60 10 25 18 12

473 495

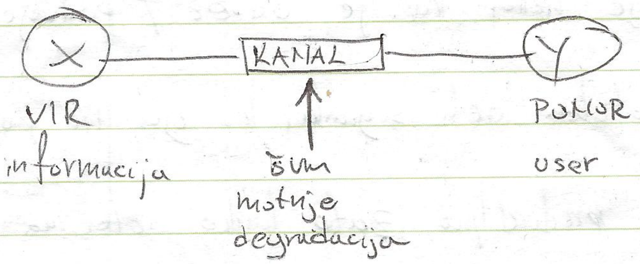
115

Teorija informacij / izvorno kodiranje

lev.fe.uni-lj.si

2 kolokvija : max 40, min 10
4x kratki test : vsak 5 točk
DNaloge 20 točk

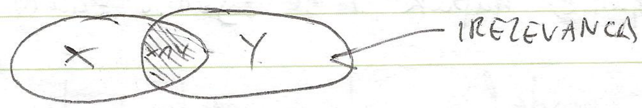
## Osnovni model za prenos informacije:




X - množica možnih sporočil ali dogodkov, ki jih pozna vir
Y - — // — , ki jih pozna uporabnik

X,Y sta končni ali števni množici, množici sta diskretni
ima končno št. znakov — razlikujemo eno od drugega

Presečna množica sporočil je množica ki jo poznata vir in user
$X \cap Y$




Informiranje poteka zgolj v presečni množici, zunaj so sporočila nepomembna

User mora v naprej poznati namen sporočila vira.
Informiranje je naključni dogodek, sporočila pa so naključni signal

Osnovna informacija → sporočilo → govorni signal

miselni proces

- interpretacija informacije
- formatiranje misli v stavke

- fizikalni pojav

Redundanca to je nekaj kar je odveč / podvojeno

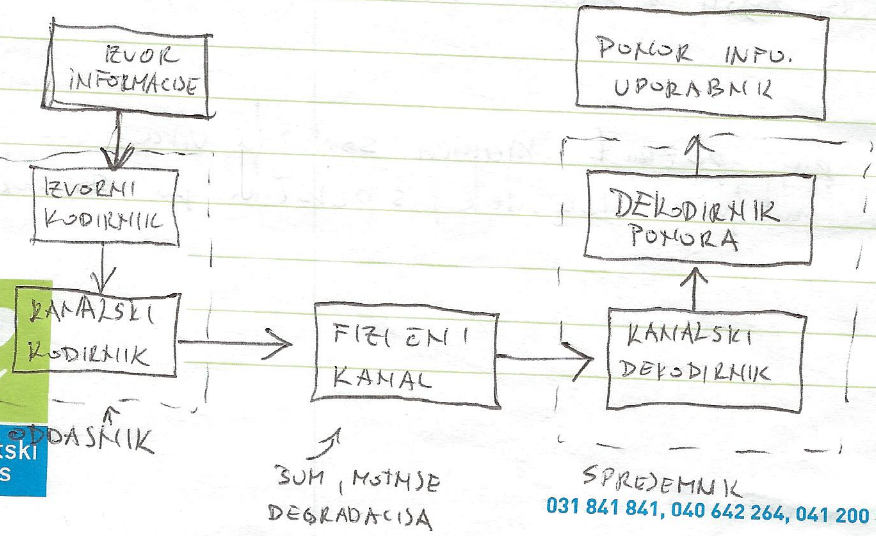
To je nek nepotreben del signala, ki ga ni potrebno prenašat.
To je nekaj kar je predvidljivo, zato lahko izločimo.

Redundanca izvora: korelacija med sosednjimi vzorci
Podobnost med sosednjimi slikami v TV signalu

Kodirna redundanca: nastopa pri kodiranju simbolov sporočila z večjim številom bitov kot je to potrebno

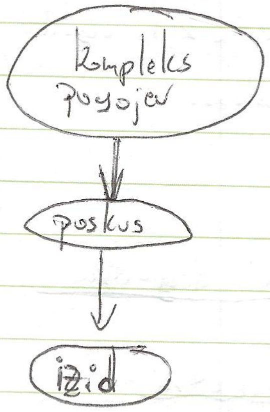
Zaščitna redundanca: del sporočila, ki omogoča odkrivanje in odpravljanje napak, ki se zgodijo zaradi motnj (parriteta)

Telekomunikacijski model: velja za analog in dig.



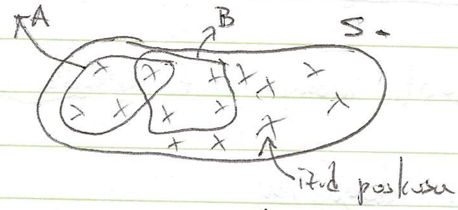
# 1. Verjetnost in naključne spremenljivke!

## 1.1. Poskusi in dogodki:




Izid je element vzorčnega prostora

Ločimo enostavne in sestavljene dogodke
elementarni




S .. množica vseh možnih izidov – elementarnih dogodkov
Vzorčni prostor je diskreten če je št. izidov končno, ali pa tudi neskončno pa da je števno. V ostalih primerih je zvezen

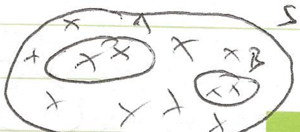
Dogodek (A,B) je podmnožica izidov

## 1.2. Aksiomi verjetnosti

$P(A)$

Vrjetnost Dogodek

1. $0 \le P(A) \le 1$ je nenegativno št. je št. med 0 in 1
2. $P(S)=1$ gotovi dogodek, vrjetnost takega je 1
   $P(\bar{S}) = P(N) = 0$ N.. nemogoči dogodek
3. Za nezdružljiva dogodka A in B, ki sta v S velja:
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $A \cap B = N$



## 1.3. Določanje verjetnosti

### 1.3.1. Relativna frekvenca - statistično določanje

Rel. frekvenca $f(A)$ je število $\frac{n_A}{n}$ ($n_A$ → št. izidov, ki so ugodni za A; $n$ → št. poskusov)

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A) = \lim_{n_A \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

### 1.3.2 Klasično določanje verjetnosti sestavljenega dogodka

Vsi elementarni dogodki morajo biti enako verjetni

$L$ - št. elementarnih dogodkov
$L_A$ - št. elementarnih dogodkov, ki jih dogodek A vsebuje

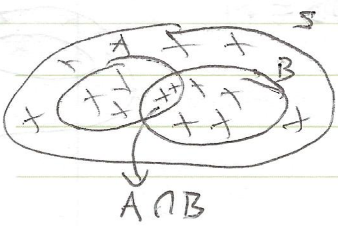
$$P(A) = \frac{L_A}{L}$$

Zgled: tarok karte
Iz kupa kart, kakšna je verjetnost da je srce
$L = 54$ (22 tarokov + 4·8 barv)
$L_A = 8$
$$P(A) = \frac{8}{54} = \frac{4}{27} = 0{,}148$$

## 1.4. Pogojna verjetnost

To je da se verjetnost dog. B zgodi ob pogoju da se zgodi A

$P(B/A)$
$P(B)$ in $P(A)$ sta vnaprejšnji verjetnosti




$$P(A \cap B) = \frac{L_{A \cap B}}{L} = \frac{L_{A \cap B}}{L_A} \cdot \frac{L_A}{L}$$
$$= P(B/A) \cdot P(A)$$

Iz kompleta kart izvlečemo kralja → A, ~~kakšna je da je~~ dogodek B → srce

$P(A) = \frac{L_A}{L} = \frac{4}{54}$ $\qquad$ $P(A/B) = \frac{L_{A\cap B}}{L_B} = \frac{1}{8}$

$P(B) = \frac{L_B}{L} = \frac{8}{54}$ $\qquad$ $P(A\cap B) = \frac{L_{A\cap B}}{L} = \frac{L_{A\cap B}}{L_B} \cdot \frac{L_B}{L} = P(A/B)\,P(B)$

$$= \frac{L_{A\cap B}}{L_A} \cdot \frac{L_A}{L} = P(B/A) \cdot P(A)$$

~~2 dogodka ki sta izključujoča sta~~

Neodvisnost dogodkov:

A in B sta neodvisna, tedaj velja:

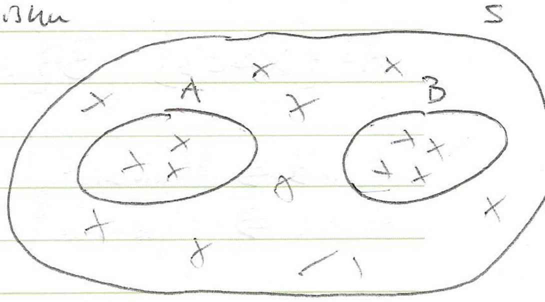
$$P(A\cap B) = P(A/B)\cdot P(B) = P(A)\cdot P(B)$$

## Neodvisni in odvisni dogodki:

če velja $P(B/A) = P(B)$ sta neodvisna

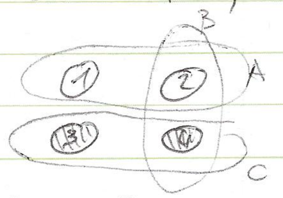
$P(A/B) = P(A)$ isto

$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$




## Zgled:

2 bele 1,2 , 2 črni 3,4




$A: \{b_1, b_2\}$

$B: \{b_2, \check{c}_4\}$

$C: \{\check{c}_3, \check{c}_4\}$

Ali sta A in B odvisna?

A in B: $P(A) = 0.5$
$P(B) = 0.5$
$P(A \cap B) = 0.25$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

A in C:

$P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap C) = \emptyset$

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = 0$$

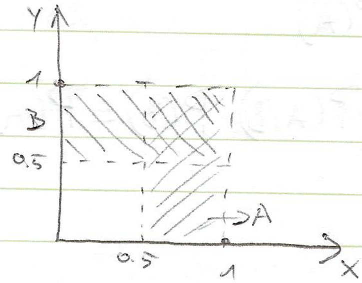
$P(A/C) \neq P(A)$ → A in C nista neodvisna!
sta odvisna
in izključujoča

Zgled 2:

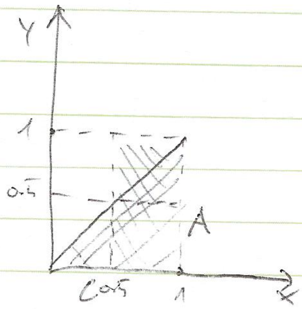
interval 0,1     naključno izberem 2 št.

$A=\{X>0.5\}$, $B=\{Y>0.5\}$, $C=\{X>Y\}$

A in B ⇒ Neodvisna?
A in C ⇒ Neodvisna?




