



2. Pogreški pri merjenju in merilna negotovost

Kljub '**objektivnosti**' merilnega postopka **ne dobimo prave** vrednosti veličine. Vzroki:

- učinki **vplivnih** veličin,
- **nepopolnost** merilnih **metod**,
- **nepopolnost** merilnih **naprav**, ...





Opravka imamo z **merilnim pogreškom**.

- **Absolutni** (merilni) **pogrešek** podan z enotami:

$$E = x_i - x$$

- **Relativni** (merilni) **pogrešek** v razmerju do (delovne) prave vrednosti:

$$e = \frac{E}{x} = \frac{x_i - x}{x}$$

- podan v procentih ($1\% = 10^{-2}$) je **procentualni** pogrešek:

$$e = 100 \frac{E}{x} \% = 100 \frac{x_i - x}{x} \%$$

- tudi v **promilih** ($1\text{‰} = 10^{-3}$) in **milijoninkah** (ppm – part per million: $1 \text{ ppm} = 10^{-6}$).





Primer:

- izmerjena vrednost: $C_i = 62,7 \text{ nF}$;
- prava vrednost: $C = 63,4 \text{ nF}$;
- absolutni pogrešek: $E = C_i - C = 62,7 \text{ nF} - 63,4 \text{ nF} = -0,7 \text{ nF}$
- relativni pogrešek: $e = \frac{C_i - C}{C} = \frac{-0,7 \text{ nF}}{63,4 \text{ nF}} = -0,011 = -1,1\%$

Pri merah je pogrešek definiran kot:

- **razlika nazivne** (označene) vrednosti in **prave** vrednosti.

Primer:

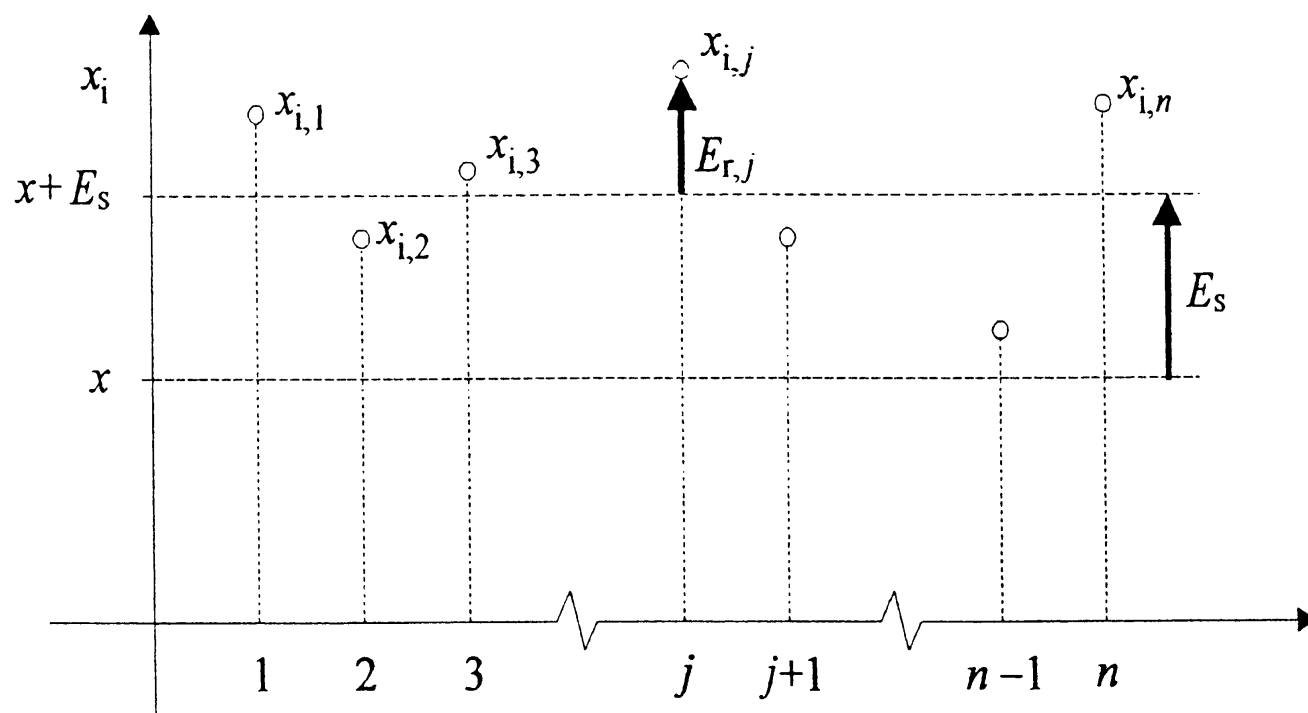
- nazivna vrednost uporovnega etalona: $R_N = 1000 \Omega$;
- s precizno napravo ugotovljena prava vrednost: $R = 999,7 \Omega$
- pogrešek: $E = R_N - R = 1000 \Omega - 999,7 \Omega = 0,3 \Omega$,
 $e = 3 \cdot 10^{-4}$ ali $e = 0,03\%$





