

MATEMATIKA III

FE - UNI

2008 - 2009

DOLINAR

- Osnove diferencialne geometrije
- . Obravnavali bomo krivulje in ploskve v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Vektorska funkcija $\vec{v}$

Def.: vektorska funkcija $\vec{v}$ je preslikava $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}$. Torej $\vec{v}$ vsakemu realnemu številu iz def. območja D priredi nek vektor v $\mathbb{R}^3$ oziroma, ker vektor lahko identificiramo s točkami $\vec{v}$ priredi realnemu številu neko točko v $\mathbb{R}^3$.

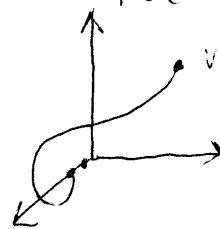
Primer: položaj elektrona v določenem času v prostoru

$$\text{npr.: } \vec{v}(0) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{v}(1) = (2, 0, 0)$$

v času 0 elektron v točki $(1, 0, 0)$

$$\vec{v}(20) = (2, 4, 5)$$



Preslikavo $\vec{v}$ lahko tudi odvajamo (def)

$$\vec{v}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h}$$

Preverimo lahko tudi, če je preslikava $\vec{v}$ zvezna.

Opomba: Vektorska funkcije $\vec{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}$ je podana s tremi skalarnimi ("navadnimi") funkcijami:

$$\vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t)) \quad \text{pri čemer zdej } v_1: D \rightarrow \mathbb{R}, v_2: D \rightarrow \mathbb{R}, v_3: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ in velja}$$

Izrek: vektorska fja $\vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ je zvezna natanko tedaj, ko so vse tri funkcije v_1, v_2, v_3 zvezne. Vektorska fja $\vec{v}$ je odvedljiva natanko tedaj, ko so odvedljive vse tri fje v_1, v_2, v_3 . Velja:

$$\vec{v}'(t) = (v_1'(t), v_2'(t), v_3'(t))$$

Primer: $\vec{v}(t) = (t, \sin t, 0)$
 $\vec{v}'(t) = (1, \cos t, 0)$

$$\begin{aligned} \sin' t &= \cos t \\ \cos' t &= -\sin t \end{aligned}$$

Nekaj lastnosti odvajanja vektorske funkcije

- $(\alpha v_1(t) + \beta v_2(t))' = \alpha v_1'(t) + \beta v_2'(t)$
- $(\vec{v}(t) \cdot \vec{u}(t))' = v'(t) \cdot \vec{u}(t) + \vec{v}(t) \cdot u'(t)$
- Denimo, da je $\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = C^2$, $C = \text{konst.}$.
Torej $|\vec{v}(t)| = C \rightarrow$ elektron leta ves čas po sferi.

Odvajamo $v'(t) \cdot v(t) + \vec{v}(t) \cdot \vec{v}'(t) = 0$, Torej $\vec{v}'(t) \cdot v(t) = 0$, to pa pomeni, da sta $\vec{v}(t)$ in $\vec{v}'(t)$ pravokotna.

6.10.2008

Krivulje v prostoru

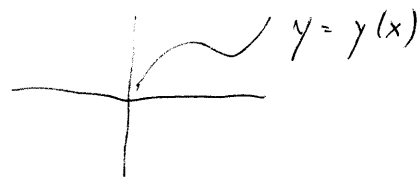
Oglejmo si, kako lahko izrazimo krivuljo v prostoru.

- eksplisitno: $y = y(x)$, $z = z(x)$

Problem eksplisitnega zapisa

so krivulje, ki imajo pri istem x različne

y .



- parametrični zapis $x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$
- vektorski zapis $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Primer: $x = a \cos t$ $y = a \sin t$ $z = bt$ ← parametrični
 $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ← vektorski
 $x = a \cos \frac{z}{b}$ $y = a \sin \frac{z}{b}$ ← eksplisitni izraženi s spremenljivko z
 To je enačba vijavnice.

Ločna dolžina krivulje v prostoru

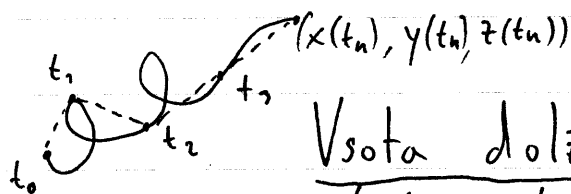
Denimo, da imamo podano krivuljo v prostoru - zanima nas dolžina te krivulje.

Da bomo dolžino lahko izračunali, moramo zapisati krivuljo v parametričnem zapisu:

$$\vec{r}(t) = (\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{z}(t))$$

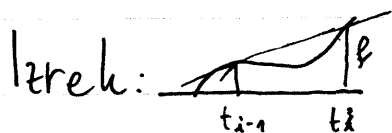
$$t \in [\alpha, \beta]$$

$$t_1 = \alpha < t_2 < t_3 < \dots < t_n = \beta$$



Vsota dolžin daljic je $\sqrt{(x(t_1) - x(t_0))^2 + (y(t_1) - y(t_0))^2 + (z(t_1) - z(t_0))^2} + \dots + \sqrt{(x(t_n) - x(t_{n-1}))^2 + (y(t_n) - y(t_{n-1}))^2 + (z(t_n) - z(t_{n-1}))^2}$

je
$$\textcircled{!} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}$$



Izrek: Lagrangeov izrek: mat I-nahlon v točki

$$\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = f'(\xi)$$

ξ v splošnem različni.

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 (t_i - t_{i-1})^2 + \dot{y}(\xi_i)^2 (t_i - t_{i-1})^2 + \dot{z}(\xi_i)^2 (t_i - t_{i-1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\xi_i)^2 + \dot{z}(\xi_i)^2} (t_i - t_{i-1}) \quad \text{"}\Delta t\text{"}$$

V limiti, ko $n \rightarrow \infty$ in $(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$, dobimo ločno dolžino krivulje

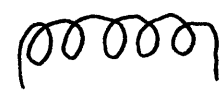
$$L = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} S_n = \dots \quad L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Opomba: Če je krivulja podana v eksplisitni obliki:

$$x = x, \quad y = y(x), \quad z = z(x) \quad \text{potem je}$$

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx$$

Primer: $x = a \cos t$ polmer kroga
 $y = a \sin t$ iz višine
 $z = b t$

Želimo imeti pet ovojev.  Koliko žice potrebujemo.

$t_0 = 0$... za en krog $\rightarrow t = 2\pi$ (pride iz $x = \dots, y = \dots$)
končna: $t_k = 10\pi$

$$l = \int_0^{10\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt =$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a \sin t \\ \dot{y} &= a \cos t \\ \dot{z} &= b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{10\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t \Big|_0^{10\pi} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} 10\pi\end{aligned}$$

Za isto krivuljo imamo veliko različnih parametrizacij. Npr: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ in $x = a \cos \sqrt{t}, y = a \sin \sqrt{t}, z = b\sqrt{t}$. sta enačbi iste krivulje z različnim parametrom.

Oglejmo si parametrizacijo krivulje z naravnim parametrom.

Žapišimo enačbo za ločno dolžino krivulje, pri čemer ~~je~~ zgornja meja ni fiksirana.

$$l(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$



Torej $l(t)$ je funkcija zgornje meje.

Fj $l'(t)$ odvajamo in dobimo

$$l'(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$$

Označimo ℓ z s , ker bomo z s označevali naravni parameter.

Dobimo: *

$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ hkrati pa opazimo, da je $\ell(t) = s(t)$ injektivna funkcija parametra t , (dva različna t , dva različna s) Torej lahko t

izrazimo s pomočjo s in dobimo

$x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$. Krivuljo smo izrazili s pomočjo parametra s , ki ga imenujemo naravni parameter.

Naravni parameter meri ^{$s=0$} dolžino krivulje, npr. za $s=2$ smo v tisti točki na krivulji, kjer je dolžina krivulje od začetka do te točke natanko 2.

Primer: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

Zapišimo enačbo te krivulje s pomočjo naravnega parametra.

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt = \dots = \int_{t_0}^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t \Big|_{t_0}^t = \sqrt{a^2 + b^2} (t - 0) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot t. \text{ Torej}$$
$$s = \sqrt{a^2 + b^2} t \text{ in zato } t = s / \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Krivulja z naravnim parametrom je tako

$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad z = b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Npr.: } s=2: \quad x = a \cos \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a \sin \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = b \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Kako opazimo, da je nek parameter naravni parameter?

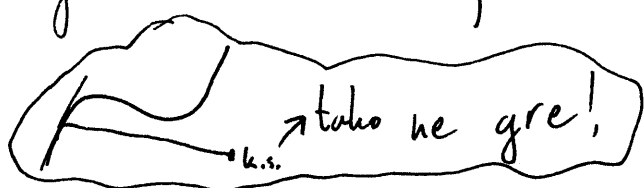
Izračunamo za $\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ vrednost izraza

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2 =$$

$$= \left(\frac{\dot{x}}{\dot{s}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{z}}{\dot{s}}\right)^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\dot{s}^2} \quad *$$

$$x' = dx/ds = dx/dt \cdot dt/ds = \dot{x} / \dot{s}$$

Tangenta na krivuljo



Krivulja v prostoru naj bo dana v parametrični obliki

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t).$$

Tangenta na krivuljo je tista premica, ki v dani točki najbolje aproksimira krivuljo.

Naj bo to izbrani parameter in $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ točka, v kateri bi radi poznali tangento na krivuljo. Naj bo t nek drugi parameter, ki je blizu t_0 .

Smerni ~~vektor~~ premice, ki gre skozi $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ in $(x(t), y(t), z(t))$ je potem enak: $\frac{(x(t), y(t), z(t)) - (x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0}$

$t - t_0$ smer se bo ohranila, vektor ne bo nič.

V lim., ko $t \rightarrow t_0$ dobimo smerni vektor tangente na krivuljo $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ v točki t_0 ;

smerni vektor je enak

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0), z(t) - z(t_0))}{t - t_0} =$$

$$= \dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0) = \dot{\vec{r}}(t_0)$$

$$! \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

Primer: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$

Izračunajmo tangento v točki $t_0 = \pi$

$T_0(x(\pi), y(\pi), z(\pi)) = (-a, 0, b\pi)$ točko imamo, rabimo še smerni vektor.

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

$$\dot{\vec{r}}(\pi) = (0, -a, b)$$

Tangenta $\vec{t}$ je odvisna od λ , torej

$$\vec{t}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \cdot \dot{\vec{r}}(\pi) = (-a, 0, b\pi) + \lambda(0, -a, b)$$

enačba prem.

$$\vec{r}_0 + \lambda \dot{\vec{r}}$$

Opomba: Normalna ravnina na krivuljo v točki $\vec{t}_0$ je ravnina, ki ima za normalo smerni vektor tangente.

Ploskve v prostoru

Ploskve v prostoru lahko predstavimo na različne načine

1) eksplizitni način $z = z(x, y)$

Točka na ploskvi ima potem koordinate $(x, y, z(x, y))$

Opomba: z ekspl. zapisom ne moremo predstaviti ploskev, kjer nekemu x, y pripada več z -jev

9.10.2008

2) implicitna oblika

$F(x, y, z) = 0$ za neko funkcijo F treh spremenljivk.

3) Parametrična oblika.

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$z = z(u, v)$$

4) Vektorska oblika

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Primer: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ implicitno
elipsoid

Če $a = b = c$, dobimo $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, To je
implicitni zapis sfere.

Zapišemo $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ zgornja polovica sfere

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{spodnja} \quad -''-$$

To sta ~~parametrična~~ eksplisitna zapisa.

$$\begin{array}{l} x = a \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = a \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = a \sin \vartheta \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{to pa so parametrični zapisi} \\ \text{iste sfere. Vektorsko je to} \\ \vec{r}(\varphi, \vartheta). \end{array} \right.$$

Kdaj param. zapis res opisuje ploskev?

Primer: $x = x(u, v)$

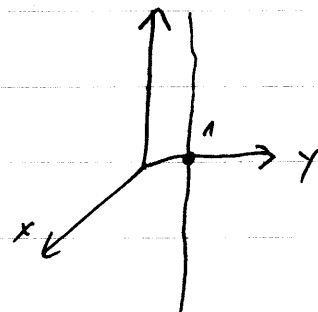
$$x(u, v) = 0$$

$$y = y(u, v)$$

$$y(u, v) = 1$$

$$z = z(u, v)$$

$$z(u, v) = u$$



ta zapis določa premico

Trditev: Naj bo $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Potem je to vekt. zapis ploskve, če se izkaže, da je $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$

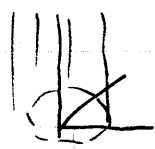
Primer: $\vec{r}(u, v) = (0, 1, u)$, torej $\vec{r}_u = (0, 0, 1)$ in $\vec{r}_v = (0, 0, 0)$
 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = 0$, torej $\vec{r}(u, v)$ ne določa ploskve.

Def.: Naj bo $\vec{r}(u, v)$ ploskev v prostoru. Če fiksiramo parameter $v = v_0$, potem je $\vec{r}(u, v_0)$ vektorski zapis krivulje, ki leži na ploskvi $\vec{r}(u, v)$. To krivuljo imenujemo koordinatna krivulja.

Podobno lahko fiksiramo parameter $u = u_0$, v pa spreminjamo; potem je $\vec{r}(u_0, v)$ vektorski zapis krivulje, ki leži na ploskvi $\vec{r}(u, v)$. Tudi ta krivulja je koordinatna krivulja.

Primer: $x = a \cos u$ $y = a \sin u$ $z = v^2$

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v^2) \rightarrow \text{samo na pozitivnih koor. kriv.}$$



$\vec{r}(u, v_0) = (a \cos u, a \sin u, v_0^2)$ so krožnice na plašču valja, vrt. poredne z $\mathbb{R}^{xy}$

Če fiksiramo $u = u_0$

$\vec{r}(u_0, v) = (a \cos u_0, a \sin u_0, v)$ koordinatne krivulje so poltraki, vzporedni z osjo z .

Normala na ploskev

Zanima nas ravnina, ki se v dani točki najbolj prilega dani ploskvi. Naj bo ploskev podana z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Zanima nas ravnina skozi točko T je $\vec{r}(u_0, v_0)$.

Naj bo $\vec{r}_1(t)$ poljubna krivulja na ploskvi, ki gre skozi T_0 . Ker je $\vec{r}_1(t)$ krivulja na ploskvi, je $\vec{r}_1(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$.

Izračunajmo smerni vektor tangente na krivuljo $\vec{r}_1(t)$. Torej

$$\dot{\vec{r}}_1(t) = \dot{\vec{r}}_u \dot{u} + \dot{\vec{r}}_v \dot{v} \quad \text{skalar.}$$

Vidimo, da je smerni vektor tangente linearna kombinacija vektorjev $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$. Vektorja $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$ določata ravnino, torej tangenta leži v tej ravnini.

Naša krivulja je bila poljubna, torej tangenta katerekoli krivulje na ploskvi skozi T_0 leži v ravnini, določeni z $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$. Ravnino, ki gre skozi točko T_0 in je določena z vektorjema $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$ (njena normala $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$)

imenujemo tangentna ravnina na ploskev v točki T_0 .

Tangentna ravnina na ploskev je

1) Če je ploskev podana v vektorski obliki $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, je normala tangentne ravnine $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

2) Če je ploskev podana eksplicitno ($z = z(x, y)$), potem za parameter vzamemo x in y in dobimo $\vec{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, normala pa je $\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = (1, 0, z_x) \times (0, 1, z_y)$.

Parcialna odvoda z_x in z_y označimo $p = z_x$ in $q = z_y$.

$(1, 0, p) \times (0, 1, q) = (-p, -q, 1)$ To je zdaj normala.

3) Če je ploskev podana implicitno $F(x, y, z) = 0$

Iz enačbe izrazimo z in dobimo z

izražen z x in $y \rightarrow z = z(x, y)$. Vstavimo

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

Parcialno odvajamo to enačbo po x in y

$$F_x + F_z \cdot z_x = 0$$

$$F_x + F_z \cdot p = 0 \rightarrow p = - \frac{F_x}{F_z}$$

$$\text{Podobno } F_y + F_z \cdot \underbrace{z_y}_q \rightarrow q = - \frac{F_y}{F_z}$$

Normala tangentne ravnine je potem
 $\vec{n} = (-P, -Q, 1) = \left(+\frac{F_x}{F_z}, +\frac{F_y}{F_z}, 1 \right)$.

Ker nas zanima samo smer normale, lahko normalo zapišemo kot $n = (F_x, F_y, F_z)$

Naj bo ploskev v prostoru podana v obliki $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Definirajmo naslednje izraze

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$$

$$G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$$

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \longrightarrow \text{Lagrangeova identiteta}$$

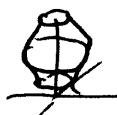
$$= (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 =$$

$$= EG - F^2$$

Torej je dolžina normale $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ $\boxed{\sqrt{EG - F^2}}$

Primeri:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \longrightarrow z^2 = x^2 + y^2$$



To je stožec.

$T(3, 4, 5)$ zanima nas enačba tangentne ravnine na to ploskev v tej točki

$$\text{normala } \vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, -2z)$$

$$\vec{n}(3, 4, 5) = (6, 8, -10)$$

Enačba ravnine

$$(x-3, y-4, z-5) \cdot (6, 8, -10) = 0$$

$$6x + 8y - 10z = 0$$

$$\boxed{6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 5 \cdot 10 = 0}$$

ore skozi
koor. izh.

13.10.08

Opomba: ločni diferencial je se lahko zapiše v obliki: $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$

Mnogotermini integrali

Primer: $\int (x^3 - 2) dx = x^4/4 - 2x + C \dots \int_0^1 (x^3 - 2) dx = -7/4$
 $\int (x^4 - 2) dx = x^5/5 - 2x + C \quad \Big|_0^1 = -9/5$
 $\int (x^5 - 2) dx = x^6/6 - 2x + C \quad \Big|_0^1 = -11/6$

$$\int_0^1 (x^y - 2) dx = \left. \frac{x^{y+1}}{y+1} - 2x \right|_0^1 = \frac{1}{y+1} - 2$$

$F(y) = \int_0^1 (x^y - 2) dx = \frac{1}{y+1} - 2$

$F(4) = -9/5$

Def.: Naj bo $F(x, y)$ zvezna fja spremenljivk x in y , $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$.

Določen integral $\int_a^b f(x, y) dx$ imenujemo integral s parametrom (y) in ta integral je funkcija spremenljivke y .

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Izrek: Naj bo f zvezna fja, $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$.

Potem je tudi integral s parametrom $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ zvezna fja spremenljivke y .

Dokazi: $F(y+h) - F(y) =$



$$= \int_a^b f(x, y+h) dx - \int_a^b f(x, y) dx =$$

$$= \int_a^b (f(x, y+h) - f(x, y)) dx \stackrel{h \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

ker $f(x, y)$ zvezna fja spremenljivke, je $f(x, y+h) - f(x, y)$ majhno, če h majhen
 $\int_a^b dx = b-a$ in $(b-a) \cdot \text{majhno} = \text{majhno}$

Izrek: Naj bo f zvezna fja in $\frac{\partial f}{\partial y}$ naj obstaja in zvezna fja.

Potem je integral s parametrom $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ odvedljiva in velja $F'(y) = \int_a^b (\partial f(x, y) / \partial y) dx$. Torej lahko zamenjamo vrstni red integriranja in odvajanja.

$$\begin{aligned} \text{Dokaz: } F'(y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(x, y+h) dx - \int_a^b f(x, y) dx \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx = \int_a^b f_y(x, y) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Primer: } F(y) &= \int_y^{y+1} (x^y - 2x) dx = \left(\frac{x^{y+1}}{y+1} - 2x \right) \Big|_y^{y+1} = \\ &= \frac{(y+1)^{y+1}}{y+1} - 2(y+1) - \left(\frac{y^{y+1}}{y+1} - 2y \right) \end{aligned}$$

Def.: Naj bo $f(x, y)$ zvezna fja spremenljivk x in y in naj bosta $u(y)$ in $v(y)$ fji spremenljivke y .
 Potem je $F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$,

Izrek: Naj f zvezna, f_y zvezna, u in v odvedljivi, potem je int. s parametrom $F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$ odvedljiva fja in velja

$$F'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f(v(y), y) v'(y) - f(u(y), y) u'(y)$$

Dokaz: Uvedemo novo fjo G na naslednji način $F(y) = G(y, u(y), v(y))$. G je fja treh spremenljivk + lastnostjo, da dobimo $f(y)$, če za drugo spremenljivko fje G vzamemo $u(y)$ in za tretjo vstavimo $v(y)$.

Potem je $F' = \frac{dF}{dy} = G_y + G_u u' + G_v v'$
 Zapišimo še $F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx = \int_a^u f(x, y) dx + \int_u^v f(x, y) dx = \int_a^v f(x, y) dx - \int_a^u f(x, y) dx$.

Dobili smo, da je $G(y, u, v) = \int_a^v f dx - \int_a^u f dx$

$$G_u = -f(u, y), \quad G_v = f(v, y), \quad G_y = \int_a^v f_y dx$$

Torej $F'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f_y(x, y) dx - f(u(y), y) \cdot u'(y) + f(v(y), y) v'(y)$.