$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/4}{1/2}=0.5=P(A)$$ sta neodvisna




$$P(C)=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

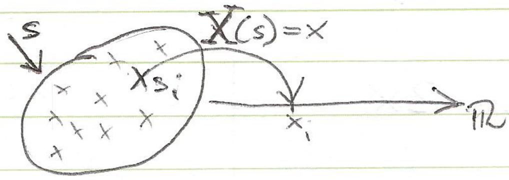
$$P(A/C)=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4}$$

$P(A/C)\neq P(A)$
sta odvisna

2.10
2/4



## 1.5 Naključne spremenljivka (random variable):




Predpis, ki elementarnemu dog. priredi vrednost na $\mathbb{R}$ osi

Zaloga vrednosti $Z_v$: če je končna ali števna je $X(s)$ diskretna
v vseh ostalih primerih pa je zvezna.
VT [°F]

### 1.5.1. Porazdelitveni zakoni

a) Diskretna spremenljivka:

$$P_X(x_i)=P(X=x_i) \rightarrow \text{krajši zapis } P_X[i]=P(x_i)$$

konkretna vrednost iz $Z_v$

$$\sum_{i=1}^{N} P_X[i]=1$$

- enakomerna porazdelitev

$$P_X[i]=p, \quad i \ldots 1,2 \ldots N$$

$$\sum_{i=1}^{N} P_X[i]=\sum_{i=1}^{N} p = N\cdot p = 1 \Rightarrow p=\frac{1}{N} \text{ (verjetnost)}$$

- binomska (Bernoullijeva) porazdelitev

zaporedno izvajanje poskusa z izidom $A$ ali $\bar{A}$ (met kovanca)

$$P(A)=p, \quad P(\bar{A})=1-p$$

naključna spremenljivka je $k$ ... število izidov $A$ v $N$ poskusih.

$$P(k)=\binom{N}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{N-k}$$

$$\binom{N}{K} = \frac{N\cdot(N-1)(N-2)\dots(N-(K-1))}{K!} = \frac{N!}{K!\cdot(N-K)!} = \binom{N}{N-K}$$

Zgled: vržemo kocko 5x, $P_6$ dobimo 3x

$N=5$, $K=3$, $p=\frac{1}{6}$

$$P(3) = \binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 5^2}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot 6^3\cdot 6^2} = \frac{2\cdot 5^3}{6^5} = \frac{250}{6^5} = 0{,}032 = 3{,}2\%$$

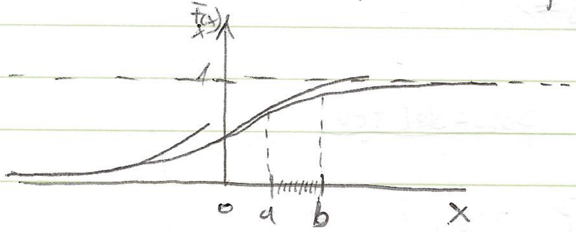
b) Zvezna naključna spremenljivka

Kumulativna (verjetnost) porazdelitev (CDF)
cumulativ distribution function

$$\underline{\underline{F_X(x) = P(X \le x)}}$$

Kumulativnost je vedno monotono naraščajoča funkcija

$F_X(-\infty)=0$
$F_X(+\infty)=1$




$P(a<x<b) = F_X(b)-F_X(a)$ interval verjetnost.

Zmanjšamo interval na $(x, x+h)$

$$P(x<X<x+h) = F_X(x+h)-F_X(x)$$

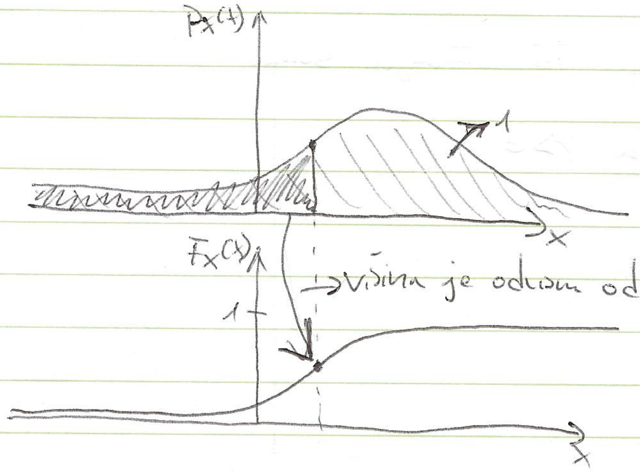
$$p_X(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F_X(x+h)-F_X(x)}{h}$$ ; gostota verjetnosti (pdf) (probability density function)

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$ je vedno nenegativna funkcija

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(\xi)\, d\xi}$$

$$P(a<x<b) = \int_a^b p_X(x)\, dx$$

Za pdf velja: $p_X(x) \geq 0$ in $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\, dx = 1$




Pogoste porazdelitve!

- enakomerna: $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a<x<b \\ 0 & , drugod \end{cases}$

- Gaussova ali normalna:

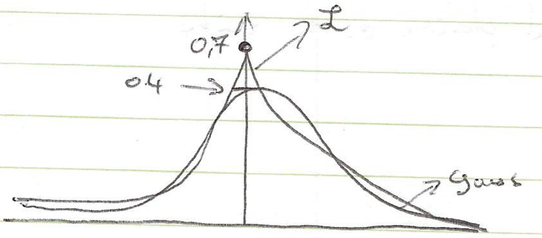
$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_X}\right)^2}$$

-simetrična exp ali Laplaceva

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2}} \cdot e^{-\sqrt{2}\frac{|x|}{\sigma_x}}$$

-Rayleighova opisovanje ozkofrekvenčnega šuma

$$p_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2} \quad \text{za } r > 0$$




## 1.5.2. Povprečne vrednosti funkcij nak. spr. – momenti

/mat. upanje/

Srednja vrednost – prvi moment

expectation

$$E(x) = \overline{X} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot P_x(x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i P_x[i] \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P_x(x)\, dx \end{cases}$$

Srednja kvadratna vrednost – drugi moment

$$E(x^2) = \overline{X^2} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 P_x[i] \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_x(x)\, dx \end{cases}$$

12.10 4/4



Varianca ali disperzija: (2 centraln. moment)

$$D(x) = \sigma_x^2 = E\left((x-\bar{x})^2\right) = \overline{(x-\bar{x})^2}$$

$\sigma_x$ standardni odklon

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \cdot P_x[i] = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2\right) \cdot P_x[i] =$$

$$= \sum_i x_i^2 P_x[i] - 2\bar{x}\sum_i x_i P_x[i] + \bar{x}^2 \underbrace{\sum_i P_x[i]}_{1}$$

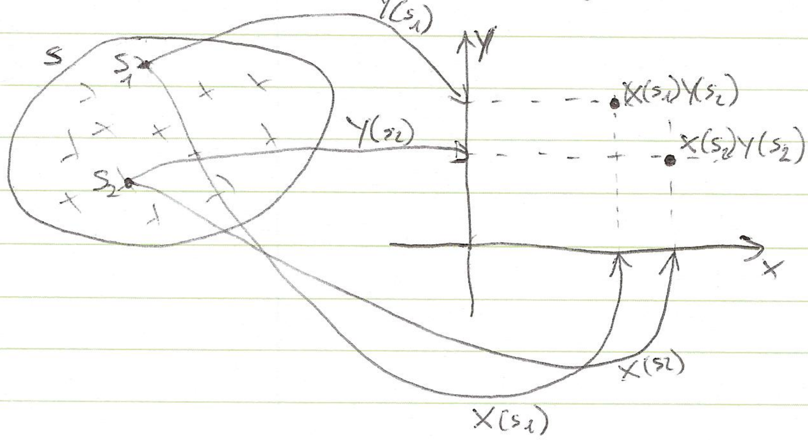
$$= \overline{x^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

isto za diskretno in zvezno nakl. spremenljivko

$\sigma_x$ .. standardna deviacija/odklon

1.5.3. Večkratne nakl. spremenljivke:




a) ~~dis~~ diskretne večkratne nakl. spr.:

Porazdelitvena funkcija je vezana verjetnost

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad X = \{x_1, x_2 \ldots x_K\} \quad Y = \{y_1, y_2 \ldots y_L\}$$

$$P_{XY}(x_k, y_l) = P_{XY}[k,l] = P\left((X=x_k) \cap (Y=y_l)\right)$$

matrika $K \times L$

Mejna ali marginalna porazdelitev – druga komponenta ni pomembna

$$P_X[k] = \sum_{l=1}^{L} P_{XY}[k,l] \quad \text{oz.} \quad P_Y[l] = \sum_{k=1}^{K} P_{XY}[k,l]$$

Za marginalno porazdelitev velja:

$$\sum_{k=1}^{K} P_X[k] = 1$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} P_{XY}[k,l] = 1$$

Matrika mora biti taka, da je vsota njenih vrednost enaka 1

18.10.2011

1/5

TIIK

Pogojna verjetnost

$$P_{Y/X}(y_\ell, x_k) \quad \text{in} \quad P_{X/Y}(x_k, y_\ell)$$

$$P_{X,Y}(x_k, y_\ell) = P_{X/Y}(x_k, y_\ell) \cdot P_Y(y_\ell) \Rightarrow P_{X/Y}(x_k, y_\ell) = \frac{P_{X,Y}(x_k, y_\ell)}{P_Y(y_\ell)}$$

$$= P_{Y/X}(y_\ell, x_k) \cdot P_X(x_k) \Rightarrow P_{Y/X}(y_\ell, x_k) = \frac{P_{Y,X}(y_\ell, x_k)}{P_X(x_k)}$$

Če sta X in Y neodvisni nakl. spremenljivki, potem velja:

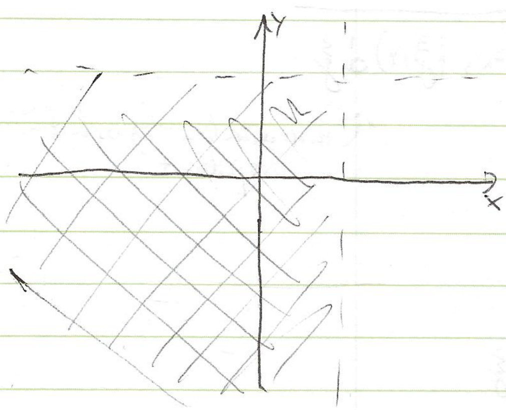
$$P_{X/Y}(x_k, y_\ell) = P_X(x_k)$$

$$\boxed{\underset{\text{vezana}}{P_{XY}(x_k, y_\ell)} = \underset{\text{pogojna}}{P_{X/Y}}(x_k, y_\ell) \cdot P_Y(y_\ell) = \underset{\text{marginalne}}{P_X(x_k) \cdot P_Y(y_\ell)}}$$

## b) Zvezna večkratna naključna spremenljivka

Vezana (hkratna) porazdelitvena funkcija
(joint (cdf) - cummulativ distribution function)

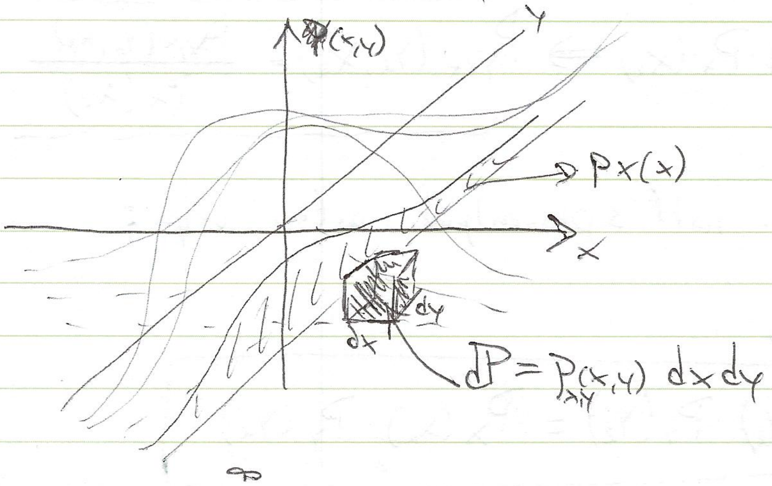
$$F_{XY}(x, y) = P((X \le x) \cap (Y \le y))$$



## Vezana gostota verjetnosti

Pove ~~kakšna~~ je verjetnost da se spremenljivka nahaja znotraj območja

$$p_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} \quad \text{joint pdf}$$




$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\,dy \quad \leftarrow y \text{ je kjerkoli}$$

↑ marginalna gostota verjetnosti

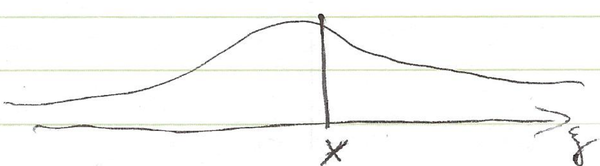
Pogojna verjetnost zvezne nakl. spr. ?