2.1 Sistematični in naključni pogrešek

Če se meritev ponovi z isto merilno napravo, pod enakimi pogoji, se nova izmerjena vrednost v splošnem razlikuje od prejšnje.



x - prava vrednost veličine,
 $x_{i,j}$ - j -ta izmerjena vrednost,
 E_s - sistematični pogrešek,
 $E_{r,j}$ - naključni pogrešek j -te izmerjene vrednosti,
 n - število ponovljenih meritev.

Slika 2.1 Potek izmerjenih vrednosti pod enakimi pogoji





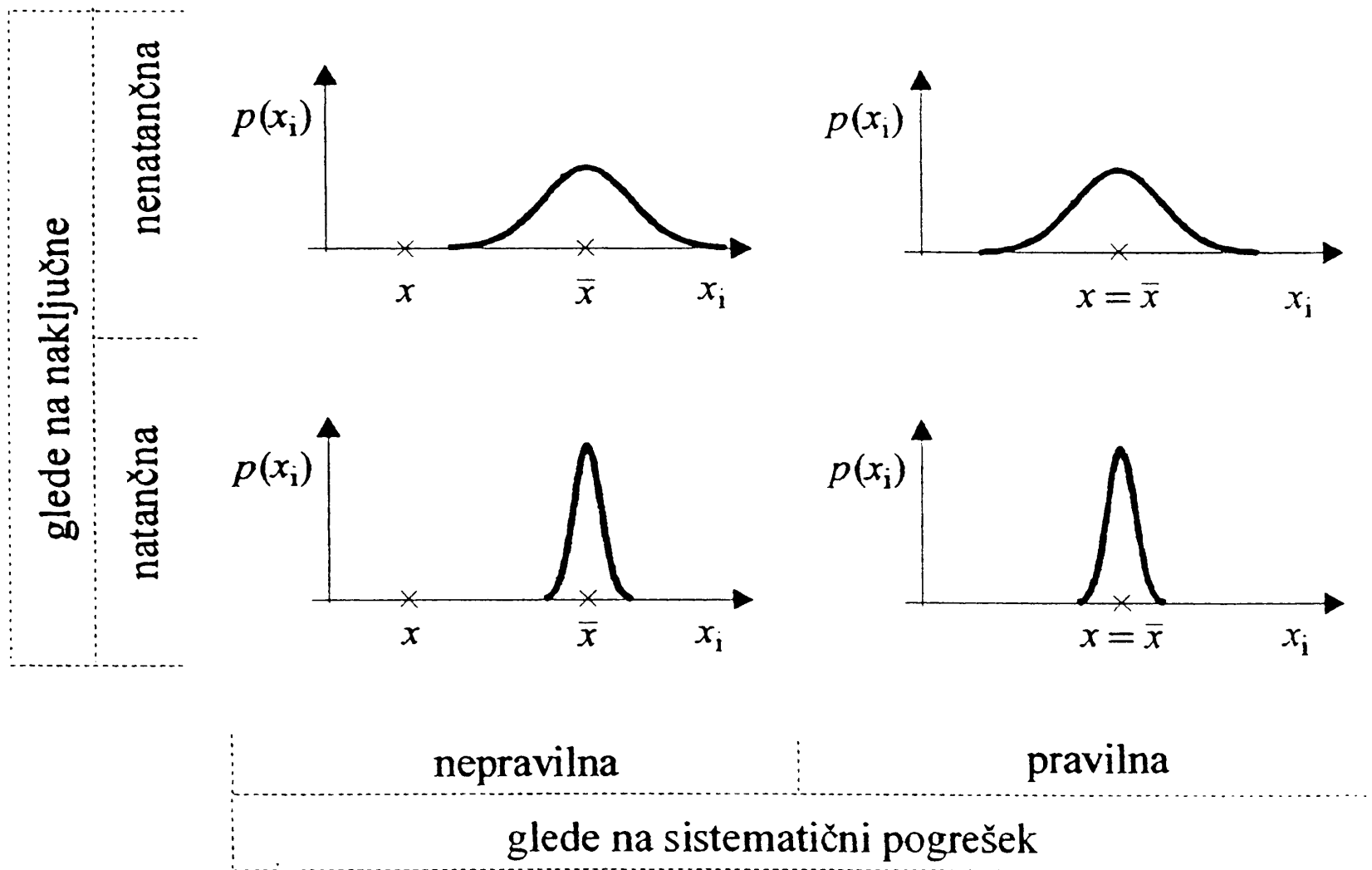
Ločimo:

- **sistematični** pogrešek – **meritev je nepravilna**,
 - vzrok povzroča **nespremenjeni** učinek,
 - načeloma **ugotovljiv** in ga lahko izločimo.
- **naključni** pogrešek – **meritev je nenatančna**,
 - vzroki povzročajo **naključno razpršenost** izmerjenih vrednosti,
 - naključnega pogreška **ne moremo kompenzirati**.





Točna meritev je **pravilna** in **natančna**.



Slika 2.2 Meritev glede na vpliv sistematičnega in naključnih pogreškov





Povezava med izmerjeno in pravo vrednostjo:

$$x_{i,j} = x + E_j = x + E_s + E_{r,j}$$

- **aritmetična sredina** izmerjenih vrednosti:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x + E_s + E_{r,j}) = x + E_s + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_{r,j}$$

- ker je **pogostost** nastopa naključnih **pozitivnih in negativnih** pogreškov **enaka**, se njihov **vpliv s ponavljanjem manjša**:

$$n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_{r,j} \rightarrow 0$$

- če je število ponovitev **pod ‘enakimi’ pogoji veliko**:

$$n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x + E_s$$





$$n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x + E_s ! \quad \Rightarrow \quad E_s = \bar{x} - x$$

- **aritmetična sredina** neskončne množice izmerjenih vrednosti še **ni enaka pravi** vrednosti!
- poglavitni vir netočnosti je **sistematični pogrešek!**
 - **odkrivamo** ga:
 - **z različnimi metodami,**
 - **spreminjamo** posamezne **dele** merilne naprave,
 - **spreminjamo** vplivne veličine,
 - **primerjamo** z meritvami **drugih** laboratorijev.
 - v celoti ga ne moremo odpraviti!
 - **znižamo** ga do tiste mere, ki je zahtevana ali **gospodarsko upravičena.**





Pogrešek naj bo tolikšen, da še omogoča pravilno sklepanje in nadaljnje odločitve.

Korekcija ali popravek je enak odkritemu delu sistematičnega pogreška z nasprotnim predznakom.

