

MATEMATIKA IV

odgovori na ustna vprašanja

Šolsko leto 2008 / 2009
Izvajalec Tomaž Slivnik

Avtor dokumenta Mojca Slivnik
Sodelavci

UREJANJE DOKUMENTA

VERZIJA 01 REVIZIJA 01
DATUM 4. 6. 2009

ZADNJI POPRAVLJAL
PREGLEDAL

OPOMBE

POPRAVKI

www.stromar.si
zbirka študijske literature na spletu

v dokumentu lahko obstajajo napake

Izpitna vprašanja iz matematike 4

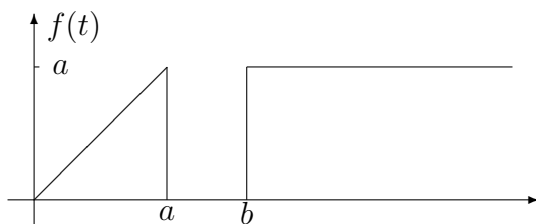
(prof. Slivnik)

1. Kako je definirana Fourierova transformacija? Kdaj obstaja?
2. Naštejte nekaj lastnosti Fourierove transformacije!
3. Pokažite, čemu je enako $\mathcal{F}\{f(t-a)\}$ in $\mathcal{F}\{e^{iat} \cdot f(t)\}$!
4. Odvajanje pri Fourierovi transformaciji (odvajanje v prostoru t in prostoru ω).
5. Ali lahko na funkciji $e_+^{-t} = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ uporabite izrek $\mathcal{F}[f'(t)] = -i\omega\mathcal{F}[f(t)]$? Utemeljite!
6. Inverzna Fourierova transformacija.
7. Konvolucija in njene lastnosti.
8. Parsevalova enačba.
9. Fourierova sinusna transformacija in njene lastnosti.
10. Fourierova kosinusna transformacija in njene lastnosti.
11. Določite Fourierovo kosinusno transformacijo funkcije e^{-t} !
12. Definicija Laplaceove transformacije. Kdaj obstaja?
13. Čemu je enako $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$?
14. Navedite zadostne pogoje za eksistenco Laplaceove transformacije! Ali poznate kakšno funkcijo, za katero Laplaceova transformacija ne obstaja?
15. Laplaceova transformacija odvoda in integrala.
16. Kompleksna inverzna formula za Laplaceovo transformacijo.
17. Kako izračunamo inverzno Laplaceovo transformacijo s pomočjo residuumov?
18. Izračunajte $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$ s pomočjo residuumov!

19. Kako rešujemo navadne diferencialne enačbe s pomočjo Laplaceove transformacije? Primer: $y'' + \omega^2 y = r(t)$; $y(0) = y_0$; $y'(0) = y'_0$.
20. Opišite iskanje inverzne Laplaceove transformacije s pomočjo razcepa na parcialne ulomke!
21. Reševanje sistemov diferencialnih enačb s pomočjo Laplaceove transformacije. Primer:

$$\begin{aligned} \dot{x} + x &= 0; & x(0) &= 0, \\ \dot{y} + 2y &= r(t); & y(0) &= 0. \end{aligned}$$

22. Odvajanje in integriranje Laplaceovih transformacij.
23. Z Laplaceovo transformacijo rešite enačbo $t\dot{x}(t) + x(t) = 2t$.
24. Konvolucija in Laplaceova transformacija.
25. Čemu je enako $\mathcal{L}\{f(t-a)u_a(t)\}$?
26. Zapišite analitično funkcijo in poiščite njeno Laplaceovo transformacijo!



27. Laplaceova transformacija in periodične funkcije?
28. Gama funkcija: definicija in lastnosti.
29. Pokažite, da je $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$!
30. Izračunajte $\int_0^\infty e^{-x^n} dx$!
31. Funkcija beta.
32. Kako rešujemo diferencialne enačbe s pomočjo vrst?
33. Rešite enačbo $xy' - y = 0$ s pomočjo vrst!
34. Legendrova diferencialna enačba in njene rešitve.
35. Besselova enačba in njene rešitve.

36. Lastnosti Besselovih funkcij.
37. Ortogonalni sistemi funkcij.
38. Kako je z ortogonalnostjo Legendrovih polinomov in Besselovih funkcij?
39. Polinomi Čebiševa.
40. Laguerrovi polinomi.
41. Hermitovi polinomi.
42. Poiščite Hermitov polinom $H_1(x)$, če veste, da je $H_0(x) = 1$, H_0 in H_1 pa sta ortogonalna z ustrezno utežjo!
43. Problem brahistohrone.
44. Pojem funkcionala.
45. Kako je definiran lokalni ekstrem funkcionala?
46. Funkcionalni za funkcije dveh spremenljivk.
47. Kako izgleda izoperimetričen problem?
48. Osnovni izrek variacijskega računa.
49. Eulerjeva diferencialna enačba.
50. Integracija Eulerjeve diferencialne enačbe.
51. Eulerjeva diferencialna enačba za primer , ko je $f = f(x, y')$.
52. Eulerjeva diferencialna enačba za primer , ko je $f = f(y, y')$.
53. Rotacijska ploskev z najmanjšo površino.
54. Variacijski problem za več funkcij.
55. Reševanje izoperimetričnega problema.
56. Direktne metode variacijskega računa.
57. Poiščite krivuljo, ki veže dve točki in ima najmanjšo dolžino.
58. Opišite definicijsko območje funkcionala $I[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y')dx$.
59. Kaj je ε -okolica funkcije $y(x)$?

60. Kako izgleda kvadratni funkcional?
61. Rešite variacijski problem za funkcional $I = \int_0^1 (y^2 + 2xy') dx$; $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.
62. Kaj je to parcialna diferencialna enačba? Navedite nekaj primerov!
63. Zapišite splošno linearno parcialno diferencialno enačbo drugega reda za $u = u(x, y)$!
64. Napišite parcialne diferencialne enačbe elektromagnetnega polja!
65. Klasificirajte linearne parcialne diferencialne enačbe drugega reda!
66. Kakšne dodatne pogoje je treba predpisati pri enačbah posameznega tipa, da je rešitev enolično določena?
67. Enačba za nihanje strune. Rešite jo z metodo separacije spremenljivk!
68. Kaj so to stojni valovi, lastne vrednosti in lastne funkcije strune?
69. d'Alambertova rešitev enačbe za nihanje strune?
70. Enačba za prevajanje toplote - kako izgleda in kakšne vrste dodatnih pogojev moramo podati?
71. Rešite enačbo za prevajanje toplote skozi tanko palico - z metodo separacije spremenljivk!
72. Enačba za prenos toplote v neskončnem sredstvu - rešite jo s pomočjo Fourierovega integrala!
73. Dvodimenzijska valovna enačba - kako jo rešimo s separacijo spremenljivk?
74. Reševanje telegrafске enačbe z metodo separacije spremenljivk.
75. Enačba za nihanje okrogle membrane.
76. Laplaceova enačba - kako izgleda? Pri kakšnih dodatnih pogojih jo rešujemo?
77. Rešite Laplaceovo enačbo za notranjost kroga!
78. Reševanje valovne enačbe s pomočjo Laplaceove transformacije.

79. Reševanje enačbe za prenos toplote s pomočjo Laplaceove transformacije.
80. Rešite Laplaceovo enačbo v krogelnem koordinatnem sistemu! Poiščite le $u = u(r, \varphi)$!

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0$$

81. Reševanje Laplaceove enačbe v pravokotnih koordinatah.
82. Reševanje nehomogene valovne enačbe.
83. Reševanje parcialnih diferencialnih enačb z nehomogenimi robnimi pogoji.
84. Kakšne vrste dogodki se lahko zgodijo pri slučajnem poskusu?
85. Kaj je elementaren dogodek?
86. Navedite statistično definicijo verjetnosti in klasično definicijo verjetnosti!
87. Računanje z dogodki - kakšne relacije in operacije poznate? Kako so definirane?
88. Kakšni zakoni veljajo za računanje z dogodki? Kdaj sta dva dogodka nezdružljiva?
89. Definirajte popoln sistem elementarnih dogodkov!
90. Verjetnost vsote dveh ali treh dogodkov.
91. Kako je definirana pogojna verjetnost? Kako izračunamo verjetnost produkta dveh dogodkov?
92. Kdaj sta dva dogodka A in B med seboj neodvisna? Kaj velja za $\bar{A}$ in $\bar{B}$?
93. Navedite osnovni zakon kombiniranja!
94. Variacije.
95. Permutacije.
96. Kombinacije.

97. Formula popolne verjetnosti.
98. Bayesova formula.
99. Definirajte pojem slučajne spremenljivke! Kakšne vrste slučajnih spremenljivk poznate?
100. Na kakšne načine lahko podamo porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke?
101. Kako je definirana porazdelitvena funkcija in kakšne lastnosti ima?
102. Verjetnostna funkcija diskretne slučajne spremenljivke in njena zveza s porazdelitveno funkcijo?
103. Bernoullijeva slučajna spremenljivka.
104. Binomska slučajna spremenljivka.
105. Kako določimo najverjetnejši izid binomske slučajne spremenljivke?
106. Poissonova porazdelitev.
107. Zvezne slučajne spremenljivke in njihove lastnosti.
108. Enakomerna zvezna porazdelitev.
109. Gaussova porazdelitev.
110. Standardizirana normalna porazdelitev. Kako jo lahko uporabimo pri obravnavi splošne normalne porazdelitve?
111. Matematično upanje - kako je definirano za različne vrste slučajnih spremenljivk?
112. Izračunajte $E(x)$ za Poissonovo porazdelitev!
113. Izračunajte $E(x)$ za normalno porazdelitev!
114. Izračunajte $E(x)$ za binomsko porazdelitev!
115. Disperzija in standardna deviacija slučajne spremenljivke.
116. Izračunajte disperzijo za Poissonovo porazdelitev!
117. Izračunajte disperzijo za enakomerno porazdeljeno zvezno spremenljivko!

- 118. Lastnosti matematičnega upanja.
- 119. Kdaj sta dve slučajni spremenljivki nekorelirani? Kako je pojem koreliranosti povezan s pojmom neodvisnosti?
- 120. Lastnosti disperzije slučajnih spremenljivk.
- 121. Izračunajte disperzijo binomske slučajne spremenljivke!
- 122. Momenti slučajnih spremenljivk.
- 123. Povezava med začetnimi in centralnimi momenti slučajne spremenljivke.
- 124. Kdaj je slučajna spremenljivka porazdeljena simetrično?
- 125. Definirajte asimetrijo slučajne spremenljivke!
- 126. Izračunajte asimetrijo eksponentne porazdelitve:

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

① Kako je def. Fourierova transformacija?

Fourierova transformacija je nek operator, ki preslika funkcijo $f(t)$ def. na časovnem področju, v funkcijo $F(\omega)$ def. na frekvenčnem področju.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Integral obstaja, če je $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ za vsak ω
 Transformiranka $F(\omega)$ je omejena f. na $(-\infty, \infty)$.

② Lastnosti F.T.