↓

Komulativna pogojna verjetnost

$$F_{X/Y}(x,y) = P(X \le x / Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} p_{XY}(\xi,y)\,d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(\xi,y)\,d\xi}$$

← marginalna gostota verjetnost




pri določenem Y

$$F_{X/Y}(x,y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} p_{XY}(\xi,y)\,d\xi}{p_Y(y)}$$

Odvajamo po X zgornjo enačbo ↓

$$p_{X|Y}(x,y) = \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$$ gost. vezane vrjetnost / marginalna vrednost

Za neodvisne spremenljivke velja:

$$p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)$$

$$p_{XY}(x,y) = p_{X|Y}(x,y) \cdot p_Y(y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

1.5.4 Povprečja pri večkratnih nakl. spremenljivkah

a) momenti posameznih spremenljivk / komponent (momenti I. redu)

Uporabljamo marginalne porazdelitve / vrjetnosti

$E(x)$, $E(x^2)$, $\sigma(x^2)$ ; $y$ je kjerkoli

$$\bar{Y} = E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\, dx\right] dy$$

b) vezana povprečja (moment: II reda)

- Korelacija

$$R_{XY} = E(XY) = \overline{XY} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{\ell=1}^{L} x_k y_\ell \cdot P_{XY}(x_k, y_\ell); \text{ za diskretno spremenljivko}$$

$$R_{XY} = \overline{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot p_{XY}(x,y)\,dx\,dy \quad ; \text{ za zvezno nakl. spr.}$$

Kovarianca

$$C_{XY} = E\left[(X-\overline{X})\cdot(Y-\overline{Y})\right] = R_{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}$$

Korelacijski koeficient: - normirana korelacija

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$ ← standardne deviacije

Če je $R_{X,Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$ sta naklj. spr. nekorelirani

Za neodvisni spremenljivki velja da je $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

$$R_{X,Y} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y\, p_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y\,p_Y(y)\,dy = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

Če sta neodvisni sta tudi nekorelirani; tedaj je $C_{X,Y} = 0$!

Obratno ni nujno! če je $C_{X,Y} = 0$ ni nujno tudi neodvisni

- Za statistično neodvisnost, nekoreliranost ni zadosten pogoj, je pa potreben.

Neodvisnost $\overset{\text{sled:}}{\Longrightarrow}$ nekoreliranost
$\not\Longleftarrow$

## 1.5.5 Centralni limitni teorem

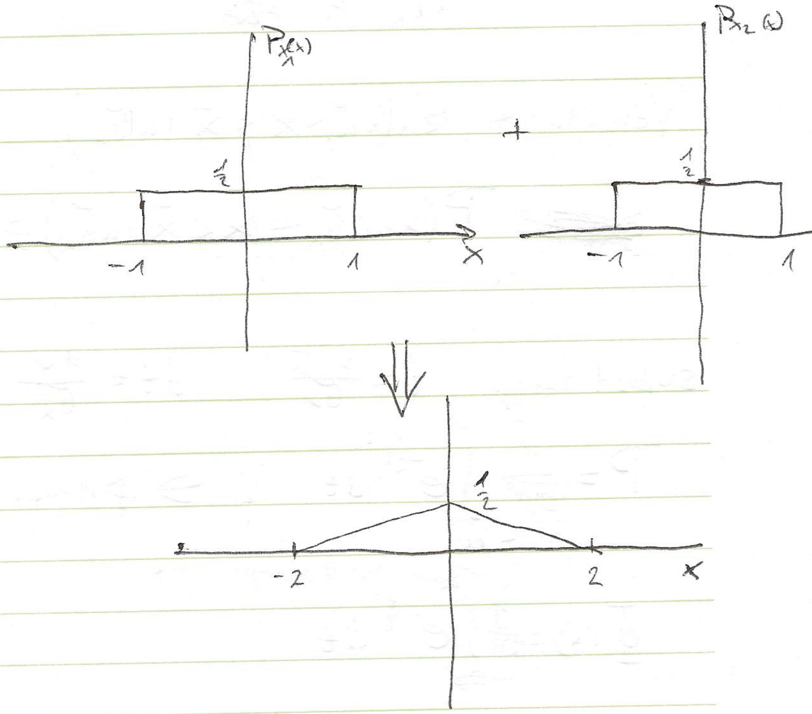
$X_i = P_{X_i}(x_i) \rightarrow$ so poljubne porazdelitve

$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ dobimo gaussovo ali normalno porazdelitev

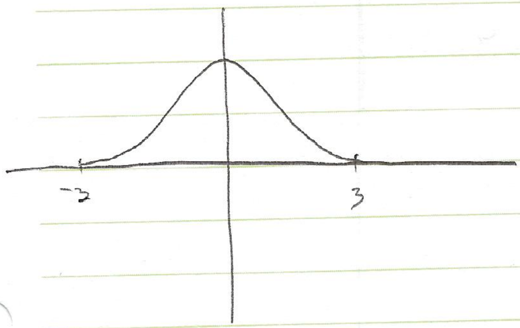
Srednja vrednost vsote je enaka vsoti srednjih vrednosti

$\overline{X} = \sum_{i=1}^{N} \overline{X_i}$

$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{x}^2$




3 enakomerne dobimo



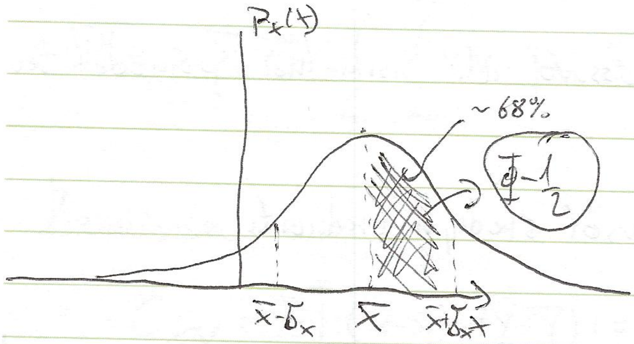

$\rightarrow \infty$ dobimo gaussovo!

## 1.5.6 Porazdelitve analognih signalov

a) Gaussova ali normalna

parametri: $\bar{x}$ in $\sigma_x$

$$P_x(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2}$$




Verjetnost za $(\bar{x}-a\sigma_x < x < \bar{x}+a\sigma_x)$

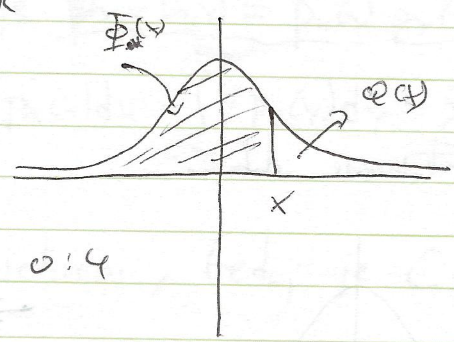
$$P(\bar{x}-a\sigma_x < x < \bar{x}+a\sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-a\sigma_x}^{\bar{x}+a\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)} dx$$

substitucija: $t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}$ $\quad dt = \frac{dx}{\sigma_x}$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \Rightarrow \text{priročnik}$$

$x \rightarrow$ zgornja meja

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$




na strani 827 je tabela za vrednosti 0:4

nadaljevanje zgleda:

simetričen interval

$$P(\bar{x}-a\sigma_x < x < \bar{x}+a\sigma_x) = 2\left(\Phi(a)-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{2\cdot\Phi(a)-1}}$$

Funkcija napake ali error function

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{a/\sqrt{2}} e^{-t^2}\cancel{\sqrt{2}}\cdot dt$$

$$\frac{x^2}{2} = t^2$$

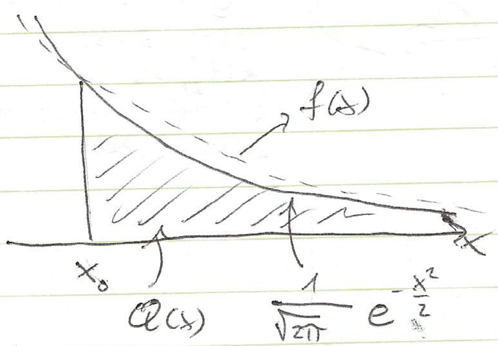
$$= \mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = t \;;\; \frac{dx}{\sqrt{2}} = dt$$

Za velike vrednosti $\Phi(x)$ ni tabelirana, zato uporabljamo približek za $Q(x)$ za $x>3$

$$\boxed{Q(x) \doteq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}} \;;\quad \Phi(x) = 1-Q(x)$$

večji kot je $x$, boljši je približek




$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x_0^2}{2}}$$

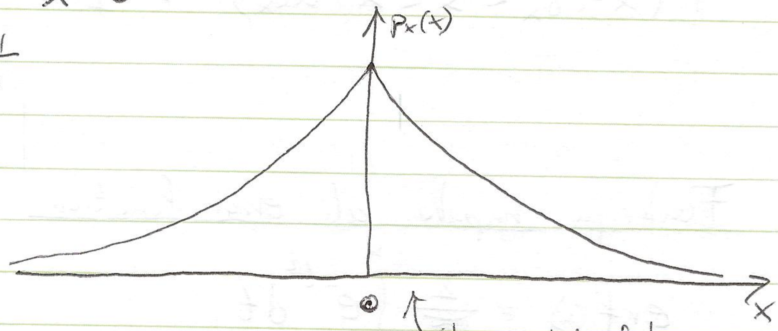
$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = -\frac{x_0}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x_0^2}{2}}$$

$$f_0 = A\cdot e^{-\frac{x-x_0}{a}}$$

## b) Laplace-ova porazdelitev (dvojna eksponentna)

- Za govorni signal : $\overline{x} = 0$

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\frac{|x|}{\sigma_x}}$$

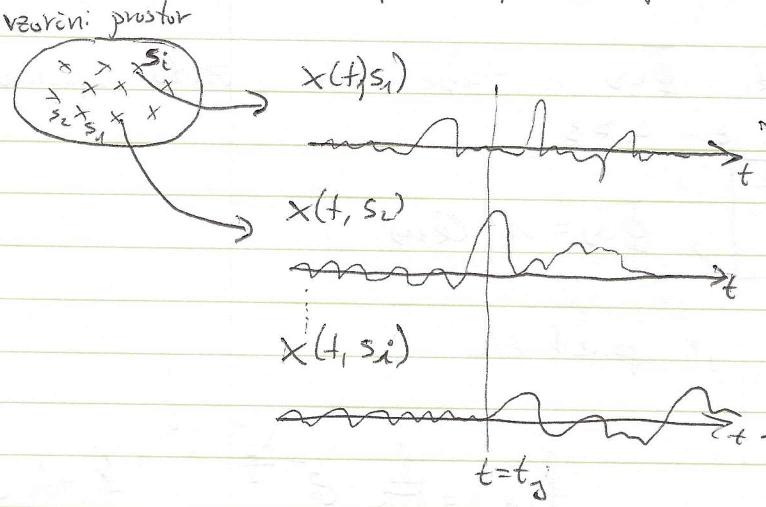



Veliko majhnih funkcij

# 2. Naključni procesi (random processes)
stochastic

## 2.1. Definicija in vrste procesov:

+ Neskončno zap. naključnih spr.




vzorčna funkcija

$t = t_j$

$x(t_j, s)$

naključna spr.