Kaj je z integriranjem integrala s parametrom
Vemo, da je int. s parametrom

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$
 zvezna. Torej jo lahko
 integriramo (vedno) na intervalu $[c, d]$ in dobimo

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Če definiramo int. s parametrom $\int_c^d f(x, y) dy$

$$G(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$
,
 potem je tudi G zvezna
 funkcija in jo lahko integriramo na intervalu
 $[a, b]$. Dobimo

$$\int_a^b G(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Izrek: Naj bo f zvezna fja spremenljivke $x \in [a, b]$
 in $y \in [c, d]$. Potem velja

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$
 Torej lahko zamenjamo vrstni red
 integracije. Dokaz opustimo.

Oglejmo si, kakšne lastnosti veljajo, če imamo
 posplošeni integral s parametrom, torej

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$
. Dobro.

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) dx$$

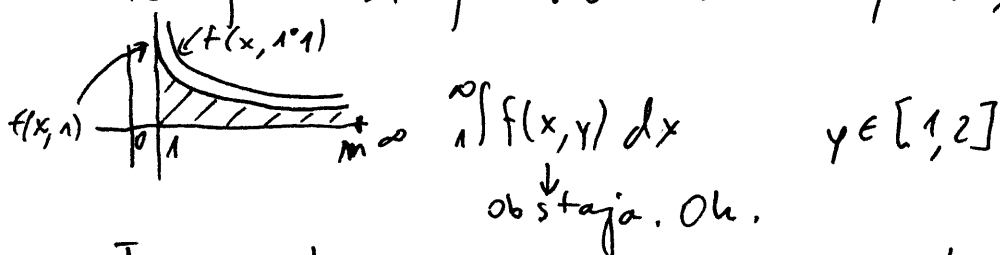
$F(y)$ naj obstaja za vsak $y \in [c, d]$.

Da bodo veljale lepe lastnosti, bodo morale
 nekatere fje dodatno imeti lastnost enakomerne
 konvergence.

Def.: Naj bo f zvezna fja spremenljivk $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$. Če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M > 0$, da je $\int_a^M |f(x, y)| dx < \varepsilon$ za vsak $y \in [c, d]$, potem pravimo, da je $\int_a^\infty f(x, y) dx$ enakomerno konvergenten na intervalu $[c, d]$.

Kaj to pomeni?

$\int_a^\infty f(x, y) dy$ naj bo konvergenten za $\forall y \in [c, d]$, torej obstaja $\int_a^\infty f(x, y) dx$ za vsak $y \in [c, d]$.



To je konvergenca za vsak y . Enakomerna konvergenca pa pomeni, da za vsak y „enako hitro“ konvergirajo. Torej je isti M dober za vsak y in je ploščina od tega M manjša od tega ε za vse M je.

Izrek: Če je $f(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ enakomerno konvergenten na $[c, d]$, potem je f zvezna fja na $[c, d]$.

Dokaz: $F(y+h) - F(y) = \int_a^\infty f(x, y+h) dx - \int_a^\infty f(x, y) dx =$
 $= \underbrace{\int_a^M (f(x, y+h) - f(x, y)) dx}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \text{ kor končen interval}} + \underbrace{\int_M^\infty (f(x, y+h) - f(x, y)) dx}_*$

* ocenimo $\int_M |f(x, y+h)| dx + \int_M |f(x, y)| dx$

$\xrightarrow{M \rightarrow 0} 0$
 $\xrightarrow{M \rightarrow 0} 0$

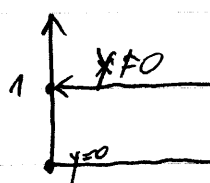
Enako hitro proti 0 za iste M , ker enakomerno konvergira.

Primeri: $F(y) = \int_0^\infty y e^{-xy} dx$

Za $\forall y \geq 0$ je ta integral konvergenten.

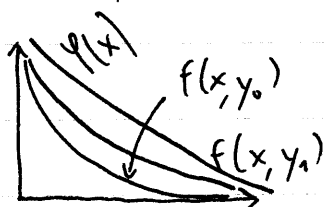
$$F(y) = \int_0^\infty y \frac{e^{-xy}}{-x} \Big|_0^\infty = -e^{-xy} \Big|_0^\infty = 0 - (-e^0) = 1$$

$$y=0: F(0) = \int_0^\infty 0 \cdot e^{-xy} dx = 0$$

 torej F ni zvezna, kljub temu, da je integral konvergenten.
 Topomeni, da integral ni enakomerno konvergenten.

Izrek: Naj bo $\int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergenten za vsak y iz intervala $[c, d]$. Naj velja, da je $f(x, y)$ manjša ali enaka $\varphi(x)$ za vsak x iz $[c, d]$.

Če $\int_a^\infty \varphi(x) dx$ konvergenten, potem je $\int_a^\infty f(x, y) dx$ enakomerno konvergenten.



Torej, če ploščina pod $\varphi(x)$ konča, konča tudi ostale ploščine.

20.10.2008

Dokaz: Denimo, da $|f(x,y)| \leq \varphi(x)$ za $\forall y \in [c,d]$ za $\forall x$.

Preverimo, da je $\int_a^\infty f(x,y) dx$ enakomerno konvergenten. Naj bo $\varepsilon > 0$, potem bi radi našli tako konstanto M , da je $\int_a^\infty f(x,y) dx < \varepsilon$ za $\forall y$. Res.

TRIKOTNIŠKA NEENAK.
 $|a+b| \leq |a| + |b|$

$|\int_n^\infty f(x,y) dx| \leq \int_n^\infty |f(x,y)| dx \leq \int_n^\infty \varphi(x) dx \leq \varepsilon$,
ker φ konvergentna. Dobili smo oceno,
neodvisno od y .

Izrek: Če je $\int_a^\infty f(x,y) dx$ enakomerno konvergenten na $[c,d]$, potem velja, da
 $\int_c^d (\int_a^\infty f(x,y) dx) dy = \int_a^\infty (\int_c^d f(x,y) dy) dx$.
V tem primeru lahko zamenjamo
vrstni red integriranja.

Dokaz: opustimo

? Izrek: Denimo, da $\int_a^\infty f(x,y) dx$ konvergira za
 $\forall y \in [c,d]$. Naj bo $g(y) = \int_a^\infty f_y(x,y) dx$ enakomerno
konvergentna. Potem velja
 $f'(y) = \int_a^\infty f_y(x,y) dx$.

Če je rezultat lep (enakomerno konvergenten),
potem lahko zamenjamo vrstni red

integriranja in odvajanja.

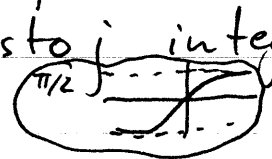
Primer: $\int_0^{\infty} \sin(x)/(1+x^2) dx$. Enakomerno konvergentno?

$$\frac{\sin(x)}{1+x^2} \overset{\text{ocenimo}}{<} \frac{1}{1+x^2} \quad \text{Tu } y \text{ ne nastopa.}$$

$$\int_0^{\infty} 1/(1+x^2) dx = \arctan x \Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \text{at } M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \quad \checkmark$$

Velja EK.



Primer: $F(y) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-yx}}{x e^x} dx, y > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-yx}}{x e^x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-yx} \cdot (-x) \cdot (-e^{-x}) dx = \int_0^{\infty} -e^{-x(1+y)} dx = \left[-\frac{e^{-x(1+y)}}{-(1+y)} \right]_0^{\infty} =$$

$$= 0 - \frac{1}{-(1+y)}$$

$$F'(y) = \frac{1}{1+y}$$

Ali: $\int_0^{\infty} e^{-x(1+y)} dx$ enakomerno konvergentna?

$$e^{-x(1+y)} \leq e^{-x}$$

$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ pa je konvergenten, zato po izreku prej vemo, da je integral enakomerno konvergenten.

Izračunajmo še integral $F(y) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-yx}}{x e^x} dx; y \geq 0$
 Poznamo pa že $F'(y) = \frac{1}{1+y}$. Torej je
 $F(y) = \int \frac{1}{1+y} dy = \log(1+y) + C$

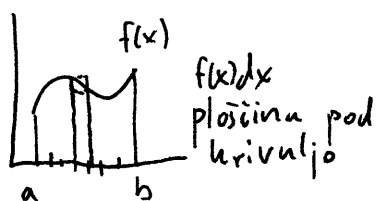
Določimo še C . Ker je $F(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-xy}}{x e^x} dx = 0$
 In $F(0) = \log(1+0) + C$. Sledi $C = 0$ in dobimo

$$\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-xy}}{x e^x} dx = \log(1+y).$$

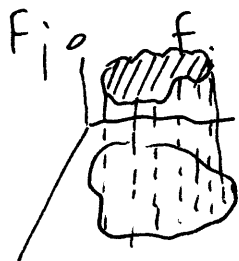
Dvojni integral

Naj bo $f(x,y)$ zvezna funkcija $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$.
 Potem $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$ imenujemo
 dvakratni integral fje f .

V nadaljevanju si ogledimo, kaj pa je dvojni
 integral funkcije f .



Naj bo $f(x,y)$ zvezna fja na
 območju $D \subset \mathbb{R}^2$. Radi bi izračunali
 prostornino ~~med~~ območja v
 $\mathbb{R}^3$ med D in ploskvijo, določeno s



Območje D razdelimo na manjše
 parcele, ki jih označimo D_i . Za
 vsako poiščemo največjo vrednost
 fje f na tej parceli (označimo
 z M_i) in podobno najmanjšo
 vrednost f na D_i označimo z
 m_i . Naj bo še w_i ploščina parcele D_i .

~~D.M.~~ Potem je prostornina nad območjem D_i manjša od $w_i \cdot M_i$ in večja $w_i \cdot m_i$.

$f(D \cdot m) \leq$ Celotna prostornino lahko potem ocenimo $\sum_{i=1}^n w_i \cdot m_i \leq f(x_i, y_i) w_i \leq \sum_{i=1}^n w_i M_i \leq \text{plošč} D \cdot M$, pri čemer je x_i, y_i poljubna točka na območju D_i .
 $w_i m_i \leq V_i \leq w_i M_i$. Zaradi zveznosti fje f gre razlika $M_i - m_i$ proti 0, ko gre ploščina teh ploskvic proti 0, m in M - globalna minimum in maksimum

Sledi $\sum_{i=1}^n w_i M_i - \sum_{i=1}^n w_i m_i = \sum_{i=1}^n w_i M_i - w_i m_i \rightarrow 0$, ko gre $w_i \rightarrow 0$ za vsak i .

~~Sklepi so enaki kot pri Riemannovem integralu~~

(Ket je fja f zvezna, gre $M_i - m_i \rightarrow 0$, ko gre $w_i \rightarrow 0$. Za vsak i). Če obstajata limiti

$\sum_{i=1}^n w_i M_i$ in $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ w_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n w_i m_i$ in sta enaki, potem obstaja tudi $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ w_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n w_i f(x_i, y_i)$, ki jo imenujemo dvojni integral fje f na območju D in

pišemo

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ w_i \rightarrow 0}} \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i f(x_i, y_i)}_{\text{integralna vsota}}$$

Trditev: Naj b o m najmanjša vrednost fje f na območju D in M največja vrednost. Potem velja

23.10.2008

$\iint_D f(x,y) dx dy \leq M \cdot pl(D)$ in podobno ~~majše~~ večje ali enako $m \cdot pl(D)$ in
 $\iint_D f(x,y) dx dy = pl(D) \ell$, pri čemer velja $m \leq \ell \leq M$

Trditev: $\iint_D dx dy = pl(D)$

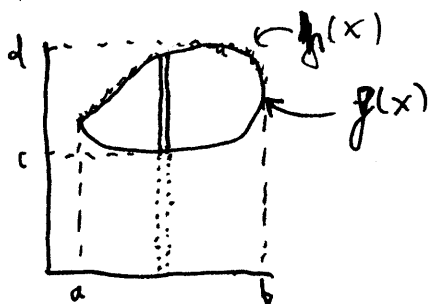
Dokaz: za $f(x,y)$ vzamemo konstantno f_0
 $f(x,y) = 1$ za $\forall x,y \in D$

Velja še $\iint_D (f(x,y) + g(x,y)) dx dy =$
 $\iint_D f(x,y) dx dy + \iint_D g(x,y) dx dy$

Velja pa tudi $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D_1} f(x,y) dx dy +$
 $+\iint_{D_2} f(x,y) dx dy$, pri pogoju $D_1 \cup D_2 = D$
in $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, da ni dvojnega štetja

Ti dve lastnosti sledita neposredno iz definicije (integral je limita integralnih vsot, vsote pa lahko razbijemo na več delov).

Prevedba dvojnega integrala na dvakratnega
Dvojni int. izračunamo tako, da ga prevedemo na dvakratnega. Oglejmo si prevedbo v posebnem primeru (ni splošno).

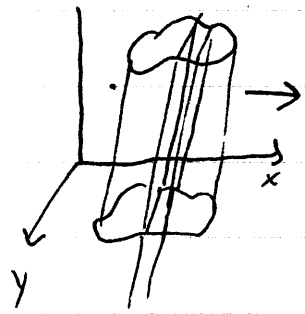


$$f: \hat{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \underbrace{\Delta x_i (h(x_i) - g(x_i))}_{pl(w_i)}$$

$$= \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

to je ploščina ene rezine, $\int_a^b$ pa dobimo plošcher



Dvojni integral torej izračunamo s pomočjo dvakratnega po Formuli

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

Če je območje bolj "zapleteno", potem ga razdelimo na več "lepših" podobmočij.

Primer: $f(x,y) = xy$

koordinatni osi sta omejitel

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad (1-\sqrt{x})^2 = y$$

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\sqrt{x}} xy dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x \int_0^{1-\sqrt{x}} y dy \right) dx =$$

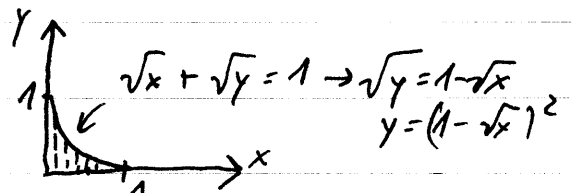
$$= \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-\sqrt{x}} \right) dx = \int_0^1 x \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^{3/2} + x^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 =$$

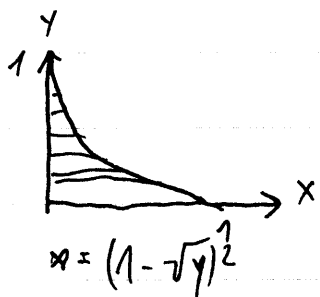
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{280}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{280}$$



$$\begin{matrix} & 1 & & 1 \\ & \wedge & & \wedge \\ 1 & 2 & 1 \\ & \wedge & & \wedge \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ & \vdots & & \vdots \end{matrix}$$

Razrešimo še drugače.

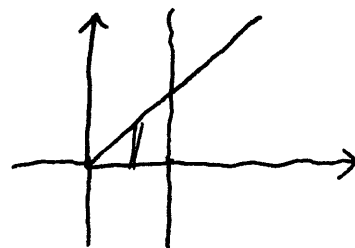


$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{(1-\sqrt{y})^2} xy dx \right) dy = \frac{1}{280}$$

27.10.08

Primer: $f(x, y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$

D: $y=0, x=1, y=x$



$$\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2} dy \right) dx =$$

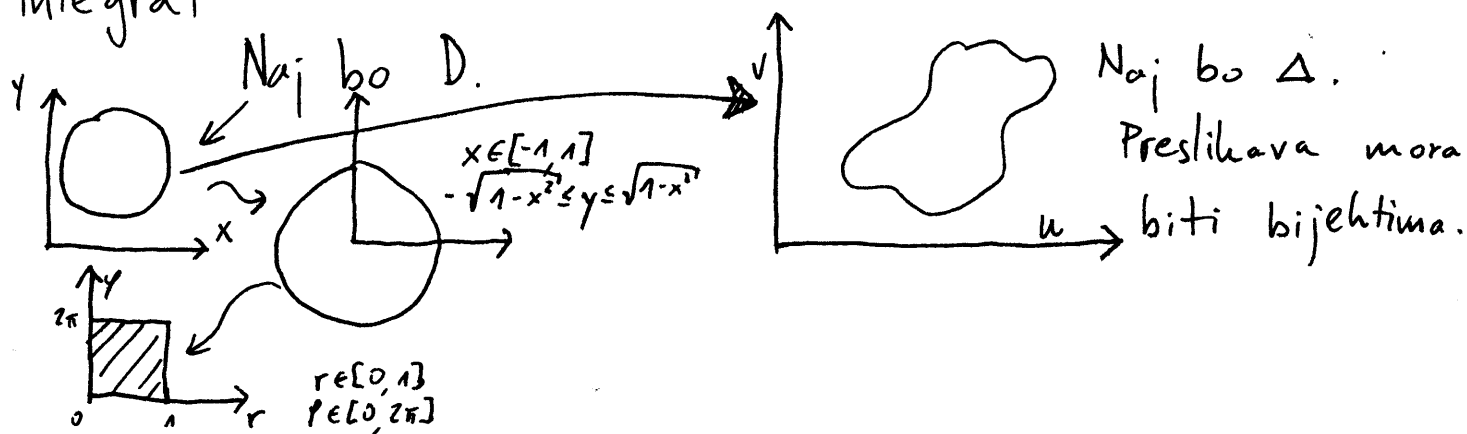
$$= \int_0^1 \left(\int_y^1 \sqrt{4x^2 - y^2} dx \right) dy = \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$$

Opomba: dvakratni integral pišemo tudi v obliki:

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy.$$

To ni produkt!

Uvedba nove spremenljivke v dvojni integral



Naj bo D območje v (x, y) . Opisali bi ga radi z dvema novima spremenljivkama u in v . Torej moramo vedeti, kako se izraža $x = x(u, v)$ in $y = y(u, v)$. Če želimo dobiti smiselen rezultat, potem mora biti območje v ravnini (u, v) bijektivna slika območja D . Nove spremenljivke lahko torej uvedemo,

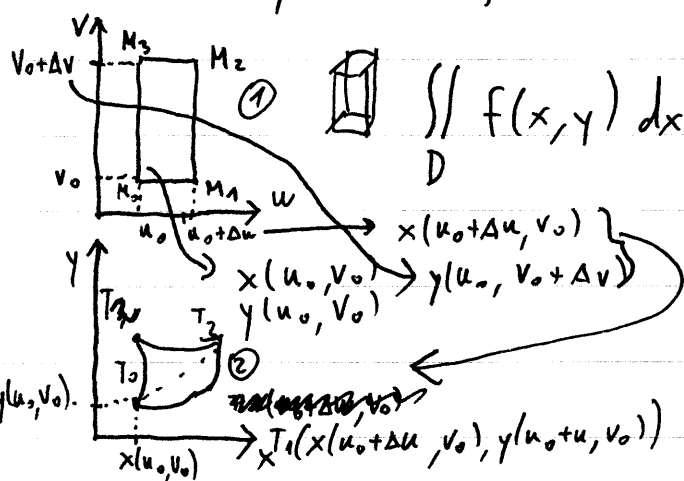
če je preslikava med območjema bijektivna.

Trditev: preslikava bo bijektivna, če je Jacobijeva determinanta $\neq 0$, torej

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0 = (x_u y_v - x_v y_u)$$

Dokaz opustimo.

Oglejmo si, kako izračunamo dvojni integral z novimi spremenljivkami.



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) du dv$$

Opomba: ploščina trikotnika z oglišči $T_0(x_0, y_0)$, $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2) = \frac{1}{2}[(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)]$

① $\Delta u \cdot \Delta v = p$

Radi bi izračunali ploščino krivocrtnega trikotnika $T_0 T_1 T_2$.

$T_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$

$T_1(x(u_0 + \Delta u, v_0), y(u_0 + \Delta u, v_0))$; $x(u_0 + \Delta u, v_0) = x(u_0, v_0) + x_u(u_0, v_0) \cdot \Delta u$
 $y(u_0 + \Delta u, v_0) = y(u_0, v_0) + y_u(u_0, v_0) \cdot \Delta u$

$T_2(x(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v), y(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v))$;

• $x(u_0, v_0 + \Delta v) = x(u_0, v_0) + x_v(u_0, v_0) \cdot \Delta v$ x_2

• $y(u_0, v_0 + \Delta v) = y(u_0, v_0) + y_v(u_0, v_0) \cdot \Delta v$ y_2

Če sta Δu in Δv majhna, je ploščina krivocrtnega trikotnika $T_0 T_1 T_2$ enaka (približno)

(navadnega)
ploščini trikotnika $T_0 T_1 T_2$, torej

$$p = \frac{1}{2} [\cancel{u_0} (x(u_0, v_0) + x_u(u_0, v_0) \Delta u - x(u_0, v_0)) + \\ (y(u_0, v_0) + y_u(u_0, v_0) \Delta v - y(u_0, v_0)) - \\ (x(u_0, v_0) + x_v(u_0, v_0) \Delta v - x(u_0, v_0)) + \\ (y(u_0, v_0) + y_v(u_0, v_0) \Delta u - y(u_0, v_0))] = \\ = \frac{1}{2} (x_u \Delta u \cdot y_v \Delta v - x_v \Delta v \cdot y_u \Delta u) = \\ = \frac{1}{2} (x_u y_v - x_v y_u) \Delta u \Delta v =$$

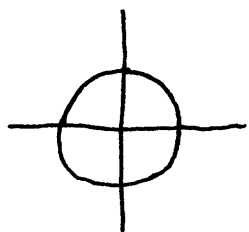
To je ploščina krivočrtnega trikotnika, torej
je za majhne Δu in Δv ploščina
krivočrtnega pravokotnika

$$p \approx (x_u y_v - x_v y_u) \Delta u \Delta v = J \Delta u \Delta v \quad (\text{Jacobijska det.}) \\ \approx \Delta x \Delta y$$

Če Δu in Δv majhna, potem ploščina
krivočrtnega pravokotnika približno enaka
 $\Delta x \cdot \Delta y$, torej $\Delta x \cdot \Delta y = J \Delta u \cdot \Delta v$

Natančneje, vse te zveze bi vstavili v
integralske vsote in v limiti dobimo
! $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R f(x(u, v), y(u, v)) du dv \cdot |J|$ ABS Jacob. det.