- $\mathcal{F}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{F}[f(t)] + b\mathcal{F}[g(t)], a, b \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), a \neq 0, a \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}[\overline{f(t)}] = \overline{F(-\omega)}$
- $\mathcal{F}[f(t-a)] = e^{i\omega a} F[\mathcal{F}(t)] = e^{i\omega a} F(\omega), a \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}[e^{iat} f(t)] = F(\omega+a), a \in \mathbb{R}$

③ Pokažite čemu je enaka $\mathcal{F}(f(t-a))$ in $\mathcal{F}(e^{iat} f(t))$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t-a)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t-a) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(u+a)} f(u) du \\ &\quad \begin{matrix} t-a=u \\ t=u+a \end{matrix} \\ &= e^{i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} f(u) du = \\ &= \underline{\underline{e^{i\omega a} F(\omega)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{iat} f(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} e^{iat} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega+a)t} f(t) dt \\ &= \underline{\underline{F(\omega+a)}} \end{aligned}$$

- 4) Odvajanje pri F.T. (odvajanje v prostoru t in prostoru ω)
 Odvajanje transformiranke: Funkciji $f(t)$ in $tf(t)$ naj
 ostata iz prostora $L(-\infty, \infty)$. Potem velja
- $$\boxed{F'(\omega) = \mathcal{F}[it f(t)]}$$
- vse $f, t^k f, k \in \mathbb{N}$ iz $L(-\infty, \infty)$ potem velja
- $$F^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}[(it)^n f(t)]$$

Transformiranaka odvoda

$f(t)$ naj bo zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, $f(t)$ in $f'(t)$ iz prostora $L(-\infty, \infty)$. Potem velja:

$$\boxed{\mathcal{F}[f'(t)] = -i\omega \mathcal{F}[f(t)]}$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (-i\omega)^n \mathcal{F}[f(t)]$$

- 5) Ali lahko na funkciji $e_+^{-t} = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ uporabite izrek
 $\mathcal{F}[f'(t)] = -i\omega \mathcal{F}[f(t)] = ?$ utemeljite

Enačba $\mathcal{F}[f'(t)] = -i\omega \mathcal{F}[f(t)] = -i\omega F(\omega)$ za nezvezne funkcije ne velja. e_+^{-t} je zvezna in zvezno odvedljiva na intervalih $(-\infty, 0)$ ter $(0, \infty)$ pri $t=0$ pa ima skok iz 0 na 1. Transformacija $\mathcal{F}$ $(e_+^{-t})'$:

$$(e_+^{-t})' = \begin{cases} -e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

V $t=0$ odvod ne obstaja. Velja: če izračunamo po definiciji

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \mathcal{F}[(e_+^{-t})'] = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} e^{i\omega t} dt = - \int_0^{\infty} e^{(i\omega-1)t} dt$$

$$= - \left. \frac{e^{(i\omega-1)t}}{i\omega-1} \right|_0^{\infty} = - \frac{1}{1-i\omega}$$

$$= \frac{e^{i\omega\infty}}{i\omega-1} - \frac{e^{-2t}}{i\omega-1} + \frac{1}{i\omega-1} + \frac{1}{i\omega-1}$$

Uporaba formule $\mathcal{F}[f'(t)] = -i\omega \mathcal{F}[f(t)] = -i\omega F(\omega)$

$$= -i\omega \underbrace{\frac{1}{1-i\omega}}_{\substack{\text{transformiranka} \\ e^{-t}}} = \underline{\underline{1 - \frac{1}{1-i\omega}}}$$

⑥ Inverzna F.t.

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(\omega) d\omega$$

Preslikava $\mathcal{F}^{-1}$ je inverzna F.t. Integral ne obstaja vedno, ampak mora $f(t)$ zadoščati še nekim dodatnim pogojem. Funkciji $f(t)$ pripada natanko ena transformiranka $F(\omega)$ in obratno.

⑦ Konvolucija in njene lastnosti

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du \quad \text{je konvolucija funkcij } f(t) \text{ in } g(t); \text{ tudi } h(t) = f(t) * g(t)$$

Ekstira za vsak t , če sta $f(t), g(t) \in L(-\infty, \infty)$ in je vsaj ena od njiju omejena $|f(t)| < M$.

Lastnosti

$$[af(t)] * g(t) = a[f(t) * g(t)]$$

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$$

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

$$[f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * [g(t) * h(t)]$$

Pri transformirankah konvolucijo nadomesti produkt

$$\mathcal{F}[h(t)] = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[g(t)]$$

3) Parsevalova enačba

Naj bo $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ in njena Fourierova transformiranka tudi v $L(-\infty, \infty)$. Potem velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

g) Fourierova sinusna transformacija in njene lastnosti

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega \rightarrow \text{inverzna formula}$$

$f(t)$ je definirana le na pozitivni realni osi.

Lastnosti

$$\mathcal{F}_s[f'(t)] = -\omega \mathcal{F}_c[f(t)]$$

$$\mathcal{F}_s[f''(t)] = \omega f(0) - \omega^2 \mathcal{F}_s[f(t)]$$

b) Fourierova kosinusna transf. in njene lastnosti

$$\mathcal{F}_c[f(t)] = F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega$$

Lastnosti

$$\mathcal{F}_c[f'(t)] = -f(0) + \omega \mathcal{F}_s[f(t)]$$

$$\mathcal{F}_c[f''(t)] = -f'(0) - \omega^2 \mathcal{F}_c[f(t)]$$

b) pri ustreznih pogojih za $f(t)$ veljata tudi Parsevalovi enačbi

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |\mathcal{F}_c(f(t))|^2 d\omega$$

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |\mathcal{F}_s(f(t))|^2 d\omega$$

11) Določite F. Kosinusno transformacijo funkcije e^{-t} !

$$\tilde{F}(e^{-t}) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{(i\omega-1)t} dt = \frac{e^{t(i\omega-1)}}{i\omega-1} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{i\omega-1} = \frac{1}{1-i\omega}$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$\tilde{F}_c\{e^{-t}\} + i \tilde{F}_s\{e^{-t}\} = \frac{1}{1-i\omega}$$

← racionaliziramo

$$\frac{1(1+i\omega)}{(1-i\omega)(1+i\omega)} = \frac{1+i\omega}{(1+\omega^2)}$$

$$\frac{1}{1-i\omega} = \underbrace{\frac{1}{1+\omega^2}}_{\text{realni del}} + i \underbrace{\frac{\omega}{1+\omega^2}}_{\text{im. del}}$$

$$\tilde{F}_c\{e^{-t}\} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\tilde{F}_s\{e^{-t}\} = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

12) Definicija L.T. kdaj obstaja?

$f(t)$ naj bo definirana za vse $t \geq 0$.

* $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ je ^{ujena} Laplaceova transformacija.

tudi $\mathcal{L}[f(t)]$. Funkcijo $f(t)$ imenujemo inverzno transf.

od $F(s) \rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

Obstaja, če integral * eksistira za kompleksna št. s iz kakšnega dca kompleksne ravnine,

$$\underline{\underline{|f(t)| < K e^{\alpha t}}}$$

13. Čemu je enako $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}$?

Če je $\mathcal{L}(f) = F(s)$, $s > \alpha$, potem je

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a); \quad s > \alpha + a$$

To pomeni, da substitucija $s-a \rightarrow s$ v l.t. ustreza množenju originalne funkcije z e^{at} .

Dokaz: Po definiciji je $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ in od tod

$$\begin{aligned} F(s-a) &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} [e^{at} f(t)] dt \\ &= \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} \end{aligned}$$

7) Navedi zadostne pogoje za eksistenco l.t. Ali poznaš kakšno funkcijo, za katero l.t. ne obstaja?

Naj bo $f(t)$ odsekoma zvezna na vsakem končnem intervalu v področju $t \geq 0$ in naj ustreza pogoju $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ za neki konstanti α in M . (eksponentnega naraščanja). Potem l.t. funkcije $f(t)$ eksistira za vse $s > \alpha$.

* $f(t) = e^{t^2}$. Če izberemo še tako veliki št. M in α , bo $e^{t^2} > M e^{\alpha t}$ za $\forall t > t_0$, kjer je t_0 dovolj veliko št., ki je odvisno od M, α .

15. Laplaceova transformacija odvoda in integrala.
[da $f(t)$ ustreza pogojem za
eksistence $\mathcal{L}\{f\}$]

Predpostavimo, da je $f(t)$ zvezna funkcija za $t \geq 0$, ki ustreza pogoju $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ za neki konstanti α in M in da ima odsekoma zvezan odvod $f'(t)$ na vsakem končnem intervalu področja $t \geq 0$. Potem obstaja Laplaceova transformacija odvoda $f'(t)$:

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0), s > \alpha$$

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - s^{-1}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Če je $f(t)$ odsekoma zvezna in ustreza pogoju $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ potem je

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

16. Kompleksna inverzna formula za Laplaceovo transformacijo

Če je $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, potem je originalna funkcija

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ dana tako,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s) ds, t > 0 \quad \text{in } f(t) = 0 \text{ za } t < 0$$

Integracija poteka vzdolž premice $s = \gamma + iy$ v kompleksni ravnini. Realno št. γ je izbrano tako, da premica $s = \gamma$

leži desno od vseh singularnosti (ugvečkati poli) funkcije $F(s)$, sicer pa je γ poljuben.

Funkcijo $f(t)$ izrazimo kot $f(t) = \sum \text{residui } e^{st} F(s)$ pri polih funkcije $F(s)$.

17. Kako izračunamo inverzno Laplaceovo transformacijo s pomočjo residuumov?

$$f(t) = \sum \text{residui } e^{st} F(s) \text{ v polih } F(s)$$

glej 16. vprašanje

Izračunamo residuume

v polih funkcije $F(s)$, nato s pomočjo formule $f(t) = \sum \text{res } e^{st} F(s)$ dobimo inverzno transformacijo!

;) Izračunajte $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right\}$ s pomočjo residuumov

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{st} ds}{(s+1)(s-2)^2} = \sum \text{Res} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2},$$

polih $s = -1, s = 2$

$$\text{Res}_{(s=-1)} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} = \frac{e^{-t}}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{(s=2)} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[(s-2)^2 \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{st}}{s+1} \right] = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{te^{st}(s+1) - e^{st}}{(s+1)^2} \\ &= \frac{3te^{2t} - e^{2t}}{9} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right\} = \frac{1}{9} (e^{-t} + 3te^{2t} - e^{2t})$$

$$\left(\frac{e^{st}}{s+1} \right)' = \frac{te^{st}(s+1) - e^{st}}{(s+1)^2}$$

19) Kako rešujemo navadne d.e. s pomočjo Z.t.? Primer:

$$y'' + \omega^2 y = r(t); \quad y(\phi) = y_0, \quad y'(\phi) = y'_0$$

$$s^2 Y(s) - sy(\phi) - y'(\phi) + \omega^2 Y(s) = R(s)$$

$y''(t) + \omega^2 y(t) = r(t)$, kjer sta $r(t)$ in ω podana. Uporabimo Laplaceovo transformacijo in dobimo:

$$s^2 Y(s) - sy(\phi) - y'(\phi) + \omega^2 Y(s) = R(s)$$

$Y(s)$ je Z.t. neznane funkcije $y(t)$, $R(s)$ pa Z.t. od $r(t)$. Dobimo algebraično enačbo. Rešitev je

$$Y(s) = \frac{sy(\phi) + y'(\phi)}{s^2 + \omega^2} + \frac{R(s)}{s^2 + \omega^2}$$

Izraz na desni je popolnoma določen z danimi

začetnimi pogoji $y(\phi) = h_1$, $y'(\phi) = h_2$. Zadnji

korak je določen inverzne funkcije $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$, ki je rešitev enačbe.

20) Iskanje inverzne Z.t. s pomočjo razcepa na parcialne ulomke

Zelo pogosto je Z.t. racionalna funkcija spremenljivke s in to vedno lahko razcepimo na parcialne ulomke.

$$Y(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$$

Oblika in način razcepa je odvisen od ničel polinoma v imenovalcu. Imamo 4 možnosti:

* $H(s)$ ima enkratni realni koren s_0 $\xrightarrow{\text{v razcepni}}$ $\frac{A}{(s-s_0)}$, kjer je s_0 ta koren

* $H(s)$ ima večkratni realni koren s_0 (m -kratni)
 $H(s) = (s-s_0)^m H_1(s)$.

$\downarrow$ v razcepni:

$$\frac{A_m}{(s-s_0)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-s_0)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{(s-s_0)}$$

* $H(s)$ ima enkratni par konjugirano kompleksnih korenov
 $H(s) = (s-s_0)(s-\bar{s}_0)$ $s_0 = \alpha + i\beta$

v razcepni

$$\frac{B}{s-s_0} + \frac{\bar{B}}{(s-\bar{s}_0)}$$

* $H(s)$ ima večkratni par konjugirano kompleksnih korenov

razcepni:

$$\frac{B_m}{(s-s_0)^m} + \frac{B_{m-1}}{(s-s_0)^{m-1}} + \dots + \frac{B_1}{s-s_0} +$$

$$\frac{\bar{B}_m}{(s-\bar{s}_0)^m} + \dots$$

Koeficiente $A, B, \dots$ lahko dobimo z metodo nedoločenihih koeficientov. Inverzne transf. pa s pomočjo tabel.

21) Reševanje sistemov d.e. s pomočjo Laplaceove transf.

