stanja - ostaja v stanju v katerem se nahaja. V takem primeru bodo vrednosti niza $x[k]$ neodvisni. Nadalje predpostavimo, da bodo tudi nizi generirani v različnih stanjih med seboj neodvisni. Gostoto verjetnosti torej lahko zapišemo na sledeč način:

$$f_{x|s}(x_0, x_1, \dots, x_n | s_0, s_1, \dots, s_n) = \prod_{k=0}^n f_{x|s}(x_k | s_k) \quad (11.70)$$

Upoštevati velja, da $f_{x|s}(x_k | s_k)$ dejansko predstavlja celo družino gostot verjetnosti glede na stanje. Gostota verjetnosti se namreč nanaša na tip naključnega procesa, ki se generira v določenem stanju. Za gostote verjetnosti predpostavljamo, da so vnaprej znane ali pa da se jih da izračunati.

Da bi ugotovili funkcijo gostote verjetnosti $f_x(x_0, x_1, \dots, x_n)$ kombiniramo zadnji dve enačbi:

$$f_{xs}(x_0, x_1, \dots, x_n, s_0, s_1, \dots, s_n) = \prod_{k=0}^n f_{x|s}(x_k | s_k) P_{s_k | s_{k-1}} \quad (11.71)$$

Funkcija gostote verjetnosti za opazovani niz je torej:

$$f_x(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{\text{preko vseh nizov stanj}} f_{xs}(x_0, x_1, \dots, x_n, s_0, s_1, \dots, s_n) \quad (11.72)$$

Teoretično je primer zaključen, vendar pa bi računanje za Markovsko verigo s Q stanji to pomenilo seštevanje preko Q^{n+1} zamenjav stanj. Drugače povedano to pomeni, da število računskih operacij narašča eksponentno pri povečevanju števila stanj. K sreči pa obstajajo rekurzivne rešitve pri katerih se zahtevnost računanja povečuje linearno z večanjem spremenljivke n (postopek naprej, postopek nazaj, Viterbijev algoritem).

Postopek naprej

Najprej definirajmo spremenljivko “naprej”, ki predstavlja gostoto verjetnosti slučajnega vektorja:

$$\alpha_i[k] = f_{x_s[k]}(x_0, x_1, \dots, x_k, i) \quad (11.73)$$

Iskana funkcija gostote verjetnosti je tako:

$$f_x(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^Q f_{x_s[n]}(x_0, x_1, \dots, x_n, i) = \sum_{i=1}^Q \alpha_i[n] \quad (11.74)$$

Prednost spremenljivke naprej je v tem, da je z njeno pomočjo možno razviti učinkovito rekurzijo. Z upoštevanjem definicije pogojne in robne verjetnosti (če je gostota verjetnosti funkcija dveh spremenljivk, postane ta funkcija odvisna le še od ene spremenljivke, če drugo spremenljivko postavimo tako, da zavzame vse vrednosti iz svojega definicijskega območja) pridemo do rekurzivne formule:

$$\alpha_i[k] = \left[\sum_{j=1}^Q \alpha_j[k-1] \cdot P_{i|j} \right] \cdot f_{x|s}(x_k|i) \quad i = 1, 2, \dots, Q \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (11.75)$$

Začetni pogoj pa je:

$$\alpha_i[0] = \bar{p}_i f_{x|s}(x_0|i) \quad i = 1, 2, \dots, Q \quad (11.76)$$

Realizacija take rekurzije je možna na podoben način kot realizacija FFT algoritma s strukturo mreže z $n+1$ stolpci vozlišč, ki se nanašajo na opazovane nize, in Q vozlišč v vsakem stolpcu, ki ustrezajo Q različnim stanjem. Število potrebnih računskih operacij je proporcionalno $Q^2(n+1)$, kar je v primerjavi s prej omenjenimi Q^{n+1} precejšen prihranek.

Postopek nazaj

Postopek nazaj predstavlja enko učinkovit algoritem za računanje funkcije gostote verjetnosti kot postopek naprej, s to razliko, da želena funkcijo računamo v smeri nazaj glede na naključni proces. Definicija spremenljivke nazaj:

$$\beta_i[k] = f_{x|s[k]}(x_{k+1}, \dots, x_n|i) \quad (11.77)$$

Na podoben način kot pri postopku naprej tudi tu funkcijo gostote verjetnosti definiramo s pomočjo pravkar uvedene spremenljivke:

$$f_x(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^Q \beta_i[n] f_{x|s}(x_0|i) \bar{p}_i \quad (11.78)$$

Prav tako uvedemo tudi rekurzijo, kar storimo na podlagi definicije pogojne verjetnosti in seštevanja preko vseh stanj, za končno obliko enačbe pa prideta v poštev še definicija spremenljivke nazaj in definicija verjetnosti prehodov:

$$\beta_i[k] = \sum_{j=1}^Q \beta_j[k+1] f_{x|s}(x_{k+1}|j) P_{j|i} \quad i = 1, 2, \dots, Q \quad k = n-1, n-2, \dots, 0 \quad (11.79)$$

In še začetni pogoj:

$$\beta_i[n] = 1 \quad i = 1, 2, \dots, Q \quad (11.80)$$

Za to vrsto rekurzije uporabimo enako strukturo mreže kot v prejšnjem primeru, seveda pa postopek poteka v ravno obratnem vrstnem redu. Število računskih operacij je zopet proporcionalno $Q^2(n+1)$. V praktičnih primerih se dogaja, da zaradi velike vrednosti spremenljivke n z vrednostmi, ki jih računamo pridemo do zelo majhnih števil, kar pa povzroča numerične napake. Zaradi tega se v praktičnih primerih poslužujemo logaritmiranja enačb, da pa so rezultati pravilni pa je potrebno ustrezno prilagoditi še skaliranje.

Izračun niza stanj - Viterbijev algoritem

Kadar je gostoto verjetnosti možno zapisati v obliki (11.73), obstaja postopku naprej in postopku nazaj podobna metoda za izračun niza stanj. Če je torej vrednost (11.73) enaka vrednosti števca v enačbi (11.68) nam to zagotavlja možnost izračuna osnovne sekvence zakritega Markovskega modela. Viterbijev algoritem začne z logaritmiranjem enačbe (11.73) in se osredotoča na ekvivalenten problem maksimizacije:

$$\sum_{k=0}^n V_i[k] + B_{j,i}[k] \quad (11.81)$$

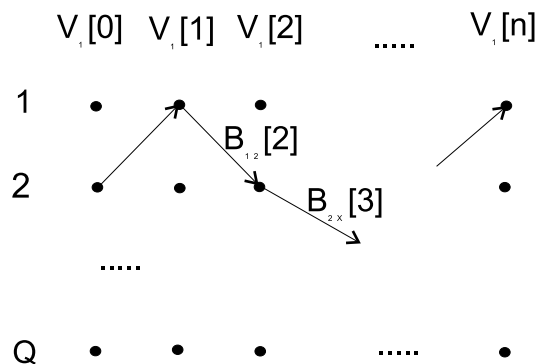
V tej enačbi velja $i = s_k$ in $j = s_{k-1}$, definiciji za V_i in $B_{j,i}$ pa sta:

$$V_i[k] = \log f_{x|s}(x_k|i) \quad (11.82)$$

$$B_{j,i}[k] = \log P_{i|j} \quad (11.83)$$

Za postopek maksimizacije uporabimo strukturo mreže (v kontekstu Viterbijevega algoritma je ta mreža v angl. poimenovana "trellis") v kateri je cilj najti optimalno pot. Primer prikazuje slika. Vrednosti $V_i[k]$ se nanašajo na vozlišča, $B_{j,i}[k]$ pa na veje mreže. Utež določene poti je podana z vsoto vrednosti vozlišč in vej preko katerih poteka, torej je optimalna pot (v smislu maksimizacije) tista, ki ima največjo utež.

Iskanje optimalne poti temelji na sledečem principu. Zamislimo si, da gre optimalna pot iz stolpca 0 do vsakega vozlišča j nekega stolpca $k-1$. Uteži poti označimo z $W_j[k-1]$ in upoštevajmo, da je ena izmed teh poti del optimalne poti do nekega vozlišča v naslednjem



Slika 11.7: Mreža Viterbijevega algoritma

stolpcu. Če gre torej optimalna pot do specifičnega vozlišča i v stolpcu k skozi vozlišče j' v stolpcu $k - 1$ je utež celotne poti:

$$W_{j',i}[k - 1] + B_{j',i}[k] + V_i[k]$$

Če je ta pot resnično optimalna potem vozlišče j' maksimizira to utež. Optimalna utež poti za vsako vozlišče i v stolpcu k je torej podana kot:

$$W_i[k] = \max_j (W_j[k - 1] + B_{j,i}[k]) + V_i[k] \quad (11.84)$$

Maksimizacijo vozlišča j' je dokaj enostavno poiskati, če upoštevamo vsa vozlišča v stolpcu $k - 1$ in preračunamo zgornji izraz. Iskanje optimalne poti je v vsakem koraku določeno le z računanjem vrednosti uteži med vozliščem, ki je že del poti in vozliščem v naslednjem stolpcu, ki ga iščemo. V vsakem koraku računanja se torej algoritem nanaša le na vozlišča dveh sosednjih stolpcev.

Optimalna pot skozi mrežo je določena z maksimalno utežjo te poti, niz optimalnih stanj procesa pa je določen z vozlišči preko katerih gre optimalna pot.

11.6 Naključni Gaussovi procesi in beli šum

Med množico naključnih diskretnih nizov, ki jih srečamo pri digitalni obdelavi signalov, jih precej nastane z vzorčenjem zveznih naključnih signalov. V tem oziru so procesi z Gaussovo porazdelitvijo dokaj pomembni, o tem pa nam pravzaprav govori že centralni limitni teorem.