Primer: $\iint \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}$



D: krog s polmerom 1
 $x^2 + y^2 = 1$

V takih primerih se splača
uvesti polarne koordinate.

$$x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi$$

vlogo u in v
izpeljave tu igrata
 r in φ .

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos \varphi r \cos \varphi - (-r \sin \varphi \sin \varphi) =$$

$$= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r ; \quad \underline{J = r}$$

Napišimo enačbo v polarnem (vstavimo za x in y)
 $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 1 ; r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1 ; r^2 = 1$

$$0 \leq r \leq 1 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$* = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{J^r dr}{1+r^2} \quad \text{in to je to. Imamo dvakratni}$$

integral.

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{du}{2 \cdot u}$$

substitucija
 $u = 1+r^2 \quad du = 2r dr$ (ko $r=0$ $u=1$, ko $r=1$, $u=2$ (vitavi))

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{1}{2} \log u \right]_1^2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log 2 d\varphi = \frac{1}{2} \log 2 \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\pi \log 2}}$$

Primer: Dano je območje, omejeno s krivuljo
 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. Zanima nas ploščina.

Ploščina območja D je enaka $\iint_D dx dy$

Opomba: če je večje $x^2 + y^2$ uvedemo polarne koordinate.

$$x = r \cos \varphi \quad J = r$$

$$y = r \sin \varphi$$

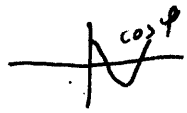
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$(r^2)^2 = 2a^2 \overbrace{(r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi)}^{\cos 2\varphi}$$

$$r^4 = 2a^2 \cancel{r^2} \cos(2\varphi)$$

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi \quad \text{torej } \cos 2\varphi \geq 0 !$$

30.10.2008



$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \quad \varphi = 2\varphi$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{2}$$

Ne sme biti < 0

Torej

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$$

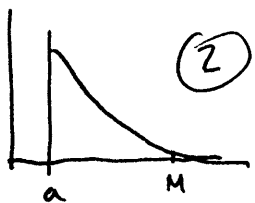
$$\frac{7\pi}{4} \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$r = \sqrt{2a^2 \cos 2\varphi}$$

Ploščina torej

$$pl = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{2a^2 \cos 2\varphi}} dr = 4 = \text{mathematica} = 2a^2$$

Posplošeni integral



$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx \quad \text{neskončno območje}$$



$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{neomejena fja}$$

Ločimo dve vrsti posplošenega integrala.

1. fja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ je v točki

$a \in D$ neomejena, imamo

Potem izrežemo krog s središčem v

a in polmerom ϵ in izračunamo

$\int_{D \setminus K_a(\epsilon)} f(x, y) dx dy$. Če obstaja $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus K_a(\epsilon)} f(x, y) dx dy$,

potem pravimo, da obstaja

posplošeni integral $\int_D f(x, y) dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus K_a(\epsilon)} f(x, y) dx dy$

2. Območje D je neomejeno. Potem si ogledamo podobmočja D_r , za katera velja D_r je omejeno območje, $D_r \subseteq D$ in $\lim_{r \rightarrow \infty} D_r = D$.

Potem pravimo, da obstaja posplošeni integral fje f na območju D , če dostaja limita integralov fje f na območjih D_r , torej $\iint_D f(x,y) dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{D_r} f(x,y) dx dy$.

Primer: $\iint \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/3}} dx dy$. $D: x^2+y^2 \leq 1$

Polarno: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $J = r$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{(r^2)^{1/3}} r dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 r^{1/3} dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{4} r^{4/3} \Big|_{\varepsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon^{4/3}) d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4} \cdot 2\pi (1 - \varepsilon^{4/3}) = 2\pi \frac{3}{4}$$

Primer: $\iint dx dy \frac{1}{1+x^2+y^2}$ D : 3ji kvadrant

Oh. Polarne koordinate:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, J = r$$

$$\int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+r^2)^2} r dr =$$

$$= \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{du}{2u^2} = \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \left[-\frac{1}{2u} \right]_0^{\infty} =$$

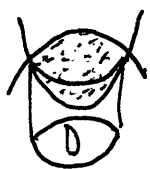
$$= -\frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi/2} (0-1) d\varphi = \frac{1}{2} \varphi \Big|_{\pi}^{3\pi/2} = \frac{1}{2} (3\pi/2 - \pi) = \frac{\pi}{4}$$

Primeri uporabe dvojnega integrala v geometriji

1. računanje prostornine

Naj bo $f(x,y) \geq 0$ na nekem območju D ,
potem je $\iint_D f(x,y) dx dy$ natančno prostornina
pod ploskvijo, ki jo določa $f(x,y)$ na območju
 D . Ta lastnost velja po definiciji dvojnega
integrala. Če imamo dani dve ploskvi
 $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$ nad območjem D , potem je
prostornina med ploshvama nad D enaka
 $\iint_D (f_2(x,y) - f_1(x,y)) dx dy$

Primeri: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoid (če presekaš, so zmeraj ellipse)
zgoraj $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{3}{2} \frac{z}{c}$ spodaj



Prostornina območja, ki ga omejujejo
ti dve ploskvi
kje integriramo? Določimo D .

$z = \frac{2c}{3} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$ in vstavimo v $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ in
dobimo dolgovrezen račun. Raje
upoštevamo, da $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ nastopa v
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ in $\frac{z}{c} = \frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$ in dobimo
 $\frac{3}{2} \frac{z}{c} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Rešimo kvadratno enačbo.
 $\frac{z^2}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{z}{c} - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{3}{2}c \pm \sqrt{9/4 c^2 + 4/c^2}}{2 \cdot 1/c^2} = \frac{-3/2c \pm 5/2c}{2 \cdot 1/c^2} \rightarrow z_n$$

$$z_1 = c/2, \quad z_2 = -2c$$

z_2 ni mogoči, ker tam več ni elipsoida

vstavimo (kamorholi): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{3}{4} \rightarrow \left(\frac{x^2}{\frac{3}{4}a^2} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}b^2} = 1 \right)^D$ elipsa

Plošvi se sekata nad to elipso. To je naše integracijsko območje.

Izrazimo z iz enačbe $\uparrow$ in dobimo

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow \iint_D \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{2c}{3} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right) dx dy = \text{cat}$$

Območje D je elipsa, v fji nastopa izraz $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, zato vpeljemo nove koordinate

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2 \quad J = abr$$

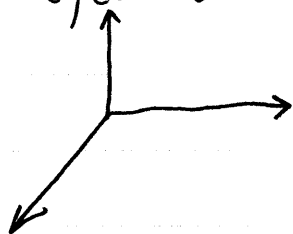
$$\text{cat} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}/2} \left[c \sqrt{1 - r^2} - \frac{2c}{3} r^2 \right] abr dr = \text{mathematica} =$$

$$= \boxed{(19\pi/48) abc}$$

2. Ploščina območja D je $\iint_D dx dy$.

3. računanje površine območja

Preslikava $f(x, y)$ določa neko ploskev nad območjem D . Zanima nas površina te ploskve.



Naj bo Δu majhen delček ploskve. Δu naj bo projekcija tega delčka ploskve na ravnino

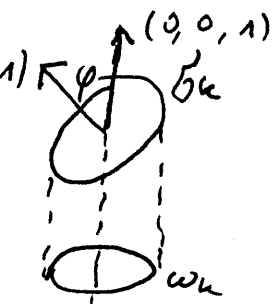
xy.

S pomočjo integralnih vsot
 $\sum_{k=1}^n p|G_k| = \sum_{k=1}^n \sqrt{1+p^2+q^2} p|w_k|$
 dobimo

$$p|w_k| = \cos \varphi p|G_k|$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

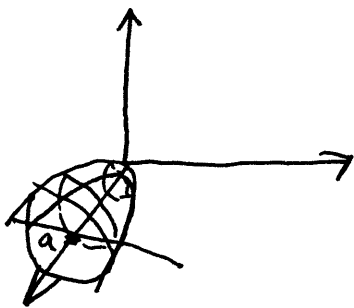
$$p|w_k| = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}} p|G_k|$$

$$p|G_k| = \sqrt{p^2+q^2+1} p|w_k|$$


$$\text{površina} = \iint \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy$$

Primer: $y^2 + z^2 = 2ax$

površina, ki je med valjem (poploveni valj)
 $y^2 = ax$ in ravnino $x=a$



površina: $\iint \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy$

$$z = \sqrt{2ax - y^2}$$

$$z_x = \frac{1}{2\sqrt{2ax-y^2}} \cdot 2a = p$$

$$z_y = \frac{1}{2\sqrt{2ax-y^2}} \cdot (-2y) = -\frac{y}{\sqrt{2ax-y^2}} = q$$

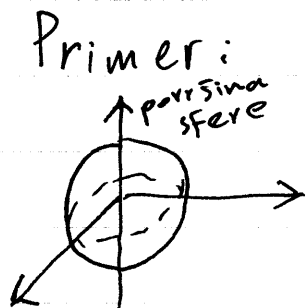
$$= \iint \sqrt{1 + \frac{a^2}{2ax-y^2} + \frac{y^2}{2ax-y^2}} dx dy =$$

$$= \iint \sqrt{\frac{2ax-y^2+a^2+y^2}{2ax-y^2}} dx dy = \int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax-y^2}} dy =$$

$$= \text{mathematica} = \left(\frac{\pi}{6}\right) a^2 (3\sqrt{3} - 1)$$

Denimo, da je ploskev podana v parametrični obliki $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Vemo, da je dolžina normale enaka
 $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{1+p^2+q^2}$. Od tod sledi, da je
 površina za parametrično podano ploskev
 $\Delta \iint \sqrt{EG-F^2} du dv$



$$x = a \cos \varphi \cos \vartheta \quad \dots \quad \varphi, \vartheta \text{ parametra}$$

$$y = a \sin \varphi \cos \vartheta \quad \dots \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$z = a \sin \vartheta \quad \dots \quad \rightarrow$$

$$E = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi, \quad G = \vec{r}_\vartheta \cdot \vec{r}_\vartheta, \quad F = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\vartheta$$

$$\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi, \quad \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\vartheta, \quad \vec{r}_\vartheta \cdot \vec{r}_\vartheta$$

$$\vec{r}(\varphi, \vartheta) = (a \cos \varphi \cos \vartheta, a \sin \varphi \cos \vartheta, a \sin \vartheta)$$

$$\vec{r}_\varphi = (-a \sin \varphi \cos \vartheta, a \cos \varphi \cos \vartheta, 0)$$

$$\vec{r}_\vartheta = (-a \cos \varphi \sin \vartheta, -a \sin \varphi \sin \vartheta, a \cos \vartheta)$$

$$E = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + a^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta = a^2 \cos^2 \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = a^2 \cos^2 \vartheta$$

$$G = \vec{r}_\vartheta \cdot \vec{r}_\vartheta = a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + a^2 \cos^2 \vartheta = a^2$$

$$F = \dots = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta \iint \sqrt{a^2 \cos^2 \vartheta \cdot a^2} d\varphi d\vartheta &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos \vartheta d\vartheta = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - (-1)) d\varphi = \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2a^2 \cdot 2\pi = \boxed{4\pi a^2} \text{ površina sfere} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ -\pi/2 &\leq \vartheta \leq \pi/2 \\ \text{tako} & \quad \left(\frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta} \right) \end{aligned}$$

3.11.08

Trojni integral :

Trojni integral fje $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^3$ nad območjem V definiramo na podoben način, kot dvojni integral. Območje V razdelimo na majhna podobmočja V_k in na vsakem izmed teh območij izračunamo vrednost fje v neki točki: tega območja $f(x_k, y_k, z_k)$, $(x_k, y_k, z_k) \in V_k$.

Nato definiramo integralsko vsoto $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \text{ vol } V_k$.

Če obstaja limita integralških vsot, ko gre $n \rightarrow \infty$ in volumen V_k vsakega območja proti nič, potem to limito imenujemo trojni integral fje f nad območjem V in pišemo $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$

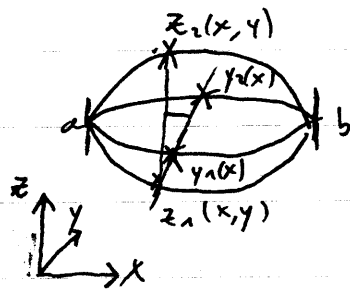
$$= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \text{ vol } V_k$$

Opomba: Če $f(x, y, z) = 1$, potem je $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V dx dy dz = \text{prostornina območja } V$.

Trojni integral izračunamo tako, da ga prevedemo na trikratnega.

Primer: $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$



Opomba: Vrstni red integriranja lahko zamenjamo

Primer: Prostornina krogle

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V dx dy dz = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz =$$

$$= \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx = \text{uvedemo polarne koor} =$$

$$= \frac{4}{3} \pi a^3$$

$x^2 + y^2 = a^2$
 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
 $z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

Tudi trojni integral lahko uvedemo nove koordinate.

Uvedba novih koordinat se izpelje na podoben način kot pri dvojnem integralu.

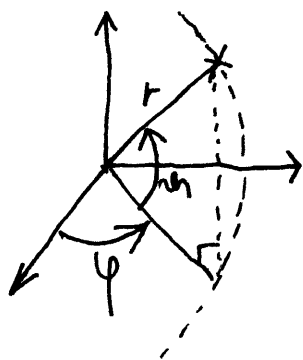
Da lahko uvedemo nove koordinate, mora biti preslikava med območjema, po katerih integriramo, bijektivna. Preslikava $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ je bijektivna, če velja

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0$$

Integral v novih koordinatah je potem

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(u,v,w)} (f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) |J(u,v,w)| du dv dw$$

Sferične koordinate



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \cos \vartheta \\ z &= r \sin \vartheta \end{aligned}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & +r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= \sin \vartheta (r^2 \sin^2 \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta + r^2 \cos^2 \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta) + \\ &+ r \cos \vartheta (r \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + r \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta) = \\ &= \sin \vartheta r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta + r^2 \cos \vartheta \cos^2 \vartheta = \\ &= r^2 \cos \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = \underline{\underline{r^2 \cos \vartheta}} \end{aligned}$$

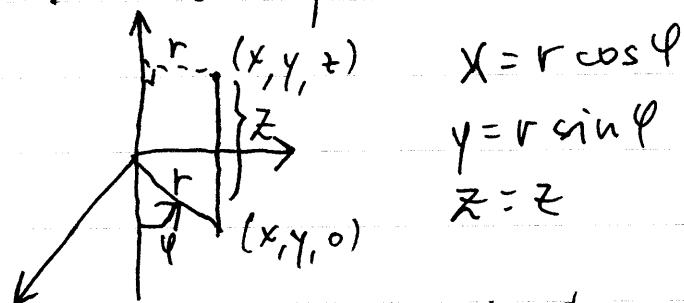
Primer: prost. krogla

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= V_1 \iiint J dr d\varphi d\vartheta = V_1 \iiint r^2 \cos \vartheta dr d\varphi d\vartheta = \\ &= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \vartheta d\vartheta = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta \Big|_{\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \\ &= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} 2r^2 d\varphi = 2 \int_0^a r^2 \varphi \Big|_0^{2\pi} dr = 2 \int_0^a 2\pi r^2 dr = \\ &= 4\pi \frac{r^3}{3} \Big|_0^a = \boxed{4\pi a^3/3} \end{aligned}$$

Opomba: Sferične koordinate uporabljamo (običajno), kadar nam pri definiciji območja ali pri funkciji nastopa izraz $x^2 + y^2 + z^2$. V sferičnih koor.

je $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Cilindrične koordinate



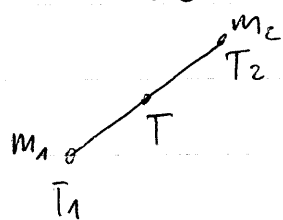
$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(\cos \varphi r \cos \varphi + r \sin \varphi \sin \varphi) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \underline{\underline{r}}$$

Uporaba ~~traj~~trajnega integrala v mehaniki:

- Težišče



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|T_2 T|}{|T_1 T|} \quad m_1 = \frac{|T_2 T|}{|T_1 T|} m_2$$

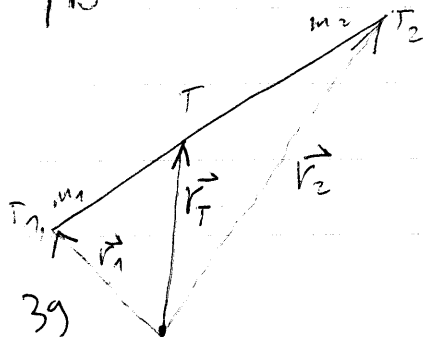
$$(m_1 + m_2)/m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_2} = \frac{|T_2 T|}{|T_1 T|} + \frac{|T_1 T|}{|T_1 T|} = \frac{|T_1 T_2|}{|T_1 T|}$$

Izračunajmo;

$$\text{Sledi: } \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{|T_1 T|}{|T_1 T_2|} \quad \text{in} \quad \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{|T_2 T|}{|T_1 T_2|}$$

Opisimo točke z vektorji.



$$\begin{aligned} \vec{r}_T &= \vec{r}_1 + \lambda (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \\ &= \vec{r}_1 + \frac{|T T_1|}{|T_1 T_2|} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \\ &= \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{aligned}$$

6.11.08

Če je $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, potem je
 $\vec{r}_T = (x_1, y_1, z_1) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
 $(x_T, y_T, z_T) \leftarrow$ koordinate težišča.

Torej:

$$x_T = x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (x_2 - x_1) = \frac{x_1(m_2 + m_1) + m_2 x_2 - m_2 x_1}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_T = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$z_T = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Če imamo n masnih točk, potem na podoben način lahko izpeljemo, da je

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{m} \quad m \leftarrow \text{celotna masa}$$

Če imamo dano telo z gostoto $\rho(x, y, z)$, potem je diferencial mase v neki točki $\rho(x, y, z) \cdot dx dy dz$. Koordinati težišča telesa z gostoto $\rho(x, y, z)$ so potem

$$x_T = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz} = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz}{m}$$

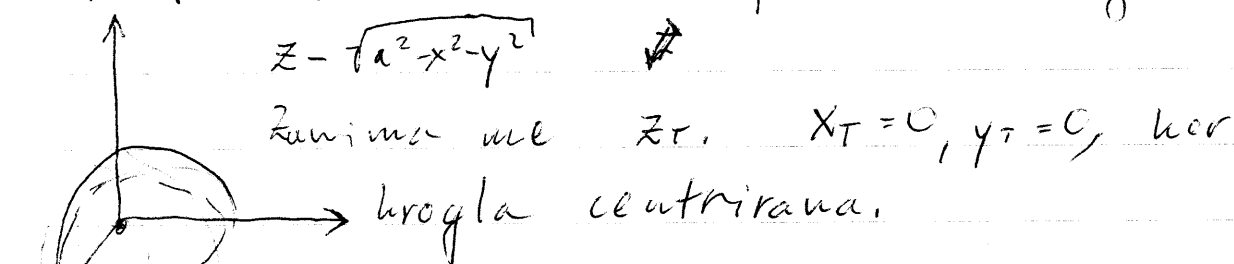
$$y_T = \frac{\iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz}$$

$$z_T = \frac{\iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz}$$

Če je telo homogeno, torej $\rho(x, y, z)$ je konstanta, potem lahko ρ damo v števca in imenovalca pred integral in se potem krajša. Dobimo

$$\bar{x}_T = \frac{\iiint x \rho dx dy dz}{\iiint \rho dx dy dz}, \quad \bar{y}_T = \frac{\iiint y \rho dx dy dz}{\iiint \rho dx dy dz}, \quad \bar{z}_T = \frac{\iiint z \rho dx dy dz}{\iiint \rho dx dy dz}$$

Primer: Iscemo težišče polovice homogene krogle.



$$\bar{z}_T = \frac{\iiint z dx dy dz}{\iiint dx dy dz} = \frac{\iiint z dx dy dz}{\frac{1}{2} \frac{4\pi a^3}{3}} \quad (\text{polovica krogle})$$

prostanina
območja

$$\begin{aligned} \iiint z dx dy dz &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r \sin \varphi \cdot r^2 \cos \varphi \cdot dr d\varphi d\psi = \\ &= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} r^3 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a r^3 (\varphi) \Big|_0^{2\pi} dr = \frac{1}{2} \int_0^a r^3 2\pi dr = \\ &= \pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^a = \pi \frac{a^4}{4} \end{aligned}$$

torej $\bar{z}_T = \frac{\pi \frac{a^4}{4}}{\frac{1}{2} \frac{4\pi a^3}{3}} = \boxed{\frac{3a}{8}}$

Težišče $T(0, 0, 3a/8)$.

$$x = r \cos \varphi \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\bar{x} = r \sin \varphi$$

$$z = r^2 \cos \varphi$$

$$\int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi =$$

$$\sin \varphi = t$$

$$\cos \varphi d\varphi = dt$$

$$= \int t dt = \frac{t^2}{2} + C$$

- Vetrainostni moment

Imamo masno točko z maso m , ki se vrti okrog neke osi s kotno hitrostjo ω .