$x(t, s) \rightarrow s = s_i$

$x(t, s_i)$

vzorčna funkcija

deterministični signal, ki ga lahko posnamemo

$t = t_j$ , $s = s_i$

$x(t_j, s_i)$

številska vrednost nakl. spremenljivke

$$x(t, s) \equiv x(t)$$

& 26.10
3/5
1/

Glede na zveznost in diskretnost amp. in časa ločimo

→ a) Analogni — zvezni čas in amp $x(t)$ ← zvezni čas

b) Vzorčen — vzorčimo po času $x(n)$ ← diskretni čas

proces

c) Kvantiziran — $x_q(t)$ ← Amp. je kvantizirana

→ d) digitalen — $x_q(n)$

Porazdelitveni zakoni naključnih procesov $\boxed{26.10.2012}$

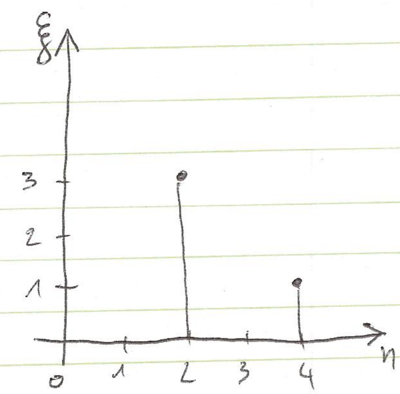
So vezane večkratne verjetnostne funkcije

- Za diskretni proces (po amplitudi in času):

$X[n_1]$ $X[n_2]$

$$\xi_i \in [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$P_{X[n_1]X[n_2]}(\xi_1, \xi_2) = P(X[n_1]=\xi_1) \cap P(X[n_2]=\xi_2)$$



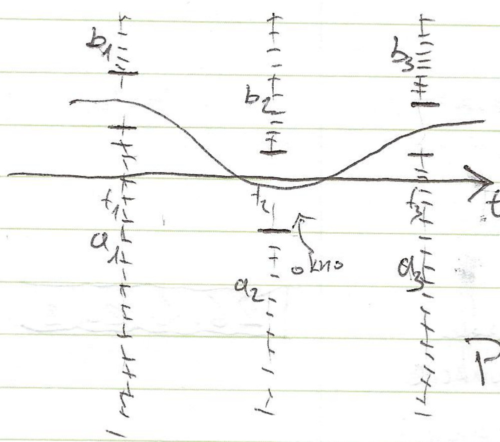

$n_1 = 2$ $\xi_1 = 3$

$n_2 = 4$ $\xi_2 = 1$

$$P_{X[2]X[4]}(3,1) = P(X_{[2]}=3, X_{[4]}=1)$$

• zvezni procesi : uporabljamo kumulativne verjetnostne funkcije

Verjetnost za potek vzorčne funkcije skozi amplitudno časovno okno:

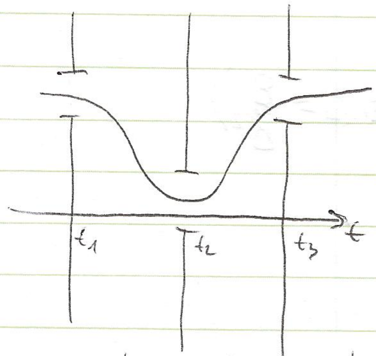



$$A = \{ a_i < X(t_i) < b_i \}$$

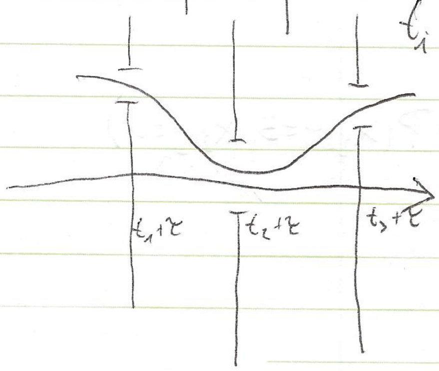
$$F_{X(t_1)X(t_2)X(t_3)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = P(X(t_1) \leq \xi_1, X(t_2) \leq \xi_2, X(t_3) \leq \xi_3$$

$$P(A) = F_{X(t_1)X(t_2)X(t_3)}(b_1, b_2, b_3) - F_{X(t_1)X(t_2)X(t_3)}(a_1, a_2, a_3)$$

## 2.2. Stacionarnost naključnega procesa




$t_i$ premaknemo za $\tau$



10.2.2012

2/

TIIK

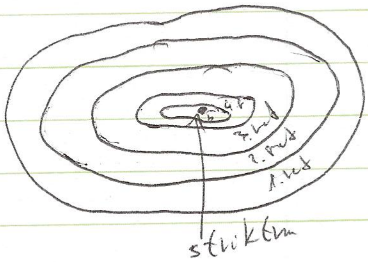
Za stacionarnost 2. reda:

$$F_{x(t_1+\tau)x_2(t_2+\tau)}(x_1,x_2) = F_{x(t_1)x(t_2)}(x_1,x_2)$$

izberimo $\tau = -t_1$

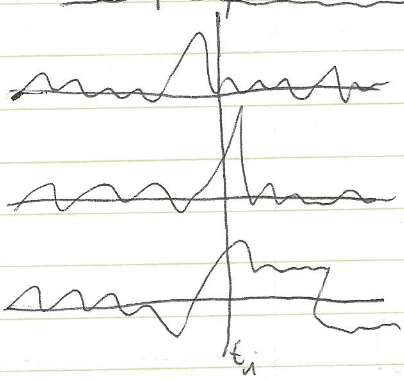
$$F_{x(t_1)x(t_2)}(x_1,x_2) = F_{x(0)x(t_2-t_1)}(x_1,x_2)$$

Striktno stacionaren proces vsebuje vse stacionarnosti




če ~~stacionaren~~ stacionaren 4. reda potem vsebuje stacionarnost tudi 3, 2, in prvega ~~reda~~

## 2.3. Povprečja I. reda, avtokorelacija in kovarianca:




$$E(X(t_1)) = \overline{X(t_1)}$$

Za poljubni čas spremenimo $t_1$ v $t$

in za stacionarne procese velja:

$\overline{X(t)} = \overline{X}$ srednja vrednost procesa

· srednja kvadratna vrednost procesa:

$$\overline{X^2(t)} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 P_{x(t)}(x_i) \quad ; \text{ za diskreten proces}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_{x(t)}(x)\, dx \quad ; \text{ za zvezen proces}$$

Za stacionarne procese velja:

$$\overline{X^2} = \sum_{i=1}^{N} x^2 P_{x(t)}(x_i)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x (dx)$$

ni(t) odvisen od časa

· <u>Avto korelacija</u>:

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t, t+\tau) = \overline{X(t) \cdot X(t+\tau)}$$

Za stacionarne procese velja:

$$R_x(t+\tau) = R_x(\tau) \quad \text{za vsak } t$$

$$R_x(t, t+\tau) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} x_i x_j P_{x(t)x(t+\tau)}(x_i, x_j) \quad \text{diskretni proces}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{x(t)x(t+\tau)}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

## Avtokovarianca

$$C_X(t_1, t_2) = \overline{\left(X(t_1) - \overline{X(t_1)}\right) \cdot \left(X(t_2) - \overline{X(t_2)}\right)}$$

Za procese s stacionarno srednjo vrednostjo $\overline{X(t)} = \overline{X}$
in stacionarno avtokorelacijo $R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau)$

$$C_X(t_1, t_2) = \overline{X(t_1)X(t_2) - \overline{X}X(t_2) - X(t_1)\overline{X} + \overline{X}\,\overline{X}} =$$

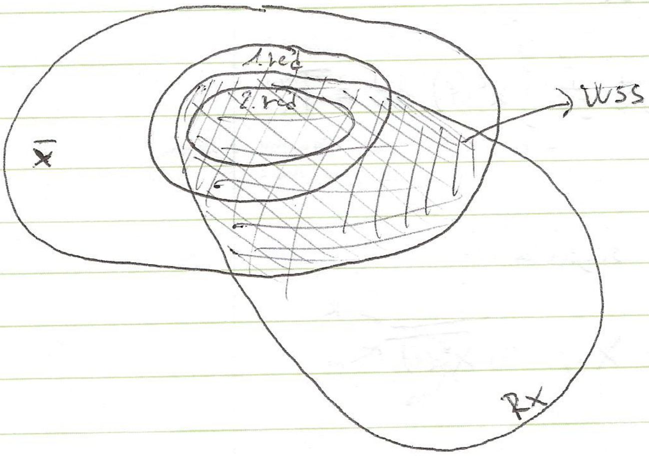
$$= \overline{X(t_1)X(t_2)} - \overline{X}\,\overline{X(t_2)} - \overline{X(t_1)} \cdot \overline{X} + \overline{X}^2 =$$

$$= R_X(t_1, t_2) - \overline{X}^2 = R_X(t_2 - t_1) - \overline{X}^2 =$$

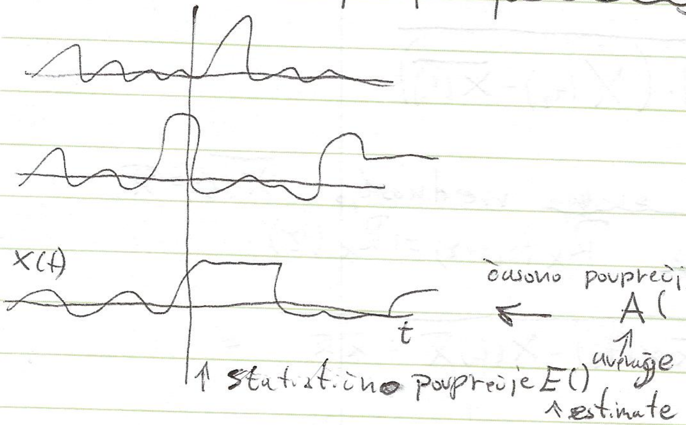
$$\boxed{C_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) - \overline{X}^2}$$

Proces, ki ima stacionarno srednjo vrednost in stacionarno avtokorelacijo je stacionaren v širšem smislu (wide sense stacionari... WSS

← mehka stacionarnost

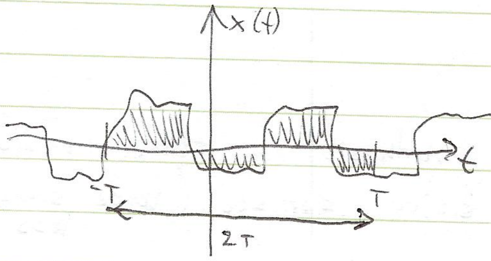


## 2.4. Časovna povprečja in ergodičnost




**Za zvezni proces:**

$$A[x(t)] = \overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$




- srednja kvadratna vrednost:

$$A[x^2(t)] = \overline{x^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt = P_x$$

normalizirana moč

efektivna vrednost naklj. signala:

$$P_x = X_{ef}^2 = \overline{x^2(t)} \Longrightarrow X_{ef} = \sqrt{\overline{x^2(t)}}$$

R M S

$$X_{ef} = X_{RMS}$$

$$\sigma_x^2 = A[(x(t) - \overline{x(t)})^2] = \overline{x^2(t)} - \overline{x(t)}^2 = X_{ef}^2 - \overline{x}^2$$

6.10.