- ker sistematski pogrešek ni v popolnosti znan, tudi **korekcija ni popolna.**

Grobi pogreški:

- odčitavanje na napačni skali,
- napačna raba instrumentov,
- napačno računanje,
- pokvarjena merila, ...





2.1.1 Razširjanje pogreškov

Sistematični in naključni pogrešek **pri posredno** merjeni veličini (npr.: $R = U/I$, $P = UI \cos \varphi$)

- določimo ga s pogreški neposredno merjenih veličin - **razširjanje pogreškov**.
 - zanima nas, kako posamezna **neposredno** merjena veličina **vpliva na posredno** merjeno veličino?

$$y = f(x)$$

Sprememba x za dx povzroči spremembo y za dy :

$$y + dy = f(x + dx)$$





$$y + dy = f(x + dx)$$

- po razvoju desne strani v **Taylorjevo vrsto** in **zanemaritvi** členov drugega in višjega reda dobimo:

$$y + \underline{dy} = f(x) + \underline{f'(x)dx} + f''(x)\frac{d^2x}{2!} + \dots$$

- in od tod: $dy = f'(x)dx$

oz. $\Delta y = f'(x)\Delta x$ (končne spremembe)

- če je Δx majhna, smemo člene višjih redov zanemariti!





Kadar je posredno merjena veličina **funkcija** N **spremenljivk**:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_N} \Delta x_N = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i$$

- **Sistematični pogrešek** posredno merjene veličine dobimo iz sistematičnih pogreškov neposredno merjenih veličin.

$$E_{s,y} = \frac{\partial y}{\partial x_1} E_{s,1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} E_{s,2} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_N} E_{s,N} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y}{\partial x_i} E_{s,i}$$

- enačba ima pomen **pri** močno **nelinearnih** sistemih.
- v praksi **korigiramo** sistematske pogreške že **pri neposredno** merjenih veličinah.
- Ker je narava **naključnih pogreškov** drugačna (predznak in velikost nista znana) se drugače razširjajo - geometrično





2.2 Statistična obdelava izmerjenih vrednosti

Iz vrste meritev, ki so **ponovljene pod enakimi pogoji**, dobimo najboljšo **oceno za pravo** vrednost.

Na osnovi **vzorca** (končno število izmerkov) **spoznamo lastnosti celotne populacije** (neskončno število meritev).

- **predvidimo** lahko pričakovane **rezultate bodočih merenj** pod enakimi pogoji.
- **sistematični pogrešek** ne moremo odpraviti!





2.2.1 Aritmetična sredina in eksperimentalni standardni odklon

Če ima vzorec n izmerkov $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}$ je aritmetična sredina:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j}$$

in eksperimentalni standardni odklon (merilo razpršenosti):

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Kvadrat standardnega odklona je **varianca**: $v(x) = s^2(x)$





Pri **velikem** n je eksperimentalni standardni odklon **enak srednji kvadratični vrednosti** naključnih pogreškov:

$$n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad x_{i,j} - \bar{x} = (x + E_s + E_{r,j}) - (x + E_s) = E_{r,j}$$

in zato:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n-1}} \approx \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n E_{r,j}^2}{n-1}}$$

- Standardni odklon se od izmerka do izmerka ne spreminja.
- Je **ocena za srednjo kvadratično vrednost** naključnih pogreškov,
- **Merilo negotovosti** aritmetične sredine!