Hitrost $\vec{v} = \omega \vec{r}$ razdalja od osi

Vemo, da je $W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$.

Majhen delček ima potem energije $\frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm$ ^{konstanta}

$$W_k = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint r^2 dm$$

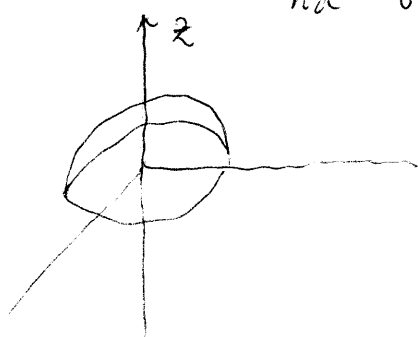
Izraz $\iiint r^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$ imenujemo vetrainostni moment. Če vrtimo okrog osi z , potem je r^2 ravno $r^2 = x^2 + y^2$ in v tem primeru je

$$J_z = \rho \iiint \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Podobno J_x (okrog osi x) ali J_y

$$J_x = \rho \iiint \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dx dy dz \quad J_y = \rho \iiint \rho(x, y, z) (x^2 + z^2) dx dy dz$$

Primer: Homogeno polovico krogle vrtimo glede na os simetrije.



$$J_z = \rho \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz$$

↑
konst. gostota

$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta \quad y = r \sin \varphi \cos \vartheta \quad z = r \sin \vartheta$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \vartheta \quad J = r^2 \cos \vartheta$$

$$J = \rho \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \vartheta (r^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta$$

$$\int \cos^3 \vartheta d\vartheta = \int \cos^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \int (1 - \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} = \sin \vartheta - \frac{\sin^3 \vartheta}{3}$$

$$\sin \vartheta = t \quad \cos \vartheta d\vartheta = dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} r^4 \left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} \right) dr d\varphi = \\
 &= \rho \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} r^4 \frac{2}{3} d\varphi = \frac{2}{3} \rho \int_0^a r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
 &= \frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{2\pi\rho}{5} a^5 = \frac{2Ma^2}{5} \quad (\text{izražamo } \rho \text{ z maso}) \\
 &V = \frac{4\pi a^3}{3} \quad / \cdot \rho \rightarrow m \Rightarrow \rho = \frac{m}{\frac{4\pi a^3}{3}} = \frac{3m}{4\pi a^3}
 \end{aligned}$$

Vektorska analiza

Definicija: Naj bo $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^3$. Potem f imenujemo skalarne funkcija.

Primeri:

1. vsaki točki v prostoru priredi električni potencial
2. vsaki točki v prostoru priredi temperaturo v tej točki
3. vsaki točki priredi gostoto te točke

Def.: Naj bo $\vec{v}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$, $V \subset \mathbb{R}^3$. Potem $\vec{v}$ imenujemo vektorsko polje (vektorska fja).

Primeri 1. vsaki točki priredi vektor, ki opisuje hitrost te točke

2. Točki priredi električno polje v tej točki.

Gradient

Gradient je preslikava, ki skalarne fje priredi vektorsko polje.

Def.: Gradient je preslikava, ki neki odvedljivi skalarne funkciji priredi vektorsko funkcijo. Gradient skalarne fje f je dan s predpisom

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

10.11.08

Primer: f skalarna fja, dana s predpisom

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xy - yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - z \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -y$$

$$\text{grad } f(x, y, z) = (2x + 2y, 2x - z, -y)$$

Naprimer: gradient fje f v točki

$$T(-1, 0, 17) \text{ je } \text{grad } F(-1, 0, 17) = (-2, -19, 0)$$

Def: Operator nabra, ki ga označimo z ∇ ,
slika ~~vektor~~ s predpisom

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\text{Torej je } \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \text{grad } F$$

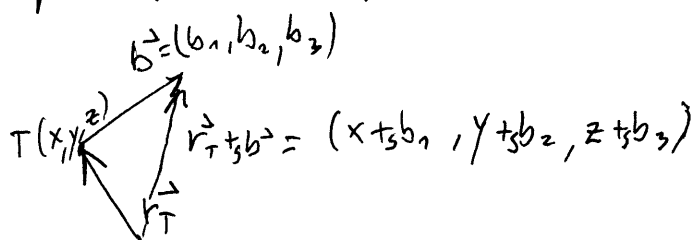
"vektor" "skalarna fja"

S pomočjo operatorja ∇ bomo kasneje opisali
tudi divergenco in rotor vektorskega polja.

Uporaba gradienta

1. smerni odvod

Zanima nas, kako se v dani smeri spreminja
skalarna fja. Spremembo v dani smeri bomo
opisali s smernim odvodom



$$\frac{df}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + sb_1, y + sb_2, z + sb_3) - f(x, y, z)}{s}$$

Dobimo smerni odvod fje f v smeri vektorja $\vec{b}$, ki

je enotski vektor. To je definicija.

Hitro lahko preverimo, da je $\frac{dF}{ds} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds}, \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}, \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} \right)$,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds}, \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}, \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} b_1, \frac{\partial F}{\partial y} b_2, \frac{\partial F}{\partial z} b_3 \right) =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) (b_1, b_2, b_3) = \text{grad } F \cdot \vec{b}$$

Primer: $f(x, y, z) = x^2 + 2xy - yz$

Zanima nas sprememba skalarne polja v točki $T(-1, 0, 17)$ v smeri $(1, 2, -2)$.

$$\vec{b} = \frac{(1, 2, -2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{(1, 2, -2)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$\text{grad } f = (2(x+y), 2x-z, -y)$$

$$\text{grad } f(-1, 0, 17) = (-2, -19, 0)$$

$$\frac{dF}{d\vec{b}} = (-2, -19, 0) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right) = -\frac{2}{3} - \frac{38}{3} = -\frac{40}{3}$$

Dobimo, da se v smeri $1, 2, -2$ vrednost

V kateri smeri se vrednost skalarne polja najhitreje spreminja?

Torej v kateri smeri je smerni odvod skalarne polja F največji. Torej kdaj je $\left| \frac{dF}{d\vec{b}} \right| = |\text{grad } F \cdot \vec{b}| =$
 $= \underbrace{|\text{grad } F|}_{\text{konst v neki T}} \cdot \underbrace{|\vec{b}|}_{1} \cdot \underbrace{|\cos \alpha|}_{\text{smer}} \text{ največ. To bo največ, ko}$

$\cos \alpha = 1$, ko imata $\text{grad } F$ in $\vec{b}$ isto smer.

Trditev: Skalarno polje F se najhitreje spreminja v smeri gradienta tega skalarne polja.

Torej v smeri $\text{grad } f$.

2. Naj bo ploskev podana z enačbo $F(x, y, z) = 0$ (implicitno)

Naj bo $\vec{r}(t)$ neka krivulja, ki teži na tej ploskvi. Potem velja $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ ($\mathbb{R}$)

Odvajamo enačbo ($\mathbb{R}$) na t in dobimo.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) = 0$$
$$\text{grad } F \cdot \vec{r}'(t) = 0$$



Dobimo, da je gradient skalarne polja f pravokoten na tangento krivulje $\vec{r}(t)$.

Ker je bila $\vec{r}(t)$ poljubna krivulja na ploskvi, velja, da je $\text{grad } f$ pravokoten tudi na vse ostale tangente krivulj v neki točki.

To pa pomeni, da je $\perp$ na tangentno ravnino in je zato normala te ravnine.

$$\vec{n} = \text{grad } f$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \text{grad } f = \vec{n}$$

3. $\text{grad } f = C \frac{\vec{r}}{r^3}$

Nekatera vektorska polja lahko zapišemo kot gradient nekega skalarne polja. Vektorsko polje, ki je gradient skalarne polja, imenujemo

potencialno vektorsko polje, skalarno polje pa potencial.

Torej $\vec{v} = \text{grad } F$

Opomba: Ni vsako vektorsko polje gradient nekega skalarnege polja.

Primer: $\vec{v} = (x^2, zy + c_0, \log x)$

Ali obstaja f , da bo $\text{grad } f = \vec{v}$?

$$x^2 = \frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow f = \int x^2 dx = x^3/3 + C(y, z) \quad \text{če odvajam, dobim } x^2. \text{ res.}$$

$$zy + c_0 = \frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = C_y(y, z) = zy + c_0 \rightarrow C(y, z) = \int (zy + c_0) dy$$

$$\log x = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$C(y, z) = z \frac{y^2}{2} + c_0 \cdot y + K(z)$$

Dobimo, da bi f morala biti oblike

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + \frac{zy^2}{2} + c_0 y + K(z). \text{ Če zdaj to } \frac{\partial}{\partial z}$$

dobim $0 + \frac{y^2}{2} + K'(z) \neq \log x$. Seveda ni.

Pokazali smo, da res ni vsako polje gradient nekega skalarnege polja. Ne obstaja skalarno polje f , tako da bi veljalo $\text{grad } f = (x^2, zy + c_0, \log x)$.

Primer: Pokažimo, da je gravitacijsko polje

$$\vec{p}(x, y, z) = -C \frac{\vec{r}}{r^3} = -C \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

potencialno s potencialom $f(x, y, z) = C/r = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x =$$

$$= -C \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{Stvar je simetrična.}$$

13.11.08

$$= \left(-C \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -C \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -C \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) =$$

$$= \frac{C}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} (x, y, z) = -C \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{p} \text{ Res.}$$

Laplaceov operator

Def.: Operator, ki skalarnemu polju f priredi skalarno polje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \text{ imenujemo Laplaceov operator.}$$

$$\text{Pišemo } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplaceov operator lahko zapišemo kot skalarni produkt operatorjev ∇ , torej $\Delta = \nabla \nabla$.

Def.: Diferencialno enačbo $\Delta f = 0$, torej $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ imenujemo Laplaceova D.E. (mat 4)

Primer: Naj bo f potencial gravitacijskega polja, torej $f(x, y, z) = \frac{C}{r}$. Potem je $\Delta f = 0$.

Divergenca vektorskega polja

Def.: Naj bo $\vec{v}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$, $V \subset \mathbb{R}^3$

vektorsko polje $\vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$,

Potem je divergenca $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$.

Divergenca $\text{div } \vec{v}$ je torej skalarno polje.

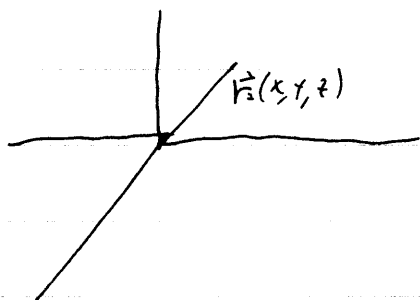
S pomočjo operatorja nable lahko zapišemo

divergenco vektorskega polja $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ kot
 $\nabla \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (v_1, v_2, v_3) = \frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial y} v_2 + \frac{\partial}{\partial z} v_3$

Primer: $\vec{v} = ((x^2 - y^2)e^{x+y}, z \cdot e^{x+y}, xy)$

$$\text{div } \vec{v} = (v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z = 2xe^{x+y} + e^{x+y}(x^2 - y^2) + z \cdot e^{x+y} + 0$$

$$= e^{x+y} (2x + x^2 - y^2 + z)$$



Primer: $\vec{v} = \vec{r} = (x, y, z)$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Naj bo f skalarno polje. Potem je $\text{grad } f$ vektorsko polje, torej lahko izračunamo $\text{div grad } f$.

$$\text{div grad } f = \text{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f.$$

Opomba: Za gravitacijsko polje $\vec{p} = -k \frac{\vec{r}}{r^3} = \text{grad} \frac{-k}{r}$
 bomo pokazali, da je $\Delta \left(\frac{-k}{r} \right) = 0$, to je
 $\text{div grad} \left(\frac{-k}{r} \right) = 0$

Res,

$$\text{div grad} \frac{-k}{r} = \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vec{r} = (x, y, z) \end{array} \right.$$

$$= \text{div} \left(-k \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \text{div} \left(-k \frac{(x, y, z)}{r^3} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{kx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{ky}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{kz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-kx(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \right) &= \\ &= k \left((x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + x \left(-\frac{3}{2} (x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot 2x \right) \right) \\ &= -k \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{k \cdot 3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= k \left(\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right) \end{aligned}$$

$$= k \left(\frac{-3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)^{2/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right) = 0. \text{ Res.}$$

Def.: Če za vektorsko polje velja $\text{div } \vec{v} = 0$ v vsaki točki, potem pravimo, da je $\vec{v}$ solenoidalno polje.

Primer: gravitacijsko polje je solenoidalno.

Naj bo f skalarno polje in $\vec{v}$ vektorsko polje. Potem je $\text{div}(f\vec{v}) = \text{div}(f(v_1, v_2, v_3)) = \text{div}(fv_1, fv_2, fv_3) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial fv_1}{\partial x} + \frac{\partial fv_2}{\partial y} + \frac{\partial fv_3}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + f \frac{\partial v_1}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y} v_2 + f \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} v_3 + f \frac{\partial v_3}{\partial z} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) (v_1, v_2, v_3) = \\ &= f \cdot \text{div } \vec{v} + \text{grad } f \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Podobnih zvez in formul je še veliko (glej priručnik)

• Rotor vektorskega polja

Def.: Naj bo $\vec{v}: V \rightarrow \mathbb{R}^3, V \subset \mathbb{R}^3$ vektorsko polje

$$\vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)).$$

Potem je rotor vektorskega polja $\vec{v}$ dan z enačbo

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$$

Rotor vektorskega polja $\vec{v}$ lahko zapišemo s pomočjo operatorja ∇ in sicer

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (v_1, v_2, v_3)$$

Primer: $\text{rot } \vec{v} = 2\omega \vec{k}$
npr. $\vec{k}$ bodi $(0, 0, 1)$

$$\text{Primer: } \vec{v} = \left(\frac{z^2 x}{y}, z + y^2, e^x y \right)$$

$$\text{rot } \vec{v} = \left(e^x - 1, \frac{2zx}{y} - e^x y, 0 + \frac{z^2 x}{y^2} \right)$$

Oglejmo si koliko je rotor gradienta F .

$$\text{rot grad } f = \text{rot} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \underline{\underline{0.}}$$

Izrek: Naj bo $\vec{v}$ vektorsko polje (lepo). Potem je $\vec{v}$ potencialno polje natanko tedaj, ko je $\text{rot } \vec{v} = 0$. Ta izrek je zelo pomemben. Res.

Če imamo dano vektorsko polje $\vec{v}$ in nas zanima, če je $\vec{v}$ potencialno polje (torej če obstaja neko skalarno polje f da je $\vec{v} = \text{grad } f$), potem ni potrebno poiskati skalarnega polja f , da je $\vec{v} = \text{grad } f$, ampak zadošča izračunati $\text{rot } \vec{v}$.

Tudi za rotor lahko izpeljemo različne formule, npr.

$$\text{rot rot } \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \Delta \vec{v} \quad (\text{v prirožnikih})$$

Transformacija Laplaceove enačbe

1. Laplaceova enačba v dveh dimenzijah je

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$$

če jo hočemo zapisati v polarnih koordinatah, moramo uvesti substitucijo

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad x = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad *$$

S pomočjo veržnega pravila za odvajanje dobimo

$$f_x = f_r r_x + f_\varphi \varphi_x$$

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad \varphi_x = \frac{-y}{r^2}, \dots$$

Po daljšem računu dobimo rezultat

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi}$$

2. Laplaceova enačba v treh dimenzijah v sferičnih koordinatah

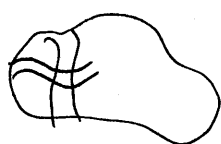
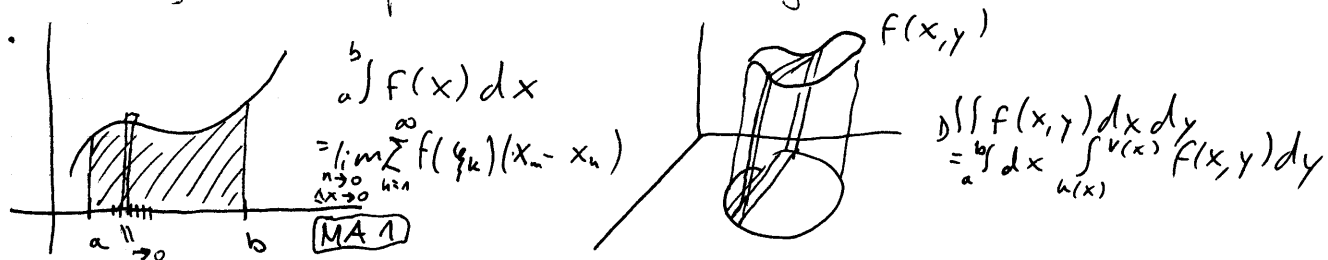
$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r} f_{\varphi\varphi} + \frac{\cot \varphi}{r^2} f_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} f_{\theta\theta}$$

17.11.08

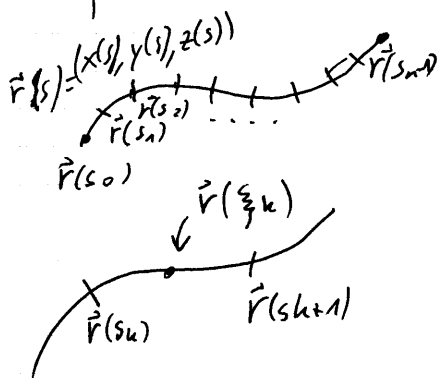
Krivaljni in ploskovni integrali



$f(x,y,z)$ gostota

$$\int_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} dy \int_{r(x,y)}^{s(x,y)} f(x,y,z) dz$$

Dalje:



Naj bo krivulja $\vec{r} = \vec{r}(s)$ dana v parametrični obliki z naravnim parametrom s . Naj bo f funkcija, ki slika iz območja $V \subset \mathbb{R}^3$ v $\mathbb{R}$, torej $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, pri čemer območje V vsebuje krivuljo $\vec{r}$ (običajno v enaki $\vec{r}$).

Definiramo vsoto.

$$\sum_{k=1}^n f(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k)) (s_{k+1} - s_k)$$

Opomba: ker s naravni parameter, je to ravno dolžina loka od $\vec{r}(s_{k+1}) - \vec{r}(s_k)$

To vsoto imenujemo integralna vsota. Če obstaja limita integralne vsote, ko $n \rightarrow \infty$ in dolžine vseh lokov proti 0, potem limitna vrednost imenujemo krivaljni integral prve vrste in pišemo

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta s_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k)) (s_{k+1} - s_k) =$$

$$= \int_c f(x,y,z) ds$$

To je krivaljni integral prve vrste.

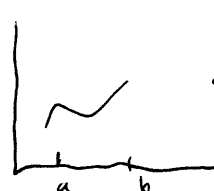
- Če s naravni parameter, pri čemer $s_0 = a$ in s_m (končna vrednost) $= b$, potem je $\int_c f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s)) ds$

Za krivuljni integral veljajo enake lastnosti, kot za običajni integral, npr

$$\int_c f ds = \int_{c_1} f ds + \int_{c_2} f ds, \text{ pri čemer } c_1 \cup c_2 = c, c_1 \cap c_2 = \emptyset$$

- Integral $\int_c (f+g) ds = \int_c f ds + \int_c g ds$
 $\int_c k f ds = k \int_c f ds$, k konstanta.

Opomba:



$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Smer integriranja določimo z izbiro načina parametrizacije, ko smo izbrali parametrizacijo, je potem smer integriranja enake smeri naraščanja vrednosti parametra.

Kaj če krivulja ni parametrizirana z naravnim parametrom s , temveč z nekim parametrom t .

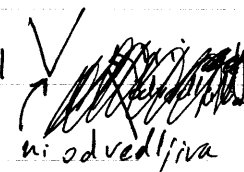
$$\int_c f(x(s), y(s), z(s)) ds = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s)) ds$$

- Potem uvedemo novo spremenljivko t

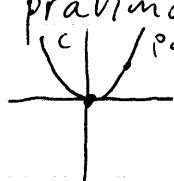
$$\int_c^d F(x(t), y(t), z(t)) \frac{ds}{dt} dt = \int_c^d f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Dobimo, da je $\int_c f(x, y, z) ds = \int_c^d f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$

Opomba: krivulja c mora biti "dovolj lepa", torej zvezno odvedljiva, glede na parameter t (nima spic), pravimo da je krivulja gladka.