Primer: $\dot{x} + x = 0; \quad x(0) = 0$
 $\dot{y} + 2y = r(t); \quad y(0) = 0$

Vsako enačbo transformiramo s pomočjo $\mathcal{L}$.t. (samo linearne d.e. s konstantnimi koeficienti). Dobljen sistem je ^{linearen} sistem algebrskih enačb za neznane transformirane rešitve. Sistem rešimo (z. Gaussovo metodo, eliminacijo, determinantami) Nato izračunamo inverzno transformacijo

$$sX(s) + X(s) = 0 \Rightarrow X(s)(s+1) = 0$$

$$X(s) = 0$$

$$x(t) = 0$$

$$+ y(0) = 0$$

$$sY(s) + 2Y(s) = R(s)$$

$$(s+2)Y(s) = R(s)$$

$$Y(s) = \frac{R(s)}{s+2} = \boxed{R(s) \cdot \frac{1}{s+2}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = r(t) * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$= \boxed{r(t) * e^{-2t}} =$$

$$= \int_0^t r(\tau) e^{-2(t-\tau)} d\tau$$

27) Laplacova transformacija in periodične funkcije
 Naj bo funkcija $f(t)$ definirana na $t \geq 0$ in naj ima periodo p .
 $f(t+p) = f(t)$, za vse $t \geq 0$. Dalje naj bo $f(t)$ odsekoma zvezna na intervalu dolžine p . Za tako funkcijo velja: L.t. odsekoma zvezne periodične funkcije s periodo p je

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt, \quad s > 0$$

25) čemu je enako $\mathcal{L}\{f(t-a)u_a(t)\}$?

Če je $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, potem za poljubno konstanto a velja $e^{-as} F(s) = \mathcal{L}[f(t-a)u_a(t)]$, kjer je $u_a(t)$ enotna stopničasta funkcija.

24) Konvolucija in Laplacova transformacija

Konvolucija dveh funkcij $f(t)$ in $g(t)$ je definirana

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Funkciji $f(t)$ in $g(t)$ naj ustrežata pogojem $|f(t)| \leq M e^{\lambda t}$ oz. $|g(t)| \leq M e^{\lambda t}$, torej obstajata transformiranki $\mathcal{L}(f) = F(s)$ in $\mathcal{L}(g) = G(s)$. Potem

$$F(s) G(s) = \mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[h(t)] = \underbrace{H(s)}_{\text{enačbe konvolucije}}$$

S pomočjo tega lahko rešujemo integralne tipe.

23) Z Laplacovo transf. rešite enačbo $t\dot{x}(t) + x(t) = 2t$

$$-F'(s) = \mathcal{L}\{t f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{t\dot{x}(t)\} + X(s) = \mathcal{L}\{2t\} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\ddot{x}(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = -\frac{d}{ds} [sX(s) - x(0)]$$

(sX(s) - x(0))
s dvajamo kot produkt

$$= -[X(s) + sX'(s)]$$

$$-X(s) - sX'(s) + X(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$X'(s) = -\frac{2}{s^3} = \frac{dX}{ds}$$

$$X = -2 \frac{s^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{s^2} + C$$

$$x(t) = t + C \cdot \mathcal{L}^{-1}\{1\}$$

2) Odvayanje in integriranje $\mathcal{L}, t$.

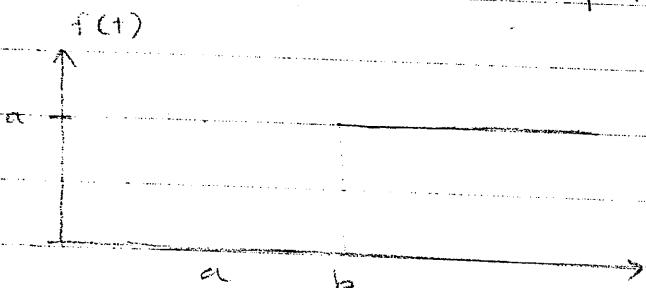
Če funkcija $f(t)$ ustreza pogoju $|f(t)| \leq M e^{st}$ obstaja transformiranka $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ in odvod transformiranke se izraža

$$\frac{dF(s)}{ds} = F'(s) = -\mathcal{L}[t f(t)].$$

* Naj $f(t)$ ustreza pogoju $|f(t)| \leq M e^{st}$ in naj obstaja $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$, potem velja $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(\sigma) d\sigma$.

pogoj za eksistenco

3) Zapišite analitično f , in poiščite njeno $\mathcal{L}, t$.



$$t=n, \quad e^{-st} dt = dv$$

$$du=dt, \quad v = \frac{e^{-st}}{-s}$$

$$\int_n dv = n \cdot v - \int_n v du$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^a t \cdot e^{-st} dt + \int_a^b b \cdot e^{-st} dt$$

$$= -\frac{t \cdot e^{-st}}{s} \Big|_0^a + \frac{1}{s} \int_0^a e^{-st} dt + b \int_a^b e^{-st} dt =$$

$$= -\frac{a e^{-sa}}{s} + \frac{1}{s} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right) \Big|_0^a + b \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_a^b$$

$$= -\frac{a e^{-as}}{s} - \frac{1}{s^2} e^{-as} + \frac{1}{s^2} + \frac{b e^{-sb}}{s}$$

28. Gama funkcija: definicija in lastnosti

Gama funkcija Γ je definirana z integralom

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

Ko ta integral obstaja obstaja tudi $\Gamma(x)$. Je zvezna in poljubno mnogokrat odvedljiva. Integral je enakomerno konvergent

29. Pokažite, da je $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \underbrace{\frac{t^x}{x} e^{-t}}_0 + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

$$x \Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

$$t^{x-1} dt = du$$

$$u = \frac{t^x}{x}$$

$$e^{-t} = v$$

$$dv = -e^{-t} dt$$

30. Izračunajte $\int_0^{\infty} e^{-x^n} dx$

Vpeljemo $x^n = v$, $n \in \mathbb{N}$. Potem je $x = v^{\frac{1}{n}}$ in $dx = \frac{1}{n} v^{(1/n)-1} dv$

$$I = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v^{(1/n)-1} e^{-v} dv = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

31. Funkcija beta

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, y > 0$$

Podana je z integralom, ki je odvisen od 2 parametrov

$$B(x, y) = B(y, x)$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

32) Kako rešujemo d.e. s pomočjo vrst

Ena od metod za reševanje d.e. je ta, da iščemo rešitev v obliki neskončne potenčne vrste

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m (x-a)^m = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots$$

Ko je $a=0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \text{ konvergenčni radij}$$

Vrsta konvergira za vse x , za katere $|x-a| < r$

Dana d.e. je $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = \phi$. Predpostavimo

da je rešitev d.e. v obliki potenčne vrste

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$$

Koeficientov C_m , $m=1, 2, \dots$ ne poznamo in jih moramo določiti.

Žato v d.e. vstavimo odvode, ki jih dobimo z odvajanjem potenčne vrste

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m C_m x^{m-1}$$

$$y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) C_m x^{m-2}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)\dots(m-n+1) C_m x^{m-n}$$

Vstavimo v d.e.

V kolikoli v d.e. nastopajo koeficienti $(ay'' + by' \dots)$ se

dajo tudi te razviti v potenčne vrste. Iste potence

izberemo skupaj: vsebujejo koeficiente potenčne vrste

$$k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots = \phi \text{ in}$$

rešujemo enačbo

$$k_0 = 0$$

$k_1 = \phi$ iz katerih lahko izračunamo koef. potenčne vrste

33) Rešite enačbo $xy' - y = 0$ s pomočjo vrsti

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}$$

$$x \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n C_n - C_n) x^n - C_0 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) C_n x^n - C_0 = 0$$

$$-C_0 + 0 C_1 x + C_2 x^2 + 2 C_3 x^3 + \dots = 0$$

$$\boxed{C_0 = 0} \quad \boxed{C_1 \text{ poljuben}}, \quad C_2 = 0 \quad C_3 = 0 \dots$$

$$\boxed{y = C_1 x}$$

enačba resitve je
polinom

34) Legendrova d.e. in njene rešitve

$$\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0}$$

$n \in \mathbb{R}$. Njene rešitve so Legendrove funkcije. Rešujemo jo s pomočjo potenčne vrste.

$$\boxed{y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m}$$

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m C_m x^{m-1}, \quad y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) C_m x^{m-2}$$

$$(1-x^2) \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) C_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=1}^{\infty} m C_m x^{m-1} + n(n+1) \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = 0$$

Rešitev:

$$\boxed{y(x) = C_0 y_1(x) + C_2 y_2(x)} \quad \text{Rešitev za } -1 < x < 1$$

$y_1(x)$ je vrsta sestavljena iz sodih, $y_2(x)$ pa iz lihih potenč! Vrsti sta ~~23~~ alternirajoči in konvergirata za $|x| < 1$

35. Besselova enačba in njene rešitve

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

ν je nenegativno realno št. $\nu \in \mathbb{R}, \nu \geq 0$

Rešitev iščemo v obliki potenčne vrste

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r}$$

eksponent r je poljuben, vendar izbran tako, da je $C_0 \neq 0$

Če ν ni celo število se splošna rešitev za vsak $x \neq 0$ glasi

$$y(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 J_{-\nu}(x)$$

če je $\nu = n \in \mathbb{N}$ sta funkciji $J_n(x)$ in $J_{-n}(x)$

linearno odvisni in velja zveza $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

$n \in \mathbb{N}$. Splošna rešitev za vse vrednosti ν je

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x) \quad \text{Neumannova f.}$$

Prva rešitev nima singularnosti, druga rešitev ima sing. v $x=0$

če je ν celo št. - logaritemska singularnost, če ni celo št pa $\frac{1}{x^\nu}$.

a) Lastnosti Besselovih f.

$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$ Rešitve te enačbe so Besselove funkcije. $y = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$

1.) $Y_\nu(x)$ ima v $x=0$ singularno točko. $\nu = n$, je to logaritemska singularnost, $\nu \neq n$ je to $x^{-\nu}$ singularnost

2.) $J_n(x)$ so ortogonalne na $[0, R]$ z utežjo x .

$$\int_0^R x J_n(\lambda_{nm} x) J_n(\lambda_{nk} x) dx = 0; \quad m \neq k$$

nize Bessl f.
 $\uparrow$
 $\lambda_{nm} = \frac{\alpha_{nm}}{R}$

3.) Ustrezajo rekurzivni zvezi

37. Ortogonalen sistem funkcij

Naj bosta $g(x)$ in $h(x)$ dve realni funkciji definirani na intervalu $[a, b]$. Integral produkta $g(x), h(x)$ nad tem intervalom naj eksistira $\rightarrow (g, h)$, torej

$$\int_a^b g(x)h(x)dx = (g, h)$$

Funkciji sta ortogonalni, če je $(g, h) = 0$

Množica funkcij $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots$ definiranih na intervalu $[a, b]$ je ortogonalna, če so vsi integrali $(g_m, g_n), m \neq n$ enaki nič, $\int_a^b g_m(x)g_n(x)dx = 0, m \neq n$

Norma funkcije $g_m(x) \rightsquigarrow \|g_m\|$

$$\|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x)dx}$$

Ortogonalen sistem, katerega funkcije imajo normo 1, imenujemo ortonormiran sistem funkcij na int. $[a, b]$

38. Kako je ortogonalnostjo Legendrovih polinomov in

Besselovih funkcij?

$$\int_a^b p(x)g_m(x)g_n(x)dx = 0$$

ogonjalne
čede
težo
funkcije

Legendrovi polinomi $P_n(x)$ sestavljajo na intervalu $[-1, 1]$

ortogonalen sistem z utežjo $p(x)=1$. Vaja.

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad \text{za } m \neq n$$

$$(\|P_m\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}, n=0,1,2,\dots)$$

Besselove funkcije sestavljajo ortogonalen sistem funkcij na intervalu $[0, R]$ glede na utežno funkcijo

$$p(x) = x$$

$$\int_0^R x J_m(k_{mn}x) J_n(k_{jn}x) dx = 0 \quad j \neq m$$

$$k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}, \quad m=1,2,\dots$$

α_{mn} so ničle nstiezne Besselove f.

39. Polinomi Čebiševa

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (1. \text{ viste})$$

$$U_n(x) = \sin(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2. \text{ viste})$$

Na intervalu $[-1, 1]$ sestavljajo ortogonalen sistem glede na utežno funkcijo $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. So tudi resitev d.e.

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

40. Laguerrovi polinomi

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

* Množica Laguerrovih polinomov je ortogonalna na $[0, \infty]$ z utežno f. $p(x) = e^{-x}$. Torej:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0 \quad \underline{m \neq n}$$

Polinomi $\{L_n(x)\}$ so resitev Laguerrove d.e.