41

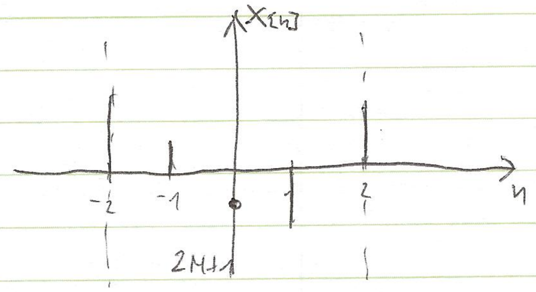
$$X_{ef}^2 = X_{ef\sim}^2 + X_{ef=}^2$$

$$\sigma_x = X_{ef\sim}$$

- Za časovno diskretne procese

Integral zamenjamo z vsotami

$$\overline{x[n]} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]$$




Ergodičnost

Lastnost da velja enakost med časovnimi in statističnimi povprečji: $\boxed{A(x) = E(x)}$

Če velja Ergodičnost iz nje sledi stacionarnost. Kontra ne velja vedno, vendar večinoma pa vseeno velja.

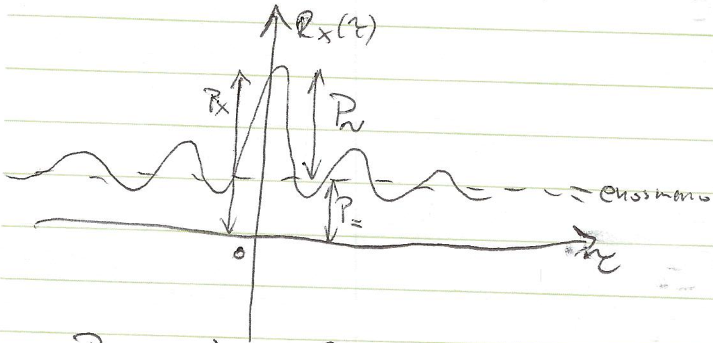
$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\cdot x(t+\tau)\, dt$$

## 2.5. Lastnosti avtokorelacije in gostote močnostnega spektra

1) $R_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt = P_x$ ... srednja kvadratična vrednost
... moč signala

2) $R_x(\tau)$ = soda funkcija
$R_x(-\tau) = R_x(\tau)$

3) $R_x(0) \geq R_x(\tau)$ ; če velja enakost potem je proces periodičen




$R_x(\infty) = \overline{x}^2$

4) $R_x(\tau) \xleftrightarrow{\text{Fourier}} S_x(f)$

$$\boxed{\begin{aligned} S_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\ R_x(\tau) &= F^{-1}(S_x(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\cdot e^{+j2\pi f\tau}\, df \end{aligned}}$$ gostota moči spektra

Einstein - $\underbrace{\text{Wiener - Hinčinov}}_{1930}$ teorem EWH
1914

Lastnost: $S_x(f)$

1) $S_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, d\tau$

2) $\overline{x^2(t)} = X_{ef}^2 = P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\, df$

$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$
$\tau = 0$

26.10

5/5

TIIK

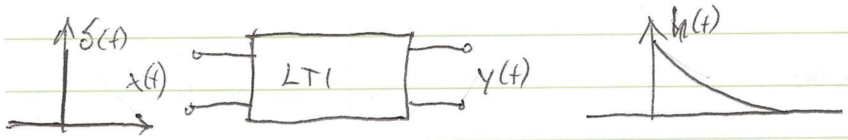
3) $S_x(f) \geqq 0$ za vse frekvence

4) $S_x(f)$ za realen naključen signal je soda funkcija

$S_x(-f) = S_x(f)$

## 2.6. Prevajanje naključnih signalov prek LTI - vezij/sistemov

LTI - linear time invariant circuit/sistem




$$Y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\, d\tau$$ konvolucija

$$\downarrow \mathcal{F}\{\ \}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$$

spekter izhodnega signala; frekvenčni odziv; spekter vhodnega signala

Za naključne signale:

$$\boxed{S_Y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)}$$

močnostni frekvenčni odziv

Za gostoto verjetnosti izhodnega signala ni moč enostavno določiti, vendar imamo pomembno izjemo.

Izjema: če je vhodna porazdelitev gaussova, je izhodna tudi gaussova.

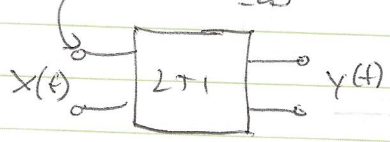
Spremeni pa se $\sigma_Y$ izhodnega signala.

9.11.2012

Za $\overline{x}=0$ in $\sigma_x$

$$p(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2}$$

$$\sigma_x^2=\overline{x^2}=P_x=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)\,df$$




$$p_Y(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2}$$

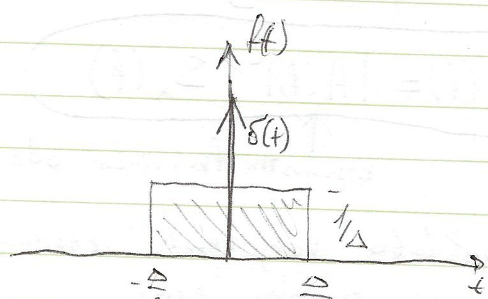
$$\sigma_y^2=\overline{y^2}=P_y=\int_{-\infty}^{\infty}S_y(f)\,df=\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\cdot S_x(f)\,df$$

Zgled: Termični šum / Beli Gaussov šum

zastopane vse frekvence

je najbolj naključen signal

$$R_x(\tau)=\frac{N_0}{2}\cdot\delta(\tau)$$




$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}f(t)$$

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & \text{za } t\neq 0\\ \infty & \text{za } t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)\,dt=1$$ ; za poljubno majhen $\varepsilon>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot\delta(t-t_0)=f(t_0)$$ vzorčevalna definicija

9.11.

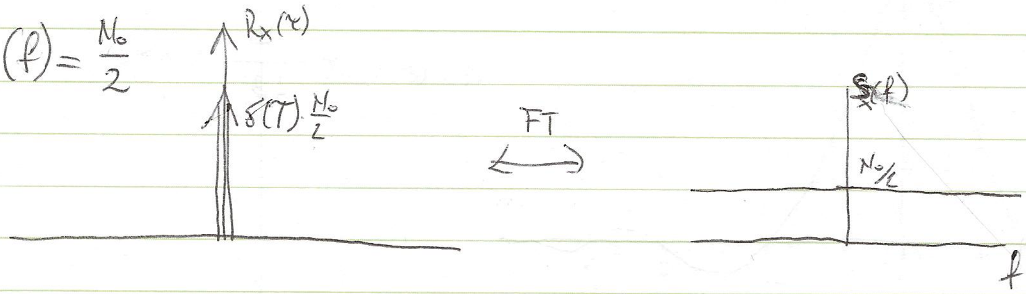
1/3



TIIK

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \xrightarrow{\tau=0} e^0\cdot 1 = 1$$

$$S_x(f) = \frac{N_0}{2}$$




Na uporu ima termični šum mejno frekvenco 1300 GHz

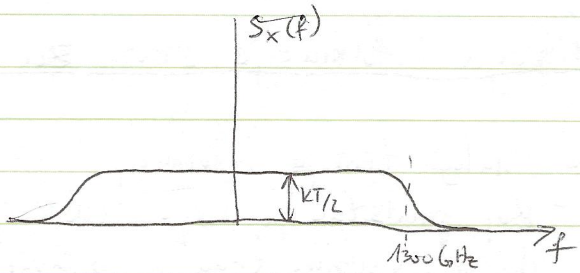
$$S(f) = \frac{h\cdot f}{2 e^{(hf/kt)} - 1}$$

h = plancova konstanta $= 6{,}62\cdot 10^{-34}$ Js

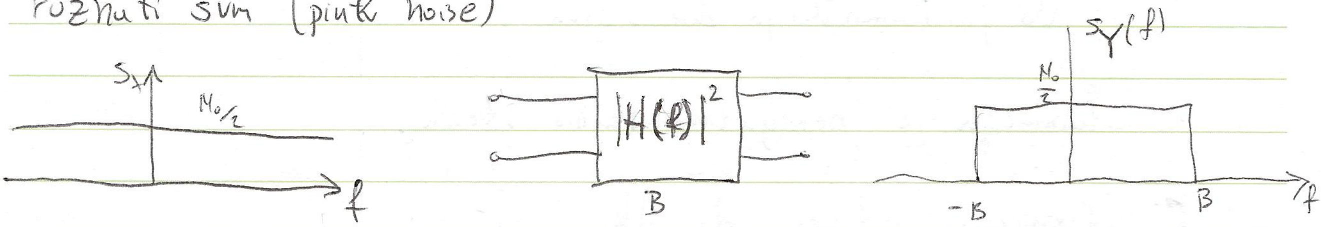
k = boltzman $= 1.38\cdot 10^{-23}$ J/K

$e^x \doteq 1 - x$ za $X << 1$

$$S(f) = \frac{kT}{2}$$




rožnati šum (pink noise)



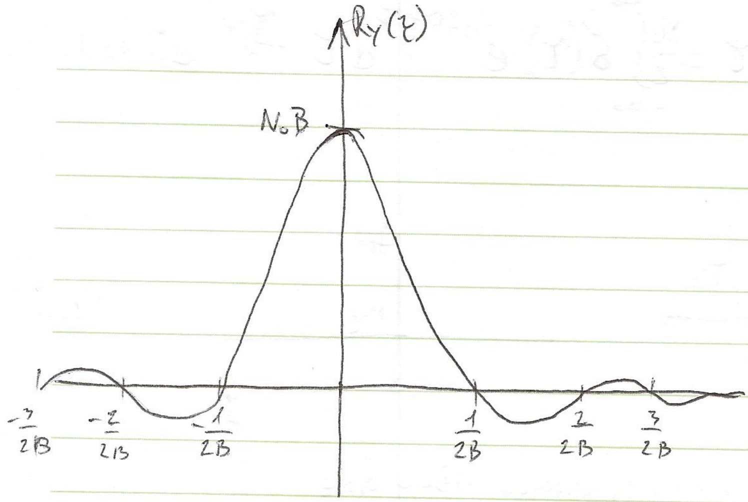

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2\, df = \frac{N_0}{2}\int_{-B}^{B} df = \underline{N_0\cdot B}$$

$$P_Y = \sigma_Y^2 \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{N_0 B}$$

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)\cdot e^{+j2\pi f\tau}\, df = \frac{N_0}{2}\int_{-B}^{B} e^{j2\pi f\tau}\, df = \frac{N_0}{2}\,\frac{e^{j2\pi f\tau}}{j2\pi\tau}\Bigg|_{-B}^{B} =$$

$$= N_0\,\frac{e^{j2\pi B\tau} - e^{-j2\pi B\tau}}{2j\cdot 2\pi\tau} = \boxed{N_0 B\,\frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} = R_Y(\tau)}$$

$$\underline{R_Y(0) = N_0\cdot B}$$




ničle: $\tau = \frac{k}{2B}$, $k \neq 0$

# 3. Teorija informacij

## 3.1. Definicija informacije, enota za merjenje

- Glavni nalogi teorije informacij:
  - Kaj predstavlja mejo redukcije kompleksnosti sporočila, da se vsebina tega ne pokvari / izgubi
  - Kako je določena meja hitrosti prenosa preko šumnega kanala, da je komunikacija zanesljiva.