$|x|$ 

Primer:



$(0, 0, 2), (1, 1, 2) \quad z=2$

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + \sqrt{z})^2$$

Zanima nas $\int_c f ds$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=t \\ y=x^2=t^2 \end{matrix}$$

↑ vrednost t v $(1, 1, 2)$

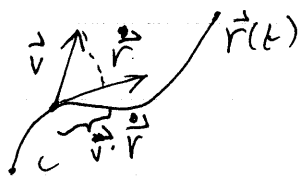
$$\int_c f ds = \int_0^1 (t^2 + (t^2)^2 + \sqrt{2})^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \text{privočnik}$$

↑ vrednost t v $(0, 0, 0)$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{1 + 4t^2 + 0}$$

Krivuljni integral 2. vrste

Naj bo C gladka krivulja in $\vec{v}: C \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorsko polje, definirano na krivulji $C \subset \mathbb{R}^3$.



Radi bi izračunali upoštevali samo tisti del vektorskega polja $\vec{v}$, ki v

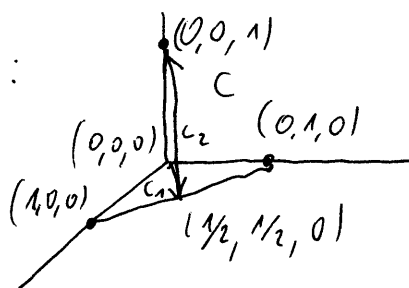
dani točki kaže v isto smer kot krivulja, torej v smer tangente na krivuljo v dani točki.

Če je krivulja C definirana s parametrom t , torej $r=r(t)$, potem je krivuljni integral vektorskega polja po krivulji C dan z enačbo:

$$\int_C \vec{v} d\vec{r} = \int_a^b \vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_a^b (V_1, V_2, V_3) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{smer tangente } \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ na krivuljo} \\ (dx, dy, dz)}} dt$$

lahko tudi $\int V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz$

Primer:



$$C_1: \begin{cases} x=t & 0 \leq t \leq 1/2 \\ y=x \\ z=0 \end{cases}$$

$$C_2: \begin{cases} x=1/2+t(-1/2) \\ y=1/2+t(-1/2) \\ z=t & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\vec{v}(x^2y, -x+z, y)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) + t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \dot{x}=1 \\ \dot{y}=1 \\ \dot{z}=0 \end{matrix}$$

$$\int_C \vec{v} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{v} d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{v} d\vec{r} = \int_0^{1/2} (t^3, -t+0, t) \cdot (1, 1, 0) dt +$$

$$+ \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \right)^3, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \right) \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{1/2} (t^3 - t) dt + \int_0^1 \left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \right)^3 \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \right) \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \right) dt$$

To pa znamo,

$$= \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{1/2} + \int_0^1 \left(\frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}t + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t^3 \right) \left(-\frac{1}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} - \frac{3}{4}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \Big) dt =$$

$$= \frac{1}{64} - \frac{1}{8} + \int_0^1 -11 dt = -\frac{7}{64} + \int_0^1 -11 dt$$

24.11.08

Primer: $\vec{F}$ premika maso po C , masa m

$$\vec{F}(x, y, z)$$

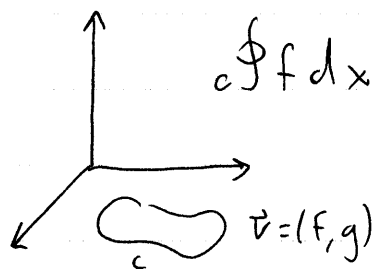
delo sile od t_0 do t_1

$$A = \int_C \vec{F} d\vec{r} \quad \text{Mi pa vemo } d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt = \vec{v} dt.$$

$$\text{Torej } A = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad \text{Sila pa je } \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt =$$

$$= m \frac{v^2}{2} \Big|_{t_0}^{t_1} = W_k(t_1) - W_k(t_0).$$

Greenova formula



$$\oint_C f dx + g dy = *$$

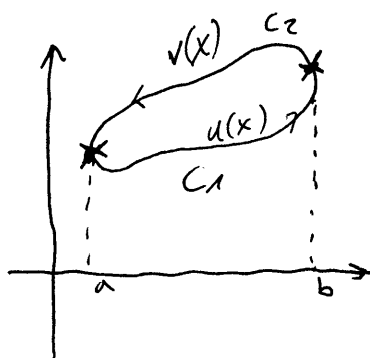
$\oint$ pomeni zaključeno krivuljo

$$* = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

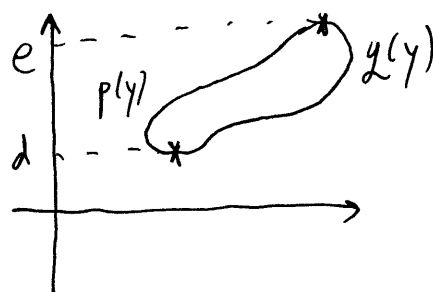
Izrek: Naj bo C odsehom gladka ^{shlenjena} (ima lahko kakšno špico) krivulja v (x, y) ravnini. Naj bosta f in g parcialno zvezno odvedljivi f, g na območju D , katerega rob je krivulja C . Potem velja $\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C f dx + g dy$. Pozor: C je meja območja D !! Ker je C shlenjena krivulja, je območje D omejeno. Integriramo v $\oplus$ smeri, ccw

Greenova formula povezuje dvojni in krivuljni integral

Dokaz (skica dokaza): Pokažimo Greenovo formulo na primeru preprostega območja D . Naj bo D tako območje v ravnini, da je omejeno z dvema funkcijama spremenljivke y oz. dvema ~~spres~~ fjmama spremenljivke x .



$\mathcal{D}$ to ni lepo območje



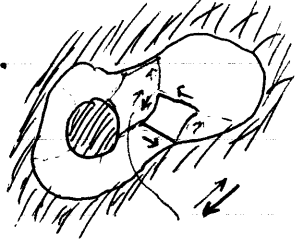
$$\begin{aligned} \text{Računamo } \iint_D \frac{\partial F}{\partial y} dx dy &= \\ &= \int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b \left[F(x,y) \right]_{u(x)}^{v(x)} dx = \int_a^b F(x, v(x)) dx - \\ &\quad - \int_a^b F(x, u(x)) dx \\ &= - \int_a^b F(x, u(x)) dx - \int_b^a \int_a^b F(x, v(x)) dx \end{aligned}$$

$$= - \int_{C1} f dx - \int_{C2} f dx = - \int_C f dx \quad (\oplus)$$

Podobno pokažemo, da je $\iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = \int_C g dy$, $(\oplus \oplus)$
Upoštevati smo, da je C sestavljena iz $p(y)$ od e do d
in $q(y)$ od d do e . Odštejemo $\oplus$ in $\oplus \oplus$
in dobimo $\iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dx dy - \iint_D \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \boxed{\int_C f dy - \int_C f dx}$

~~Www~~

Naj bo sedaj območje D bolj zapleteno. Potem ga razdelimo na manjša lepa podobmočja.



Potem se nam krivuljni integrali po krivuljah znotraj območja D odštejejo. Ostane samo integral po zunanji krivulji.

$\oint_{\partial D_1} + \oint_{\partial D_2} + \dots = \oint_{\partial D_1} + \oint_{\partial D_2} + \dots = \oint_{\partial D}$ krivulje v notranjosti D se "krajšajo".

Naj bo $\vec{V} = (f, g, 0)$ in naj bosta f in g odvisni samo od x in y .

Izračunajmo $\text{rot } \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0) + \vec{j}(0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \vec{k}$
 $\nwarrow g$ ni odvisen od z

$$\text{rot } \vec{V} = (0, 0, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})$$

Sledi $\oint \text{rot}(f, g, 0) \cdot \vec{k} dx dy = \oint f dx + g dy$

vektor množimo s $\vec{k}$, da dobimo skalar.

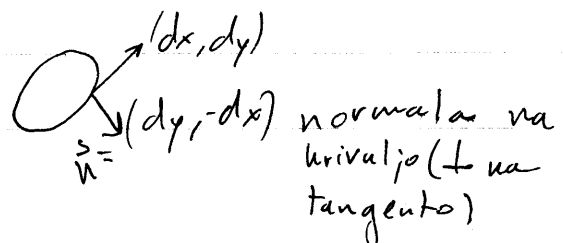
Izrazimo Laplace ~~vektorskega~~ ^{skalarnega} polja s pomočjo Greenove formule.

Naj bo w poljubno skalarno polje. Označimo

$$\frac{\partial w}{\partial x} = g \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -f$$

$$\text{Velja } \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = w_{xx} + w_{yy} = \Delta w$$

$$f dx + g dy = \frac{\partial w}{\partial y} dx + \frac{\partial w}{\partial x} dy$$



27.11.08

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cdot \vec{n} \, ds = \text{grad } w \cdot \vec{n} \, ds$$

Dobili smo, da je integral ~~potenciala~~

$$\iint \Delta w \, dx \, dy = \oint \text{grad } w \cdot \vec{n} \, ds = \oint \frac{dw}{dn} \, ds$$

Primer $\oint \frac{6}{5}(xy^2 - 2y + \log x, 3x^2y^4 - 6\sin y) \, dr =$

(1,2) (3,2)
(1,1) (3,1) Green: $\Rightarrow \iint [6xy^4 - (12/5 xy - 2)] \, dx \, dy$

$$\begin{aligned} &= \iint (6xy^4 - \frac{12}{5}xy + 2) \, dx \, dy = \\ &= \int_1^3 dx \int_1^2 (6xy^4 - \frac{12}{5}xy + 2) \, dy = \\ &= \int_1^3 (6xy^5/5 - \frac{12}{5}x \frac{y^2}{2} + 2y) \Big|_1^2 \, dx = \\ &= \int_1^3 (6x \frac{32}{5} - \frac{12}{5}x \frac{4}{2} + 4 - 6x \frac{1}{5} + \frac{12}{10} - 2) \, dx = \\ &= \left[\frac{6x^2}{2} \cdot \frac{23}{5} - \frac{24}{5} \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{6}{5} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{10}x \right]_1^3 = m. \end{aligned}$$

Uporaba:

• $g(x,y) = x$
 $f(x,y) = 0$
 $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$
 $\oint dx \, dy = \oint x \, dy$
 $\oplus \rightarrow P^{\perp D} = \frac{1}{2} \oint x \, dy - y \, dx$

• $g(x,y) = 0$
 $f(x,y) = -y$
 $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$
 $\oint dx \, dy = - \oint y \, dx$
 $\ominus \rightarrow P^{\perp D}$

V polarnih koordinatah formula izgleda na naslednji način:

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

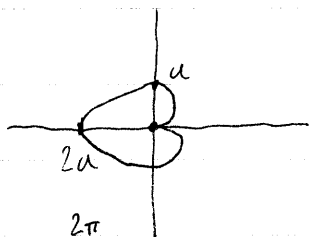
$$dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi$$

$$dx = dr \cos \varphi + r(-\sin \varphi) d\varphi$$

$$\begin{aligned} \text{pl } D &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cancel{r \cos \varphi \sin \varphi dr} + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi - \cancel{r \sin \varphi dr \cos \varphi} - r^2 \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi}} \end{aligned}$$

Primer: Ploščina kardioida

$$r = a(1 - \cos \varphi)$$



$$\text{pl } D = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{2} a^2$$

Neodvisnost krivuljnega integrala od poti

Def.: Krivuljni integral $\oint \vec{v} d\vec{r} = \oint v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$ je neodvisen od poti na območju D , če dobimo enako vrednost za vsako krivuljo na tem območju, ki se začne v točki P in konča v točki Q .



Krivuljni integral je v tem primeru odvisen zgolj od začetne in končne točke.

Def.: Izraz $v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$ je eksakten, če

• obstaja skalarno polje u , tako da je

$$du = v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\text{Torej: } v_1 = u_x, v_2 = u_y, v_3 = u_z$$

$$\text{oziroma } \text{grad } u = (v_1, v_2, v_3)$$

Izrek: Naj bo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ zvezno vektorsko polje.

Potem je

$\int_C \vec{v} d\vec{r} = \int_C v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$ neodvisen od poti na območju D , če je izraz pod integralom eksakten, torej $\vec{v} = \text{grad } u$ za neko skalarno polje u .

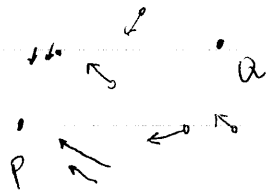
Pokazali bomo samo eno smer ekvivalence.

Naj bo $\vec{v}$ eksaktno vektorsko polje $\vec{v} = \text{grad } u$ za neko skalarno polje u .

$$\begin{aligned} \int_C \vec{v} d\vec{r} &= \int_C v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz = \int_C u_x dx + u_y dy + u_z dz = \\ &= \int_C du = u|_{\text{kon.}} - u|_{\text{začetna}} \end{aligned}$$

Torej je integral odvisen samo od začetne in končne točke krivulje.

Primer: $\vec{v} = (yz, xz, xy)$ Poiščimo skalarno polje
 $P(1,1,1); Q(3,3,2)$ u , da bo $\text{grad } u = \vec{v}$



$$(u_x, u_y, u_z) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

$$u_x = yz \quad u_y = xz \quad u_z = xy$$

$$u = xyz + k(y, z)$$

$$u_y = xz + k_y(y, z) \rightarrow k_y(y, z) = 0 \quad k = C(z)$$

$$u = xyz + C(z)$$

$$u_z = xy + C'(z) \rightarrow C'(z) = 0 \rightarrow C(z) = L$$

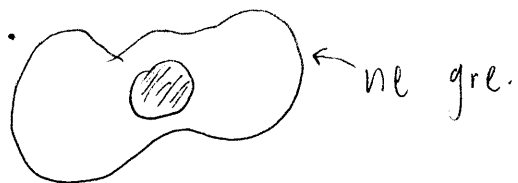
$$\text{Dobimo } u(x, y, z) = xyz + L$$

$$\begin{aligned} c) \int \vec{v} \cdot d\vec{r} &= u \Big|_{\vec{r}_Q} - u \Big|_{\vec{r}_P} = u(3, 3, 2) - u(1, 1, 1) = \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 2 + C - (1 \cdot 1 \cdot 1 + C) = \\ &= \underline{17} \end{aligned}$$

Izrek: Naj bo $\vec{v}$ vektorsko polje (odvedljivo)
 Če je $\vec{v}$ eksaktno na območju D ,
 potem je $\text{rot } \vec{v} = 0$. V primeru, da je
 območje enostavno povezano, potem
 velja, da je vsako vektorsko polje $\vec{v}$, za katerega
 je $\text{rot } \vec{v} = 0$, eksaktno na območju D .

Def.: Območje D je enostavno povezano, če lahko
 vsako sklenjeno krivuljo zvezno transformiramo
 v točko. Torej je enostavno povezano območje

brez lukenij.



Izrek: Krivuljni integral $\oint_C \vec{v} d\vec{r}$ je neodvisen od poti na območju D natanko tedaj, ko je ta integral po katerikoli sklenjeni krivulji na območju D enak 0.

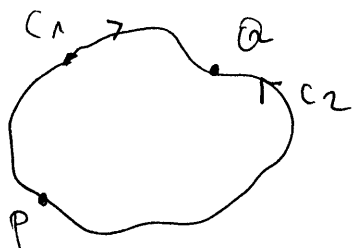
Dokaz:

$\Rightarrow$ Najbo integral neodvisen od poti. Radi bi videli, da je potem integral po neki sklenjeni krivulji enak 0.



$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{v} d\vec{r} &= \int_{C_2} \vec{v} d\vec{r} \\ \underbrace{\int_{C_1} \vec{v} d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{v} d\vec{r}}_{=0} &= \underbrace{\int_{C_1} \vec{v} d\vec{r} + \int_{\text{vratno smer}} \vec{v} d\vec{r}}_{\oint_C \vec{v} d\vec{r} = 0} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Obrat: če je integral po sklenjeni krivulji enak 0, potem na enak način pokažemo, da je neodvisen od poti.

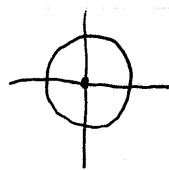


V naslednjem primeru s pomočjo zadnjega izreka pokažemo, da je pogoj v enostavno povezanem območju v predzadnjem izreku res nujno potreben!!

Primer: $\vec{v} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{x^2+y^2 - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2+x^2 - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

$$= (0, 0, 0)$$



$\vec{v}$ ni definirano v točki $(0,0,0)$, torej tam luknje
Izračunajmo integral $\vec{v}$ po krivulji $C: x^2+y^2=1, z=0$

$$\oint_C \vec{v} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi_0$$

$\uparrow$
 $x = \cos \varphi$
 $y = \sin \varphi$
 $z = 0$

Integral po zaključeni krivulji je različen od 0, torej ni neodvisen od poti, torej $\vec{v}$ ni eksaktno.
(kljub temu, da $\text{rot } \vec{v} = 0$)

~~1.12.2008 !!! ✓~~

Ploskovni integral

Je posplošitev dvojnega integrala. Integral definiramo na podoben način kot krivuljni integral.

Naj bo S gladka ploskev, ki ima v vsaki točki tangentno ravnino. Ploskev naj bo tudi orientirana. To pomeni, da in a 2 strani in iz ene na drugo stran lahko prideva samo čez rob ploskve (glej Meiusov trak-neorientirana pl.)

Naj bo u skalarna f.kj., definirana na ploskvi S . Torej $u: S \rightarrow \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^3$.

Ploskev razdelimo na najjše parcele S_k . Na vsaki parceli si izberemo poljubno točko $T_k(x_k, y_k, z_k)$ in v tej točki izračunamo vrednost skalarne f.kj. u .

Definiramo integralno vsoto $\sum_{k=1}^n u(x_k, y_k, z_k) \cdot p|S_k$

Če obstaja limita integralni vsoti, ko gre $n \rightarrow \infty$ in gredo ploščine vseh parcel S_k proti nič, potem to integralno vsoto imenujemo ploskovni integral prve vrste in pišemo

$$\iint_S u \, dS$$

Spominja se. Naj bo S ploskev, ki je parametrizirana s parametroma u in v . Potem je površina ploskve:

$$P = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$$

Sledi, da je ploskovni integral po ploskvi S , ki je parametrizirana z u in v , torej $r = \vec{r}(u, v)$, enak

$$(D) \quad \iint_S f \, dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

pri čemer je f skalarna funkcija def. na ploskvi S , D pa območje, po katerem tečeta parametra u in v , ko opišeta celotno ploskev S .

Dobili smo zvezo med ploskovnim integralom prve vrste in dvojnim integralom; slednjega pa znamo rešiti.

Definirajmo 3e ploskovni integral 2. vrste.

taj ko S gladka orientirana ploskev in $\vec{v}$ vektorsko polje, definirano na ploskvi S .
Potem je ploskovni integral 2. vrste definiran s predpisom

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{V} dS \quad (1)$$

pri čemer je $\vec{V}$ normirana (enotska) normala na ploskev S v dani točki ploskve S .

Na desni strani (1) je ploskovni integral prve vrste, ki ga znamo izračunati.

Kako izračunamo normalo na ploskev v dani točki?

Če je ploskev podana v par. obliki, torej $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, potem je $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ in

$$\vec{V} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Potem pa je $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{V} dS = \iint_D \vec{v} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \sqrt{EG - F^2} du dv =$
 $\underbrace{\iint_S}_{\text{ploskovni 2. vrste}} \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{V}}_{\text{ploskovni 1. vrste}} \underbrace{dS}_{\text{param. ploskev in dobimo dvojni integral}}$

$$= \iint_D \vec{v} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv = \iint_D \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du dv$$

V posebnem primeru, ko sta parametra u in v kar spremenljivki x in y dobimo

$$\vec{n} = (p, q, -1), \quad \vec{V} = \frac{(p, q, -1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \quad \text{"(v}_1, v_2, v_3\text{)"}$$

in zato
$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{v} \cdot (p, q, -1) dx dy = \iint_D (v_1 p + v_2 q - v_3) dx dy$$

Opomba Ploskovni integral druge vrste po ploskvi S vektorskega polja $\vec{v}$ imenujemo pretok vektorskega polja skozi ploskev S .

Primer $n = \frac{1}{(1+x+z)^2}$

S: del ravnine $x+y+z=1$, ki leži v prvem oktantu.

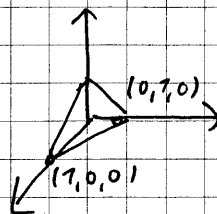
$$\iint_S \frac{1}{(1+x+z)^2} dS = *$$

Ploskev S parametriziramo j parametra sta x in y .