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

41. Hermitovi polinomi

$$H_0 = 1, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}}), \quad n = 1, 2, \dots$$

So ortogonalni na intervalu $(-\infty, \infty)$ z utežno f. $p(x) = e^{-x^2/2}$, torej je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_m(x) H_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

So resitev d.e.

$$y'' - xy' + ny = 0$$

42. Poišči Hermitov polinom $H_1(x)$, če veš, da je $H_0(x) = 1$,
 H_0 in H_1 pa sta ortogonalna z ustrežno utežjo.

Polinomi Hermita so ortogonalni na $(-\infty, \infty)$ z utežjo
 $e^{-x^2/2}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) H_m(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = a + bx$$

$$H_1(x) = a + bx \quad (H_0, H_1) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot (a + bx) e^{-x^2/2} dx = 0$$

$$a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx + b \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2} dx = 0$$

liha funkcija: $I = 0$

$$a = 0$$

$$\underline{H_1(x) = bx} \quad ; \quad b \text{ je poljuben}$$

43. Problem brahistokrone

V navpični ravnini naj bosta dani dve točki $T_1(0,0)$ in $T_2(a,b)$ ki ne ležita na isti navpični premici. Točka T_2 naj leži višje kot T_1 . Najti je treba krivuljo, ki veže obe točki in ima lastno da točkasta masa podvržena težnosti po njej zdrsne iz T_1 do T_2 v najmanjšem možnem času. Rešitev tega problema je brahistokrona. Čas, ki ga točka potrebuje od T_1 do T_2 je enak

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

Med vsemi krivuljami ($y(0)=0$ in $y(a)=b$) moramo poiskati tisto, pri kateri je $t[y(x)]$ najmanjši.

Rešitev problema je cikloida.

44. Pojem funkcionala (upodobitev f. v sterlo)

Med vsemi funkcijami, ki so definirane na $[a_1, a_2]$ ter zavzamejo v krajših vrednosti $y(a_1)=b_1$ in $y(a_2)=b_2$

iščemo tisto, kjer je $I(y(x)) = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y') dx$ najmanjši

ali največji. Vrednost I je določena za vsako funkcijo $y(x)$, ki je na intervalu $[a_1, a_2]$ zvezna in zvezno odvedljiva.

Vsaki taki $y(x)$, $I[y(x)]$ priredi število. I je funkcional.

45. Kako je def. lokalni ekstrem funkcionala?

Funkcional $I(y)$ doseže v funkciji $u(x)$ lokalni maksimum, če obstaja vsaj ena taka okolica funkcije $u(x)$, da je za vsako funkcijo $y(x)$ iz te okolice

izpoljena neenacba $I(y) - I(u) \leq \epsilon$

za minimum $I(y) - I(u) \geq \epsilon$

46) Funkcional za funkcije dveh spremenljivk

$$I[z(x, y)] = \iint_D f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy$$

Funkcional odvisen od ene funkcije dveh neodvisnih spremenljivk. Ekstrem iščemo med vsemi tistimi zadostno gladkimi funkcijami, ki na robu področja D zavzamejo predpisano vrednost.

7) Kako izgleda izoperimetrični problem?

Dana sta dva funkcionala $I(y(x))$ in $K(y(x))$. Oba sta definirana nad isto množico D (def. območje). Iščemo tisto funkcijo $y(x)$ iz D , pri kateri ima $K(y)$ predpisano vrednost, $I(y)$ pa doseže ekstrem.

3) Osnovni izrek variacijskega računa

Naj bosta $P(x)$ in $Q(x)$ zvezni f. na $[a_1, a_2]$. Za vsako zvezno odvedljivo f. $\eta(x)$, ki ustreza pogojema $\eta(a_1) = \eta(a_2) = 0$ naj bo izpolnjen pogoj

$$\int_{a_1}^{a_2} [P(x)\eta(x) + Q(x)\eta'(x)] dx = 0$$

Potem je $Q(x)$ odvedljiva f. in je $P(x) = Q'(x)$.

9) Eulerjeva d.e.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2. reda)$$

Vsaka ekstremala mora ustrezati tej enačbi

50. Integracija Eulerjere d.e.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2. \text{reda})$$

Eulerjera d.e. je d.e. drugega reda. Splošna rešitev je torej odvisna od dveh konstant $y = y(x, c_1, c_2)$. Določimo jo tako, da ekstremala izpolni še pogoja $y(a_1, c_1, c_2) = b_1$ in $y(a_2, c_1, c_2) = b_2$. Robna naloga nima vedno rešitve, če jo ima se lahko zgodi da ni edina ($\emptyset$, mnogo ali ena). Tudi če ima rešitev je ta še le kandidatka za ekstremalo.

51. Eulerjera d.e. za primer, ko je $f = f(x, y')$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{lahko enkrat integriramo in dobimo}$$

$$f_{y'}(x, y') = c_1$$

To je d.e. prvega reda za ekstremalo. Včasih jo lahko rešimo tako, da izrazimo y' z x .

52. Eulerjera d.e. za primer ko je $f = f(y, y')$

Eulerjera d.e. ima prvi integral

$$f - y' f_{y'} = C \quad (\text{konstanta})$$

$$\frac{d}{dx} (f - y' f_{y'}) = 0$$

3) Rotacijska plošter z najmanjšo površino

V ravnini (xy) sta podani točki $T_1(a_1, b_1)$ in $T_2(a_2, b_2)$, $b_1, b_2 > 0$. Najprej jih povežemo s krivuljo, nato jo zavrtimo okrog abscisne osi. Dobimo rotacijsko plošter, ki ima površino $S[y(x)] = 2\pi \int_{a_1}^{a_2} y \sqrt{1+y'^2} dx$. Med vsemi $y(x)$, za katere je $y(a_1) = b_1$, $y(a_2) = b_2$ želimo dobiti tisto, ki ima površino $S(y(x))$ najmanjšo.

4) Variacijski račun za več funkcij

~~Iščemo pogoje za ekstrem funkcionala odvisnega od več funkcij~~

$$I(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y_1, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

Lokalni ekstrem iščemo med vsemi zvezno odvedljivimi f., ki ustrezajo robnim pogojem $(y_1(a_1) = b_{11}, y_2(a_1) = b_{12}, \dots, y_1(a_2) = b_{21}, y_2(a_2) = b_{22}, \dots)$

Denimo, da funkcijah $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funkcional doseže lokalni ekstrem. Funkcije $y_2(x), \dots, y_n(x)$ fiksiramo in spremenjamo samo funkcijo $y_1(x)$. Funkcional postane odvisen le od $y_1(x)$, pri $y_1(x)$ pa doseže lokalni ekstrem. Odtod sledi, da mora biti izpolnjena Eulerjeva enačba $\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} f_{y_1'} = 0$

Na podoben način variramo vsako od preostalih funkcij, pri čemer je vedno $n-1$ funkcij fiksiranih. Dobimo n d.e., ki jih morejo ustrezati neznane f. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$

55) Reševanje izoperimetričnega problema

Med vsemi funkcijami $y(x)$ na intervalu $[a_1, a_2]$ ki so zvezno odvedljive in ustrezajo pogojema $y(a_1) = b_1$, $y(a_2) = b_2$ je treba najti tisto, pri kateri ima funkcional $I[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, y') dx$ ekstrem, hkrati pa ima

$$K[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} g(x, y, y') dx \text{ predpisano vrednost } K[y(x)] = \ell.$$

Rešimo ga tako, da sestavimo pomožni funkcional

$I + \lambda K$, nato pa rešimo navadno variacijsko nalogo za

ta funkcional. Kandidatke za ekstremale najdemo med

rešitvami Eulerjeve d.e. Odvisne so še od dveh integracijskih konstant in parametra λ . Za določitev teh količin potrebujemo

3 enačbe. 2 iz zahteve, da gre rešitev skozi ^{podani} točki $T_1(a_1, b_1)$, $T_2(a_2, b_2)$, tretjo iz pogoja da zavezame K predpisano vrednost ℓ .

56) Direktne metode variacijskega računa

Rayleigh - Ritzova, ki jo lahko uporabimo za iskanje

ekstremov funkcionalov, odvisnih od ene ali več funkcij ene ali več neodvisnih spremenljivk. Iščemo ekstrem funkcionala

$I(y)$, iskati ga moramo med vsemi funkcijami iz D_I

funkcionala. Izberemo neko zaporedje koordinatnih funkcij

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \quad y_n = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$$

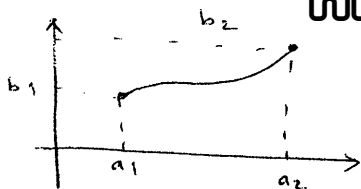
(vse linearne kombinacije ležijo v D_I) Ekstremalo poiščemo med

vsemi temi funkcijami. Ko vstavimo funkcije $y_n(x)$ v

funkcional $I(y)$ dobimo funkcijo koeficientov $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Če hočemo najti njen ekstrem moramo rešiti

$$\text{sistem enačb } \frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial I}{\partial c_n} = 0$$



$$f = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

$$y = C_1 x + C_2$$

57) Poišči krivuljo, ki veže dve točki in ima najmanjšo dolžino.

V ravnini sta podani dve točki $T_1(a_1, b_1)$ in $T_2(a_2, b_2)$. Med vseh krivuljami $y(x)$, ki vežejo obe točki, nas zanima tista, ki je najkrajša. Dolžina loka krivulje, ki veže T_1 in T_2 je dana z integralom $\ell[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+y'^2} dx$. Med vsemi $y(x)$ za katere je $y(a_1) = b_1$ in $y(a_2) = b_2$ iščemo tisto, za katero je $\ell(y(x))$ najmanjši.

58) Opisi def. območje funkcionala $I[y(x)] = \int_{a_1}^{a_2} F(x, y, y') dx$

Def. območje $I[y(x)]$ sestavljajo zvezno odvedljive funkcije, ki zavzamejo na krajših intervala zahtevani vrednosti $y(a_1) = b_1$ in $y(a_2) = b_2$.

1) Kaj je ε -okolica funkcije $y(x)$?

ε je poljubno pozitivno število. Okolico ε f. $y(x) \in D$ sestavljajo vse f. $Y(x) \in D$, za katere povsod na $[a_1, a_2]$ velja neenacba $|Y(x) - y(x)| < \varepsilon$. Okolico ε f. $y(x)$ sestavljajo torej vse zvezno odvedljive f. $Y(x)$, ki ležijo v pasu širine 2ε okoli funkcije $y(x)$ in ustrezajo še pogojema $Y(a_1) = b_1$ in $Y(a_2) = b_2$.

2) Kako izgleda kvadratni funkcional?

$$I(y) = \int_{a_1}^{a_2} [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + f(x)y] dx$$

$$y(a_1) = b_1$$

$$y(a_2) = b_2$$

(61) Rešte variacijski problem $\int_0^1 (y^2 + 2xy') dx$; $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

$$I = \int_0^1 (y^2 + 2xy') dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 2$$

$$\frac{d}{dx} (2x) = 2$$

$$2y - 2 = 0$$

$$2y = 2$$

$$\underline{\underline{y = 1}}$$

ni rešljiva, ker ne ustreza $y(0) = 0$!

(62) Kaj je to parcialna dif. enačba? Navedi nekaj primerov. Enačbo, ki vsebuje enega ali več parcialnih odvodov neznane funkcije dveh ali več spremenljivk imenujemo P.D.E. Red najvišjega parcialnega odvoda določa red P.D.E. Je linearna, če v njej nastopa neznana funkcija in njeni odvodi le linearno.

* Enodimenzijaska enačba valovanja:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

* Tridimenzijaska nehomogena enačba nihanja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F(t, x, y, z)$$

* Telegrafska enačba

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (LG + RC) \frac{\partial w}{\partial t} - RG w = 0$$

L, G, C, R - parametri elektricne linije

* Laplacova enačba

$$\boxed{\Delta u = 0}$$

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

* Difuzijska enačba

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

33) Zapišite splošno linearno P.D.E. drugega reda za $u=u(x,y)$

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x,y)$$

Tu je $u(x,y)$ iskana funkcija, koeficienti so odvisni le od x in y . Delimo jih glede na predznak izraza

$$H = B^2 - 4AC$$

5.) $\begin{cases} H < 0 & - \text{eliptična} \\ H = 0 & - \text{parabolična} \\ H > 0 & - \text{hiperbolična} \end{cases}$

Če na nekem območju H nima določenega predznaka je enačba mešanega tipa

4) Napišite P.D.E. elektromagnetnega polja

Spreminjanje elektromagnetnega polja opisujejo Maxwellove enačbe.

Elektromagnetno polje je določeno s parom vektorskih funkcij

$\vec{E}(t, \vec{r})$, $\vec{H}(t, \vec{r})$, to sta električna in magnetna poljska jakost

Omejimo se na del prostora, kjer polji nimata izvorov, snov naj ima konstantno permeabilnost μ in dielektriznost ϵ .