Kot je bilo povedano že v prejšnjih poglavjih, imamo v telekomunikacijah veliko opravka s šumom, kot dober model za šum pa nam služi Wienerjev proces, ki ga moramo za take potrebe najprej prevesti v zvezno obliko. Večina šuma v naravi namreč je rezultat dogajanj na ravni molekul in atomov. Zvezni Wienerjev proces je definiran kot limitni primer naključnega premikanja pri čemer gre časovni razmik med posameznimi vzorci proti 0.

Zamislimo si še enkrat Wienerjev proces, ki se mu v vsakem časovnem intervalu vrednost z verjetnostjo $P = 1/2$ poveča ali zmanjša za s :

$$x_c[k \cdot \Delta t] = \sum_{i=k_0+1}^k s\xi[i] \quad \text{za } k > k_0 \quad (11.85)$$

Z limitiranjem Δt proti 0 in pri veliki vrednosti k , bi $x_c(t)$ (c - countinuos, zvezen) postal vsota velikega števila naključnih, med seboj neodvisnih, spremenljivk s kakršnokoli porazdelitveno funkcijo. Centralni limitni teorem nam v takem primeru zagotavlja, da je porazdelitev funkcije $x_c(t)$ Gaussova. Z nadaljnim izvajanjem in upoštevanjem centralnega limitnega teorema ter lastnosti Wienerjevega procesa (neodvisnost vzorcev) lahko ugotovimo, da je porazdelitev poljubnega števila vzorcev Wienerjevega zveznega procesa Gaussova. Takemu procesu pa pravimo naključni Gaussov proces. Med drugim pa ugotovimo tudi to, da je varianca Wienerjevega procesa odvisna od t in torej Wienerjev proces ni stacionaren.

Vendarle pa opisani proces težko proglasimo za zveznega, končno je v realnem svetu možno prešteti tudi atome. Zato si zamislimo filter z odzivnim časom precej večjim od Δt Wienerjevega procesa. Efekt takega filtra bo integracija, in če torej "zvezni" Wienerjev signal vodimo skozi tak filter bomo na izhodu dobili vsoto velikega števila naključnih spremenljivk z Gaussovo porazdelitvijo. Glede na to, da je produkt linearne operacije nad naključnim Gaussovimi procesi zopet naključni Gaussov proces, je naključni proces, ki je pravzaprav neka oblika Wienerjevega procesa, imenovan Gaussov beli šum.

Sicer pa pod pojmom belega šuma pojmujeemo naključni proces s povprečno vrednostjo 0 in konstantnim spektrom gostote moči. Če je spekter gostote moči konstanten v neskončnem frekvenčnem področju je njegova korelacijska funkcija predstavljena z impulzom, kar pomeni, da so vzorci belega šuma med seboj povsem nekorelirani.

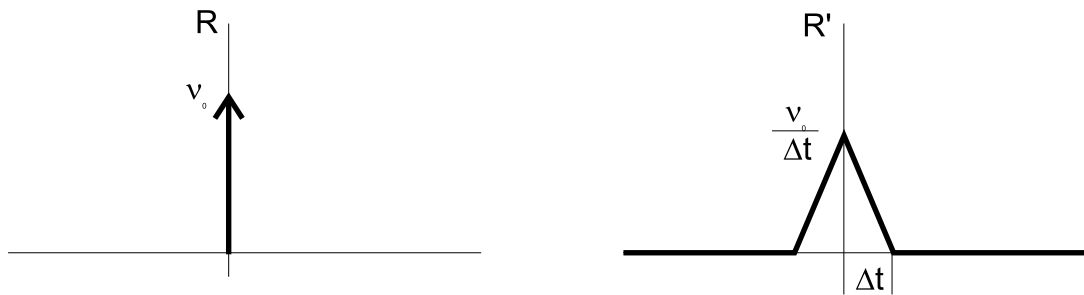
Idealni beli šum je ideal, ki v naravi ne obstaja, vendar vseeno predstavlja zanimiv koncept pri študiju naključnih procesov. Slika 11.8 prikazuje korelacijsko funkcijo idealnega (R) in nekoliko manj idealnega (R') belega šuma.

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s^2}{\Delta t} \quad (11.86)$$

Glede Δt omenimo še to, da sta dva sosednja vzorca vzorčenega zveznega signala v tem primeru nekorelirana kadar je med njima razmik večji od Δt , če pa temu ni tako, med njima obstaja nekaj korelacije.

11.6.1 Diskretni Gaussovi procesi

Kot smo videli je lahko zvezni naključni Gaussov proces rezultat odziva filtra na proces z mikroskopsko diskretizacijo. Sedaj pa predpostavimo, da ta proces vzorčimo v intervalih T , ki



Slika 11.8: Korelacijska funkcija idealnega in realnega belega šuma

so precej večji kot Δt in tako dobimo naključni niz vzorcev. Če je bil torej originalni proces Gaussov bodo tudi z vzorčenjem pridobljeni vzorci naključnega niza porazdeljeni po Gaussu.

Po definiciji je diskretni Gaussov proces naključni proces pri katerem se vsak niz vzorcev pokorava večdimenzionalni Gaussovi porazdelitvi. Če je v takem primeru tudi robna gostota verjetnosti Gaussova je možno reči, da je naključni proces Gaussov, če je vektor poljubnega števila N sosednjih vzorcev za katerokoli začetno vrednost n_0 z vektorjem povprečnih vrednosti m_x in kovariančno matriko C_x opisan s sledečo funkcijo gostote verjetnosti:

$$f_x(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |C_x|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-m_x)^T C_x^{-1} (x-m_x)} \quad (11.87)$$

Še enkrat lahko povemo, da naključni Gaussovi vektorji po kakršnikoli linearni transformaciji obdržijo svoje Gaussove lastnosti. Posebna pozornost pa velja stacionarnim naključnim Gaussovimi procesom. Za njih velja, da jih je statistično dokaj enostavno opisati, kadar pa jih vodimo preko linearnih sistemov brez zakasnitev obdržijo lastnost stacionarnosti.

11.6.2 Diskretni beli šum

V splošnem je korelacijska funkcija belega šuma $w[n]$ podana takole:

$$R_w[n_1, n_0] = \sigma_0^2 [n_1] \cdot \delta[n_1 - n_0] \quad (11.88)$$

Kadar pa imamo opravka s stacionarnim belim šumom pa sta korelacija in ustrezen spekter gostote moči sledeča:

$$R_w[l] = \sigma_0^2 \cdot \delta[l] \quad (11.89)$$

$$S_w[e^{j\omega}] = \sigma_0^2 \quad (11.90)$$

Nadvse pomemben primer belega šuma je Gaussov beli šum, ki je rezultat vzorčenja idealnega belega šuma. Zanimiva je kovariančna matrika:

$$C_w = R_w = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_0^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \cdot I \quad (11.91)$$

Funkcija gostote verjetnosti pa je podana takole:

$$f_w(w) = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{N/2}} e^{-\frac{\|w\|^2}{2\sigma_0^2}} = \prod_{n=0}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(w_n)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (11.92)$$

Upoštevati velja, da vzorci Gaussovega belega šuma niso le nekorelirani pač pa tudi neodvisni. Sicer pa diskretni beli šum ni nujno vedno Gaussov, edina zahteva za diskretni beli šum je povprečna vrednost 0 in nekoreliranost vzorcev. Pogojem ustreza tudi npr. binarni šum.

Poglavje 12

Diskretni adaptivni sistemi

V teoriji signalov, predvsem pa v telekomunikacijskih sistemih, se srečujemo s spremembami signalov, ali s spremembami prenosnih poti, katerim se moramo s sprejemnimi, kot tudi z oddajnimi enotami prilagoditi. Zato si nameravamo v tem poglavju ogledati nekaj lastnosti diskretnih adaptivnih sistemov, možnosti, oz. postopke prilagajanja parametrov spremembam v sistemu, ki mu sledimo, ali se mu prilagajamo, hkrati pa si nameravamo ogledati nekaj najčešče uporabljenih adaptivnih postopkov.

Adaptivne sisteme, katerih lastnost je, da so linearni, a časovno spremenljivi, lahko kar predstavimo s sitom, katerega uteži se prilagajo glede na zahtevane spremembe, ki jih podaja adaptivni, prilagojevalni algoritem. Linearno adaptivno sito ali nerekurzivno adaptivno sito je torej nekak osnovni element v postopkih adaptivnega procesiranja diskretnih signalov. Razumevanje principov delovanja takega sita je temeljni pogoj za nadaljnje delo na področju adaptivnega procesiranja diskretnih signalov. Zaradi adaptacije je tako sito časovno spremenljivo, nerekurzivno sito.

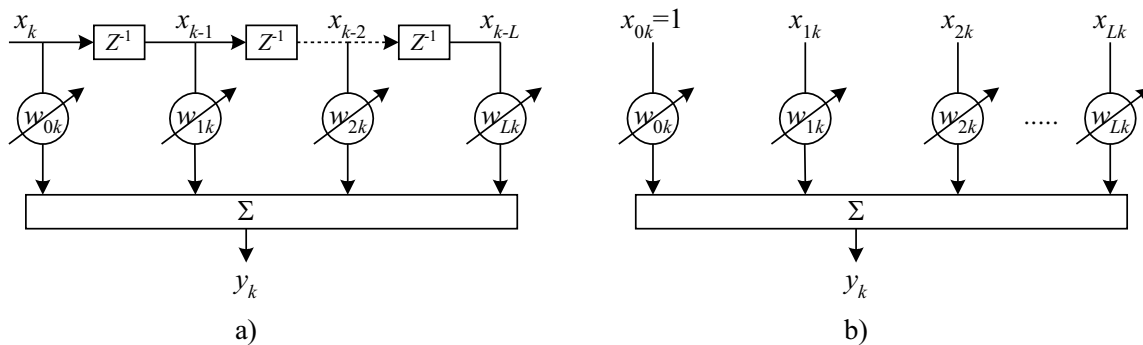
Predno pričnemo z analizo adaptivnih sit moramo postaviti nekaj izhodišč. Predpostavimo diskreten vhodni signal z več komponentami. Ta signal lahko zapišemo v obliki vektorja \mathbf{X} . Poleg tega predpostavimo tudi vektor uteži \mathbf{W} , s katerim dejansko vplivamo na komponente vhodnega signala, t. j. vhodnega vektorja. Po adaptaciji je potrebna tudi enota za seštevanje vseh teh komponent, ki da na izhodu izhodni signal y . Na začetku smo omenili, da se bomo osredotočili na linearne sisteme. To pomeni, da je izhodni signal linearna kombinacija vhodnih vzorcev, ki so uteženi s komponentami vektorja \mathbf{W} . Komponente vektorja \mathbf{W} pa ne smejo biti odvisne od vhodnih vzorcev. V nasprotnem primeru bi bil namreč izhod nelinearno odvisen od vhodnih vzorcev.