Če se izmerjene vrednosti $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,m}$ **ponavljajo** s **frekvencami** (število ponovitev) f_1, f_2, \dots, f_m , je aritmetična sredina:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m f_j x_{i,j}}{\sum_{j=1}^m f_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m f_j x_{i,j}$$

in eksperimentalni standardni odklon:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m f_j (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n - 1}}$$





Zgled:

Kolikšni so aritmetična sredina, varianca in standardni odklon?

j	1	2	3	4	5	6
x_i	8,260	8,263	8,264	8,265	8,267	8,268
f	1	5	8	7	3	1

- aritmetična sredina:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 8,260 + 5 \cdot 8,263 + \dots + 1 \cdot 8,268}{1 + 5 + \dots + 1} = 8,2644$$

- varianca:

$$s^2(x) = \frac{1 \cdot (8,260 - 8,2644)^2 + 5 \cdot (8,263 - 8,2644)^2 + \dots}{25 - 1} = 2,76 \cdot 10^{-6}$$

- standardni odklon: $s(x) = 0,0017$





2.2.2 Združeni eksperimentalni standardni odklon

Včasih imamo na voljo **več (r) serij meritev** (ista merilna oprema, pod enakimi pogoji, ustaljeni merilni postopek)

- najboljša **ocena standardnega odklona celotne populacije** je **združeni eksperimentalni standardni odklon**:

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2(x) + (n_2 - 1)s_2^2(x) + \dots + (n_r - 1)s_r^2(x)}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_r - 1)}}$$

- n_r - število izmerkov in $s_r(x)$ - eksperimentalni standardni odklon r -te serije meritev.





2.2.3 Grupiranje, urejanje in prikazovanje podatkov

Množico izmerjenih vrednosti (pod enakimi pogoji) moramo **urediti** in jo podati z **nekaj značilnimi** vrednostmi.

Tabela 2.1 Niz 24 izmerjenih vrednosti

j	R_i/Ω	j	R_i/Ω	j	R_i/Ω	j	R_i/Ω
1	999,0	7	1001,6	13	998,5	19	1002,9
2	998,4	8	1001,4	14	1001,7	20	1003,3
3	1002,4	9	999,7	15	1000,1	21	1000,9
4	1000,9	10	1003,4	16	1001,0	22	999,9
5	999,3	11	999,0	17	1001,9	23	1001,4
6	1000,2	12	1001,0	18	997,6	24	1000,0





Časovno tendenco lahko grobo ocenimo iz grafa:



Slika 2.3 Grafična ponazoritev izmerjenih vrednosti

Korelacijski koeficient (analitični kriterij) med izmerjenimi vrednostmi in časom znaša le $r = 0,18$ → **podatki so 'neodvisni' od časa.**





Za uvrstitev podatkov v posamezni razred velja načelo polodprtega intervala: $R_{k,sp} \leq R_i < R_{k,zg}$