$z = 1 - x - y$. ket parametra x in y je $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{p^2+q^2+1} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$$* = \iint_D \frac{1}{(1+x+1-x-y)^2} \sqrt{3} dx dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{\sqrt{3}}{(2-y)^2} dy = \sqrt{3} \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right)$$



Primer $\iint_S \vec{n} dS (*)$ $\vec{n} = (y-z, z-x, x-y)$ $S: x^2+y^2=z^2$
 $0 \leq z \leq h$

Zanima nas pretok vek. polja $\vec{n}$ skozi ploskev S , torej koliko je integral (*)

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$0 \leq z \leq h$$



$$\iint_S (y-z, z-x, x-y) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right) dx dy =$$

$$p = z_x = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} 2x$$

$$q = z_y = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} 2y$$

$$= \iint (y - \sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (\sqrt{x^2+y^2} - x) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x-y) dx dy =$$

$$D: x^2+y^2 \leq h^2$$

$$= \int_{-h}^h dx \int_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{\sqrt{h^2-x^2}} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x + y - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x+y) \right) dy = \int_{-h}^h dx \int_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{\sqrt{h^2-x^2}} (y - x) dy =$$

$$= 0.$$

Gaussov izrek

Gaussov izrek nam povezuje trojni integral s ploskovnim po zaključeni ploskvi.

Imamo zaključeno gladko ploskev S in vektorsko polje $\vec{v}$ definirano na območju V , ki je omejeno s ploskvijo S .

Oglejmo si izraz $\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial z} dx dy dz$

Ploskev S je taka, da je vsaka premica, ki je vzporedna z osjo z , seka največ dvakrat.
(izrek velja bolj splošno, izpeljali ga bomo samo za take ploskve)

Potem je $\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_S v_3 \Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dx dy =$
 $= \iint_S (v_3(x,y,z_2) - v_3(x,y,z_1)) dx dy$
 ↑
 projekcija na (x,y)

$$= \iint_{S_2} v_3 n_3 dS - \iint_{S_1} v_3 n_3 dS = \iint_S v_3 n_3 dS$$

ker spodaj normala
gleda v drugo smer
kot zgoraj

Podobno dobimo $\iiint \frac{\partial v_1}{\partial x} dx dy dz = \iint v_1 n_1 dS$ in
 $\iiint \frac{\partial v_2}{\partial y} dx dy dz = \iint v_2 n_2 dS$

Izraze seštejemo in dobimo

$$\iiint \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint (v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3) dS =$$

$$= \iiint \operatorname{div} \vec{v} dx dy dz = \iint (v_1, v_2, v_3) (n_1, n_2, n_3) dS = \iint \vec{v} \cdot \vec{n} dS =$$

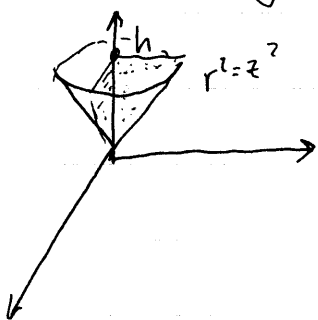
$$= \oint \vec{v} d\vec{S}$$

Izrek (Gauss): Naj bo S gladka ~~prosta~~ zaključena ploskev in V območje, ki ga S omejuje. Naj bo $\vec{v}$ odvedljivo vektorsko polje, definirano na V . Potem je

$$\iiint \operatorname{div} \vec{v} dx dy dz = \oint \vec{v} d\vec{S}$$

Torej je pretok vektorskega polja skozi zaključeno ploskev S enak trojnemu (prostorskemu) integralu divergence $\vec{v}$ po območju, ki ga S omejuje

Primer: $\iint (x^2, y^2, z^2) d\vec{S}$
 $S: x=0 \quad y=0 \quad x^2+y^2=z^2 \quad z=h$



$$\iiint \operatorname{div} \vec{v} dx dy dz = *$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} = 2x + 2y + 2z = 2(x+y+z)$$

$$* = 2 \iiint (x+y+z) dx dy dz =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^z (r \cos \varphi + r \sin \varphi + z) r dr$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left[\frac{r^3}{3} \cos \varphi + \frac{r^3}{3} \sin \varphi + \frac{r^2}{2} z \right]_0^z dz = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left[\frac{z^3}{3} \cos \varphi + \frac{z^3}{3} \sin \varphi + \frac{z^3}{2} \right] dz =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{h^4}{12} \cos \varphi + \frac{h^4}{12} \sin \varphi + \frac{h^4}{8} \right] = 2 \left[\frac{h^4}{12} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{h^4}{12} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{h^4}{4} \right] =$$

$$= \frac{h^4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{h^4}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Primer: $\iint (x, y, z) d\vec{S} = *$

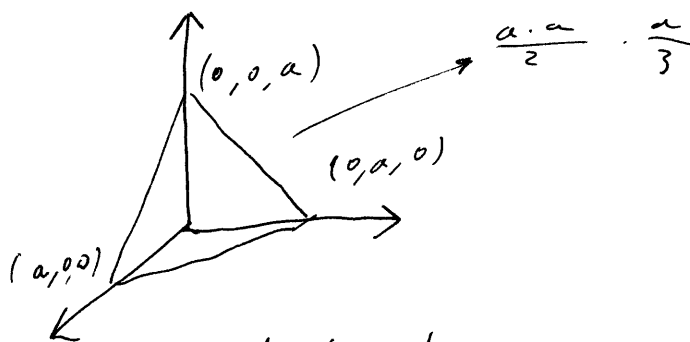
$$x + y + z = a$$

1. oktant

$$\left. \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix} \right\}$$

S rob območja,

ki ga omejujejo ravnine v 1. oktantu



$$\text{div}(x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$* = \iiint 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint dx \, dy \, dz = \frac{a^3}{2}$$

Pri tem primeru opazimo, da lahko računamo prostornine teles s pomočjo ploščavnega integrala.
 prostornina $V = \iiint dx \, dy \, dz = \frac{1}{3} \iint (x, y, z) d\vec{S} = \frac{1}{3} \iint \vec{r} d\vec{S}$

Dalje: Naj bo $\vec{v}$ potencialno polje, torej $\vec{v} = \text{grad } f$
 Potem je: $\text{div grad } f = \text{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$
 in $\text{grad } f \cdot \vec{r} = \frac{df}{d\vec{r}}$ smerni odvod

Sledi: $\iiint \text{div grad } f \, dx \, dy \, dz = \iiint \Delta f$
 $\iint \text{grad } f d\vec{S} = \iint \text{grad } f \cdot \vec{r} dS = \iint \frac{df}{d\vec{r}} dS$
 in zato po Gaussovem izreku
 $\iiint \Delta f \, dx \, dy \, dz = \iint \frac{df}{d\vec{r}} dS$

Stokesov izrek

Ta izrek nam pove povezavo med ploskovnim in krivuljnim integralom.

Izrek: Stokes. Naj bo C zaključena sklenjena gladka krivulja, ki omejuje ploskev S .

Naj bo $\vec{v}$ vektorsko polje, odvedljivo in definirano na ploskvi S . Potem velja, da je

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \, d\vec{S} = \oint_C \vec{v} \, d\vec{r}$$

Integriramo v pozitivni smeri

Dokaz: (ideja)

Ploskev S projeciramo na (x, y) in dobimo območje v ravnini, za katerega lahko uporabimo Greenovo formulo.

Podobno projeciramo še na ostali koordinatni ravnini, tudi tam uporabimo Greenovo formulo. Izraze "seštejemo" in dobimo Stokesovo formulo.

Opomba: Greenova formula je samo poseben primer Stokesove formule.

Naj bo $\vec{v} = (f(x, y), g(x, y), 0)$. Potem je $\operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})$. Ploskev S pa naj bo območje v ravnini. Potem je $d\vec{S} = \vec{x} \, dS = (0, 0, 1) \, dS$ in dobimo

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \, d\vec{S} = \iint_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0, 1) \, dS = \oint_C f \, dx + g \, dy$$

$\downarrow$
 $(0, 0, 1) \, dS \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz) \text{ ker } \vec{v} \text{ v ravnini}$

8.12.08

Primer: $\vec{v} = (-y^3, x^3, 0)$

območje: $z=0$

$x^2 + y^2 \leq 1$ C rob območja

$$\oint_C \vec{v} d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{v} dS = \iint_S \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S (3x^2 + 3y^2) dx dy =$$

= $\iint_S (x^2 + y^2) dx dy$ stokes ali green

$$3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr = 2\pi \cdot \frac{3 \cdot 1}{4} = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

Kompleksna analiza

Funkcija kompleksne spremenljivke

Naj bo f fja, ki sluha iz neke podmnožice kompleksnih števil v kompleksna števila, torej $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, pri čemer $D \subset \mathbb{C}$.

Potem pravimo, da je f fja kompleksne spremenljivke.

Primer: $f(z) = z^2 - 1$

Torej $f(1) = 0$

$f(i) = i^2 - 1 = -2$

$f(-2+i) = (-2+i)^2 - 1 = 4 - 4i - 1 - 1 = 2 - 4i$

Vsako fjo kompleksne spremenljivke lahko zapišemo s pomočjo dveh realnih funkcij dveh spremenljivk:

naj bo $z = x + iy$, potem je
 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

Primer: $f(z) = z^2 - 1 = (x + iy)^2 - 1 = x^2 + 2xyi - y^2 - 1$
 $= x^2 - y^2 - 1 + i(2xy)$

V tem primeru $u(x, y) = x^2 - y^2 - 1$
 $v(x, y) = 2xy$

Obratno, če imamo fko kompleksne spremenljivke
zapisano v obliki

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

potem jo lahko zapišemo kot fko spremenljivke z .

Primer: Naj bo fka podana s predpisom
 $f(z) = x^2 - y^2 - 1 + i 2xy$

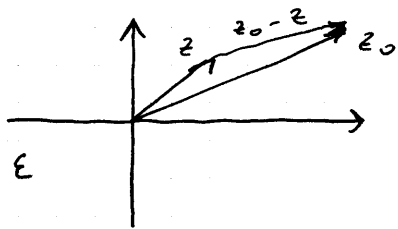
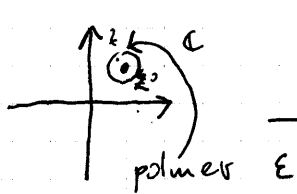
Potem vemo, da je $z = x + iy$ in $\bar{z} = x - iy$

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\text{Potem je } f(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 - 1 + i 2 \frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} =$$
$$= \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} + \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - 1 + \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2},$$

$$= \frac{2z^2 + 2\bar{z}^2 + 2z^2 + 2\bar{z}^2}{4} - 1 = z^2 - 1$$

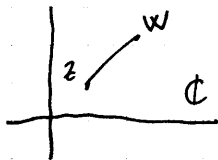
Naj bo $z_0 \in \mathbb{C}$. Katera kompleksna števila so blizu
 z_0 ?



dolžina vektorja
razdalja med z in z_0 ,
torej $|z_0 - z|$

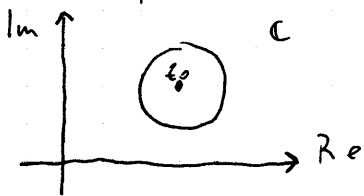
To so tisti $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $|z - z_0| < \epsilon$. To je krogec s polmerom ϵ .

Opomba: $z, w \in \mathbb{C}$
 $|z - w|$ je razdalja med točkama v kompleksni ravnini, ki sta določeni z in w .



Def.: Fija f kompleksne spremenljivke je zvezna v točki z_0 , če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je
 $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$,

čim je $|z - z_0| < \delta$

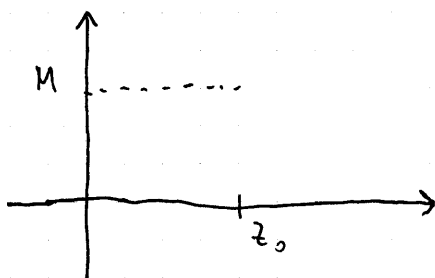


Def.: Funkcija kompleksne spremenljivke f ima limito w_0 v točki z_0 , če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je

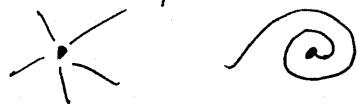
$$|f(z) - w_0| < \epsilon$$

čim je $|z - z_0| < \delta$.

Spomnimo se $\mathbb{R}$ primera. V tem primeru se z_0 lahko bližamo samo z leve ali desne, leva ali desna limita.



V kompleksnem primeru se lahko z_0 bližamo na neskončno načinov. Če se bližamo z_0 po premicah, pravimo, da se bližamo po žarkih. Lahko pa se bližamo tudi po kakšni drugi poti.



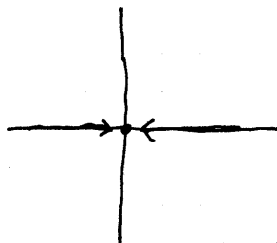
Če v točki z_0 obstaja limita, moramo dobiti isto vrednost, ne glede na to, kako se bližamo z_0 .

Primer: $f(z) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = ?$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

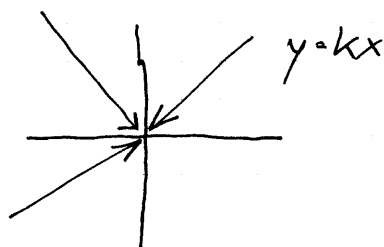
$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} f(z) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(0+y)^2}{0^2+y^2} = 1$$



Kaj pa, če gremo po žarkih?

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+kx)^2}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+k)^2}{x^2(1+k^2)} =$$

$$= \frac{1+2k+k^2}{1+k^2}$$



Dobimo različen rezultat pri različnih vrednostih k (če se torej bližamo z_0 po različnih žarkih).

Torej limita $f(z)$ v točki $z_0=0$ ne obstaja.

Pri računanju limite si večkrat pomagamo s polarnim zapisom $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.
Fjo zapišemo v obliki:

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + i v(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

in če računamo limeto $z \rightarrow 0$, mora biti limita $r \rightarrow 0$ neodvisna od φ .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

Izrek: Vsota zveznih, razlika zveznih, produkt zveznih in kvocijent zveznih (če ne delimo z 0), kompozitum funkcij kompleksne spremenljivke so zvezne fje.

Izrek: Fja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je zvezna natanko tedaj, ko sta zvezni funkciji u in v .

Izrek: Naj bo f zvezna na zaprti omejeni množici, potem je f omejena. Torej obstaja $M \in \mathbb{R}$, tako da je $|f(z)| < M$.

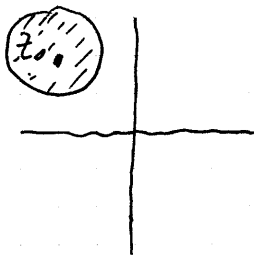
Analitične fje

Def.: Funkcija f kompleksne spremenljivke je odvedljiva v točki z_0 , če obstaja $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$

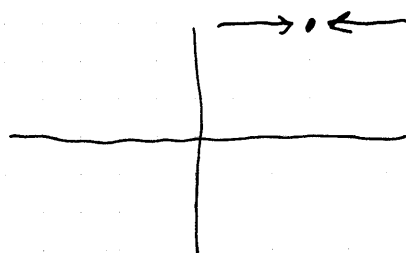
$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = * \quad (\text{lim. d.f. kvoc.})$$

Pišemo $f'(z_0) = *$

Def.: Funkcija f je analitična v točki z_0 , če je odvedljiva v neki okolici z_0 (v vsaki točki te okolice z_0). To je dodatna zahteva.



Če naj bo fja odvedljiva, potem morajo obstajati limite v vseh smereh. Torej morata obstajati tudi limiti v horizontalni in vertikalni smeri:



1) Naj bo $\Delta y = 0$

Potem je $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$z_0 = x_0 + iy_0$$

$$z_0 + \Delta x = x_0 + \Delta x + iy_0$$

Izrek: Vsota zveznih, razlika zveznih, produkt zveznih in kvocijent zveznih (če ne delimo z 0), kompozitum funkcij kompleksne spremenljivke so zvezne fje.

Izrek: Fja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je zvezna natanko tedaj, ko sta zvezni funkciji u in v .

Izrek: Naj bo f zvezna na zaprti omejeni množici, potem je f omejena. Torej obstaja $M \in \mathbb{R}$, tako da je $|f(z)| < M$.

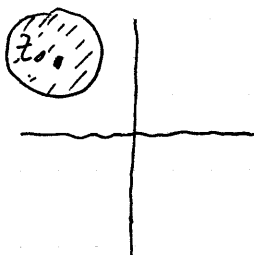
Analitične fje

Def.: Funkcija f kompleksne spremenljivke je odvedljiva v točki z_0 , če obstaja $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$

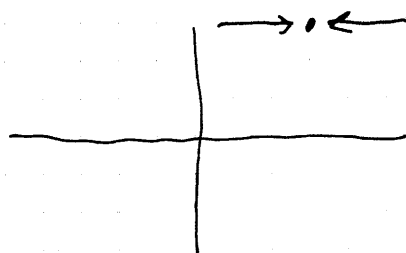
$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = * \quad (\text{lim. d.f. kvoc.})$$

Pišemo $f'(z_0) = *$

Def.: Funkcija f je analitična v točki z_0 , če je odvedljiva v neki okolici z_0 (v vsaki točki te okolice z_0). To je dodatna zahteva.



Če naj bo fja odvedljiva, potem morajo obstajati limite v vseh smereh. Torej morata obstajati tudi limiti v horizontalni in vertikalni smeri:



1) Naj bo $\Delta y = 0$

Potem je $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$z_0 = x_0 + iy_0$$

$$z_0 + \Delta x = x_0 + \Delta x + iy_0$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \uparrow$$

2) $\Delta x = 0$

Potem je

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + i(v(x_0, y_0 + \Delta y))}{\Delta y \cdot i} -$$

$$- \frac{u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y_0))}{\Delta y \cdot i} =$$

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \Delta z &= \Delta x + i \Delta y \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{i} \left(\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \right) =$$

$$= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \quad *$$

Če hočemo, da odvod obstaja, morata biti izraza $*$ in $\uparrow$ enaka. Torej

$$u_x + i v_x = \frac{1}{i} u_y + v_y$$

$$u_x + i v_x = -i u_y + v_y$$

Sledi $\boxed{u_x = v_y \quad \text{in} \quad u_y = -v_x}$ $\uparrow \uparrow$

Pokazali smo, če je f odvedljiva, velja $\uparrow \uparrow$. Velja pa tudi obratno, kar nam pove naslednji izrek.

Izrek: Naj bo f fja kompleksne spremenljivke, ki jo zapišemo $f = u + iv$ (u in v realni fji).

Potem je $\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$

Cauchy-Riemannov pogoj potreben in zadosten, da je f analitična.

Torej f analitična natanko tedaj, ko velja Cauchy-Riemannov pogoj.

Primer: $f(z) = \bar{z}$

$$f(z) = x - iy, \text{ torej } \begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_x &= 1 & u_y &= 0 \\ v_x &= 0 & v_y &= -1 \end{aligned}$$

$$u_x \stackrel{!}{=} v_y \parallel \rightarrow \text{Torej fja } f(z) = \bar{z} \text{ ni analitična.}$$

Opomba: Če je f analitična, potem smo videli, da je $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$.

Naslednja zadeva, samo kot opomba.

Opomba: Analitična fja je avtomatično zvezna. Obrat ne velja. $f(z) = \bar{z}$ je zvezna, ni pa analitična.

Posebna lastnost analitične fje je naslednje:

Naj bo $f = u + iv$ analitična fja. Potem velja C-R pogoj $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$.

Prvo enačbo odvajamo po x , drugo po y in dobimo

$$\begin{aligned} u_{xx} &= v_{xy} \\ u_{yy} &= -v_{xy} \end{aligned} \quad \text{enačbi seštejemo in dobimo}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \text{ torej } \Delta u = 0 \text{ (Laplace).}$$

Podobno lahko prvo enačbo C-R pogoja odvajamo po y in drugo po x , odštejemo drugo od prve in dobimo.

$$\Delta v = 0.$$

Def.: Fjo realnih spremenljivk, ki zadošča pogoj, da je njen Laplace enak nič, imenujemo harmonična funkcija. Torej sta u in v če je f analitična fja, harmonični funkciji.

~~1.1.18, 1.1.18~~

Elementarne kompleksne funkcije

11.12.08

$$f(z) = e^z$$

Funkcijo e^z definirajmo tako, da zadošča naslednjim pogojem

$$(I) e^z = e^x$$

če je $\text{Im}(z) = 0$ ujemaj se z def. eksponentne funkcije na realnih številih, e^z je razširitev realne funkcije!

$$(II) \frac{de^z}{dz} = e^z$$

(III) e^z naj bo analitična

Oglejmo si, kaj / kakšna je potem funkcija $f(z) = e^z$, če zadošča tem trem pogojem.