Elemente vhodnega vektorja \mathbf{X} lahko interpretiramo na dva načina. V prvem primeru lahko elementi vektorja pripadajo večim $L + 1$, paralelnim signalnim izvorom, v drugem primeru pa lahko elementi predstavljajo zaporedje dolžine $L + 1$ istega signalnega izvora. Na podlagi

omenjenega lahko obravnavo razdelimo na večvhodne in enovhodne primere, primera pa lahko matematično opišemo z izrazoma (12.1) in (12.2). V obeh primerih je vhodni signal dejansko stolpični vektor, zato smo zapis transponirali. Indeks k predstavlja časovni indeks, ki tako posredno določa, da v večvhodnem primeru vsi vzorci nastopajo v istem trenutku, medtem, ko si v enovhodnem primeru sledijo v zaporednih časovnih intervalih. Slika 12.1 prikazuje možni realizaciji za enovhodni in večvhodni primer.

$$\text{Enovhodni primer: } X_k = [x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-L}]^T \quad (12.1)$$

$$\text{Večvhodni primer: } X_k = [x_{0k}, x_{1k}, \dots, x_{Lk}]^T \quad (12.2)$$



Slika 12.1: Adaptivno linearno sito: (a) enovhodni primer in (b) večvhodni primer

V večvhodnem primeru ponavadi priredimo elementu x_{0k} vrednost 1 ali neko drugo konstanto, medtem ko se pri enovhodnih primerih ta zahteva običajno ne pojavlja. Na ta način normaliziramo sistem, posledično pa w_{0k} postane umeritvena utež. Vektor uteži lahko podobno kot vhodna vektorja zapišemo z izrazom (12.3).

$$W_k = [w_{0k}, w_{1k}, \dots, w_{Lk}]^T \quad (12.3)$$

Odnos med vhomom in izhodom lahko torej zapišemo za oba primera z izrazoma (12.4) in (12.5):

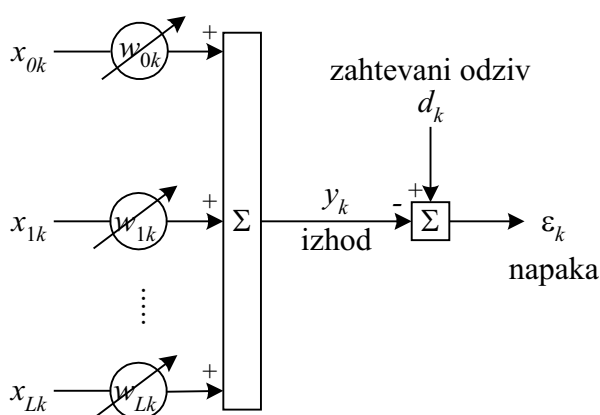
$$\text{Enovhodni primer: } y_k = \sum_{l=0}^L w_{lk} x_{k-l} \quad (12.4)$$

$$\text{Večvhodni primer: } y_k = \sum_{l=0}^L w_{lk} x_{lk}. \quad (12.5)$$

V obeh primerih lahko odnos med vhodnim in izhodnim signalom zapišemo tudi z izrazom (12.6) v vektorski obliki, ki je enaka za oba primera:

$$y_k = X_k^T W_k = W_k^T X_k. \quad (12.6)$$

Adaptivno regulacijo lahko glede na dejavnike, ki imajo vpliv na regulacijo, opredelimo kot regulacijo z odprto ali z zaprto zanko. O adaptivni regulaciji z odprto zanko govorimo, kadar na regulacijo vplivata okolje in vhodni signal, pri adaptivni regulaciji z zaprto zanko pa poleg tega upoštevamo tudi izhodni signal. V tem primeru vključimo v analizo tudi t. i. zahtevani odziv oz. učno sekvenco. Naša naloga je, da signal na izhodu adaptivnega sita y_k čimbolj ustreza zahtevanemu odzivu d_k . Ker enakosti med signaloma y_k in d_k ne moremo popolnoma doseči, se torej pojavi napaka, določena kot razlika med dejanskim y_k in želenim odzivom d_k . Naloga postopkov adaptivne regulacije je v minimizaciji napake e . V praksi se zelo pogosto uporabljajo metode, ki minimizirajo vrednost srednje kvadratične napake e^2 oz. povprečno moč signala napake. S kvadriranjem napake smo tako prešli iz linearne v kvadratično odvisnost napake e . Slika 12.2 nazorno prikazuje omenjen princip za večvhodni primer, kjer signal napake dobimo z odštevanjem dejanskega odziva od zahtevanega odziva.



Slika 12.2: Večvhodno adaptivno linearno sito z zahtevanim odzivom in napako

Tako lahko zapišemo z izrazom (12.7) napako, ki jo dobimo z vezjem s slike 12.2. Indeks k smo pri vektorju uteži W namenoma opustili, ker je poudarek namenjen analizi signala napake e in ne samemu vektorju uteži.

$$\varepsilon_k = d_k - y_k = d_k - X_k^T W_k = d_k - W_k^T X_k \quad (12.7)$$

Če izraz (12.7) kvadriramo, dobimo trenutno vrednost kvadrata napake, ki je vedno pozitivna. Če namreč ne bi kvadrirali, potem bi se lahko pozitivni in negativni doprinosi napak med seboj uničili in rezultat bi predstavljal veliko težavo pri iskanju optimuma uteži, oz. minimalnega odstopanja izhoda od želenega signala. Predpostavimo, da so ε_k , d_k in X_k statistično stacionarni signali, torej lahko v izrazu (12.9) uporabimo operator pričakovane vrednosti E .

$$\varepsilon_k^2 = d_k^2 + W^T X_k X_k^T W - 2d_k X_k^T W \quad (12.8)$$

$$E[\varepsilon_k^2] = E[d_k^2] + W^T E[X_k X_k^T] W - 2E[d_k X_k^T] W \quad (12.9)$$

Da pa lahko srednjo kvadratično napako izrazimo na primernejši način, vpeljemo matriko \mathbf{R} , ki jo imenujemo tudi vhodna korelacijska matrika, katere elementi v glavni diagonali predstavljajo kvadrate vhodnih $L + 1$ komponent, ostali elementi matrike \mathbf{R} pa so križne korelacije vhodnih komponent. Hkrati vpeljimo tudi stolpčni vektor \mathbf{P} , ki predstavlja križne korelacije med zahtevanim odzivom in vhodnimi komponentami

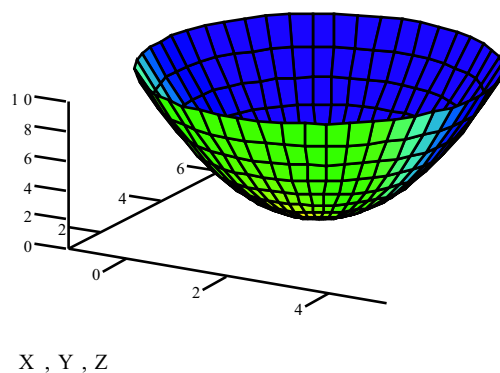
$$\mathbf{R} = E[X_k X_k^T] = E \begin{bmatrix} x_{0k}^2 & x_{0k}x_{1k} & x_{0k}x_{2k} & \cdots & x_{0k}x_{Lk} \\ x_{1k}x_{0k} & x_{1k}^2 & x_{1k}x_{2k} & \cdots & x_{1k}x_{Lk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{Lk}x_{0k} & x_{Lk}x_{1k} & x_{Lk}x_{2k} & \cdots & x_{Lk}^2 \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

$$\mathbf{P} = E[d_k X_k] = [d_k x_{0k}, d_k x_{1k}, \dots, d_k x_{Lk}]^T \quad (12.11)$$

Če velja, da sta X_k in d_k stacionarna signala, potem so vsi elementi v obeh matrikah konstantni in drugega reda. Sedaj lahko srednjo kvadratično napako izrazimo kot

$$MSE = \xi = E[\varepsilon^2] = E[d_k^2] + \mathbf{W}^T \mathbf{R} \mathbf{W} - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W} \quad (12.12)$$

Zaradi člena $\mathbf{W}^T \mathbf{R} \mathbf{W}$ v izrazu (12.12) je srednja kvadratična napaka ξ kvadratna funkcija utežnega vektorja \mathbf{W} , torej kvadratna funkcija posameznih uteži. Zato ima glede na uteži funkcija MSE obliko paraboloida, kot ga prikazuje slika 12.3. Zaradi boljše predstave predpostavimo samo dva utežna elementa w_0 in w_1 . V splošnem pa lahko obravnavamo dani problem v $L + 1$ dimenzionalnem prostoru, pri čemer funkcija ξ še vedno ostane kvadratična glede na utežne faktorje, vendar pa paraboloid preide v hiperparaboloid. V danem primeru osnovno ravnino določata utežna faktorja w_0 in w_1 , vertikalno os na to ravnino pa določa funkcija ξ . Paraboloid je nekakšna konveksna funkcija uteži in ima svoj minimum. Oboje je seveda pri obravnavi realnih signalov nesmiselno. Če paraboloid razrežemo vzporedno z osnovno ravnino dobimo koncentrične elipse, za katere je značilna konstantna vrednost ξ . Najnižja točka paraboloida je minimum paraboloida oz v našem primeru minimalna srednja kvadratična napaka. Zaradi minimalnega odstopanja izhodnega signala od zelenega signala želimo, da točka minimuma leži na osnovni ravnini oz. čim bližje nad njo. To točko označimo kot optimalno, oz. vektor njenih komponent z \mathbf{W}^* . V primeru dveh utežnih faktorjev w_0 in w_1 imamo samo en globalni minimum in nobenih drugih lokalnih minimumov.