1. Informacija je nenegativno realno število.

2. Informacija gotovega dogodka je nič.

3. Informacija manj pomembnih dogodkov je večja.

4. Skupna informacija dveh neodvisnih dogodkov naj bo vsota informacij posameznega dogodka

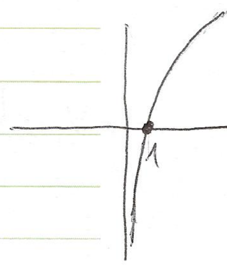
9.11.2012

2/3

$I(A) = \log_2 \frac{1}{P(A)} = -\log_2 P(A)$

enota je shannon (sh) ali pa bit (binary digit)

1. ker velja $0 \leq P(A) \leq 1$ $\quad \frac{1}{P(A)} \geq 1 \quad I(A) = \log_2 \frac{1}{P(A)} \geq 1$



2. $I(S) = \log_2 \frac{1}{1} = \underline{\underline{0}}$

3. log je monotono naraščajoča funkcija

4. neodvisna dogodka A in B

$$I(A) = \log_2 \frac{1}{P(A)} \qquad I(B) = \log_2 \frac{1}{P(B)}$$

verjetnost skupnega nastopa (hkrati) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$I(A \cap B) = \log_2 \frac{1}{P(A \cap B)} = \log_2 \frac{1}{P(A) \cdot P(B)} = \log_2 \frac{1}{P(A)} + \log_2 \frac{1}{P(B)} = I(A) + I(B)$$

<u>Zgled:</u> met kovancev manjših od 1€

šest različnih (1c, 2c, 5c, 10c, 20c, 50c)

imamo $2^6$ možnosti

Verjetnost posameznega izida je $\frac{1}{64}$

$I = \log_2 2^6 = \mathbf{6sh}$ (bit)

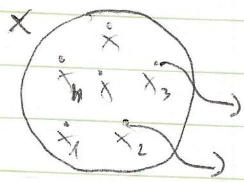
Zgled 2: (črk 31 + presledek) = 32

Za enako verjetnost $1/32$ $\quad I = \log_2 32 = 5\,sh$

V slo. je naj pogostejša E, $P(E) = 0.107$; $I(E) = \log_2 \frac{1}{P(E)} = 3{,}2\,sh$

razlika do 5 je redundanca

## 3.2. Informacijski vir



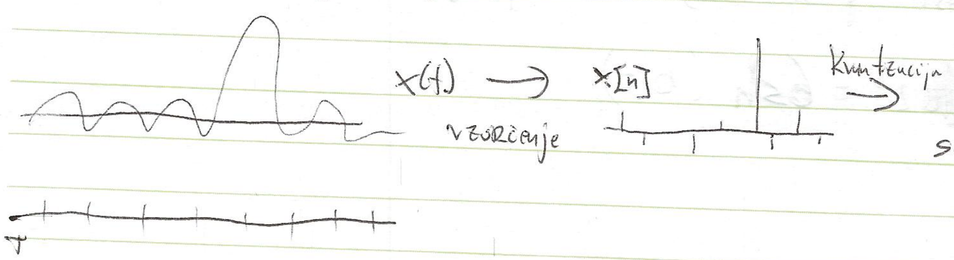

$x_i$ ; $i = 1, \dots N$

Ven dobimo simbol v določenem časovnem trenutku

Vir brez spomina ima simbole v dveh enotah časa neodvisne
Diskretni, brezspominski vir ⇒ discrete memoryless source DMS

a) tekstovni vir, simboli ASCII (256 različnih znakov)
 - vir ima spomin $\quad$ 8 bit

b) Kodirani analogni signal



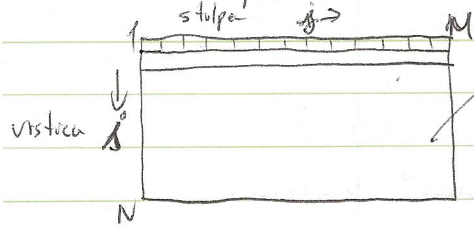

diskretne amplitude
simbol je binarno število

9.11.2012

3/3

c) Slikovni signal

izvor je slikovni senzor




$\to x[i,j]$

skeniranje – vzorec po vrsticah $\to$ $x[1,1], x[1,M]$

$x[2,1], x[2,M]$

$x[N,1], x[N,M]$

$M \times N \to f_s = 25\,Hz$

16.11.2012

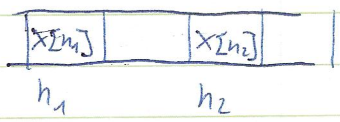
## 3.3. Entropija vira

- Za vir brez spomina

$$P_{x[n_1]x[n_2]}(\xi_i, \xi_j) = P_x(\xi_i) \cdot P_x(\xi_j)$$

- Vir z L simboli

$$X_L = \{x_1, x_2, \dots x_L\}$$




$I_{x[k]} = I(x_k)$ naključna spr. z verjetnostjo:

$$P_x[k] = P(I[k])$$

$$H_x = H(X) = \overline{I}_x = E(I_x) = \sum_{k=1}^{L} I_x[k] \cdot P_x[k]$$

$$\boxed{H_x = \sum_{k=1}^{L} P_x[k] \cdot \log_2 \frac{1}{P_x[k]}} = -\sum_{k=1}^{L} P_x[k] \cdot \log P_x[k]$$

Entropija diskretnega vira

Merilo urejenosti sistemov

Večja kot je entropija, večja je informativnost sistema

## 3.3.1. Entropija binarnega vira

$X \rightarrow X[n] \quad x = \{0, 1\}$

$P_{X[1]} = p$

$P_{X[0]} = 1 - p$

$$H_x = p \cdot \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \cdot \log_2 \frac{1}{(1-p)} = -\frac{1}{\ln 2} \left[ p \cdot \ln p + (1-p) \ln (1-p) \right]$$

$$\frac{dH_x}{dp} = 0 = p_{opt}$$

$$\frac{dH_x}{dp} = -\frac{1}{\ln 2} \left[ \ln p + \cancel{p} \cdot \frac{1}{\cancel{p}} - \ln(1-p) + \cancel{(1-p)} \frac{1}{\cancel{(1-p)}} \cdot (-1) \right] = 0$$

$$\ln p - \ln(1-p) = 0$$

$$\ln \frac{p}{1-p} = 0$$

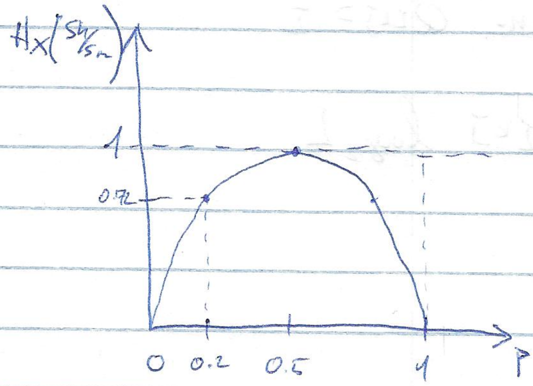
$$\frac{p}{1-p} = 1 \qquad p = 1 - p$$

$$2p = 1$$

$$p = \frac{1}{2} = p_{opt}$$

$$H_{max} = H_x \Big|_{p=\frac{1}{2}} = 1 \text{ sh/simbol}$$

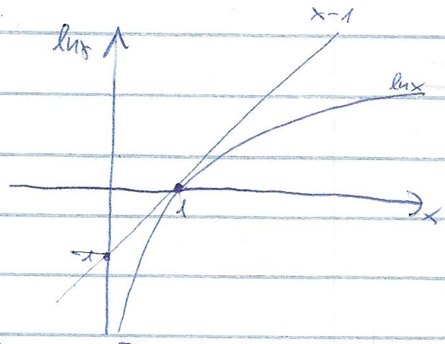
TIK




## 3.3.2. Maksimalna entropija diskretnega vira:

Imamo vir z $L$ simboli.
Rezultat izpeljemo iz neenačbe

$$\ln x \leq x - 1 \quad \text{za } x > 0$$




$$P[k] = P_X[k] \qquad \sum_1^L P[k] = \sum_1^L Q[k] = 1$$
$$Q[k] = P_Y[k]$$

$$\sum_{k=1}^{L} P[k] \cdot \log \frac{Q[k]}{P[k]} \leq \sum_{k=1}^{L} P[k] \left( \frac{Q[k]}{P[k]} - 1 \right) = \sum_{k=1}^{L} Q[k] - \sum_{k=1}^{L} P[k] = 0$$

$$\sum_{k=1}^{L} P[k] \ln \frac{1}{P[k]} - \sum_{k=1}^{L} P[k] \ln \frac{1}{Q[k]} \leq 0 \quad / \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{L} P[k] \log_2 \frac{1}{P[k]}}_{H_X} \leq \sum_{k=1}^{L} P[k] \log_2 \frac{1}{Q[k]}$$

$Q[k]$ je poljubna porazdelitev, izberemo enakomerno $Q[k]=\frac{1}{L}$

$$\sum_{k=1}^{L} P[k]\cdot\log_2\frac{1}{P[k]} \le \sum_{k=1}^{L} P[k]\cdot\log\frac{1}{Q[k]} = \sum_{k=1}^{L} P[k]\cdot\log_2 L$$

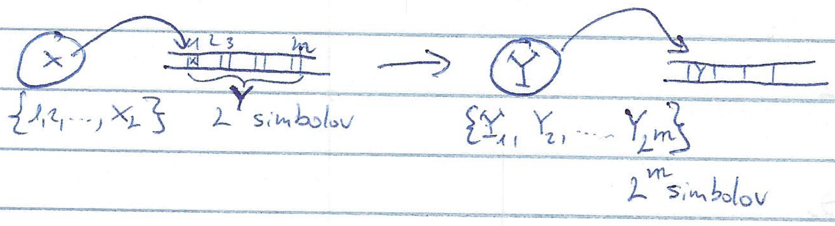
$$H_X \le \log_2 L$$

$$\boxed{H_X \le H_{max} = \log_2 L}$$

$H_{max}$ zahteva enakomerno porazdelitev

$$H_{max} = \log_2 L$$

## 3.3.3. Razširjeni informacijski vir




$$H_Y = m\cdot H_X$$

$m=2$

$$H_X = \sum_{i=1}^{L} P_X(x_i)\log_2\frac{1}{P_X(x_i)} \qquad H_Y = \sum_{k=1}^{L^m} P_Y(Y_k)\log\frac{1}{P_Y(Y_k)}$$