Zapišimo $e^z = u(x, y) + iv(x, y)$, če odvojamo

$$u_x(x, y) + iv_x(x, y) = u_x(x, y) + iv(x, y)$$

$$\uparrow \text{ker je } \frac{de^z}{dz} = e^z$$

Dobimo $u_x = u$ in $v_x = v$

$$u(x, y) = e^x G(y)$$

Ker je $f(z) = e^z$ analitična, velja pogoj C-R

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

$$\text{torej } v_x = -u_y = -e^x G'(y)$$

$$v_{xy} = e^{-x} G''(y)$$

$$\parallel$$

$$v_y = u_x = u = e^x G(y)$$

Dobimo, da je

$$e^x G(y) = -e^x G''(y)$$

$$e^x (G''(y) + G(y)) = 0$$

$$G''(y) + G(y) = 0$$

$$G(y) = A \cos y + B \sin y$$

Torej je $e^z = u + iv = e^x (A \cos y + B \sin y) - ie^x (-A \sin y + B \cos y)$

Upoštevati moramo še

$$\begin{aligned} u_y &= -v_x \\ v_x &= -u_y / dy \\ v_{xy} &= -u_{yy} \\ v_y &= u_x \\ u_x &= u = e^x G(y) \end{aligned}$$

Opomba: e^x ne more biti 0

$$v = \dots (v_x = -u_y = -e^x (-A \sin y + B \cos y))$$

$$= e^x ((A \cos y + B \sin y) + i(A \sin y - B \cos y))$$

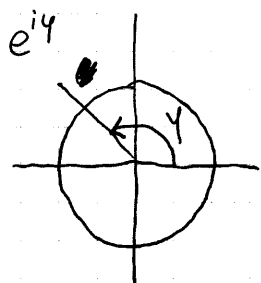
Če je $y=0$, dobimo

$$e^x = e^x (A + i(-B)) \rightarrow A=1, B=0$$

$$\text{Sledi } e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Velja $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, pomeni, da je

$$|e^{iy}| = \cos^2 y + \sin^2 y = 1$$



Sledi, da je $e^{iy} = e^{i(y+2\pi k)}$

Torej fja e^z ni injektivna.

Trigonometrične funkcije so definirane kot

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Veljajo enake zveze, kot pri realnih funkcijah.

Hiperbolične funkcije

$$\sinh = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Logaritemske funkcije (pozor: e^z ni injektivna)

$$\text{Naj bo } w = \log z$$

$$e^w = z$$

$$w = u + iv$$

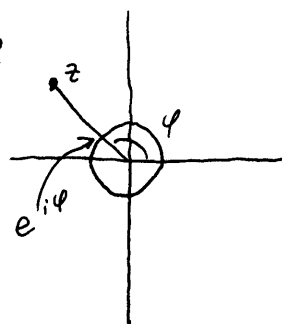
$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

$$\arg(z) = \varphi$$

$$\text{Sledi } e^{u+iv} = r e^{i\varphi}$$

$$= e^u \cdot e^{iv} \rightarrow \begin{matrix} e^u = r \\ e^{iv} = e^{i\varphi} \end{matrix}$$

↑
realno, dolžine 1



$$r = |z|$$

$$\varphi = \arg |z|$$

$$\text{Potem pa je } u = \log r = \log |z|$$

$$w = \varphi + k2\pi, \text{ ker } e^z \neq \text{injektivna}$$

Torej $\log(z) = \log|z| + i(\varphi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

log kompl.
števila (fje)

log realnega
št. (fje)

če $k=0$, potem dobimo glavno vrednost. V primeru, da je k kosinus, je $\log z$ funkcija, drugače je $\log z$

Potenca kompleksnega števila

$z, \alpha \in \mathbb{C}$

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

Primer: $i^i = e^{i \log i}$
 $= e^{i \cdot i(\pi/2 + 2k\pi)}$
 $= e^{-(\pi/2 + 2k\pi)}$

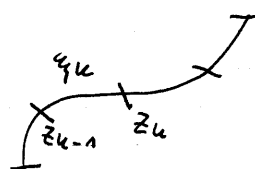
$\log i = \log|i| + i(\varphi + 2k\pi)$
 $= \log 1 + i(\pi/2 + 2k\pi)$
 $= i(\pi/2 + 2k\pi)$

glavna vrednost $i^i = e^{-\pi/2}$

Integracija v kompleksni ravnini

Naj bo C neka funkcija v kompleksni ravnini in naj bo $f: C \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija kompleksne spremenljivke.

Integral: $\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta z_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k$



Če zapišemo $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, vidimo, da je integracija v kompleksnem pravzaprav računanje krivuljnega integrala druge vrste.

Zapišemo $z = x + iy$, torej $dz = dx + i dy$.
 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

in dobimo

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + i v) (dx + i dy) = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy =$$

$$= \int_C (u, -v) d\vec{r} + i \int_C (v, u) d\vec{r}$$

$d\vec{r} = (dx, dy)$

parametriziramo krivuljo

Ta metoda računanja integrala kompleksnih funkcij je dobra za vse funkcije kompleksne spremenljivke, tudi za tiste, ki niso analitične.

Primer: $\int_C \bar{z} dz$

Za analitične funkcije obstajajo lepše metode.

Za integral kompleksne funkcije velja:

$$① \int_C f(z) dz = c_1 \int f(z) dz + c_2 \int f(z) dz$$

$$② \int_C k \cdot f(z) dz = k \int_C f(z) dz$$

$$③ \int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$$

Ocenimo absolutno vrednost integrala:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \underbrace{\left| \int_C dz \right|}_{\text{dolžina krivulje}} = M \cdot l$$

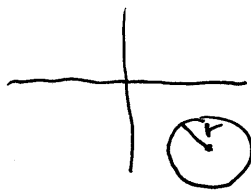
$|f(z)| < M$
naj bo f
zvezna

Izračunajmo integral

$$\int_{C_0} \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} ; C_0 \text{ krožnica s polmerom } r \text{ in središčem v } z_0$$

$$z - z_0 = r \cdot e^{i\varphi}$$

$$dz = r \cdot e^{i\varphi} \cdot i d\varphi$$



$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\varphi} \cdot i d\varphi}{(r e^{i\varphi})^{n+1}} = \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} i e^{i\varphi(-n)} d\varphi$$

$$= \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} (\cos(n\varphi) - i \sin(n\varphi)) d\varphi$$

15.12.08

če je $n=0$, dobimo

$$* \frac{2\pi i}{r^0} = 2\pi i$$

$$\Rightarrow \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{če } n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

če je $n \neq 0$

* dobimo 0, ker sin in cos periodični funkciji

Območje povezano (enostavno) če lahko sklenjeno krivuljo zvezno skrčimo v točko. Enostavno sklenjena krivulja sama sebe ne seka.

Cauchyjev IZREK:

Naj bo f analitična, f' zvezna na območju D in na robu območja, ki je (zaključena) krivulja C . Potem je integral po tej krivulji analitična in enaka 0.

$$\oint f(z) dz = 0$$

Dokaz: $\oint f(z) dz = \oint u dx - v dy + i \oint v dx + u dy =$ Greenova Formula

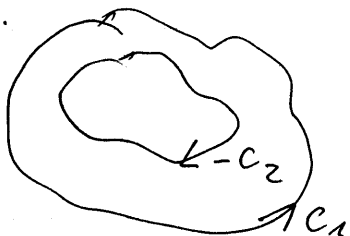
$$= \iint_D (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_D (v_x + u_y) dx dy =$$

$$= \iint_D (u_y - u_y) dx dy + \iint_D (v_y - v_y) dx dy =$$

$$= \underline{0}$$

f analitična,
torej velja
C-R
 $u_x = v_y$
 $u_y = -v_x$

Dalje.

Izrek: Naj bo f analitična f' na območju D in naj bosta krivulji C_1 in C_2 zaključeni na tem območju in naj se ne sekata.

$$\text{Potem je } \oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

Dokaz: $\oint f(z) dz = 0$ (po pr. Rezeka)
 $C = C_1 \cup C_2$
 $\parallel$

$$C_1 \oint f(z) dz - C_2 \oint f(z) dz$$

Opomba: Torej lahko za večino primerov za krivuljo po kateri integriramo brez škode za splošnost, vzamemo krožnico.

Izrek: Naj bo f analitična fja na območju D . Potem je integral fje f po krivulji na tem območju neodvisen od poti.

Dokaz: Enak kot pri neodvisnosti poti pri krivuljnih integralih.

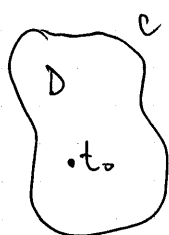
Izrek: (Cauchyjeva integralna formula):

Naj bo f analitična fja na območju D in naj bo zahtujena krivulja C rob območja D . Naj bo $z_0 \in D \setminus C$.

Potem velja:

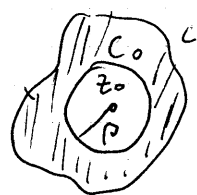
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

ni enako nič



Opomba: da poznamo vrednosti funkcije f znotraj območja D torej zadošča, da poznamo vrednosti funkcije f na sklenjeni krivulji, ki je rob tega območja.

Dokaz: Potem velja po izreku



$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

glejamo rajši ta integral, ker C lepša

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_0} \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz =$$

$$= \oint_{C_0} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

$$= \cancel{\oint_{C_0} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz} f(z_0) \oint_{C_0} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

$\hookrightarrow$ Pokazati moramo, da ta del $= 0$.

Ocenimo:

$$\left| \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \oint_C \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} d|z|$$

ker f analitična in zvezna
je za majhen ρ tudi
 $f(z) - f(z_0) < \varepsilon$

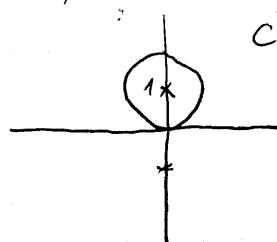
$$\leq \oint_C \frac{\varepsilon}{\rho} d|z| = \frac{\varepsilon}{\rho} \oint_C dS = \frac{\varepsilon}{\rho} \overset{\text{obseg krožnice}}{2\pi\rho} = 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

Naš integral je bil neodvisen od tega, kakšno krožnico vzamemo. Torej lahko polmer poljubno zmanjšamo in v limiti dobimo, da je drugi integral vsote enak nič.

Primer: $\oint_C \frac{e^z}{z^2 + 1} dz$

središče i , polmer 1

$$\begin{aligned} z^2 + 1 &= 0 \\ z^2 &= -1 \\ z &= \pm i \end{aligned}$$



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$= \oint_C \frac{e^z}{z - i} dz = 2\pi i \frac{e^i}{i + i} = \pi (\cos 1 + i \sin 1)$$

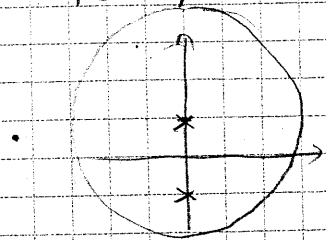
analitična
 $|z - i| = 1$

znotraj

Cauchy
int. f.

$$Pr: \oint_C \frac{e^z}{z^2+1} dz$$

$$C: |z-i|=3$$



Ker sta obe singularnosti notraj območja, ulomka $\frac{1}{z^2+1}$ razbijemo na parc. ulomke

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{Az+iA+Bz-iB}{z^2+1}$$

$$A+B=0 \Rightarrow A=-B$$

$$iA-iB=1 \quad 1=i(-B)-iB$$

$$1=-2iB$$

$$B = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$$

$$A = -\frac{i}{2}$$

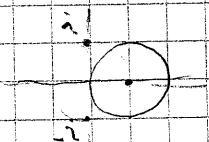
$$\oint_C e^z \left(\frac{-\frac{i}{2}}{z-i} + \frac{\frac{i}{2}}{z+i} \right) dz = -\frac{i}{2} \oint_C \frac{e^z}{z-i} dz + \frac{i}{2} \oint_C \frac{e^z}{z+i} dz =$$

$$= -\frac{i}{2} \cdot 2\pi i \cdot e^i + \frac{i}{2} \cdot 2\pi i \cdot e^{-i} = e^i \pi - e^{-i} \pi$$

$$Pr: \oint \frac{e^z}{z^2+1} dz = 0$$

Ker je analitična na celim območju

$$|z-1|=1$$



Cauchyeva int. formula nam pove vrednost fje v notranjosti integrala po krivulji

V nadaljevanju bomo C_{Γ} poplošili tudi na odseke in hij

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right) \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right) \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz
 \end{aligned}$$

Padaļina šī kārta ieraksti kurti ar viēji atbardo m dolo mazi. vīk:

Ierak (poplošona Cauchyera mī. formula): Naj bo f analitiska ma omācju D m naj bo kuru. C rob D . Naj bo $z_0 \in D \cap C$. Potem velā

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Op.: Ē je f analitiska ma omācju D , je potem ma tem omācju automātisko rekursīvo atbaidju

$$\text{Pm: } \oint_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z-i)^3} dz \Rightarrow C: |z-i|=1$$

$z=i$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = \frac{2\pi i}{2} 4e^{2i} = \\
 &= 4\pi i e^{2i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f &= e^{2z} \\
 f' &= 2e^{2z} \\
 f'' &= 4e^{2z}
 \end{aligned}$$

18.12.08

Neskončne funkcijske vrste

Tudi za funkcije kompleksne spremenljivke lahko definiramo na enak način kot za realne fje neskončne funkcijske vrste.

Torej funkcijska vrsta je

$f_1(z) + f_2(z) + \dots$ in ta vrsta je konvergentna za tista kompleksna števila z , za katere konvergira ustrezna številsko vrsta.

Izrek: Funkcijska vrsta funkcij kompleksne spremenljivke konvergira natančno tedaj, ko konvergirata ustrezna realni in imaginarni deli funkcij.

Primer: Vsota $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i + n(3i-1)}{n^2} z^n \right)$ je ~~vrsta~~ funkcijska vrsta.

Ali konvergira? Vrsta konvergira.



Območje konvergence bi radi določili na podoben način kot pri realnih vrstah.

Tudi za fje kompleksne spremenljivke velja kvocienčni kriterij:

$$\text{Izračunamo } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = r(z) \quad \left(\begin{array}{l} \text{konvergenčni} \\ \text{polmer} \end{array} \right)$$

Če je $r(z) < 1$, potem za tista kompleksna števila z vrsta konvergira, če je $r(z) > 1$, divergira, če je $r(z) = 1$, ne vemo.

Primer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z+i}{2^n \cdot n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{z+i}{2^{n+1} \cdot (n+1)}}{\frac{z+i}{2^n \cdot n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n \cdot n}{2^{n+1} (n+1)} \right| =$$

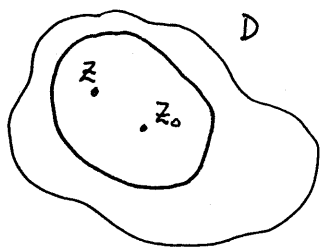
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Ker je $r(z) = 1/2 < 1$, neodvisen od z , vrsta konvergira za vsak $z \in \mathbb{C}$.

Taylorjeva vrsta fje kompleksne spremenljivke

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$


Naj bo f analitična fja na območju D



Potem velja po Cauchyjevi integralni formuli

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} =$$

$$= \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = *$$

$z < 1$
 $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$
 geom. vrsta

ker z znotraj kroga, w na krožnici, $|e|$

$$\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| < 1$$

$$* \frac{1}{w-z_0} \left(1 + \frac{z-z_0}{w-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^2 + \dots \right)$$

To vstavimo v



in dobimo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_C \frac{f(w)}{w-z_0} dw + \oint_C \frac{f(w)}{w-z_0} dw (z-z_0) + \oint_C \frac{f(w)}{w-z_0} dw (z-z_0)^2 + \dots \right]$$



$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$



$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

 po Cauchyjevi integralni formuli

$$= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z-z_0)^2 + \dots$$

Izpeljali smo Taylorjevo vrsto za fjo kompleksne spremenljivke

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Funkcija mora biti analitična.

Opomba: Ta izpeljava ni esencialnega pomena.

Sledi: $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

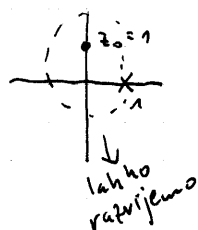
$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

$$|z| < 1$$

Primer: $f(z) = \frac{1}{1-z}$ Razvijmo v Taylorjevo vrsto okrog $z_0 = i$



[1] po def.

$$f(i) = 1/(1-i)$$

$$f'(z) = -1(1-z)^{-2}(-1)$$

$$f''(z) = -2(1-z)^{-3}(-1)$$

$$f'''(z) = 2 \cdot (-3)(1-z)^{-4}(-1)$$

$$\left. \begin{aligned} f'(i) &= 1/(1-i)^2 \\ f''(i) &= 2/(1-i)^3 \\ f'''(i) &= 2 \cdot 3/(1-i)^4 \end{aligned} \right\}$$

$$f^{(n)} = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}$$

22.12.08

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(1-i)^{n+1}} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

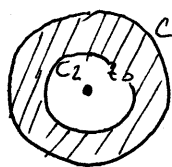
[2] razvoj okrog neke druge točke
 $w = z - i \rightarrow z = w + i$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-(w+i)} && \text{to bi radi razvili} \\ &= \frac{1}{1-i-w} && \text{okrog točke 0} \\ &= \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-\frac{w}{1-i}} && \text{znamo pa } \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2, |x|<1 \\ &= \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-\frac{w}{1-i}} = \frac{1}{1-i} \left(1 + \frac{w}{1-i} + \frac{w^2}{(1-i)^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{1-i} \left(1 + \frac{z-i}{1-i} + \frac{(z-i)^2}{(1-i)^2} + \dots \right) && \text{To pa je isto kot prej.} \end{aligned}$$

Lourentova vrsta

Včasih želimo razviti vrsto tudi okrog katšne točke, v kateri funkcija $f(z)$ ni regularna - ima singularnost.

Izreki (Lourentova vrsta) Naj bo f analitična na dveh koncentričnih krožnicah C_1 in C_2 s središčem v z_0 in naj bo analitična na kolobarju med krožnicama.



Potem lahko f razvijemo v Lourentovo vrsto $f(z) = *$

$$* = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$$

regularni del

glavni del

$$= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + \frac{c_1}{(z-z_0)} + \frac{c_2}{(z-z_0)^2} + \dots$$

pri čemer velja:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

(glej Taylorja kompleksne fce)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint f(w) (w-z_0)^{n-1} dw$$

Laurentova vrsta lahko zapišemo tudi v obliki

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \text{pri čemer so } a_{-1}=c_1, a_{-2}=c_2, \text{ itn.}$$

Torej je

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Vse to je itek.

Koeficient c_n imenujemo residuum funkcije f pri razvoju okrog točke z_0 .

Dokaz: Ideja dokaza

$$f(z) = \oint_{C_1} \frac{F(w)}{w-z_0} dw - \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

↑ regularni del

Ta ideja dokaza ni esencekega pomena.

↓ podobno, kot pri T vrsti

$$\frac{1}{w-z_0} = \frac{1}{w-z_0-z-z_0} = -\frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} =$$

$$= \frac{1}{z-z_0} \left(1 + \frac{w-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^2 + \dots \right)$$

To glavni del - tu se pojavijo potencami.

izrazi $z-z_0$ z negativnimi

Primer: $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$

$$e^w = 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots$$

$$f(z) = z^2 \left(1 + \frac{\frac{1}{z}}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{3!} + \dots \right) =$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{z \cdot 3!} + \frac{1}{z^2 \cdot 4!} + \dots$$

~~glavni del~~
regularni del

glavni del

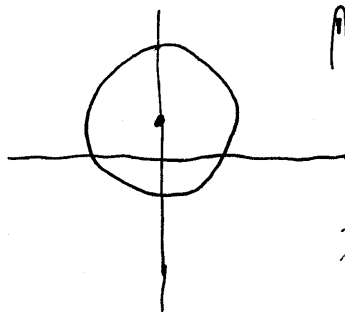
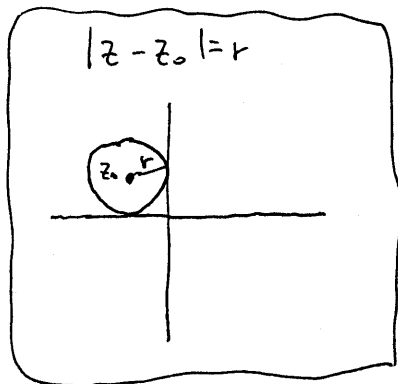
residuum $f(z) = \frac{1}{6}$
 $z=0$

glavni del ima neskončno nenizelnih členov.

Primer: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ razvijmo okrog $z=i$

~~razvijmo okrog $z=i$~~
 $\xrightarrow{\quad} z^2 - i^2$

$$= \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-i)}$$



$$(z-i)^n \quad \{(z-z_0)^n\}$$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i+2i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}} = \frac{1}{z-i} \left(1 - \frac{2i}{z-i} + \left(\frac{2i}{z-i}\right)^2 - \dots \right)$$

$$= \frac{1}{z-i} \left(1 + \left(-\frac{2i}{z-i}\right) + \left(-\frac{2i}{z-i}\right)^2 + \dots \right)$$

$$\left| \frac{2i}{z-i} \right| < 1$$

$$= \frac{1}{2i} \left(1 + \left(-\frac{1}{z-i}\right) + \left(-\frac{1}{z-i}\right)^2 + \dots \right)$$

$$\left| \frac{z-i}{2i} \right| < 1$$

Torej $f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z-i} \left(1 - \frac{2i}{z-i} + \frac{4(-1)}{(z-i)^2} + \dots \right)$
 pri $2 < |z-i|$

in $f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{2i}{z-i} - \frac{4}{(z-i)^2} + \dots \right)$ pri $2 > |z-i|$

Residuum v drugem primeru: $\frac{1}{2i}$

Teorija residuov

Vemo, da je residuum $C_1 = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$

Pri razvoju funkcije f v Laurentovo vrsto okrog točke z_0 ravno koeficient pri potenci $\frac{1}{z-z_0}$.