Slika 12.3: Površina paraboloida

Pri iskanju minimuma uporabimo gradientno metodo. V točki minimuma je namreč odvod po vseh (v našem primeru po dveh) spremenljivkah, t. j. po utežeh enak nič. Odvajamo torej srednjo kvadratično napako v izrazu (12.12) in dobimo izraz (12.13)

$$\nabla = \frac{d\xi}{d\mathbf{W}} = \left[\frac{d\xi}{dw_0} \frac{d\xi}{dw_1} \cdots \frac{d\xi}{dw_L} \right]^T = 2\mathbf{R}\mathbf{W}^* - 2\mathbf{P} = 0 \quad (12.13)$$

V izrazu (12.13) je vektor \mathbf{W} označen z zvezdico, saj smo že zgoraj določili, da elemente vektorja \mathbf{W} v točki minimuma parabole (optimuma srednje kvadratične napake) označimo z zvezdico. Ob predpostavki, da matrika \mathbf{R} ni singularna lahko izračunamo optimalni utežni vektor \mathbf{W}^* , znan tudi pod imenom Wienerjev utežni vektor, ki je

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} \quad (12.14)$$

Izraz (12.14) vstavimo v izraz (12.12). Tako dobimo izraz za minimalno srednjo kvadratično napako ξ . Pri tem smo upoštevali tudi nekatera pravila, ki veljajo za računanje z matrikami kot so:

- $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$
- $[\mathbf{A}\mathbf{B}]^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ in
- simetričnost matrike \mathbf{R} , za katero velja $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$, pri čemer je $[\mathbf{R}^{-1}]^T = \mathbf{R}^{-1}$.

Pri tem torej velja:

$$\xi_{min} = E[d_k^2] + \mathbf{W}^{*T}\mathbf{R}\mathbf{W}^* - 2\mathbf{P}^T\mathbf{W}^* = E[d_k^2] - \mathbf{P}^T\mathbf{W}^*. \quad (12.15)$$

Poskusimo srednjo kvadratično napako ξ izraziti še nekoliko drugače. Vpeljemo vektor \mathbf{V} , ki predstavlja odstopanje utežnega vektorja od Wienerjevega optimalnega utežnega vektorja, oz. od koordinatnega izhodišča ravnine \mathbf{W} , za katerega velja

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^* = [v_0, v_1, \dots, v_L]^T \quad (12.16)$$

Zapišimo torej ξ v odvisnosti od \mathbf{V} , pri čemer mora veljati, da je vhodni signal stacionaren

$$\xi = \xi_{min} + (\mathbf{W} - \mathbf{W}^*)^T \mathbf{R} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^*) = \xi_{min} + \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} \quad (12.17)$$

Ob upoštevanju pravil; da velja za linearno semidefinitno matriko izraz $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T$; dejstva, da je skalar enak svoji transponirani vrednosti in ob izrazov (12.14) ter (12.15), lahko ugotovimo, da je zgornji izraz enak izrazu (12.12). Pri tem mora tudi veljati da je izraz $\mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} \geq 0$, saj ξ ne more zavzeti negativne vrednosti, ξ_{min} je lahko namreč različna od nič, ali nič. Če za omenjeni pogoj velja $\mathbf{V} \neq 0$, potem je matrika \mathbf{R} pozitivno definitna. Za gradient ξ potem velja

$$\nabla = \frac{d\xi}{dV} = \left[\frac{d\xi}{dv_0} \frac{d\xi}{dv_1} \dots \frac{d\xi}{dv_L} \right] = 2\mathbf{R}\mathbf{V} = \frac{d\xi}{dW} = 2(\mathbf{R}\mathbf{W} - \mathbf{P}) \quad (12.18)$$

Gradient funkcije ξ ostaja nespremenjen, saj se \mathbf{V} in \mathbf{W} razlikujeta le za konstanto. Oglejmo si še pomembno relacijo med signalom napake in vhodnim signalom. Če izraz (12.7) in ga pomnožimo z \mathbf{X}_k dobimo:

$$\varepsilon_k \mathbf{X}_k = d_k \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T \mathbf{W} \quad (12.19)$$

Sedaj nas zanima pričakovana vrednost zgornjega izraza v točki minimuma, ki je ob upoštevanju izrazov (12.10) (12.11) in (12.14) dobimo:

$$E[\varepsilon_k \mathbf{X}_k] = \mathbf{P} - \mathbf{R}\mathbf{W} = \mathbf{P} - \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{P} = 0 \quad (12.20)$$

V točki minimuma velja $\mathbf{W} = \mathbf{W}^*$, v tej točki pa ima zgornji izraz torej vrednost 0. Iz tega sledi, da sta v optimumu, oz. v točki optimalnih uteži digitalnega adaptivnega sita, signal napake in vhodni signal nekorelirana, torej ortogonalna.

Zanimivo si je pogledati tudi nekatere lastnosti površine, ki jo določa ploskev srednje kvadratične napake ξ . Ker je le ta odvisna od matrike \mathbf{R} , torej od komponent vhodnega signala, je potrebno analizirati lastnosti matrike \mathbf{R} . To bomo naredili s pomočjo lastnih vektorjev in lastnih vrednosti.

Pri tem izhajamo iz homogene enačbe

$$[\mathbf{R} - \lambda_n \mathbf{I}] \mathbf{Q}_n = [\mathbf{R} - \Lambda] \mathbf{Q}_n = 0 \quad (12.21)$$

Izraz (12.21) ima netrivialno rešitev za λ in \mathbf{Q}_n samo, če velja

$$\det[\mathbf{R} - \lambda_n \mathbf{I}] = 0 \quad (12.22)$$

Izraz (12.22) imenujemo karakteristična enačba matrice \mathbf{R} stopnje $L + 1$, ki da rešitve $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_L$, ki jih imenujemo lastne vrednosti matrice \mathbf{R} . Stolpični vektor \mathbf{Q}_n je n -ti lastni vektor matrice \mathbf{R} . Če izraz (12.21) preuredimo, lahko zapišemo matriko \mathbf{R} tudi drugače in sicer v normalni obliki

$$\mathbf{R}\mathbf{Q}_n = \lambda_n \mathbf{Q}_n \quad \text{ozioroma} \quad \mathbf{R}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\Lambda \quad \text{ozioroma} \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1} \quad (12.23)$$

Matrika Λ je diagonalna matrika lastnih vrednosti λ_n matrice \mathbf{R} , ki ležijo v diagonalni matrike, ostali členi pa imajo vrednost 0. Matrika \mathbf{Q} je matrika lastnih vektorjev matrice \mathbf{R} , ker stolpci matrice \mathbf{Q} predstavljajo lastne vektorje matrice \mathbf{R} . Tako Λ kot \mathbf{Q} sta kvadratni matrike dimenzije $L + 1$. Ker je matrika \mathbf{R} simetrična velja $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$. Posledično pridemo do zaključka, da so lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim λ_n in λ_m med seboj ortogonalni, torej velja

$$\mathbf{Q}_m^T \mathbf{Q}_n = 0 \quad (12.24)$$

To lahko matematično dokažemo če izraz (12.23) $\mathbf{R}\mathbf{Q}_n = \lambda_n \mathbf{Q}_n$ izrazimo npr. za dve lastni vrednosti λ_1 in λ_2 , eno enačbo transponiramo, pomnožimo z desne s \mathbf{Q}_2 oz. z leve s \mathbf{Q}_1^T in upoštevamo $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$ ter $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Če pa se neka lastna vrednost λ_n ponovi večkrat, potem naj bodo ustrezni lastni vektorji izbrani tako, da bodo tudi ti ortogonalni. Potem je matrika \mathbf{Q} ortogonalna. Če lastne vektorje še normiramo glede na amplitudo, potem je matrika \mathbf{Q} ortonormalna in lahko zapišemo

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad \text{ozioroma} \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \quad (12.25)$$

Lastne vrednosti λ_n matrice \mathbf{R} so realne in večje ali enake 0. To trditev lahko tudi utemeljimo. Omenili smo že, da mora veljati

$$\mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} \geq 0 \quad (12.26)$$

potem lahko ob upoštevanju izrazov (12.23) in (12.25) ter ob zamenjavi vektorja \mathbf{V} z vektorjem \mathbf{Q}_n za vsakega od $L + 1$ primerov zapišemo

$$\mathbf{Q}^T (\mathbf{Q} \Lambda \mathbf{Q}^T) \mathbf{Q} \geq 0 \quad \text{ozioroma} \quad \Lambda \geq 0 \quad (12.27)$$