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu\mu_0 \vec{H}_t$$

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}_t$$

Zveza med $\Delta \vec{E}$ in $\vec{E}_{tt} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ je:

$$c^2 \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

hitrost svetlobe

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0}}$$

⑥⑥ Kakšne dodatne pogoje je treba predpisati pri enačbah posameznega tipa, da je rešitev enolično določena?

Če ima PDE rešitev, jih ima več. Enolično rešitev PDE, ki ustreza danemu fizikalnemu problemu dobimo z dodatnimi informacijami. V nekaterih primerih so na meji območja predpisane vrednosti iskane funkcije in (ali) njeni odvodi → robni pogoji. Če je čas t ena od spremenljivk, je pogostokrat predpisana vrednost rešitve pri $t=0$, to so začetni pogoji. Za enolično rešitev je potrebno podati robne in začetne pogoje.

⑥⑦ Enačba za nihanje strune. Reši jo z metodo separacije spremenljivk.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

enodimenzijska valovna enačba

Funkcija $u(x,t)$ predstavlja odklon točke strune v razdalji x v času t .

Ker je struna na koncih pritrjena, to je pri $x=0$ in $x=l$, imamo dva robna pogoja $u|_{x=0} = 0$ in $u|_{x=l} = 0$

$$u(0,t) = 0 \text{ in } u(l,t) = 0$$

Oblika gibanja strune je odvisna od začetnega odklona (odklon ob času $t=0$) in začetne hitrosti (hitrost pri $t=0$). Začetni odklon podamo s funkcijo $f_1(x)$, začetno hitrost pa s $f_2(x)$. To sta začetna pogoja. $u(x,0) = f_1(x)$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f_2(x)$

z metodo separacije spremenljivk

: z metodo separacije dobimo dve navadni d.e.

- izberemo tiste rešitve, ki ustrezajo robnim pogojem
- dobljene rešitve sestavimo tako, da je rezultat rešitev valovne enačbe in ustreza začetnim pogojem

$$2.) \quad u(x,t) = F(x)G(t) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)\ddot{G}(t)$$

$$F(x)\ddot{G}(t) = a^2 F''(x)G(t) \quad | : a^2 F G \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

$$\frac{\ddot{G}(t)}{a^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -k^2$$

$-k^2$

$$F'' + k^2 F = 0$$

$$\ddot{G}(t) + a^2 k^2 G(t) = 0$$

o.) robni pogoji

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \quad u(l,t) = F(l)G(t) = 0 \quad \text{za vsak } t$$

Ker bi bil za $G(t) \equiv 0$ tudi $u \equiv 0$ je $G(t) \neq 0$ in robna pogoja preideta v $F(0) = 0, F(l) = 0$

Splošna rešitev: $F''(x) + k^2 F(x) = 0$

$$F(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

$$F(0) = A = 0 \quad \text{in} \quad F(l) = B \sin kl = 0$$

$B \neq 0$, sicer bi bil $F(x) \equiv 0$; Torej je $\sin kl = 0$

$$kl = n\pi \Rightarrow k = k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$B=1$$

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$G(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) =$$

$$= \left(C_n \cos \frac{n\pi}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Posamezne rešitve $u_n(x, t)$ v splošnem ne zadoščajo začetnim pogojem.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) G_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

uporabimo začetna pogoja

$$u|_{t=0} = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Iz teh enačb dobimo koeficiente C_n in D_n

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l f_2(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

68. Kaj so to stojni valovi, lastne vrednosti in lastne funkcije strune?

$$u_n(x, t) = F_n(x) G_n(t) = \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ so rešitve valovne enačbe ki ustrezajo robnim pogojem. Te funkcije imenujemo tudi lastne funkcije ali karakteristične vrednosti strune. Vrednosti $\lambda_n = \frac{an^2\pi^2}{l^2}$ pa so lastne vrednosti nihajoče strune.

$u(x, t) = F(x)G(t)$ Rešitev je zapisana v obliki produkta funkcij. Sprašujemo se po stojnih valovih, ki so produkt dveh faktorjev. Prvi je odvisen le od kraja x , drugi od časa t . Taka funkcija opisuje nihanje, pri katerem se gibljejo vsi

deli strune sinhrono, vsi gredo hkrati skozi mirovno lego in vsi hkrati dosežejo maksimum.

g) D'Alambertova enačba ^{restar} za nihanje strune

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

eslter: $u = f(x+ct) + \psi(x-ct)$

Funkciji f in ψ lahko določimo z dodatnimi pogoji (robnimi ali začetnimi).

.) Enačba za prevajanje toplote - kako izgleda in kakšne vrste dodatnih pogojev moramo podati

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

T... temperatura

$$c^2 = \frac{k}{\rho s}$$

k — toplotna prevodnost
 ρs — specifična gostota
 spec. toplota

Podati moramo še začetne in robne pogoje. Za dano telo le en začetni pogoj $T|_{t=0} = f(x, y, z)$ ^{dana funkcija}. Poznati moramo še, kakšne so razmere na površini telesa P .

* površina je na stalni temp. $T|_P = \text{konst.}$

* del površine je toplotno izoliran $\frac{\partial T}{\partial n}|_{\text{del } P} = 0$

* sevanje $\left[\frac{\partial T}{\partial n} + k(T - T_0) \right]_P = 0$

/ izsevana toplota je sorazmerna razliki temperature telesa T in okolice T_0

71) Prerajanje toplote skozi tanko palico - separacija spremenljivk
Temp. palice $\rightarrow u(x, t)$ Oba konca palice sta na isti temp. (na 0)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \text{ za vse } t$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

$$F(x) \dot{G}(t) = c^2 F''(x) G(t)$$

$$\frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -k^2$$

$$F'' + k^2 F = 0$$

$$\dot{G} + c^2 k^2 G = 0$$

$$F(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

$$G(t) = C \cdot e^{-c^2 k^2 t}$$

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0$$

$$= C \cdot e^{-\frac{c^2 k^2 \pi^2}{\ell^2} t}$$

$$u(\ell, t) = F(\ell)G(t) = 0$$

$$\lambda_n = \frac{c n \pi}{\ell}$$

$$F(0) = 0 \text{ in } F(\ell) = 0$$

$$G_n(t) = C_n \cdot e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$F(0) = A \text{ in } F(\ell) = B \sin k\ell$$

$$B \neq 0 \text{ zato } \sin k\ell = 0$$

$$k = \frac{n\pi}{\ell}, n \in \mathbb{N}$$

$$B = 1$$

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell}, n \in \mathbb{N}$$

$$u_n(x, t) = C_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cdot e^{-\lambda_n^2 t}, n = 1, 2, \dots$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{\ell} e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, n = 1, 2, \dots$$

2. Enačba za prenos toplote v neskončnem sredstvu
(Fourierjev integral):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Imamo le začetni pogoj $u(x, 0) = f(x)$ $-\infty < x < \infty$ / podana začetna temp

$$F''(x) + k^2 F(x) = 0$$

$$G'(t) + c^2 k^2 G(t) = 0$$

$$F(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

$$G(t) = e^{-c^2 k^2 t}$$

$$u(x, t, k) = F(x) G(t) = (A \cos kx + B \sin kx) e^{-c^2 k^2 t}$$

k lahko zavzame poljubno vrednost, ker nimamo robnih pogojev, tako sta tudi $A = A(k)$ in $B = B(k)$ funkciji k -ja

$$u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t, k) dk = \int_0^\infty (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) e^{-c^2 k^2 t} dk$$

če integral eksistira

$$u(x, 0) = \int_0^\infty [A(k) \cos kx + B(k) \sin kx] dk$$

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \cos kv dv \quad B(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \sin kv dv$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \left[\int_0^\infty e^{-c^2 k^2 t} \cos k(x-v) dk \right] dv$$

str. 101

73. Dvodimenzionalna valovna enačba - kako jo rešimo

s separacijo spremenljivk

valovanje membrane

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$u = \phi$ (vpetost) $\nearrow$ dani začetni odklik dana začetna hitrost
 $u(x, y, \phi) = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x, y)$

$$u(x, y, t) = F(x, y) G(t)$$

$$F(x, y) \ddot{G}(t) = c^2 (F_{xx} G + F_{yy} G)$$

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{F} (F_{xx} + F_{yy}) = -\gamma^2$$

Helmholtzova p.d.e.

$$\ddot{G}(t) + c^2 \gamma^2 G(t) = 0 \quad F_{xx} + F_{yy} + \gamma^2 F = 0$$

$F(x, y) = H(x) Q(y) \nearrow$ Rešitev naj bo na robu membrane nič

$$\frac{d^2 H}{dx^2} Q(y) = - \left(H(x) \frac{d^2 Q}{dy^2} + \gamma^2 H(x) Q(y) \right)$$

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = - \frac{1}{Q} \left(\frac{d^2 Q}{dy^2} + \gamma^2 Q \right) = -k^2$$

odtod dobimo 2 navadni d.e.

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + k^2 H(x) = 0$$

$$p^2 = \gamma^2 - k^2$$

$$\frac{d^2 Q}{dy^2} + p^2 Q(y) = 0$$

Splošni rešitvi navadnih d.e.

$$H(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

$$Q(y) = C \cos py + D \sin py$$

To je dvojna F.V. Tudi funkcijo $f(x,y)$ razvijemo v tako
visto $f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad m,n = 1,2,\dots$$

$$u(x,y,\phi) = f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Za funkcijo $g(x,y)$ predpostavimo da je razvita v dvojno F.V., potem so koeficienti $B_{mn} \lambda_{mn}$ prav Fourierjevi koeficienti te vste se glase

$$B_{mn} \lambda_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \\ m,n = 1,2,\dots$$

74) Reševanje telegrafske enačbe z metodo separacije spremenljivk

R - upornost, L - induktivnost, C - kapacitivnost, G - izgube

(Homogena linija dolžine l na osi x). $u(x,t)$ - napetost, $i(x,t)$ je tok.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0 \quad \text{odvajamo na } x$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial t} + Gu = 0 \quad \text{odvajamo na } t$$

Z eliminacijo ene od spremenljivk bomo dobili eno samo enačbo.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} + R \frac{\partial i}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Iz teh dveh enačb eliminirajmo člen $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$, zatem $\frac{\partial i}{\partial x}$ izrazimo iz enačbe $(\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial t} + G u = 0)$ pa dobimo eno samo enačbo za $u(x,t)$ in sicer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (LG + RC) \frac{\partial u}{\partial t} - RG u = 0$$

* $\frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0$ odvajamo na t , enačbo

$\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial t} + Gu = 0$ pa na x , dobimo podobno enačbo za tok

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (LG + RC) \frac{\partial i}{\partial t} - RG i = 0$$

Ti dve enačbi imenujemo telegrafski enačbi (homogena hiperbolična enačba). Rešujemo jo pri nehomogenih robnih pogojih. $u|_{x=0} = E$ ^{konstantna nap.} $u|_{x=l} = 0$ ^{kratek stik}

Začetni pogoji $u|_{t=0} = 0$ $i|_{t=0} = 0$ in $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$

$F(x) = u(x,t)$ in imejmo t za konstanto. $F(0) = E$, $F(l) = 0$

$$F''(x) - RG F(x) = 0 \quad RG = b^2$$

$$F''(x) - b^2 F(x) = 0$$

$$F(x) = A \sinh bx + B \cosh bx = C \sinh b(d-x)$$

robni:

$$F(0) = E = C \sinh bd$$

$$F(l) = 0 = C \sinh b(d-l)$$

$$\underline{d=l}, \quad C = \frac{E}{\sinh bl}$$

$$F(x) = E \frac{\sinh b(l-x)}{\sinh bl}$$

nova spr.

$$w(x, t) = u(x, t) - F(x)$$

$$w|_{x=0} = 0 \quad w|_{x=l} = 0 \quad \text{Tako smo dobili}$$

homogene robne pogoje

$$\text{začetna: } w|_{t=0} = -F(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F''(x) - LC \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (LG + RC) \frac{\partial w}{\partial t} - RG w(x, t) -$$

$$RG F(x) = 0$$

$$F''(x) - RG F(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial w}{\partial t} - b^2 w = 0$$

$$a^2 = LC, \quad b^2 = RG, \quad 2h = LG + RC$$

rešitev iščemo v obliki

$$w(x, t) = P(x) G(t)$$

$$\frac{P''(x)}{P(x)} = a^2 \frac{G''(t)}{G(t)} + 2h \frac{G'(t)}{G(t)} + b^2 = -k^2$$

$$P'' + k^2 P = 0$$

$$a^2 G'' + 2h G' + (b^2 + k^2) G = 0$$

$$P(0) = P(l) = 0$$

$$G_n(t) = A_n \cdot e^{\alpha_n t} + B_n \cdot e^{\beta_n t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$P_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

α_n, β_n sta korena karakteristične enačbe

$$a^2 r^2 + 2hr + (b^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}) = 0$$

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot e^{\alpha_n t} + B_n \cdot e^{\beta_n t}) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

začetna pogoja

$$w|_{t=0} = -F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} |_{t=0} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n A_n + \beta_n B_n) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

razrojem v F.V. sklepamo, da za koeficiente veljajo zveze

$$A_n + B_n = -\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} F(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$A_n \alpha_n + B_n \beta_n = 0$$

Sistem enačb za neznane $A_n, B_n, n \in \mathbb{N}$, za vsak n jih lahko izračunamo. Rešitev enačbe za $u(x, t)$:

$$u(x, t) = E \frac{\sinh b(\ell - x)}{\sinh b\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot e^{\alpha_n t} + B_n \cdot e^{\beta_n t}) \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

Podobno bi dobili za $v(t)$.