Potem pa je

$$C_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz \quad \text{oziroma}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)(z-z_0)^{n-1} dz$$

$$\oint f(z) dz = 2\pi i C_1 \quad \text{"pri pogojih o analitičnosti na koncentričnih krogih"}$$

Denimo da ima f v točki z_0 singularnost. Potem ločimo tri vrste singularnosti.

- ① odpravljiva singularnost - pri razvoju fje f okrog točke z_0 v Laurentovo vrsto dobimo samo regularni del

$$\frac{z^2+1}{z-1} - \text{glej prej, kako se krajša}$$

- ② pol n-tega reda. Pri glavnem delu dobimo samo končno število nen ničelnih ~~polov~~ členov, največja potenca je

$$\frac{1}{(z-z_0)^n}, \quad \text{npr.: } \left(f(z) = z-1 + \frac{1}{(z-1)^2} \right) \text{ pol 2. reda}$$

- ③ Bistvena singularnost

Pri razvoju funkcije v Laurentovo vrsto dobimo pri glavnem delu neskončno nen ničelnih členov,

$$\text{npr.: } e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Primer: $f(z) = z^{-4} \sin(z)$, $z_0 = 0$

Zanima nas residuum

$\sin z$ vemo: $z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) =$$
$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z} \frac{1}{3!} + \frac{z}{5!} - \dots$$

V $z_0 = 0$ je pol tretjega reda.
↑
residuum $-1/6$

Ponovimo:

Naj bo f analitična na nekem območju D in naj bo C sklenjena krivulja na tem območju. Potem

$$\oint_C f(z) dz = 0$$



Denimo, da ima f na območju D v točki a singularnost



Potem $\oint_C f(z) dz$ ni nujno enak 0.

V tem primeru lahko f razvijemo v Laurentovo vrsto.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{(z-a)^n}$$

$$\text{Pri čemer: } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

$$\text{Podobno } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(w) (w-a)^{n-1} dw$$

Koeficient c_1 imenujemo residuum.
In velja

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(w) dw$$

$$\text{Oziroma } \oint_C f(w) dw = 2\pi i c_1$$

Tu pa vidimo, da ta integral ni nič.

S pomočjo residuov bomo računali integrale, zato si pogledjmo, kako residue sploh izračunamo.

- ① Naj bo v točki a singularnost, ki je pol prvega reda - enostarna singularnost. torej:

$$f(z) = \frac{c_1}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \quad / \cdot (z-a)$$

$$f(z)(z-a) = c_1 + a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + a_2(z-a)^3 + \dots \quad / \lim_{z \rightarrow a}$$

Dobimo, da je

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$$

Primeri: $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+9} = *$ $z = -3i$

Zanima nas residuum $\text{Res } f(z)$
 $z_0 = -3i$

$$* = \frac{e^{iz}}{(z-3i)(z+3i)} \quad \leftarrow \quad z^2+9 = z^2-(-9) = z^2-(3i)^2 = (z-3i)(z+3i)$$

$-3i$ pol prvega reda

$3i$ pol prvega reda

$$\text{Res } f(z)_{z_0=-3i} = \lim_{z \rightarrow -3i} (z - (-3i)) \frac{e^{iz}}{z^2+9} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow -3i} (z+3i) \frac{e^{iz}}{(z-3i)(z+3i)} =$$

$$= \frac{e^{i(-3i)}}{-3i-3i} = \boxed{\frac{e^3}{-6i}} = \boxed{\frac{ie^3}{6}}$$

- ② Naj bo v točki a singularnost, ki je pol m -tega reda, torej

$$f(z) = \frac{c_m}{(z-a)^m} + \frac{c_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_1}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + \dots$$

$$(z-a)^m f(z) = c_m + c_{m-1}(z-a) + \dots + c_1(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + a_1(z-a)^{m+1} + \dots$$

$/ (z-a)^m$

$/ \frac{d}{dz}$

$$\frac{d}{dz} \left((z-a)^m f(z) \right) = C_{m-1} + \dots + (m-1)c_1(z-a)^{m-2} + \\ + m a_0 (z-a)^{m-1} + (m+1)a_1(z-a)^m + \dots$$

torej

$$\frac{d^{m-1}}{(dz)^{m-1}} \left((z-a)^m f(z) \right) = (m-1)! C_1 + m(m-1)\dots 1 a_0 (z-a) + \dots /$$

$\lim_{z \rightarrow a}$

Dobimo

$$C_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{(dz)^{m-1}} \left((z-a)^m f(z) \right)$$

Primer:

$$f(z) = \frac{2z}{(z+2)(z-i)^2} \quad \text{pol drugega reda} \rightarrow m=2$$

$$\begin{aligned} \text{Res } f(z)_{z=i} &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \frac{2z}{(z+2)(z-i)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{2(z+i) - 2z \cdot 1}{(z+2)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{4}{(z+2)^2} = \\ &= \frac{4}{(i+2)^2} \end{aligned}$$

③ Denimo, da je v točki a bistvena singularnost. Torej

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots$$

glavni del ima
 ∞ členov.

Residuuma ne moremo izračunati s pomočjo limite, izračunamo ga s pomočjo razvoja v Laurentovo vrsto. Residuum je člen pri $\frac{1}{(z-a)^1}$.

Primer: $z^2 \cdot e^{1/z} = f(z)$

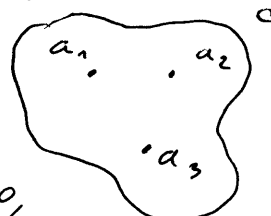
$$\begin{aligned} & z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots \right) = \\ & = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} + \dots \right) \\ & = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{24z^2} + \dots \end{aligned}$$

Torej $\text{Res}_{z=0} (z^2 e^{1/z}) = 1/6$

Izrek (o residuih)

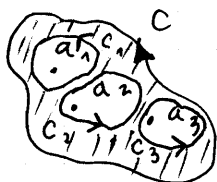
Bodi f analitična fja na območju D , razen v končno mnogo točkah (singularnih) znotraj območja D . Potem je

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}_{z=a_i} f(z)$$



Integral torej izračunamo tako, da izračunamo residue znotraj sklenjene krivulje, po kateri integriramo.

Dokaz: ideja dokaza



$$\oint_C f(z) dz = 0$$

$$C \cup -C_1 \cup -C_2 \cup -C_3$$

$$\begin{aligned} & \oint_C f(z) dz + \oint_{-C_1} f(z) dz + \oint_{-C_2} f(z) dz + \oint_{-C_3} f(z) dz = \\ & = \oint_C f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \oint_{C_2} f(z) dz - \oint_{C_3} f(z) dz \end{aligned}$$

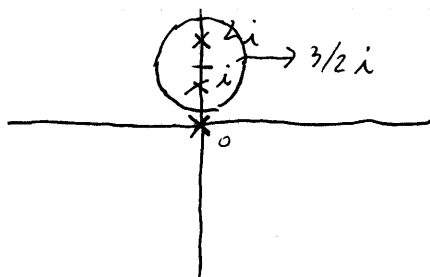
sledi:

$$\oint_C f(z) dz = \underbrace{\oint_{C_1} f(z) dz}_{\text{Res}_{a_1} f(z)} + \underbrace{\oint_{C_2} f(z) dz}_{\text{Res}_{a_2} f(z)} + \underbrace{\oint_{C_3} f(z) dz}_{\text{Res}_{a_3} f(z)}$$

Primer: $f(z) = \frac{e^{1/z}}{(z-i)^2(z-2)}$

C: $|z - \frac{3}{2}i| = 1$

x: residui



$|z - z_0| = r$

$r = z_0$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \left(\text{Res}_{z_0=i} f(z) + \text{Res}_{z_0=2i} f(z) \right) = *$$

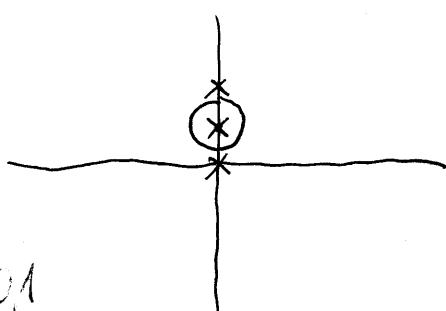
$$\begin{aligned} \text{Res}_{z_0=2i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\cancel{z-2i} \right) \frac{e^{1/z}}{(z-i)^2(z-\cancel{2i})} = \frac{e^{1/2i}}{(2i-i)^2} = \frac{e^{-i/2}}{-1} = \\ &= -e^{-i/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z_0=i} f(z) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\cancel{z-i} \frac{e^{1/z}}{(\cancel{z-i})^2(z-2i)} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{1/z} \left(-\frac{1}{z^2} \right) (z-2i) - e^{1/z} \cdot 1}{(z-2i)^2} = \\ &= \frac{e^{1/i} \left(-\frac{1}{i^2} \right) (i-2i) - e^{1/i}}{(i-2i)^2} = \\ &= \frac{e^{-i} (-i) \cdot e^{-i}}{-1} = e^{-i} (i+1) \end{aligned}$$

$$* = 2\pi i (e^{-i/2} + e^{-i} (i+1))$$

Primer: $f(z) = \frac{e^{1/z}}{(z-i)^2(z-2)}$

C: $|z-i| = \frac{1}{2}$
glej tudi prejšnji primer.



$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z_0=i} f(z) =$$

$$= 2\pi i (e^{-i} (i+1))$$

101

Opomba: Integrale funkcij, ki niso analitične ne moremo računati, s pomočjo izreka o residuih!

Npr.: $\oint \frac{\bar{z}}{z-1} dz$ računamo kot dva krivuljna integrala druge vrste.

Računanje realnih integralov s pomočjo integracije v kompleksnem

(I) $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$, kjer R racionalna fja

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\cos \varphi \sin \varphi} d\varphi$$

Nujno take meje!

V tem primeru uvedemo novo spremenljivko

$$z = e^{i\varphi}$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$= \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$= \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

$$dz = e^{i\varphi} \cdot i d\varphi = z \cdot i d\varphi \rightarrow d\varphi = \frac{dz}{i z}$$

Integriramo φ od 0 do 2π , torej z potuje po krožnici s polmerom 1 (zato take meje)

V kompleksnem integriramo po sklenjeni krivulji - krožnici s polmerom 1. Torej lahko uporabimo izrek o residuih.

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ |e^{i\varphi}|^2 &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \\ |e^{i\varphi}| &= 1 \end{aligned}$$

Primer: $2\pi i \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi - 3} = \oint_C \frac{(dz/i \cdot z)}{\frac{z - \frac{1}{z}}{2i} - 3} =$

$$= \oint \frac{dz}{\frac{z^2 - 1}{2} - 3iz} = \oint \frac{2}{z^2 - 1 - 6iz} dz$$

Pogledamo singularnosti, rešimo kvadratno enačbo $z^2 - 1 - 6iz = 0$ in dobimo

$$z_1 = 3i + i2\sqrt{2} \quad z_2 = 3i - i2\sqrt{2}$$

$\text{Res } f(z) =$ ni v območju
 $z_0 = i(3 + 2\sqrt{2})$

$$\text{Res } f(z)_{z_0 = i(3 + 2\sqrt{2})} = \lim_{z \rightarrow i(3 + 2\sqrt{2})} (z - i(3 + 2\sqrt{2})) \frac{2}{z^2 - 1 - 6iz} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow i(3 + 2\sqrt{2})} \frac{2}{z - i(3 + 2\sqrt{2})}$$

Dobimo $\oint_C f(z) dz = \boxed{\frac{-\pi\sqrt{2}}{2}}$

8.1.2009

② S pomočjo integracije v kompleksnem lahko računamo tudi integrale oblike

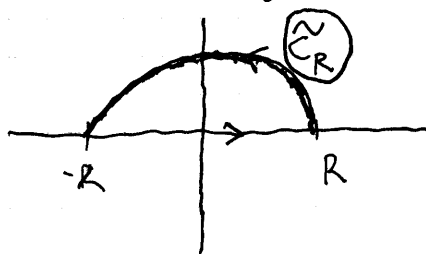
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, kjer $f(x)$ racionalna fja, katere stopnja imenovalca je vsaj ta dva večja od stopnje števca.

Primer: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^3-x^2+2} dx$

Spomnimo se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

Realni integral preoblikujemo v kompleksnega, spremenljivka $z=x$, krivulja pa je polovica krožnice in premer, ki gre proti neskončno.



Integral po krivulji

$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{znotraj krivulje}} \text{Res } f(z) = *$$

$$* = \underbrace{\int_{-R}^R f(z) dz}_{\substack{\parallel \\ \int_{-R}^R f(x) dx \\ \text{realni integral}}} + \underbrace{\int_{\tilde{C}_R} f(z) dz}_{\substack{\text{majhen} \\ R \rightarrow \infty \\ 0}}$$

Ocenimo $\left| \int_{\tilde{C}_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\tilde{C}_R} |f(z)| dz$

Če st. imenovalca vsaj za dva večja

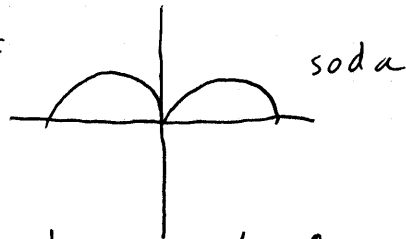
$$\approx \frac{1}{R^2}$$

$$\leq \frac{1}{R^2} \left(\int_{\tilde{C}_R} dz \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Dobimo, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z) \text{ vseh residuov na zgornji polravnini}$$

Primer: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} =$



$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2} 2\pi i \sum_{\substack{\text{res na} \\ \text{polovici} \\ \text{zgornji}}} \frac{1}{(z^2+4)} = *$$

$$z^2+4=0 \\ z = \pm 2i$$

$$\text{Res}_{z=2i} \frac{1}{(z^2+4)^2} = \text{Res}_{z=2i} \frac{1}{(z+2i)(z-2i)^2}$$

$$\text{Res}_{z=2i} \frac{1}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left(\underbrace{\frac{1}{(z^2+4)^2}}_{\parallel} (z-2i)^2 \right) = \text{drugi red}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+2i)^2} = \frac{1}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 2i} (-2)(z+2i)^{-3} =$$

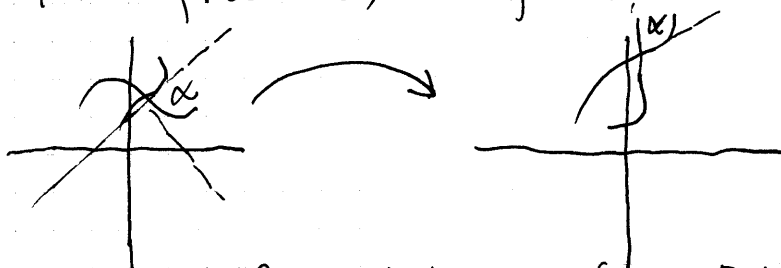
$$= (-2) \cdot (4i)^{-3} = -2 \frac{1}{(4i)^3} = \frac{-2}{64(-i)} = \frac{-2i}{64} = \frac{-i}{32}$$

$$* = \pi i \frac{(-i)}{32} = \frac{\pi}{32}$$

i-ji se morajo definitivno uvrstiti (int. realen)

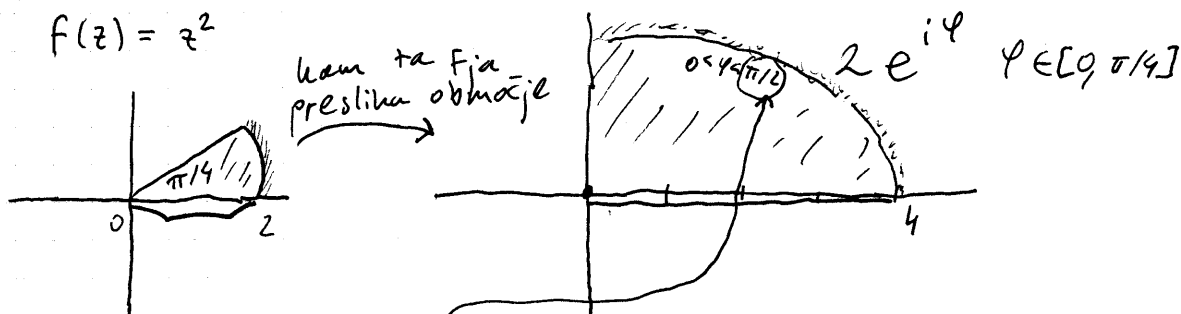
Konformne preslikave

Def: Naj bo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ preslikava, ki ohranja kote in orientacijo.
Potem pravimo, da je f konformna preslikava.



Izrek: Naj bo f analitična fja, Potem je f konformna preslikava, razen v točkah, kjer je $f'(z) = 0$. Dokaz opustimo.

Primer: $f(z) = z^2$

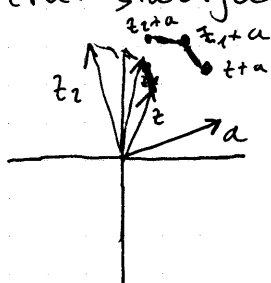


$$f(2e^{i\varphi}) = (2e^{i\varphi})^2 = 4e^{2i\varphi}$$

lomljena linearna transformacija ali mebiusova preslikava

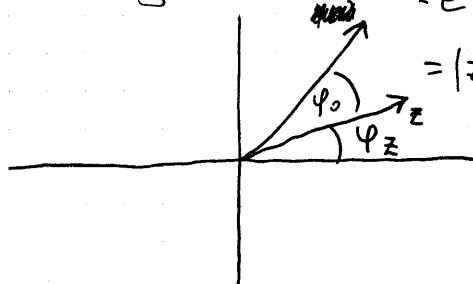
Oglejmo si naslednje preslikave:

1. translacija: $f(z) = z + a$ za nek fiksen $a \in \mathbb{C}$



Vsako kompleksno število prestavi (translatira) za a .

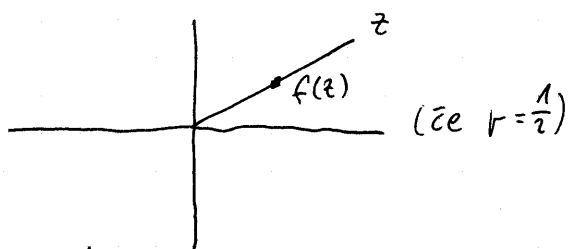
2. Rotacija: $f(z) = e^{i\varphi} \cdot z = e^{i\varphi} |z| \cdot e^{i\varphi_z} = |z| e^{i(\varphi + \varphi_z)}$ $\varphi \in \mathbb{R}$



Vsak z zarotira za φ_0 .

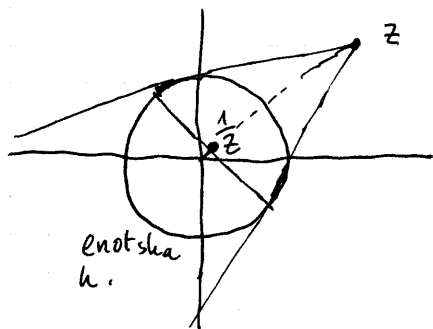
3. Skrčitev ali razteg

$$f(z) = r \cdot z = r \cdot |z| e^{i\varphi_z} \quad r \in \mathbb{R}$$



f vsako kompleksno število raztegne ali skrči za faktor r (če r negativen, spremeni smer vektorja)

4. $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ Inverzija



5. kompozitum vseh teh štirih preslikav je preslikava oblike

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{in jo imenujemo lomljena}$$

linearna transformacija ali Möbiusova preslikava.

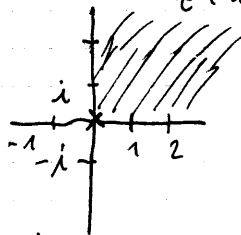
$$\{a, b, c, d\} \in \mathbb{C}$$

Izrek: Lomljena linearna transformacija preslika množico premic in krožnic ~~na~~ ~~pre~~ v množico premic in krožnic.

Torej se premica lahko preslika v premico ali krožnico in krožnica v premico ali krožnico.

Opomba: Na premico lahko gledamo kot na krožnico, ki se spne v točki neskončno.

Primer: $f(z) = \frac{z-i}{z+1}$

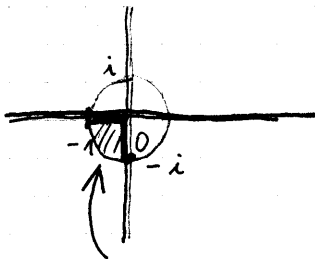


ham se preslika območje.
Torej, ham se preslikava
območja.

Rabimo tri točke za vsako premico ali krožnico.

$$f(0) = \frac{0-i}{0+i} = -1$$

$$f(i) = \frac{i-i}{i+i} = 0$$



$$f(-i) = \infty$$

$$f(1) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$f(-1) = \frac{-1-i}{-1+i} = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

$$f(1-i) = \frac{1-i}{1-i+i} = 1-2i$$