Lastne vrednosti in lastni vektorji imajo tudi določen geometrijski pomen. V splošnem imamo $L + 2$ dimenzionalni prostor ($L + 1$ uteži in ξ). Obravnava se osredotoči na trodimenzionalni prostor, torej $L = 1$, to pomeni, da imamo dve uteži. Dobljeni rezultat bomo potem posplošili. Površina srednje kvadratične napake ξ predstavlja paraboloid. Če ta paraboloid razrežemo na rezine vzporedno z osnovno ravnino, ki jo določata uteži w_0 in w_1 , potem dobimo koncentrične elipse, za katere je značilna konstantna vrednost ξ . Na podlagi izraza (12.12) lahko torej zapišemo

$$\mathbf{W}^T \mathbf{R} \mathbf{W} - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W} = K1 \quad (12.28)$$

pri čemer je $K1$ konstanta. Ker pa lahko namesto vektorja \mathbf{W} uporabimo tudi vektor \mathbf{V} velja na podlagi izraza (12.17) tudi

$$\mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} = K2 \quad (12.29)$$

pri čemer je $K2$ sedaj neka druga konstanta. Izraz (12.29) predstavlja zapis elipse s središčem v izhodišču ravnine $v_0 v_1$. V tej novi ravnini poznamo poleg osnovnih osi tudi t. i. glavni osi $v'_0 v'_1$, ki sta pravokotni na vse elipse s konstantno vrednostjo ξ . Če predpostavimo, da velja $F(\mathbf{V}) = \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V}$ in če nas zanima gradient od F , ki je enak gradientu od ξ (F in ξ se namreč razlikujeta le za konstanto ξ_{min}), potem velja

$$\nabla = \left[\frac{dF}{dv_0} \frac{dF}{dv_1} \dots \frac{dF}{dv_L} \right]^T = 2\mathbf{R}\mathbf{V} \quad (12.30)$$

Katerikoli vektor, ki gre skozi izhodišče ravnine $\mathbf{V} = 0$ lahko zapišemo tudi kot $\mu\mathbf{V}$. Ker pa glavni osi gresta skozi to izhodišče in sta pravokotni na $F(\mathbf{V})$, lahko torej zapišemo

$$2\mathbf{R}\mathbf{V}' = \mu\mathbf{V}' \quad \text{oziroma} \quad \left[\mathbf{R} - \frac{\mu}{2}\mathbf{I} \right] \mathbf{V}' = 0 \quad (12.31)$$

Ta oblika zapisa je podobna izrazu (12.21), torej mora biti \mathbf{V}' lastni vektor matrike \mathbf{R} ali drugače, lastni vektor vhodne korelacijske matrike \mathbf{R} predstavlja glavne osi paraboloida srednje kvadratične napake ξ . To je vidno tudi na sliki 12.4. Osnovna ravnina je torej lahko podana s koordinatami w_n, v_n ali v'_n . Tako lahko tudi srednjo kvadratično napako ξ izrazimo v odvisnosti od vseh treh vrst uteži. To je razvidno iz izraza (12.32)

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_{min} + (\mathbf{W} - \mathbf{W}^*)^T \mathbf{R} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^*) \\ &= \xi_{min} + \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} \\ &= \xi_{min} + \mathbf{V}^T (\mathbf{Q} \Lambda \mathbf{Q}^T) \mathbf{V} \\ &= \xi_{min} + (\mathbf{Q}^T \mathbf{V})^T \Lambda (\mathbf{Q}^T \mathbf{V}) \\ &= \xi_{min} + \mathbf{V}'^T \Lambda \mathbf{V}' \end{aligned} \quad (12.32)$$

Iz ravnine \mathbf{W} smo torej prešli preko ravnine \mathbf{V} v ravnino \mathbf{V}' . Te prehode smo izvedli s transformacijama

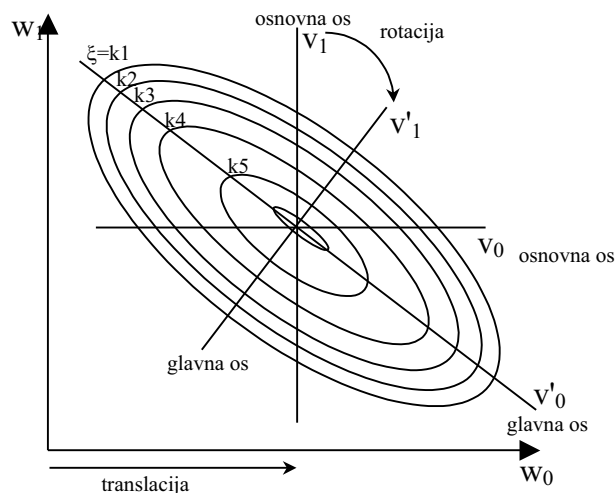
$$\begin{aligned} \text{translacija: } \mathbf{V} &= \mathbf{W} - \mathbf{W}^* \\ \text{rotacija: } \mathbf{V}' &= \mathbf{Q}^T \mathbf{V} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V} \end{aligned} \quad (12.33)$$

Da drži druga relacija v izrazu (12.33) lahko preverimo z gradientom ξ . Velja torej

$$\nabla = 2\Lambda \mathbf{V}' = 2[\lambda_0 v'_0, \lambda_1 v'_1, \dots, \lambda_L v'_L] \quad (12.34)$$

Iz zgornjega izraza je razvidno, da v primeru, ko je samo ena komponenta različna od nič, leži vektor gradienta vzdolž te osi, torej predstavlja \mathbf{V}' koordinatni sistem glavnih osi. Prvi in drugi odvod srednje kvadratične napake ξ vzdolž poljubne glavne osi lahko zapišemo z izrazom (12.35). Vidimo, da drugi odvod ξ po poljubni osi predstavlja torej pripadajočo dvojno vrednost lastne vrednosti matrike \mathbf{R} vzdolž poljubne glavne osi.

$$\frac{d\xi}{dv'_n} = 2\lambda_n v'_n \quad \text{ozioroma} \quad \frac{d\xi^2}{dv'^2_n} = 2\lambda_n \quad (12.35)$$



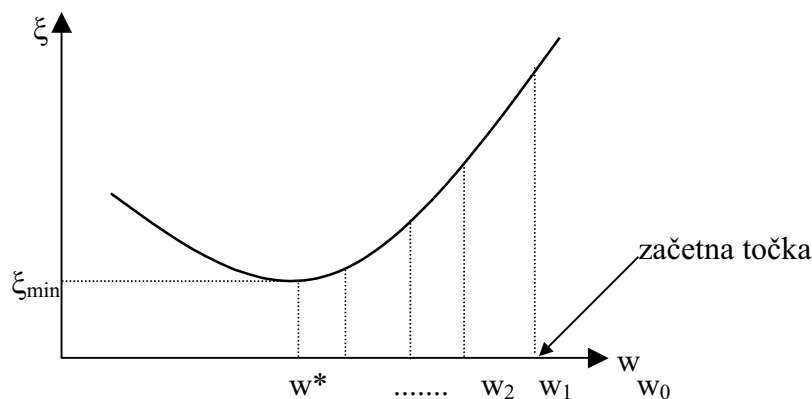
Slika 12.4: Koncentrične elipse paraboloida za $L = 1$ z nakazano translacijo in rotacijo

12.1 Osnovne značilnosti gradientne metode

Do sedaj smo predpostavili, da je oblika površine srednje kvadratične napake ξ znana funkcija. V resnici ta funkcija ni analitično določljiva, prav tako pa tudi niso znani parametri, ki določajo to površino. Zato jo moramo pravzaprav sami najprej ugotoviti in nato tudi poiskati njen optimum. Poznani sta dve metodi, s katerima lahko določimo minimum iskane površine. Prva metoda je Newtonova metoda, druga pa je metoda največje strmine. Pri obeh metodah bomo

uporabljali oceno gradienta za določanje smeri iskanja optimuma, ki nas bodo pripeljale do optimalne rešitve. Zato obe metodi spadata v razred gradientnih metod. Poleg gradientne metode, metode najhitrejšega spusta, poznamo tudi metodo najmanjših kvadratov, poznano pod imenom LMS (Least Mean Square) in niz metod naključnega značaja. Ti dve osnovni metodi se uporabljata v primerih, ko površina srednje kvadratične napake ξ ni kvadratna funkcija utežnega vektorja.

Najprej si oglejmo nekaj osnovnih lastnosti gradientne metode, metode, ki jo uporabljamo pri iskanju optimuma v dani, torej predpisani smeri. Zaradi lažje razumljivosti se zopet odrečemo splošnosti in se omejimo le na eno utež, ki pa sicer nima večjega praktičnega pomena. Dobljeno rešitev pa bomo potem posplošili. V danem primeru površina torej preide v parabolo na sliki 12.5.



Slika 12.5: Princip gradientne metode z enim utežnim vektorjem

Srednjo kvadratično napako ξ lahko torej zapišemo

$$\xi = \xi_{\min} + \lambda(w - w^*)^2 = \xi_{\min} + r_{00}(w - w^*)^2 \quad (12.36)$$

Iščemo torej w^* , postopek pa začnemo v poljubni točki w_0 . Naslednjo točko w_1 določimo tako, da w_0 spremenimo glede na gradient parabole. Korak, to je razdalja med w_n in w_{n+1} , torej ni konstanten temveč je obratno sorazmeren nagibu parabole ξ . To relacijo lahko zapišemo tudi z izrazom (12.37), kjer k predstavlja korak iteracije, parameter μ pa določa stabilnost in območje konvergence

$$w_{k+1} = w_k + \mu(-\nabla_k) = w_k - 2\mu\lambda(w_k - w^*) = (1 - 2\mu\lambda)w_k + 2\mu\lambda w^* \quad (12.37)$$

Pri tem smo upoštevali, da je gradient v primeru ene spremenljivke enak

$$\nabla_k = \frac{d\xi}{dw} = 2\lambda(w_k - w^*) \quad (12.38)$$

Izraz (12.37) je torej linearna diferenčna enačba prvega reda s konstantnimi koeficienti. Če bi izračunali nekaj prvih vrednosti za w_k , bi lahko na tej podlagi zapisali odvisnost med w_k in w_0 , ki jo podaja izraz (12.39).

$$w_k = w^* + (1 - 2\mu\lambda)^k(w_0 - w^*) = w^* + r^k(w_0 - w^*) \quad (12.39)$$