15. Enačba za nihanje okrogle membrane

Študiramo vibracije okrogle membrane s polmerom R

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Laplaceov operator v polarnih koordinatah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right)$$

Iščemo le rešitve, ki niso odvisne od kota φ .

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)}$$

Membrana naj bo pritrjena na robu, zato je robni pogoj

$$u(R, t) = 0 \text{ za vsak } t \geq 0$$

Da rešitve ne bi bile odvisne od φ , postavimo začetna

$$\text{pogoja } u(r, 0) = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(r)$$

Funkciji $f(r)$ in $g(r)$ sta podani. Rešujemo s separacijo spremenljivk

$$u(r, t) = W(r) G(t)$$

$$\frac{\ddot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{1}{W(r)} \left(W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) \right) = -k^2$$

$$(1) \ddot{G}(t) + \lambda^2 G(t) = 0 \quad \lambda = ck$$

$$(2) W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + k^2 W(r) = 0$$

Enačbo (2) lahko z vpeljavo nove spremenljivke prevedemo na Besselovo d.e. Nova neodvisna spr. $s = k \cdot r$, potem

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{s} \quad \text{in} \quad W(r) = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds} \cdot \frac{ds}{dr} = \frac{dW}{ds} \cdot k$$

$\frac{d^2 W}{dr^2} = \frac{d^2 W}{ds^2} k^2$. Vstavimo v (2) in opustimo skupni faktor k^2 .

$$\boxed{\frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dW}{ds} + W = 0} \quad \text{To je Besselova d.e. za } \nu = 0$$

$$W(s) = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s)$$

Funkcija $Y_0(s)$ postane neskončna ko gre $s \rightarrow 0$, zato

smemo zahtevati $c_2 = 0$! $c_1 = 1$ in $W(r) = J_0(s) = J_0(kr)$

~~Na robu je $u(R, t) = W(R)G(t) = 0$. Ker $G(t)$ ne sme biti enak 0 je $W(R) = J_0(kR) = 0$. Resitev enačbe je nšteto~~

$$g_m(t) = a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t, \quad \lambda_m = c k_m$$

$$u_m(r, t) = W_m(r) g_m(t) = (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) \cdot J_0(k_m r)$$

začetni pogoji

$$t = 0$$

$$u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} \cdot r\right) = f(r)$$

Razvijemo $f(r)$ v Fourierovo Besselovo vrsto.

16) Laplaceova enačba - kako izgleda? Pri kakšnih dodatnih pogojih jo rešujemo?

$$\Delta u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

v ravnini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Nimamo začetnih pogojev, ampak le robne. Razlikujemo Dirichletov, Neumannov in mešani problem.

1) Rešite Laplaceovo enačbo za notranjost kroga

Dirichletov problem. Krog z radijem $r=a$ in robni pogoj $u|_{r=a} = f(\varphi)$

$$\Delta u = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

Laplaceov operator v polarnih koordinatah r, φ

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$u(r, \varphi) = R(r) F(\varphi)$$

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = - \frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)} = k^2$$

$$F''(\varphi) + k^2 F(\varphi) = 0$$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - k^2 R(r) = 0$$

$$F(\varphi) = A \sin k\varphi + B \cos k\varphi$$

rešujemo po Eulerjevi d.e.

$$F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi), k \in \mathbb{Z}^+$$

$$R(r) = r^\lambda$$

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda - k^2 = 0$$

$$\lambda^2 - k^2 = 0$$

$$\lambda = \pm k$$

$$R(r) = C r^k + D r^{-k}$$

Ker naj bo potencial v središču kroga omejen je $D=0$

$$F_k(\varphi) = A_k \sin k\varphi + B_k \cos k\varphi \quad \text{in} \quad R_k = r^k$$

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \sin k\varphi + B_k \cos k\varphi) r^k$$

upoštevamo robni pogoj $u|_{r=a}$

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \sin k\varphi + B_k \cos k\varphi) a^k$$

in razvijemo funkcijo v F.V. na intervalu $[0, 2\pi]$

Rešitev $u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \left(\frac{r}{a}\right)^k$

78. Reševanje valovne enačbe s pomočjo Laplacove transformacije

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

$$y(0, t) = f(t) \text{ robni}$$

$$y(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \text{ začetni}$$

Naredimo Laplacovo transformacijo glede na t in dobimo

$$\begin{aligned} s^2 \mathcal{L}[y(x, t)] - sy(x, 0) - \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} &= a^2 \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] \\ &= a^2 \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}[y(x, t)] \end{aligned}$$

upoštevamo začetne pogoje in imamo

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}[y(x, t)] - \frac{s^2}{a^2} \mathcal{L}[y(x, t)] = 0$$

To je navadna d.e. za $\mathcal{L}[y(x, t)] = Y(x, s)$

$$\frac{d^2 Y(x, s)}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2} Y(x, s) = 0$$

$$(1) Y(x, s) = A(s) e^{-s/a x} + B(s) e^{s/a x}$$

Pri določanju koeficientov $A(s)$ in $B(s)$ upoštevamo da ostane $y(x,t)$ končna. Tako mora biti tudi transformiranka $Y(x,s)$ končna in zato mora biti $B(s) = 0$. V enačbo (1) damo $x = 0$

$$Y(0,s) = A(s)$$

Iz robnega pogoja sledi $\mathcal{L}[y(0,t)] = Y(0,s) = \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

Tako je $Y(x,s) = F(s)e^{-s/a x}$. Naredimo inverzno transformacijo

$$y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right) u_{\frac{x}{a}}(t)$$

$$y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right) u\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

9) Reševanje enačbe za prenos toplote s pomočjo Laplaceove transF

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a^2 = R/C$$

robni $u(0,t) = E(t)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x,t) < \infty$ (omejena)

začetni $u(x,0) = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} \underbrace{\mathcal{L}[u(x,t)]}_{U(x,s)} = a^2 \cdot s \underbrace{\mathcal{L}[u(x,t)]}_{U(x,s)} - u(x,0)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} U(x,s) - a^2 \cdot s \cdot U(x,s) = 0$$

njena rešitev je

$$U(x,s) = A(s) e^{-a\sqrt{s}x} + B(s) e^{a\sqrt{s}x}$$

ker je omejena je $B(s) = 0$

Upoštevamo še robni pogoj

$$\mathcal{L}[u(0,t)] = \mathcal{L}[E(t)] = A(s)$$

$$\mathcal{L}[u(x,t)] = \mathcal{L}[E(t)] e^{-a\sqrt{s}x}$$

Iščanje inverzne L.T. je zapleteno. Uporabimo konvolucijo.

80. Rešite L.T. v krogelnem koordinatnem sistemu Poissote

le $u = u(r, \varphi)$:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0$$

$$u(r, \varphi) = G(r) H(\varphi)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} H(\varphi) \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin \varphi G(r) \frac{dH}{d\varphi} \right) = 0$$

Delimo s $H \cdot G$ in imamo

$$\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = - \frac{1}{\sin \varphi H} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin \varphi \frac{dH}{d\varphi} \right) = k$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin \varphi \frac{dH}{d\varphi} \right) + k H(\varphi) = 0$$

$$\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = k$$

$$r^2 G'' + 2r G' - k G = 0 \quad \text{— Eulerjeva d. e. nastavek}$$

$$G = r^\alpha$$

$$G_{u1} = r^\alpha \text{ in } G_{u2} = \frac{1}{r^{\alpha+1}}$$

Iz te enačbe z novo spremenljivko dobimo Legendrovo d. e. katere rešitve so Legendrovi polinomi

$$H(w) = P_n(w) = P_n(\cos \varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_{u1}(r, \varphi) = A_n r^n P_n(\cos \varphi) \rightarrow \text{notranjost sfere}$$

$$u_{u2}(r, \varphi) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \varphi) \rightarrow \text{zunanjost sfere}$$

A_n, B_n so konstante, ki jih dobimo s F.V. in robnih ter začetnih pogojev

1) Reševanje L.E. v pravokotnih koordinatah
(notrajost pravokotnika)

$$0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x)$$

$$u(0, y) = F(y), \quad u(a, y) = G(y)$$

Nemoremo dobiti separacijskega parametra ker so nehomogeni robni pogoji, zato razcepimo $u(x, y)$ v dva sumanda

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y).$$

Novi funkciji naj bosta rešitvi Dirichletovih problemov

$$\begin{aligned} * \quad \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 & v(x, 0) &= f(x) & v(0, y) &= 0 \\ & & v(x, b) &= g(x) & v(a, y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad \Delta w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 & w(x, 0) &= 0 & w(0, y) &= F(y) \\ & & w(x, b) &= 0 & w(a, y) &= G(y) \end{aligned}$$

Vsako od novih nalog rešimo posebej s separacijo spremenljivk

$$v(x, y) = X(x) Y(y)$$

$$Y(y) \frac{d^2 X}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

$$X_n = \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$Y_n = C_n \cdot e^{k_n y} + D_n \cdot e^{-k_n y}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cdot e^{k_n y} + D_n \cdot e^{-k_n y}) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Upoštevamo še robne pogoje ter izraznemo koeficiente s F.V. Podobno drugi del za $w(x, y)$.

82) Reševanje nehomogene d.e. (valovna enačba)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

Pri homogenih robnih pogojih $u(0, t) = u(a, t) = 0$

$u(x, 0) = g(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)$ začetni p.

Najprej poiščemo rešitev homogene enačbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$$

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}$$

že ustreza robnim

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Funkcije $T_n(t)$ izberemo tako, da rešitev ustreza še P.D.E in začetnim pogojem. Vse preostale funkcije

$g(x)$, $h(x)$ in $f(x, t)$ razvijemo v vrste po funkcijah

$X_n(x)$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$h(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

F_n , T_n , T_n' so Fourierovi koeficienti. Vse dobljene vrste vstavimo v prvotno enačbo. Tako dobimo d.e za

$$T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{a}\right)^2 T_n(t) = F_n(t)$$

katere koeficienti so rešitve navadne nehomogene linearne enačbe 2. reda s konstantnimi koeficienti. Ko dobimo $T_n(t)$ je rešitev nehomogene d.e. določena

3. Reševanje p.d.e. z nehomogenimi robnimi pogoji

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= g(x) \\ u_t(x, 0) &= h(x) \end{aligned} \right\} \text{začetni p.}$$

nehomogeni robni pogoji

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \varphi(t) \\ u(a, t) &= \psi(t) \end{aligned}$$

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$$

$$w(x, t) = \varphi(t) \frac{a-x}{a} + \psi(t) \frac{x}{a}$$

inkaja (x, t) e rešitev enačbe

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Sedaj je potem

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Funkcija $v(x, t)$ ustreza homogenima robnim pogojema

$$\begin{aligned} v(0, t) &= 0 \\ v(a, t) &= 0 \end{aligned}$$

začetna pogoja

$$v(x, 0) = g(x) - w(x, 0)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = h(x) - \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\varphi(t)}{a} + \frac{\psi(t)}{a}$$

če to še enkrat odvajamo po x je 0

Neznana f. $v(x, t)$ je rešitev nehomogene PDE s homogenimi robnimi pogoji. Sedaj rešujemo kot smo prej nehomogene enačbe

$$u(0, t) = \varphi(t)$$

$$u(0, t) = w(0, t) + v(0, t)$$

$$w(0, t) = \varphi(t) \text{ zato je } v(0, t) = 0$$

$$w(a, t) = \psi(t), \text{ zato je } v(a, t) = 0$$

Smisel tega je, da dobimo homogene robne pogoje!