Tabela 2.2 Frekvenčna tabela

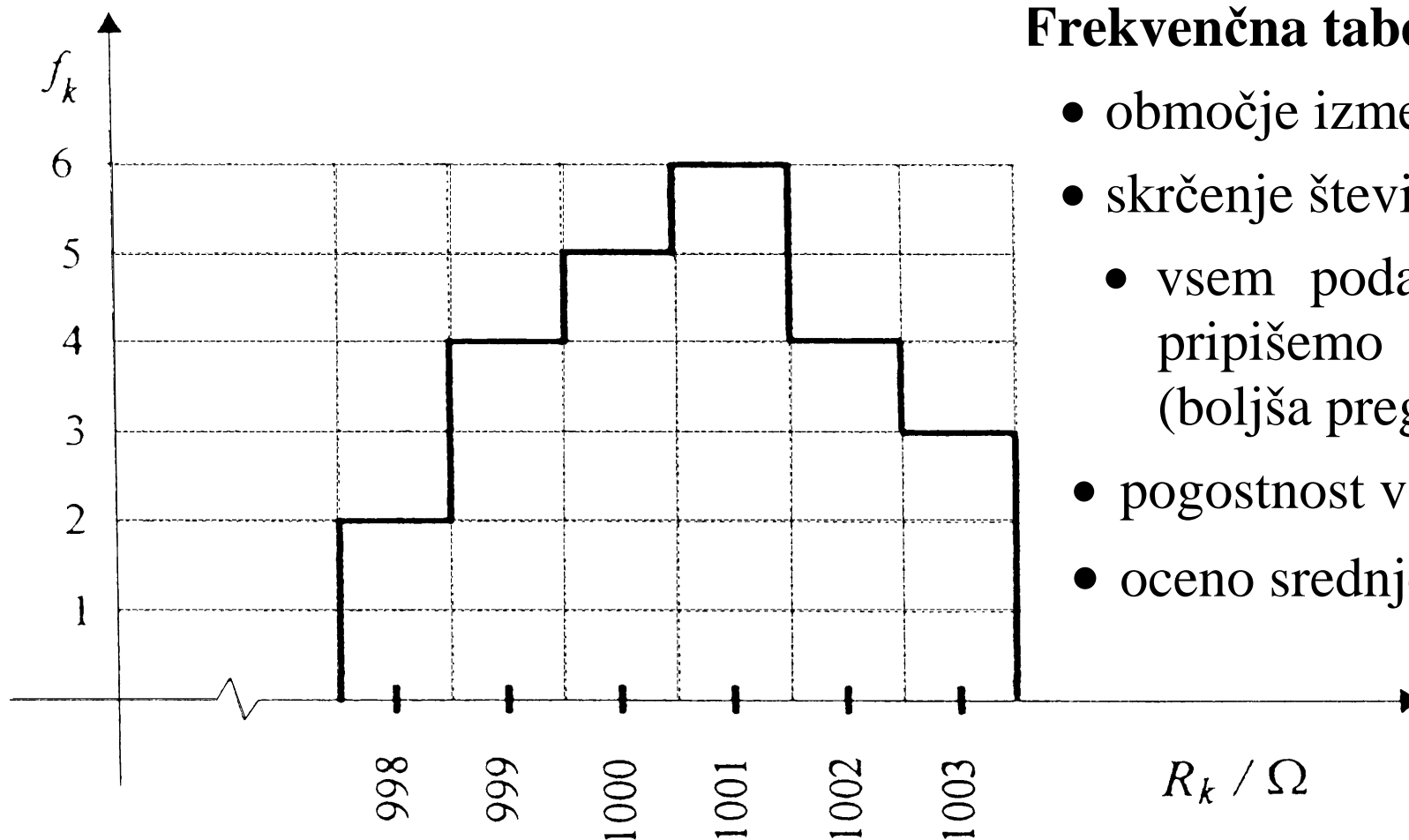
številka razreda k	sredina razreda R_k / Ω	meji razreda		frekvenca f_k		relativna frekvenca f'_k
		spodnja $R_{k,sp} / \Omega$	zgornja $R_{k,zg} / \Omega$			
1	998	997,5	998,5	II	2	0,083
2	999	998,5	999,5	III	4	0,167
3	1000	999,5	1000,5	<u>III</u>	5	0,208
4	1001	1000,5	1001,5	<u>III</u> I	6	0,250
5	1002	1001,5	1002,5	III	4	0,167
6	1003	1002,5	1003,5	III	3	0,125





2.2.3.1 Frekvenca

Frekvenca je število podatkov v posameznem razredu



Frekvenčna tabela pokaže:

- območje izmerjenih vrednosti,
- skrčenje števila podatkov,
 - vsem podatkom v razredu pripišemo srednjo vrednost (boljša preglednost),
- pogostnost v območju,
- oceno srednje vrednosti...