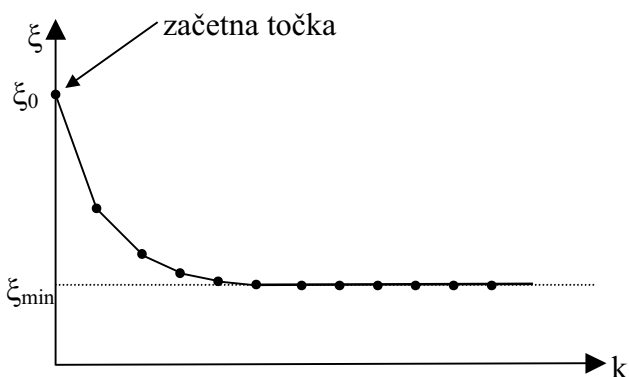
Parameter r predstavlja geometrijsko razmerje. Da bo adaptivni sistem stabilen mora biti njegova absolutna vrednost manjša od 1. Potem velja izraz (12.40) in posledično w_k konvergira v w^* .

$$1/\lambda > \mu > 0 \quad (12.40)$$

Vpeljimo sedaj še pojem krivulje učenja, ki jo prikazuje slika 12.6 in, ki predstavlja odvisnost srednje kvadratične napake ξ od števila korakov iteracije. Srednja kvadratična napaka ξ se z vsakim korakom iteracije zmanjšuje, torej lahko izraz (12.36) zapišemo tudi

$$\xi_k = \xi_{min} + \lambda(w_k - w^*)^2 = \xi_{min} + \lambda(w_0 - w^*)^2(1 - 2\mu\lambda)^{2k} = \xi_{min} + \lambda(w_0 - w^*)^2 r_{MSE} \quad (12.41)$$

Ker je razlika med w_k in w^* vedno manjša, ξ_k konvergira v ξ_{min} , kar je razvidno tudi iz slike 12.6. Očitno velja tudi $r_{MSE} = r^2$, za katerega je značilno, da nikoli ne more biti negativen, kar posledično pomeni, da ξ_k nikoli ne zaoscilira okoli ξ_{min} , temveč se mu postopno približuje samo z ene strani. Fizikalni pomen na spodnji krivulji imajo samo označene točke, ki jih učna krivulja povezuje. Vrednosti krivulje med točkami nimajo nikakršnega pomena.



Slika 12.6: Učna krivulja $\xi_k = f(k)$ v primeru z eno utežjo

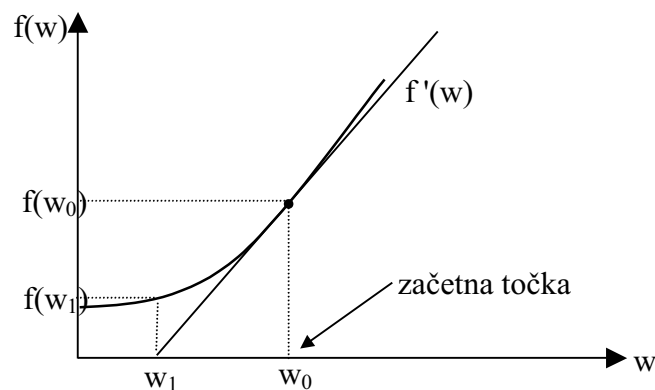
12.2 Newtonova metoda

Sedaj, ko smo spoznali splošne lastnosti gradientne metode si lahko ogledamo lastnosti vsake izmed omenjenih metod posebej. Za Newtonovo metodo velja

$$r = 1 - 2\mu\lambda = 0, \quad \mu = \frac{1}{2\lambda} \quad (12.42)$$

Pravimo, da je v tem primeru gradientni postopek kritično dušen. Srednja kvadratična napaka ξ konvergira v ξ_{min} v enem samem koraku. Postopek začnemo v poljubni točki w_0 , v kateri izračunamo prvi odvod, s pomočjo katerega določimo naslednjo točko, w_1 . Le ta je določena s presečiščem tangente na krivuljo v točki $f(w_0)$ in abscisne osi, kot to prikazuje slika 12.7. Velja torej

$$f'(w_0) = \frac{f(w_0)}{w_0 - w_1} \quad \text{oz.} \quad w_1 = w_0 - \frac{f(w_0)}{f'(w_0)} \quad \text{oz.} \quad w_{k+1} = w_k - \frac{f(w_k)}{f'(w_k)} \quad (12.43)$$



Slika 12.7: Newtonova metoda iskanja ničel $f(w)$

Iz izraza (12.43) je razvidno, da je konvergenca Newtonove metode odvisna od začetne točke w_0 in od narave (kriterijske) funkcije $f(w)$. Newtonova metoda izredno hitro konvergira proti optimalni vrednosti tudi v primerih z velikim številom parametrov. Newtonova metoda predstavlja v bistvu postopek iskanja ničel funkcije $f(w) = 0$. Ker nas zanima izraz $\nabla\xi = 0$, oz. v enodimenzionalnem primeru $\xi'(w) = 0$, lahko $f(w)$ nadomestimo z $\xi'(w)$ in izraz (12.43) zapišemo v drugačni obliki

$$w_{k+1} = w_k - \frac{\xi'(w_k)}{\xi''(w_k)} \quad (12.44)$$

Iz enačbe vidimo, da imamo opravka tudi z drugim odvodom. V določenih primerih pa sicer enostavna Newtonova metoda postane precej kompleksna. Ker v praksi nimamo na voljo analitičnega izraza za $\xi(w)$, pomeni, da gradienta $\xi'(w)$ in njegovega odvoda $\xi''(w)$ ne moremo točno

določiti, ampak ju lahko le ocenimo. Postopek iskanja optimuma je tudi zahtevnejši, kriterijska funkcija ni kvadratna funkcija utežnega vektorja, temveč je višjega reda. V teh primerih se postopek približevanja optimumu ne konča v enem samem koraku, temveč je potrebnih nekaj korakov več. V teh primerih je pomembna tudi izbira startne, začetne točke iskanja optimuma, saj ob napačno izbrani začetni točki, Newtonova metoda ne najde optimalne točke.

Posplošimo sedaj še enodimenzionalni primer iskanja optimuma. Izraz (12.18) pomnožimo z leve z $1/2\mathbf{R}^{-1}$ in z upoštevanjem izraza (12.14) dobimo po ustrezni preureditvi sledeči izraz:

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{W} - 1/2\mathbf{R}^{-1}\nabla \quad \text{oziroma} \quad \mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - 1/2\mathbf{R}^{-1}\nabla_k = \mathbf{W}_k - \mu\mathbf{R}^{-1}\nabla_k \quad (12.45)$$

Dobili smo torej posplošen izraz n dimenzionalnega prostora. Indeks k pri gradientu pomeni, da je z gradientom določenim v k -ti točki lahko določimo naslednjo, t. j. $k+1$ točko. V zadnjem izrazu smo $1/2$ nadomestili z μ zato, da lahko ta izraz primerjamo z izrazom v enodimenzionalnem prostoru. Tudi tokrat parameter μ , ki je brez dimenzij, določa področje konvergence. Če je površina srednje kvadratične napake ξ še vedno drugega reda in $\mu = 1/2$, zadostuje en sam korak za to, da dosežemo optimalno točko. Sicer pa veljati da mora ležati korak μ v območju $0 < \mu < 1$. Kot je razvidno iz slike 12.9a metoda ne sledi smeri gradienta, ki je pravokotna na tangento elipse v točki trenutnega iskanja. Smer iskanja sovpada s smerjo gradientov le v karakterističnih, lastnih oseh konveksne funkcije, torej v primeru, ko začetni vektor uteži \mathbf{W}_0 leži na eni izmed glavnih osi prostora ξ . Z nadomestitvijo gradienta v izrazu (12.45) z izrazom (12.18) in s preureditvijo izraza, dobimo drugo obliko izraza (12.45), ki je primerljiva z izrazom enodimenzionalnega primera (12.39).

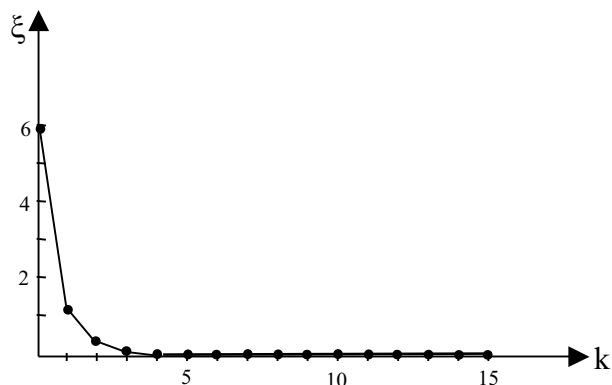
$$\mathbf{W}_{k+1} = (1 - 2\mu)\mathbf{W}_k + 2\mu\mathbf{W}^* \quad \text{oziroma} \quad \mathbf{W}_k = \mathbf{W}^* + (1 - 2\mu)^k(\mathbf{W}_0 - \mathbf{W}^*) \quad (12.46)$$