84. Kakšne vrste dogodkov se lahko zgodijo pri slučajnem poskusu?

Dam naj bo $\boxed{\text{poskus } X}$ in $\boxed{\text{dogodek } A}$, ki se v tem poskusu lahko zgodi. Poskus ponavljamo in štejemo, kolikrat se pri tem zgodi dogodek A :

- a.) Dogodek se zgodi v vsakem poskusu – Gotov dogodek
Dogodek A je v tem primeru enak celotnemu vzorčnemu prostoru (S -množica izidov)
- b.) Dogodek A se ne zgodi v nobeni ponovitvi poskusa – nemogoč dogodek (prazna množica)
- c.) Dogodek A se v nekaterih ponovitvah zgodi, v nekaterih pa ne. (slučajen dogodek). Dogodek A je v tem primeru podmnožica prostora S .

85. Kaj je elementaren dogodek?

- Dogodka A in B , ki se nemoreta zgoditi hkrati sta nezdružljiva. Če je dogodek C tak, da ga je možno izraziti kot vsoto vsaj dveh nezdružljivih dogodkov, pravimo da je C sestavljen iz takih dogodkov, sicer pa je C elementaren dogodek. (ni ga mogoče izraziti z vsoto nezdružljivih dogodkov)

86. Navedi statistično def. verjetnosti in klasično def. verjetno
Vsakemu dogodku A priredimo št. $\boxed{P(A)}$, ki označuje verjetnost dogodka A . Verjetnost je pri velikem št. ponovitev poskusa približno enaka relativni frekvenca dogodka ($\boxed{f(A) = \frac{k}{n}}$, med n ponovitvami je k ugodnih za dogodek)

$$P(A) \approx f(A) = \frac{k}{n}$$

za verjetnost dogodka A oziroma velja $0 \leq P(A) \leq 1$ pri tem je $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$. Število k je treba dobiti s ponavljanjem poskusa, torej statistično $\rightarrow$ STATISTIČNA DEF.

Če ima poskus s - enako verjetnih izidov, za dogodek A pa je ugodnih r izidov, potem je verjetnost dogodka A
 $P(A) = r/s \rightarrow$ KLASIČNA DEF.

7. Razmišljanje z dogodki - kakšne relacije in operacije poznate? Kako so definirane?

Ima naj bodo dogodki A, B, C in njihove verjetnosti $P(A), P(B), P(C)$ istem poskusu.

1.) Dogodka A in B naj bosta taka, da se vedno z dogodkom A zgodi tudi dogodek B . Potem je dogodek A način dogodka B , ($A \subset B$ ali $B \supset A$).

2.) Če se dogodka vedno zgodita hkrati sta med seboj enaka ($A = B$).

3.) Dogodek, ko se od dogodkov A in B zgodi vsaj eden, imenujemo vsota dogodkov A in B ($A \cup B$, $A + B$) $\rightarrow$ lahko razširimo na vsoto več dogodkov ($A_1 + A_2 + \dots + A_n$).

4.) Dogodek, da se A in B zgodita hkrati, imenujemo produkt dogodkov A in B ($A \cdot B$, $A \cap B$). Za več dogodkov def. enako ($A_1 A_2 \dots A_n$) $\rightarrow A_1 A_2 \dots A_n \subset A_i$ $i = 1, 2, \dots$ saj se vselej hkrati s produktom zgodijo vsi njegovi faktorji.

8.) Kakšni zakoni veljajo za razmišljanje z dogodki? Kdaj sta dva dogodka nezdružljiva?

Če vsota in produkt veljajo enake lastnosti, kot za vsoto in produkt realnih števil, torej:

Naj poskušamo v A ~~WWW.STRONER.SI~~ zgoditi u eden od
 ušljn; $(A \cdot \bar{A} = N)$. V vsaki ponovitvi poskusa naj se gotovo
 zgodi eden od ušljn $(A + \bar{A} = G)$. Za taka dva dogodka
 pravimo, da sta nasprotna in dogodek $\bar{A}$ je negacija dogodka
 A in obratno

$$A + B = B + A$$

$$AB = BA$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

Vaja, tudi

$$A + A = A \text{ in}$$

$$A \cdot A = A$$

Naj bosta A in B taka dogodka, da se u moreta zgoditi
 hkrati. Taka dogodka imenujemo nezdružljiva. Njun produkt
 je nemogoč dogodek $(A \cdot B = N)$

89. Definirajte popoln sistem elementarnih dogodkov

V množici $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ naj bodo taki dogodki,
 da se pri vsaki ponovitvi poskusa zgodi natanko eden od
 njih, torej so paroma nezdružljivi $A_i A_j = N$ $i, j = 1, 2, \dots, n$
 $i \neq j$. V vsakem poskusu pa se zgodi natanko eden od njih,
 zato je $A_1 + A_2 + \dots + A_n = G$. Tako množico dogodkov S
 imenujemo popoln sistem dogodkov. (Najpreprostejši popoln
 sistem sta nasprotna dogodka) $(A + \bar{A} = G)$

90. Verjetnost vsote dveh ali treh dogodkov:

A_1 in A_2 sta nezdružljiva z verjetnostjo $P(A_1) = \frac{k_1}{n}$ in
 $P(A_2) = \frac{k_2}{n}$, kjer je n število ponovitev poskusa. Dogodek
 $A_1 + A_2$ se zgodi, če se ^{vsaj} zgodi eden od ušljn, zato je za vsoto
 ugodnih $k_1 + k_2$ od n opravljenih poskusov in.

$$P(A_1 + A_2) = \frac{k_1 + k_2}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} = P(A_1) + P(A_2)$$

Če sta A_1 in A_2 združljiva:

Število poskusov je n , A_1 naj se zgodi v k_1 poskusih, A_2 v k_2 poskusih, oba skupaj $(A_1 A_2)$ v k_{12} poskusih.

$$P(A_1 + A_2) = \frac{k_1 + k_2 - k_{12}}{n} = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$$

1) Kako je definirana pogojna verjetnost? Kako izračunamo verjetnost produkta dveh dogodkov?

Def. Pogojna verjetnost $P(A|B)$ v poskusu X je verjetnost dogodka A v poskusu X z dodanim pogojem B .

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

2) Kdaj sta dva dogodka A in B med seboj neodvisna? Kaj velja za $\bar{A}$ in $\bar{B}$?

Če je $P(A|B) = P(A)$ je dogodek A neodvisen od dogodka B . Če je $P(A|B) \neq P(A)$ je dogodek A odvisen od dogodka B . Če je A neodvisen od B , je

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B) \text{ in odtod sledi}$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Torej je tudi dogodek B neodvisen od A . Dogodka sta med seboj neodvisna.

Dva dogodka sta neodvisna, če se z realizacijo enega od njih ne spremeni verjetnost realizacije drugega.

Če sta A in B neodvisna, sta neodvisna tudi $\bar{A}, \bar{B}$, dogodka A in $\bar{B}$ ter $\bar{A}$ in B .

$$P(A \cdot \bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$$

93. Navedite osnovni zakon kombiniranja.

Če sestavlja proces odločanja k zaporednih faz, pri čemer je v prvi fazi n_1 , v drugi fazi $n_2, \dots$, v k -ti fazi pa n_k možnih odločitev in je število izborov v posamezni fazi neodvisno od tega, katere možnosti smo izbrali v prejšnjih fazah, potem je št. izborov: $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

94. Variacije / pomemben vrstni red

- Variacije ^{brez} ponavljanja podaja niz r različnih elementov izmed n elementov dane množice

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- s ponavljanjem: podaja niz r elementov izmed n elementov dane množice, v katerem lahko posamezni elementi nastopijo večkrat

$$(P) V_n^r = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_r = n^r$$

95. Permutacije

- Permutacija je bijektivna preslikava kake končne množice nase; določena je z razporedom elementov izbrane množice

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

- Permutacije s ponavljanjem: Permutacije n simbolov

s ponavljanjem so razporedi na n -mestih, na katerih večkrat nastopa en ali več (različnih) simbolov

$$P_{n, k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

16. Kombinacije

Kombinacije brez ponavljanja

Kombinacije reda r iz n elementov so podmnožice z močjo r take končne množice z močjo n .

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

s ponavljanjem:

reda r iz n elementov dane množice so izbori, v katerih lahko posamezni elementi nastopajo večkrat.

$$(P) C_n^r = C_{n+r-1}^r = \binom{n+r-1}{r}$$

7. Formula popolne verjetnosti

Dogodek A naj se realizira pri enem od dogodkov $H_1, H_2, \dots, H_n$, (hipoteze). Ti dogodki naj sestavljajo popoln sistem dogodkov

$H_1 + H_2 + \dots + H_n = G$. Dogodek A se pojavlja le v kombinaciji s katero od hipotez $A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$. Ker so vsi

H_i nezdružljivi, so take tudi zgornje kombinacije AH_i , $i = 1, 2, \dots$. Zato velja:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AH_i) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A|H_i)$$

Formula popolne verjetnosti

98 Bayesova formula (izrek o verjetnosti hipotez)

Dan naj bo popoln sistem hipotez $H_1, H_2, \dots, H_n$. Znane naj bodo tudi verjetnosti teh hipotez $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. Vemo, da se je dogodek A realiziral, zanimá nas, pri kateri hipotezi H_i se je realiziral. Iščemo torej $P(H_i|A)$ za vsako hipotezo H_i .

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(A)} = \boxed{\frac{P(H_i) P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j) P(A|H_j)}}$$

99 Definiraj pojem slučajne spremenljivke! Kakšne vrste slučajnih spremenljivk poznate?

Slučajna spremenljivka X definirana na vzorčnem prostoru S je funkcija, $X: S \rightarrow \mathbb{R}$, ki vsakemu izidu priredi neko realno število. Je količina, katere vrednost je odvisna od slučaja. Slučajna spr. je določena s svojo zalogo vrednosti in s svojim porazdelitvenim zakonom. Glede na to, kakšna je zaloga vrednosti slučajne spremenljivke ločimo:

- diskretne slučajne spremenljivke (zaloga vrednosti je končno ali neskončno zaporedje)
- zvezne slučajne spremenljivke

100 Na kakšne načine lahko podamo porazdelitveno zakon slučajne spremenljivke?

- s porazdelitveno funkcijo $P(X \leq x) = F(x)$
- za diskretne slučajne spremenljivke lahko podamo porazdelitveni zakon tudi drugače:

za vsako izmed možnih vrednosti x_k , ki jih lahko zavzame diskretna slučajna spremenljivka, podamo verjetnost dogodka $(X = x_k)$ in zaznamujemo $P(X = x_k) = p_k$. Tako obliko porazdelitvenega zakona imenujemo verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke X . Ker sestavljajo dogodki $(X = x_k)$ popoln sistem dogodkov je $\sum_k p_k = 1$

$X : \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{pmatrix}$ verjetnostna shema

1. Kako je definirana porazdelitvena funkcija in kakšne lastnosti ima?

Definicija: Porazdelitvena funkcija $F(x)$ slučajne spremenljivke X je funkcija, ki je definirana za vsak realen $x \in \mathbb{R}$ s predpisom $F(x) = P(X \leq x)$, $-\infty < x < \infty$

Lastnosti:

$$a.) F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

b.) Porazdelitvena funkcija je monotono naraščajoča

$$x_1 < x_2 \text{ sledi } F(x_1) \leq F(x_2)$$

c.) Za poljubni realni števili x_1 in x_2 , kjer je $x_2 > x_1$, velja relacija

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

2. Verjetnostna funkcija diskretne slučajne spremenljivke in njena zveza s porazdelitveno funkcijo.

103) Bernoullijeva slučajna spremenljivka

je slučajna spremenljivka, z verjetnostno shemo

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ Neugoden izid je zaznamovan z 0, ugoden pa z 1.

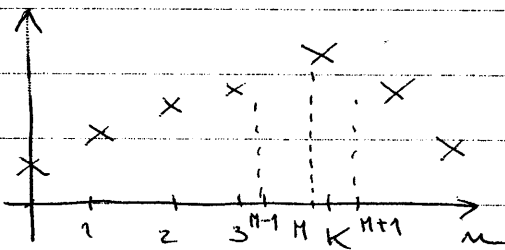
104) Binomska slučajna spremenljivka

Če imamo zaporedje n Bernoullijevih poskusov mu priredimo slučajno spremenljivko X , ki zaznane vrednost k (ko je v n poskusih k ugodnih) oz. $n-k$ (neugodnih)

verjetnostna f. za binomsko slučajno spr.

$$P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

105) Kako dokažemo najverjetnejši izid binomske slučajne spremenljivke?



$$np - q \leq M \leq np + p$$

$$P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Naj bo število ponovitev n konstantno, pri čemer tako

verjetnost p . $P(n, p, k)$ je funkcija le sprem. k . Vprašamo se po maks.

$$P(n, p, M) \geq P(n, p, M+1)$$

$$P(n, p, M) \geq P(n, p, M-1)$$

verjetnosti v binomski porazdelitvi. Isčemo torej $k = M$, za katerega je $P(n, p, k)$ maksimalna.