Slika 2.4 Histogram izmerjenih vrednosti upornosti

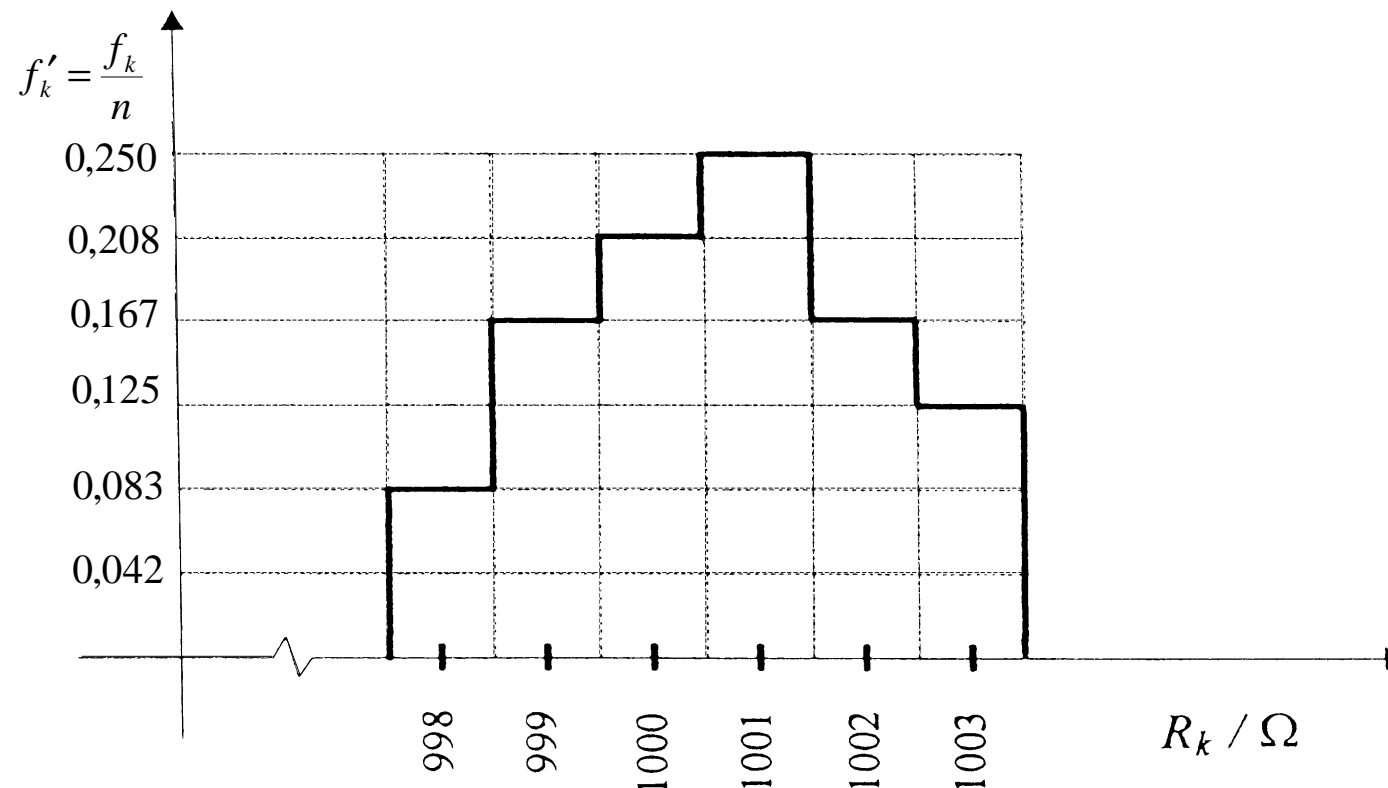




2.2.3.2 Relativna frekvenca

- relativno število podatkov v intervalu glede na število

vseh rezultatov: $f'_k = \frac{f_k}{n}$



Slika 2.5 Histogram z relativnimi frekvencami





Relativna frekvenca (oz. frekvenca) je lahko **enaka tudi ploščini stolpca** $f'_k/\Delta x$ (oz. $f_k/\Delta x$) Δx - širina razreda

- **ploščina** histograma je **enaka 1** – je normirana

Kadar primerjamo podatke merjenj z **različnim številom merjenj** je uporabnejša **relativna frekvenca!**

Če je **število meritev veliko** pod **enakimi pogoji** postajajo histogrami med seboj podobni - zelo **dober približek** histogramu **neskončne populacije** (normalni ali gaussni).