Če si pogledamo sedaj še učno krivuljo in izhajamo iz gornjega izraza in relacije $\xi = \xi_{min} + \mathbf{V}^T\mathbf{R}\mathbf{V}$ (12.17), dobimo srednjo kvadratično napako v k -tem koraku ξ_k , ki je podana tudi na sliki 12.8

$$\xi_k = \xi_{min} + (1 - 2\mu)^{2k}\mathbf{V}_0^T\mathbf{R}\mathbf{V}_0 \quad (12.47)$$

oziroma

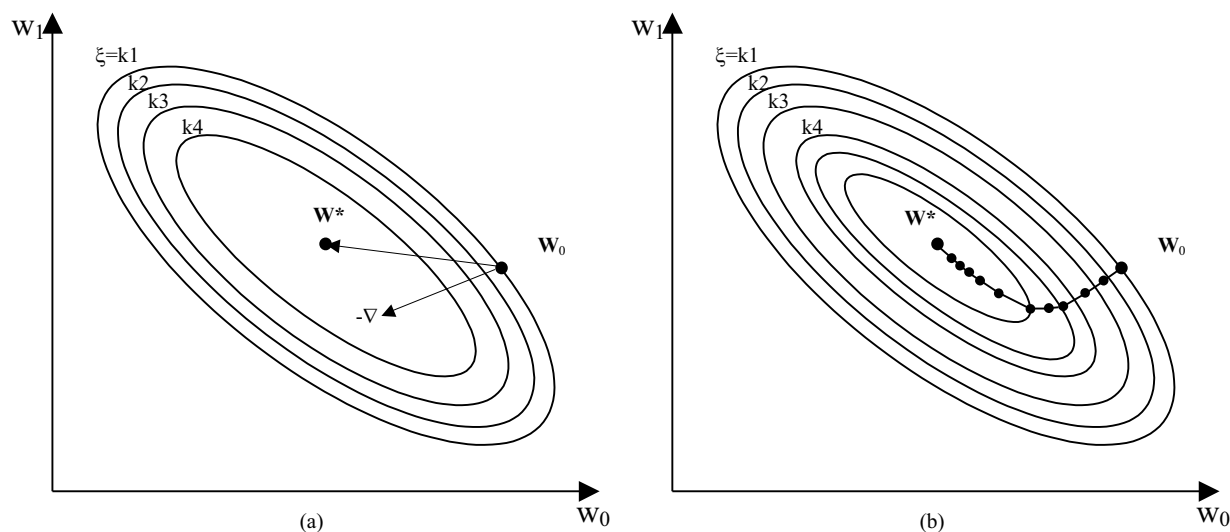
$$r_{MSE} = r^2 = (1 - 2\mu)^2 \quad (12.48)$$



Slika 12.8: Učna krivulja srednje kvadratične napake ξ_k v k -tem koraku za Newtonovo metodo

12.3 Metoda največjega vzpona

Metoda največjega vzpona je pogosto uporabljena metoda med znanimi gradientnimi metodami. Za to metodo je značilno, da se vrednosti komponent utežnega vektorja \mathbf{W} z vsakim korakom iteracije vedno spreminjajo v smeri negativnega gradienta, to je v smeri najhitrejšega padanja srednje kvadratične napake ξ , kar je razvidno tudi iz slike 12.9b. Metoda je počasnejša v primerjavi z Newtonovo metodo, ima pa to tudi svoje prednosti. Počasnejša adaptacija namreč zagotavlja tudi filtriranje, ki zmanjša vpliv šuma, ki je posledica dejstva, da površina ni vnaprej znana temveč je določena z meritvami gradienta ξ , kar namreč prinaša napako, ki se pojavi v obliki šuma. Prav zaradi tega ima v mnogih aplikacijah ta metoda prednost pred Newtonovo metodo. Za algoritem metode z največjo strmino velja relacija v izrazu (12.49). Upoštevali smo tudi izraza (12.14) in (12.18).



Slika 12.9: Algoritem iskanja optimuna za (a) Newtonovo metodo in (b) metodo največje strmine

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k + \mu(-\nabla_k) = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})\mathbf{W}_k + 2\mu\mathbf{R}\mathbf{W}^* \quad (12.49)$$

Konstanta μ določa velikost koraka v smeri iskanja optimuma in ima dimenzijo recipročne vrednosti signala, predpostavili pa smo ponovno kvadratno odvisnost srednje kvadratične napake ξ od utežnega vektorja \mathbf{W} . Iz gornjega izraza je tudi razvidno, da matrika \mathbf{W}_k ni čista diagonalna matrika, saj se pojavlja tudi člen $2\mu\mathbf{R}$ v prvem delu izraza. Posledica tega je, da matrika \mathbf{W}_k ni diagonalna, saj tudi matrika \mathbf{R} ni diagonalna, to pa se izraža v prisotnosti križne korelacije med elementi matrike \mathbf{W}_k . V primerjavi z izrazom (12.46) za Newtonovo metodo vidimo, da tam križna korelacija ni bila prisotna (odsotnost matrike \mathbf{R} v izrazu), pojavi se torej šele sedaj. S transformacijo $\mathbf{V} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^*$ preide izraz (12.49) v

$$\mathbf{V}_{k+1} = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})\mathbf{V}_k \quad (12.50)$$

z rotacijo $\mathbf{V} = \mathbf{Q}\mathbf{V}'$ in množenjem enačbe (12.48) z \mathbf{Q}^{-1} z leve pa dobimo

$$\mathbf{V}'_{k+1} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})\mathbf{Q}\mathbf{V}'_k = (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{Q} - 2\mu\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{Q})\mathbf{V}'_k = (\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)\mathbf{V}'_k \quad (12.51)$$

Ker sta \mathbf{I} in Λ sedaj diagonalni matriki, smo s translacijo in rotacijo odpravili vpliv križne korelacije. Zato pa nismo več v osnovnem koordinatnem sistemu temveč v koordinatnem sistemu, ki ga določajo glavne osi avtokorelacijske matrike signalnega prostora. S popolno indukcijo, ki smo jo do sedaj že uporabili takrat, ko smo želeli pokazati odvisnost k -tega elementa vektorja \mathbf{W} oz. \mathbf{V} , od začetne izbrane točke adaptacije, dobimo izraz, ki nakazuje to odvisnost:

$$\mathbf{V}'_k = (\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)^k \mathbf{V}'_0 \quad (12.52)$$

Da bo sistem stabilen mora veljati $\mathbf{I} - 2\mu\Lambda < 1$ oz. mora vrednost izraza limitirat proti nič, kar bi lahko zapisali tudi v matrični obliki, katere elementi glavne diagonale so posamezne limite, ostali členi pa so enaki nič. Pogoj za stabilnost lahko tudi zapišemo v obliki:

$$0 < \mu < 1/\lambda_{max} \quad (12.53)$$

V tem velja, da gre v limitnem procesu, ko gre k proti neskončnosti \mathbf{V}'_k proti nič oz. \mathbf{W}_k proti \mathbf{W}^* .

Splošen izraz (12.49) poskusimo izraziti še v naravnih, netransformiranih koordinatah. Ob upoštevanju izraza (12.52), ki ga pomnožimo s \mathbf{Q} z leve strani in upoštevanju transformacije in rotacije v izrazu (12.33) $\mathbf{V}' = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{W} - \mathbf{W}^*)$ in izraza (12.23) dobimo:

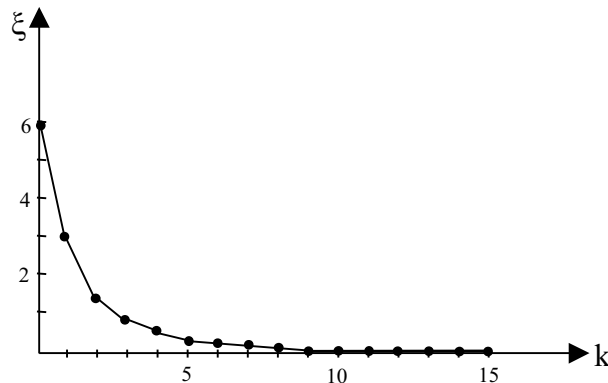
$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_k &= \mathbf{W}^* + \mathbf{Q}(\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)^k \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{W}_0 - \mathbf{W}^*) \\
&= \mathbf{W}^* + (\mathbf{Q}\mathbf{I}\mathbf{Q}^{-1} - 2\mu\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1})^k(\mathbf{W}_0 - \mathbf{W}^*) \\
&= \mathbf{W}^* + (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})^k(\mathbf{W}_0 - \mathbf{W}^*)
\end{aligned} \tag{12.54}$$

Tudi v tem primeru si pogledjmo, kako je z učno krivuljo. Tudi tokrat izhajajmo iz izraza (12.17) vendar uporabimo namesto osnovnih, glavne osi. Z upoštevanjem izraza (12.52) in komutativnosti diagonalnih matrik dobimo ξ_k , za katero je učna krivulja prikazana na sliki 12.10.

$$\begin{aligned}
\xi_k &= \xi_{min} + \mathbf{V}'^T \Lambda \mathbf{V}' \\
&= \xi_{min} + [(\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)^k \mathbf{V}'_0]^T \Lambda (\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)^k \mathbf{V}'_0 \\
&= \xi_{min} + \mathbf{V}'_0{}^T (\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)^{2k} \Lambda \mathbf{V}'_0 \\
&= \xi_{min} + \sum v'_{0n}{}^2 \lambda_n (1 - 2\mu\lambda_n)^{2k}
\end{aligned} \tag{12.55}$$

oziroma

$$(r_{MSE})_n = r_n^2 = (1 - 2\mu\lambda_n)^2 \tag{12.56}$$



Slika 12.10: Učna krivulja srednje kvadratične napake ξ_k v k -tem koraku za metodo največje strmine

12.4 Primerjava Newtonove metode in metode največje strmine

V tem podpoglavju napravimo primerjavo obeh gradientnih metod. Tu se nahaja le zgoščen seznam lastnosti, brez daljših opisov, saj smo večino lastnosti obeh metod že obdelali v prejšnjih podpoglavjih. Namen tega podpoglavja je le skoncentriran pregled določenih lastnosti.

(a) število potrebnih iteracij

Pri Newtonovi metodi ponavadi zadostuje že en sam korak (izjemoma več), medtem, ko je pri metodi največje strmine potrebno veliko več korakov, da najdemo optimum funkcije ξ . Nevarnost izbire začetne točke obstoja pri uporabi Newtonove metode pri funkcijah ξ višjega reda, kjer lahko nastopi rešitev v enem od več lokalnih minimumov ali maximumov, to pa pomeni, da ob napačno izbrani začetni točki W_0 dosežemo le lokalni, namesto globalni minimum.

(b) Smer dostopa

Pri Newtonovi metodi je smer iskanja optimuma direktna in le pogojno v smeri negativnega gradienta (če optimum leži na eni izmed glavnih osi), medtem, ko je pri metodi največje strmine vedno v smeri negativnega gradienta.