6. Poissonova porazdelitev

Je diskretna porazdelitev. Slučajna spremenljivka, ki je porazdeljena po Poissonovemu zakonu lahko vzame vsako nenegativno celostevilsko vrednost k in to z verjetnostjo $p_k = \frac{a^k e^{-a}}{k!}; a > 0$

7. Zvezne slučajne spremenljivke in njihove lastnosti

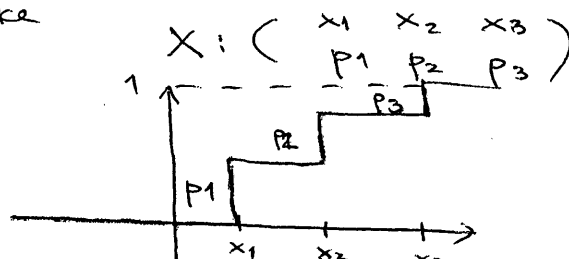
Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena, če se njena porazdelitvena f. izraža v obliki $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$, $p(t)$ je gostota verjetnosti. Zveza: $p(x) = F'(x)$ seveda le tam kjer je $p(x)$ zvezna funkcija. $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(t) dt$$

102.

a vsako izmed možnih vrednosti x_k , ki jih lahko vzame diskretna slučajna spremenljivka, podamo verjetnost dogodka $[X = x_k]$ in zaznamujemo $P(X = x_k) = p_k \rightarrow$ verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$$

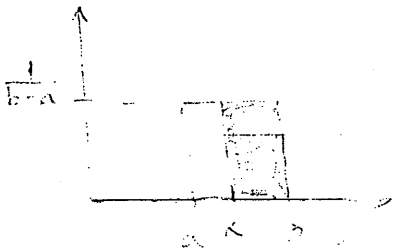


Graf porazdelitvene funkcije diskretne slučajne spremenljivke je stopničasta funkcija. Skoki te funkcije povedo zvezo med verjetnostno funkcijo in porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke, [saj je $p_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$.]

108) Enakomerna zvezna porazdelitev

Je najpreprostejša zvezna porazdelitev, ki je def. z gostoto verjetnosti $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$, $a < b$

S tako porazdelitvijo imamo oprarka, kadar na slepo izbiramo točko na intervalu $[a, b]$. Verjetnost, da leži točka, ki smo jo izbrali na predpisanem intervalu (α, β) intervala $[a, b]$ je $P(\alpha < x < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$



$$P = (\beta - \alpha) \cdot \frac{1}{(b - a)}$$

109) Gaussova porazdelitev

Definirana je z gostoto verjetnosti $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$

Gostota verjetnosti je odvisna od dveh realnih parametrov, a in σ ; a je poljubna, $\sigma > 0$! $P(x)$ je povsod pozitivna v $x=a$ ima maksimum $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, v točkah $a-\sigma$ in $a+\sigma$ pa obračanja. Od parametra a je odvisna lega krivulje, od σ pa oblika. Je simetrična glede na a !

110.) Standardizirana normalna porazdelitev. Kako jo lahko uporabimo pri obravnavi splošne normalne porazdelitve? ko je $\mu = 0$ in $\sigma = 1$, torej $N(0,1)$ je $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. To je standardizirana normalna porazdelitev.

Računanje verjetnosti $P(c \leq X \leq d)$ za poljubno normalno porazdelitev prevedemo s transformacijo $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ na računanje verjetnosti $P(\alpha \leq Z \leq \beta)$ za standardizirano normalno porazdelitev

$$\alpha = \frac{c - \mu}{\sigma} \quad \beta = \frac{d - \mu}{\sigma}$$

— povprečna vrednost

(11) Matematično upanje – kako je definirano za različne vrste slučajnih spremenljivk?

Dana je verjetnostna shema za diskretno slučajno spremenljivko

$$X: \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ p_1, & p_2, & \dots, & p_n \end{pmatrix}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \rightarrow \text{matematično upanje}$$

Če je X diskretna slučajna spremenljivka z neskončno zalogo vrednosti je povprečna vrednost

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Pri zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki X ima vlogo verjetnosti p_i diferencial $p(x)dx$, vsota pa preide v integral in definiramo:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

Potreben pogoj je konvergenca!

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty \quad \text{in} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx < \infty$$

(12) Izračunaj $E(X)$ za Poissonovo porazdelitev

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{a^k}{k!} e^{-a} \right) = a \cdot e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= a \cdot e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = a \cdot e^{-a} \cdot e^a = \underline{\underline{a}} \end{aligned}$$

$$k-1=n$$

Parameter a Poissonove porazdelitve je enak matematičnemu upanju te porazdelitve.

13) Izračunajte $E(X)$ za normalno porazdelitev

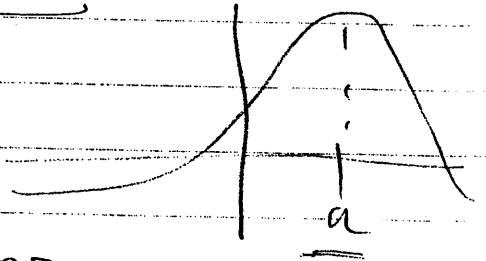
Naj bo X normalno porazdeljena, torej po zakonu $N(a, \sigma)$.

Potem je $E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx$. Postavimo

$x = a + \sigma t$ in imamo

$$E(X) = \underbrace{\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{\sqrt{2\pi}} + \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{0} \quad \text{— kha}$$

za $N(a, \sigma)$ velja $E(X) = a$



14) Izračunajte $E(X)$ za binomsko porazdelitev

$E(X)$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$X_i: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \\ &= p + p + \dots + p = \underline{\underline{np}} \end{aligned}$$

15) Disperzija in standardna deviacija slučajne spremenljivke

$$D(X) = E(X - E(X))^2 \text{ disperzija ali varianca slučajne}$$

spremenljivke X . $D(X)$ je nenegativna količina, ki je tem večja, čim bolj je slučajna spremenljivka X razpíšena okrog povprečne vrednosti.

$$X: \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{pmatrix}$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$$

če ima X neskončno zalogo vrednosti:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p_i$$

Pri zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 p(x) dx$$

Kadar neskončna vrsta ali posplošeni integral ne konvergira, slučajna spr. X nima disperzije.

tudi: $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

mera razpršenosti

$$G(X) = \sqrt{D(X)} \quad \text{standardna deviacija}$$

116) Izračunaj disperzijo za Poissonovo porazdelitev

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{a^k e^{-a}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)a^k e^{-a}}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka^k e^{-a}}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)a^k e^{-a}}{k!} + a \\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)a^k e^{-a}}{k!} &= a^2 e^{-a} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^{k-2}}{(k-2)!} = a^2 e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = a^2 \end{aligned}$$

in $E(X^2) = a^2 + a$, $E(X) = a$ in

$$D(X) = a^2 + a - a^2 = a$$

Disperzija je enaka povprečni vrednosti.

117) Izračunaj disperzijo za enakomerno porazdeljeno zvezno spremenljivko

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

ker je $E(X) = \frac{a+b}{2}$, je

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

~~☒~~ Lastnosti matematičnega upanja

a.) Matematično upanje konstante C je enako C , $E(C) = C$

b.) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ in tudi

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

c.) $E(CX) = CE(X)$

d.) Naj bosta a in b poljubni realni števili, X in Y dve slučajni spremenljivki, ki imata matematično upanje, potem velja

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Mat. upanje je linearen funkcional

e.) Naj bosta slučajni spremenljivki X in Y med seboj neodvisni

in naj imata mat. upanje, potem obstaja tudi $E(XY)$ in

$$\text{velja } E(XY) = E(X)E(Y) \text{ tudi } E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_n)$$

~~☒~~ Kdaj sta dve slučajni spremenljivki nekolerirani? Kako je pojem koleracije povezan s pojmom neodvisnosti?

Če za dve slučajni spremenljivki X in Y velja $E(XY) = E(X)E(Y)$

pravimo, da sta spremenljivki med seboj nekolerirani, če relacija

ne velja sta spremenljivki kolerirani. Za neodvisnost

spremenljivk X in Y je potrebno, ne pa tudi zadostno, da

sta med seboj nekolerirani.

~~☒~~ Lastnosti disperzije slučajnih spremenljivk

a.) $D(C) = 0$

b.) Če je C konstanta in X slučajna spremenljivka, ki ima disperzijo, je

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

$$c.) D(x+y) = D(x) + D(y) + \underbrace{2K(x,y)}_{\text{kovarianca}}$$

$$K(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

$K(x,y) = 0$ za nekolerirane X in Y

za kolerirane velja zgornja formula

(121.) Izračunajte disperzijo binomske slučajne spremenljivke

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Vrednost vsote je vedno enaka št. ugodnih izidov poskusa (vrednosti binomske spr. X)

Ker so Bernoullijevi slučajni poskusi neodvisni, so tudi spremenljivke X_i , $i=1,2,\dots,n$ neodvisne in nekolerirane.

$$E(x) = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_n)$$

$$D(x) = D(x_1) + D(x_2) + \dots + D(x_n)$$

$$E(x_i) = \sum_{i=1}^2 x_i p_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

$$\begin{aligned} D(x_i) &= \sum_{i=1}^2 (x_i - E)^2 p_i = (1-p)^2 p + (0-p)^2 q \\ &= q^2 p + p^2 q = pq [q + p] = pq \end{aligned}$$

$$E(x) = n E(x_i) = np$$

$$D(x) = n D(x_i) = npq$$

22) Momenti slučajnih spremenljivk

$a \in \mathbb{R}$, k katerokoli nenegativno število

$\mu_k(a) = E[(X-a)^k]$ je moment reda k slučajne spremenljivke X glede na a

$a = \emptyset$; začetni momenti $z_k = \mu_k(\emptyset)$

$$a = E[X]$$

$$\mu_k[E(X)] = E[X - E(X)]^k \quad \text{centralni momenti}$$

$$\mu_1(\emptyset) = E[X] \quad k=1, a=\emptyset = z_1$$

$$\mu_2[E(X)] = E[X - E(X)]^2 = D(X) = \mu_2$$

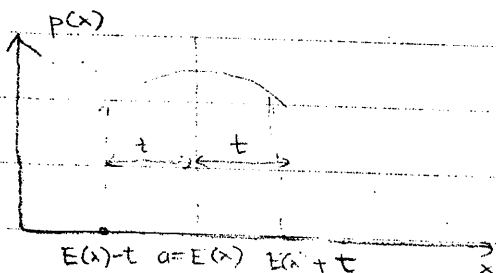
23) Povezava med začetnimi in centralnimi momenti

$$\mu_n = E[(X - E(X))^n] = E[(X - z_1)^n] =$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{binomska formula}$$

$$= E\left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (-z_1)^{n-k}\right]$$

4) Kdaj je slučajna spr. porazdeljena simetrično?



$$P[E(X)-t < X < E(X)] =$$

$$P[E(X) < X < E(X)+t]$$

125. Def. asimetrijo slučajne spremenljivke

$$A(x) = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

$$D(x) = E[X^2] - (E(x))^2 = z_2 - z_1^2$$

μ_3 je 3. centralni moment

$$\begin{aligned} &= E[(x - z_1)^3] = E[x^3 - 3x^2z_1 + 3xz_1^2 - z_1^3] \\ &= z_3 - 3z_2z_1 + 3z_1^3 - z_1^3 \\ &= \underline{\underline{z_3 - 3z_2z_1 + 2z_1^3}} \end{aligned}$$

Pri nesimetrični porazdelitvi so lihi centralni momenti različni od 0.

126. Izračunajte asimetrijo eksponentne porazdelitve

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_k &= \int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx = \left[-x^k e^{-x} \right]_0^{\infty} + \\ &= E[x^k] \quad k \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx = \underline{\underline{k z_{k-1}}} \end{aligned}$$

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = 1 \cdot z_0 = \underline{\underline{1}}$$

$$z_2 = 2 \cdot 1$$

$$z_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$z_k = k!$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = z_2 - z_1^2 = 1$$

$$\mu_3 = z_3 - 3z_2z_1 + 2z_1^3 = 2$$

$$A(x) = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$

WWW.STROMAR.SI

VELIKO SREČE IN USPEHA NA
IZPITIH!