$|x_i|x_j| \leftrightarrow |Y_k|$

$Y_{ij}$ $\qquad$ $Y_k : k=(i-1)\cdot L+j$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1L} \\ Y_{L1} & Y_{L2} & \ldots & Y_{LL} \end{bmatrix}$$

TIIK 16. 11. 2012

$$P_Y(y_k) = P_Y(x_i, x_j) = P_X(x_i)\cdot P_X(x_j)$$

$$H_Y = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L} P_X(x_i)\cdot P_X(x_j)\cdot \log \frac{1}{P_X(x_i)\cdot P_X(x_j)}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{L} P_X(x_i)\log_2\frac{1}{P_X(x_i)}}_{H_X}\cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{L} P_X(x_i)}_{1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{L} P_X(x_j)}_{1}\underbrace{\sum_{j=1}^{L} P_X(x_j)\cdot\log_2\frac{1}{P_X(x_j)}}_{H_X}$$

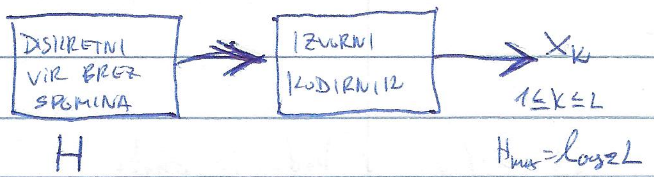
$$H_Y = 2H_X$$

## 3.3.4. Teorem o izvornem kodiranju

- Kodirna redundanca:

$$D = H_{max} - H = \log_2 L - H \quad \text{absolutna redundanca}$$

$$R = \frac{D}{H_{max}} = \frac{H_{max}-H}{H_{max}} = 1 - \frac{H}{H_{max}} = 1 - \frac{H}{\log_2 L} \quad \text{relativna}$$

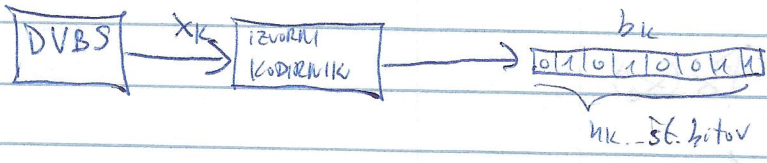



- Teorem:

Zaporedje simbolov diskretnega vira z končno entropijo je mogoče kodirati v zap. neodvisnih simbolov, tako da gre $R \to 0$, ~~kolg~~ ko gre št. simbolov $\to \infty$

koda je enakomerno razporejena (porazdeljena)

- Obstaja mera, ki pretvori kodirani niz v original brez napake. Če je $H_{max} < H$ to nebi bilo mogoče




$$P_X(x_k) = P_B(b_k)$$ ... trenutna koda

1 simbol = 1 niz

$$\overline{n} = \sum_{k=1}^{L} P_B(b_k) \cdot n_k$$ povprečno št. binarnih bitov

Kodiranje in dekodiranje je brezizgubno, če velja:

$$\overline{n} \geq H_X$$

## 3.4. Stiskanje podatkov (data compaction)

entropijsko kodiranje:

$$\overline{n} = H_X$$

$$\sum_{k=1}^{L} P_X(x_k) \cdot n_k = \sum_{k=1}^{L} P_X(x_k) \cdot \log \frac{1}{P_X(x_k)}$$

$$n_k = I(X_k) = \log_2 \frac{1}{P_X(x_k)}$$ št. bitov v kodi je enako lastni informaciji.

1. $n_k$ ni enak za vse simbole $x_k$
2. nastopi razlika med $n_k$ je celo število in informacijo $I(x_k)$, ki te omejitve nima

Rezultat bo neenakomerna koda (VLC - variable length code)

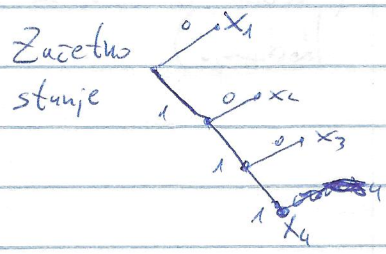
TILK — 16.11.2012

| simbol | $P_X(x_k)$ | koda 1 | koda 2 | koda 3 | $I(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $x_2$ | 0.25 | 1 | 10 | 01 | 2 |
| $x_3$ | 0.125 | 00 | 110 | 011 | 3 |
| $x_4$ | 0.125 | 11 | 111 | 0111 | 3 |
| $\overline{n}$ | | 1,25 | 1,75 | 1.875 | 1.75 |

predponska koda / prefix code

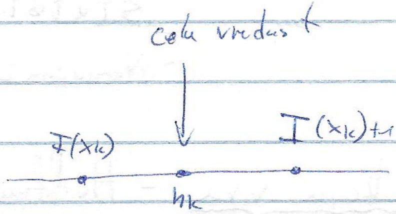
→ lahko enostavno določimo kje se koda začne in konča, ker predpona nikoli ne nastopa kot samostojna vrednost

Odločitveno drevo omogoča dekodiranje




niz 10|111|110|0|0|

$x_2$ $x_4$ $x_3$ $x_1$ $x_1$




$$I(x_k) \le n_k < I(x_k)+1$$

$$\sum_{k=1}^{L} P_X(x_k) I(x_k) \le \sum_{k=1}^{L} P_X(x_k)\, n_k < \sum_{k=1}^{L} P_X(x_k) I(x_k) + \sum_{k=1}^{L} P_X(x_k)$$

$$H_X \le \overline{n} < H_X + 1$$

23.11.2012 TIIK

Razširjeni vir : m simbolov $x_k \rightarrow y_e$

$$H_Y = m \cdot H_X$$

$$H_Y \leq \overline{n_Y} < H_Y + 1$$

$$mH_X \leq \overline{n_Y} < mH_X + 1 \quad / : m$$

$$H_X \leq \frac{\overline{n_Y}}{m} < H_X + \frac{1}{m}$$

Vrednost s katerimi bi kodirali posamezen simbol

$$\frac{\overline{n_Y}}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \overline{n} = H_X$$

torej je redundanca $\phi$, (teorem o izvornem kodiranju)

## 3.4.1. Huffmanova koda (1952)

$n_k \approx I_x [k]$ (Entropijsko kodiranje); Treba je vnaprej poznati statistiko simbolov ("apriori")

- Namenjena za vire brez spomina

Algoritem:

a) redukcija vira - Huffmanovo drevo

- simbole uredimo po padajoči verjetnosti
- združimo dva simbola, ki imata najmanjšo verjetnost in dobimo reduciran vir
- izbrana simbola označimo z 0 in 1
- postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do le dveh simbolov

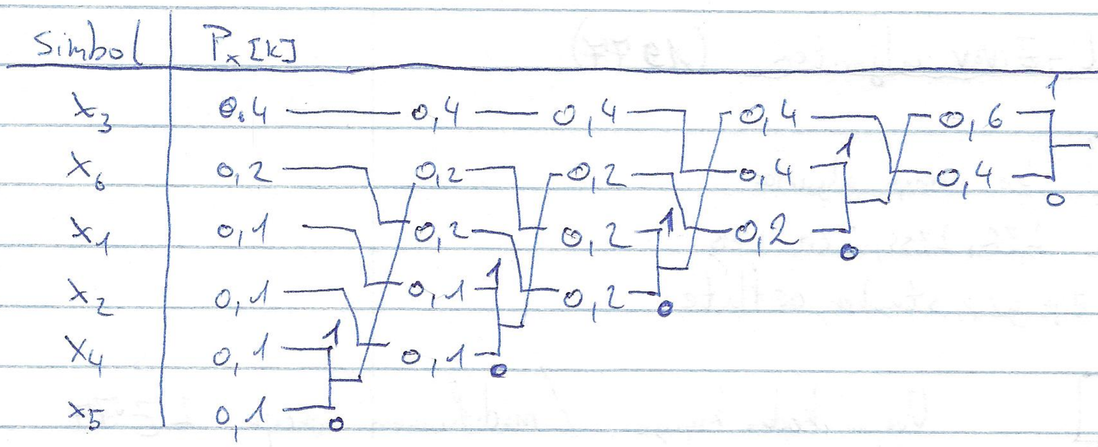
23.11.2012

## b) Odčitavanje kode:

Zgled:

$x_1, x_2, \ldots, x_6$ ; $P_x[1] = P_x[2] = P_x[4] = P_x[5] = 0{,}1$

$P_x[3] = 0{,}4$ ; $P_x[6] = 0{,}2$




| simbol | koda | $n_k$ | $P_x[k]$ | $I_x[k]$ $= n_{k\,opt}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 101 | 3 | 0,1 | 3,32 |
| $x_2$ | 100 | 3 | 0,1 | 3,32 |
| $x_3$ | 11 | 2 | 0,4 | 1,32 |
| $x_4$ | 110 | 3 | 0,1 | 3,32 |
| $x_5$ | 010 | 3 | 0,1 | 3,32 |
| $x_6$ | 00 | 2 | 0,2 | 2,32 |

$\overline{n} = 2{,}4$ bit/simbol $\qquad H_x = 2{,}32$ sh/simbol

Standardna koda

$n_k = 3$ bit

Dekodiranje:

0 1 1, 0 0, 1 1, 1 0 1, 0 1 0, 0 0,

$x_4$ $x_6$ $x_3$ $x_1$ $x_5$ $x_6$

0 1 1, 1 0 1, 1 1, 0 1 0, 1 0 0, 0

$x_4$ $x_1$ $x_3$ $x_5$ $x_2$

## 3.4.2. Lempel-Zivov algoritem (1977)

$\boxed{LZ77}$ se imenuje algoritem

Izpeljanke LZR, LZSS, LZH, LZB

zip, gzip, stacker, deflate

$\boxed{LZ78}$ Uvaja kodno knjigo / modificirana verzija LZ77

LZW, LZJ, LZP, LZFG Hibrid z LZ77

gif, V.42, compress

Lastnosti:

- variabilno število simbolov ⟶ koda fiksne dolžine
- ugodna za prenos, ker se dolžina kode ne spreminja
- kodna knjiga se generira sproti na oddajni in sprejemni strani
- algoritem je asimptotično optimalen

23.11.2012

# Princip kodiranja z LZ algoritmi:
## Varianta z znano kodno knjigo - LZW (welch)

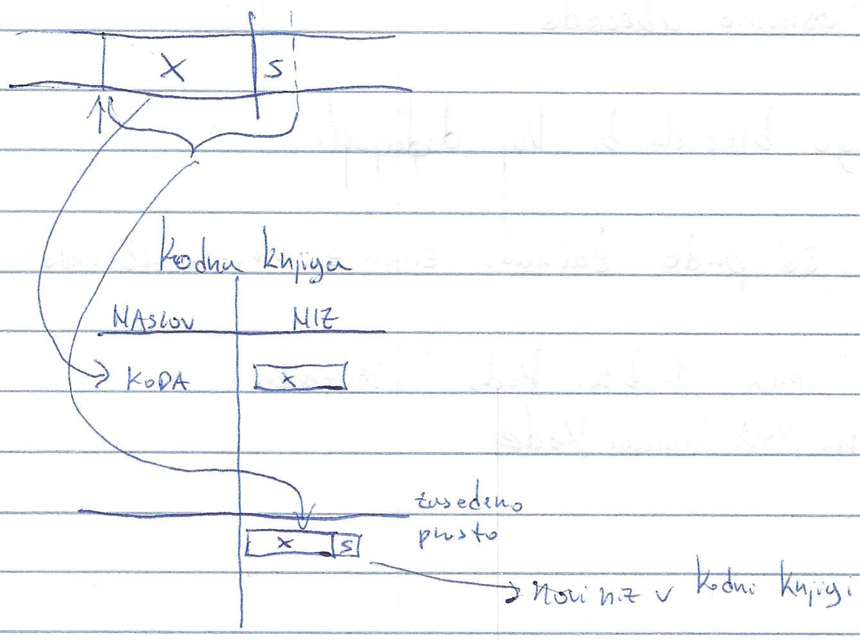
1. Inicializiramo kodno knjigo z osnovnimi simboli (dolžina je 1 simbol)