(c) Učna krivulja

ξ_k pri Newtonovi metodi upada hitreje kot pri metodi največje strmine. Vzrok za to je potrebno poiskati v matriki \mathbf{R} , s pomočjo katere Newtonova metoda poišče, hitrejšo, direktno pot do optimuma namesto gradientne smeri.

(d) Uporabnost

Pri obeh metodah se ob vsaki iteraciji spremenijo vse komponente utežnega vektorja \mathbf{W} . Velja, da je implementacija Newtonove metode zahtevnejša od implementacije metode največje strmine, ki je zaradi tega bolj pogosto uporabljena.

12.5 Ocena gradienta srednje kvadratične napake ξ in vpliv napake ocene na adaptacijo

Sprva smo predpostavili, da poznamo analitičen izraz površine hiperparaboloida, nato smo ugotovili, da moramo to površino pravzaprav šele določiti z merjenji, za katera pa smo zopet predpostavili, da so dovolj natančna. V realnih sistemih pa ta merjenja niso povsem natančna, zato moramo upoštevati tudi možno napako, ki je posledica netočnih meritev. V tem primeru govorimo o oceni, ki temelji na statistiki omejenega števila vzorcev. Ta napaka, ki je posledica ocene meritev, se v sistemih odraža kot dodaten šum.

Oglejmo si posplošeno metodo merjenja diferenčnih koeficientov. Iz nje je izpeljanih več drugih metod, npr. trenutna metoda kot osnova ocene gradienta LMS algoritma, ki temelji

na predpostavkah, veljavnih na hiperpovršino srednje kvadratične napake. Predpostavimo ponovno, da imamo sistem z eno samo utežjo. Potem lahko na podlagi izraza (12.36) zapišemo

$$\xi = \xi_{min} + \lambda(w - w^*)^2 = \xi_{min} + \lambda v^2 \quad (12.57)$$

Za prvi in drugi odvod ξ potem velja

$$\frac{d\xi}{dv} = 2\lambda v \quad \text{in} \quad \frac{d^2\xi}{dv^2} = 2\lambda \quad (12.58)$$

Kot je prikazano na sliki 12.11 lahko oba odvoda tudi ocenimo na podlagi centralne vrednosti, tako dobimo

$$\frac{d\xi}{dv} \approx \frac{\xi(v + \delta) - \xi(v - \delta)}{2\delta} \quad \text{in} \quad \frac{d^2\xi}{dv^2} \approx \frac{\xi(v + \delta) - 2\xi(v) + \xi(v - \delta)}{\delta^2} \quad (12.59)$$

Ti približki postanejo točni, ko gre δ proti nič ali pa je ξ kvadratna funkcija uteži v . Če bi torej izraz (12.57) odvajali na podlagi definicije (12.59), bi prav tako dobili točen rezultat, kot v izrazu (12.58). Sedaj pa predpostavimo, da se med trajanjem meritve gradienta ξ , spreminja vrednost uteži v med $v - \delta$ in $v + \delta$, kar pomeni, da ta da nikoli ne zavzame dejanske vrednosti v , ter, da je število vzorcev z vrednostjo $v - \delta$ enako številu vzorcev z vrednostjo $v + \delta$, to je N . Na osnovi te predpostavke lahko v splošnem določimo nenatančnost γ za površino drugega reda, kot sledi

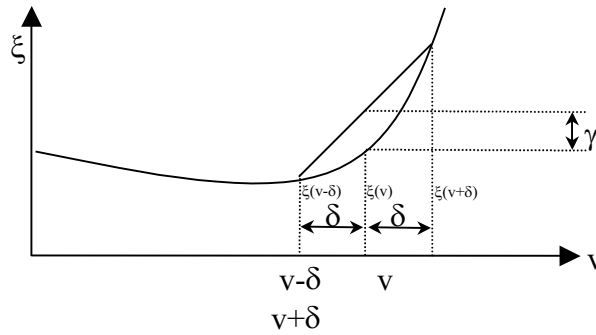
$$\gamma = 1/2[\xi(v - \delta) + \xi(v + \delta)] - \xi(v) = 1/2[2\xi_{min} + \lambda(v - \delta)^2 + \lambda(v + \delta)^2] - (\xi_{min} + \lambda v^2) = \lambda\delta^2 \quad (12.60)$$

Iz izraza (12.60), je razvidno, da je za površino drugega reda nenatančnost γ konstantna in ni odvisna od uteži v . Vpeljimo sedaj pojem perturbacije P , ki predstavlja brezdimenzijsko veličino merjene ocene gradienta in je definirana kot

$$P = \frac{\gamma}{\xi_{min}} = \frac{\lambda\delta^2}{\xi_{min}} \quad (12.61)$$

Zgornji izraz dejansko predstavlja povprečno nenatančnost, normirano z najmanjšo možno srednjo kvadratično napako. Pri Newtonovi metodi potrebujemo tudi drugi odvod. Kot je razvidno iz izraza (12.59) bi potrebovali še N vzorcev pri vrednosti v . Srednji člen v izrazu (12.59) sicer prispeva k zmanjšanju povprečne perturbacije, je pa v primeru površine drugega reda konstanten in ga zato v praktičnih primerih tudi zanemarimo.

Sedaj preidimo v večdimenzionalni prostor. Na sliki 12.12 je prikazan dvodimenzionalni primer. V tem primeru velja izraz (12.32), zato lahko zapišemo:

Slika 12.11: Merjenje odvoda $\xi'(v)$ za enodimenzionalni primer

$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi_{min} + \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} \\
 &= \xi_{min} + [v_0 \ v_1] \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} \\ r_{10} & r_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} \\
 &= \xi_{min} + r_{00}v_0^2 + r_{11}v_1^2 + 2r_{01}v_0v_1
 \end{aligned} \tag{12.62}$$

Parcialne odvode lahko neodvisno merimo vzdolž posamezne osi in tako dobimo delne normalizirane nenatančnosti oz. perturbacije

$$P_0 = \frac{r_{00}\delta^2}{\xi_{min}} \quad \text{oziroma} \quad P_1 = \frac{r_{11}\delta^2}{\xi_{min}} \tag{12.63}$$

Skupna perturbacija P je potem povprečna vrednost obeh perturbacij:

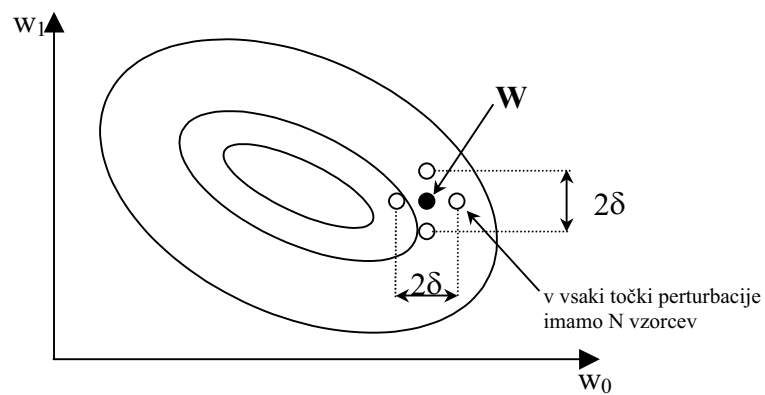
$$P = P_0 + P_1 = \frac{\delta^2}{\xi_{min}} \frac{r_{00} + r_{11}}{2} \tag{12.64}$$

V izrazu (12.64) predstavlja vsota v drugem števcu vsoto diagonalnih členov matrike \mathbf{R} in sicer v primeru dvodimenzionalnega signalnega prostora. Izraz (12.64) lahko posplošimo za primer $L + 1$ dimenzionalnega prostora:

$$P = \frac{\delta^2}{\xi_{min}} \frac{\sum_{n=0}^L \lambda_n}{L + 1} \tag{12.65}$$

Ker pa drugi del izraza (12.65) predstavlja povprečno vrednost lastnih vrednosti matrike \mathbf{R} lahko zapišemo tudi

$$P = \frac{\delta^2 \lambda_{av}}{x_{min}} \tag{12.66}$$



Slika 12.12: Merjenje gradienta $\nabla\xi$ za dvodimenzionalni primer

Literatura

- [1] Ben Noble, James W. Daniel, *Applied Linear Algebra: Third edition*, Prentice Hall International UK Limited, London, 1988.
- [2] Alston S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell Publishing Company, New York, Toronto, London, first edition, 1964.
- [3] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John-Wiley & Sons, New York, Chichester, sixth edition, 1988.
- [4] L.E. Franks, *Signal Theory - Revised edition*, Dowden&Culver, Inc., Stroudsburg, PA. Revised edition, 1981.
- [5] Jae S. Lim, Alan V. Oppenheim -editors, *Advanced Topics in Signal Processing*, Prentice Hall Signal processing Series, Inc., Stroudsburg, PA. Revised edition, 1981.
- [6] Simon Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall Information and system science Series, Inc., London, Sydney, Toronto, Second edition, 1991.
- [7] Todd K.Moon, Wynn C. Stirling, *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ. 07458, Second edition, 2000.
- [8] John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis, *Digital Signal Processing Principles, Algorithms, and Applications*, Macmillan Publishing Company, New York, 10022, Second edition, 1988.
- [9] Maurice Bellanger, *Digital Processing of Signals Theory and Practice*, John-Wiley&Sons, New York, Brisbane, Toronto, Reprinted April 1988.
- [10] Huibert Kwakernaak, Raphael Sivan, *Modern Signals and Systems*, Prentice Hall, International Edition., New York, London, 1991.
- [11] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, *Discrete Time Signal Processing*, Prentice Hall, Signal processing Series, Inc., 1989.
- [12] Andrej Kobal, Rudi Sušnik, *Seminar pri DOS I*, 2000.

- [13] Emmanuel C. Ifeachor, Barrie W. Jervis, *Digital Signal Processing, A practical Approach*, Addison Wesley Publishing Company, 1993.