2. Poiščemo najdaljši blok v nizu, ki ga ~~kodiramo~~ najdemo v kodni knjigi

3. Ta niz kodiramo z indeksom (naslovom) v kodni knjigi

4. Kodiranemu nizu dodamo prvi naslednji simbol in ga dodamo na prvo prosto mesto v kodni knjigi

5. Odstranimo kodirani niz simbolov in se vrnemo na korak 2.



Zgled:

niz A|B|B|A|A B|B A|B B|A B B|

0 1 1 0 2 4 3 6

Kodna knjiga

| | | |
|---|---|---|
| 0 | A | vsebuje osnovne simbole |
| 1 | B | |
| 2 | AB | |
| 3 | BB | |
| 4 | BA | |
| 5 | AB | |
| 6 | ABB | |
| 7 | BAB | |
| 8 | BBA | |

Ko se kodna knjiga napolni:

a) začnemo znova z osnovno abecedo

b) nadaljujemo s polno knjigo, brez da bi kaj dodajali

c) spremljamo učinkovitost, če pade začnemo znova z osnovno abecedo

Standardni algoritem LZW ima 12-bitno kodo (4096 znakov)

besedila stisne običajno na 44% osnovne kode

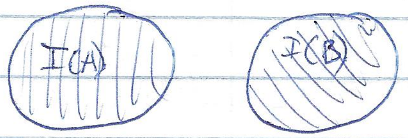
23.11.2012

## 3.5. Vzajemna (pogojna) entropija in kapaciteta kanala:

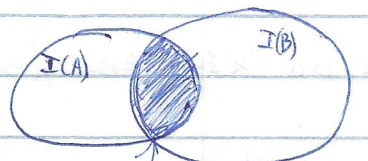
### 3.5.1. Vzajemna Informacija (neutral information)

To je info. ki jo en dogodek ve o drugem dogodku. Če sta neodvisna ni vzajemne informacije.

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$ neodvisna dogodka
$$I(A\cap B) = I(A)+I(B)$$




$$P(A\cap B) = P(A\backslash B)\cdot P(B) = P(B\backslash A)\cdot P(A)$$




Vzajemna informacija $I(A;B)$ [sh] govori kaj nam en pove o drugem.

$$I(A\cap B) = I(A)+I(B)-I(A;B)$$

$$I(A;B) = I(A)+I(B)-I(A\cap B)$$

$$= \log_2\frac{1}{P(A)} + \log_2\frac{1}{P(B)} - \log_2\frac{1}{P(A\cap B)} =$$

$$= \log_2\frac{1}{P(A)\cdot P(B)} - \log_2\frac{1}{P(A\backslash B)\cdot P(B)}$$

$$\boxed{I(A;B) = \log_2\frac{P(A\backslash B)}{P(A)} = \log_2\frac{P(B\backslash A)}{P(B)}}$$

Za A in B, ki sta neodvisna:

$$P(A \backslash B) = P(A) \quad ; \quad P(B \backslash A) = P(B) \quad ; \quad I(A;B) = 0$$

Za gotov dogodek je ~~informacija enaka verjetnosti~~ skupna informacija enaka lastni informaciji.

## 3.5.2. Informacijski kanal


$X[n] \in \{x_j \,;\, j = 1, 2, \ldots J\}$
$Y[n] \in \{y_k \,;\, k = 1, 2, \ldots K\}$

- Kanal je brez spomina, če je $Y[n]$ odvisen le od $X[n]$ (memoryless info. channel)

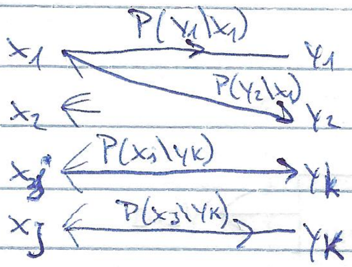
- Kanal brez spomina opiše matrika pogojnih verjetnosti:

$$P_{Y/X}(y_k, x_j) = P(y_k \backslash x_j) = a_{jk}$$

$$P = \begin{bmatrix} P(y_1 \backslash x_1) & P(y_2 \backslash x_1) & \ldots & P(y_K \backslash x_1) \\ P(y_1 \backslash x_2) & P(y_2 \backslash x_2) & \ldots & P(y_K \backslash x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ P(y_1 \backslash x_J) & P(y_2 \backslash x_J) & \ldots & P(y_K \backslash x_J) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{J1} & a_{J2} & \ldots & a_{JK} \end{bmatrix}$$

23.11.2012




$$\sum_{k=1}^{K} P(y_k \backslash x_j) = \sum_{k=1}^{K} a_{jk} = \underline{\underline{1}}$$

Velja za vse $j = 1, 2, \dots J$

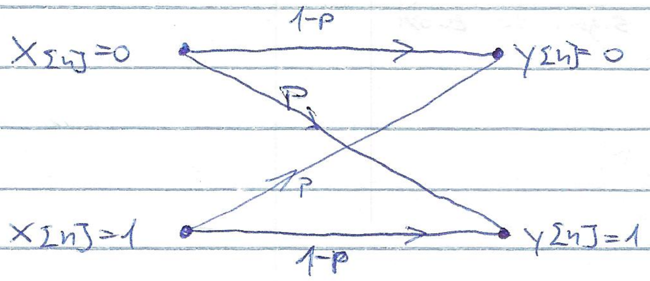
30.11.2012

Zgled za informacijski kanal:

- Binarni simetrični kanal:

$J = K = 2$

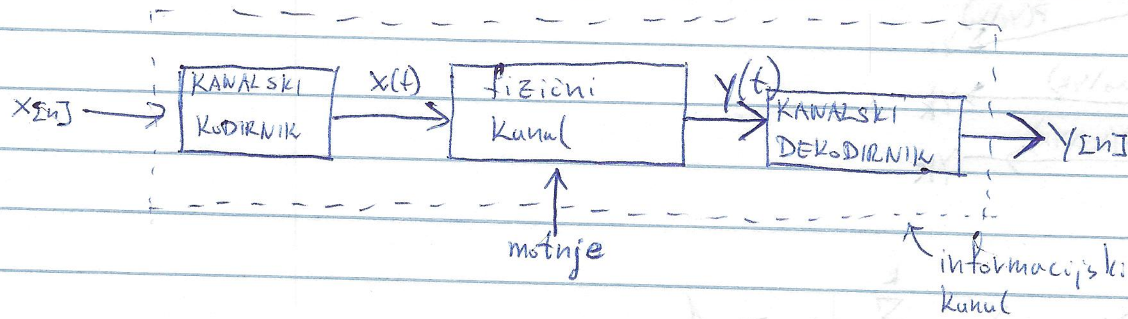
$x[n] \in \{0, 1\}$ in $y[n] \in \{0, 1\}$



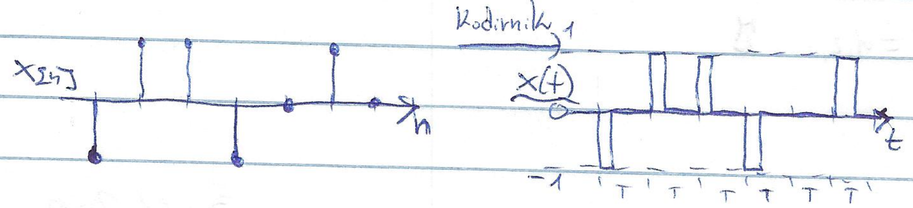

$p$ ... verjetnost za napačen sprejem

$P_{Y/X}[0,0] = 1-p$
$P_{Y/X}[0,1] = p$
$P_{Y/X}[1,0] = p$
$P_{Y/X}[1,1] = 1-p$

## 3.5.3. TK prenosna pot kot informacijski kanal

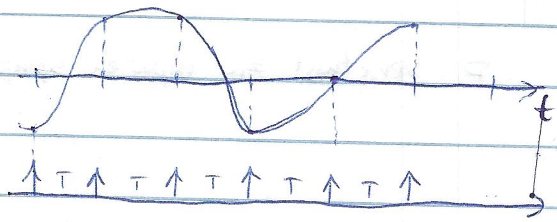



$x[n] \in \{-1, 0, 1\}$

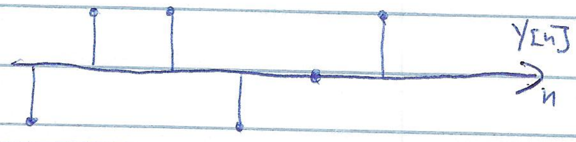



1. Na kanal se signalu doda šum
   (kanal z aditivnim šumom)

2. Frekvenčna omejitev kanala vpliva na obliko izhodnega signala




signal se zaobli




$$\boxed{y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot x[n-m] + \eta[n]}$$

TIIR 30.11.2012

- $a_m$ za $m \neq 0$ predstavlja vpliv preteklih simbolov
- če so $a_m = 0$, razen $a_0$ govorimo o kanalu brez spomina, torej ni intersimbolne interference.
- če je $a_0 = 1$, potem kanal nima ojačanja.

$a_m = 0$, $m \neq 0$ potem je:

$$y[n] = x[n] + n[n]$$

$$R_{n}[n] = \overline{n[n] \cdot n[n+m]} = \begin{cases} \overline{n^2} = N & \text{za } m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

; če to velja gre za beli šum!

šum ni koreliran (oz. max. nepredvidljiv)

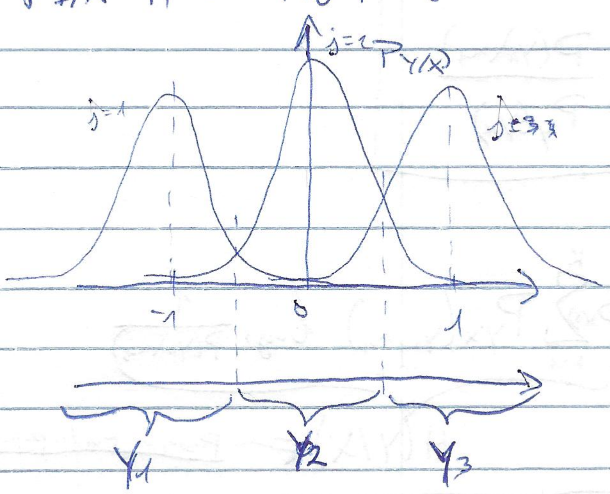
Če pa velja da je:

$$p_n(n) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma_n}\right)^2}$$

potem govorimo o belem Gaussovem šumu (AWGN) additiv white Gauss noise

$$p_{Y/X}(y, x_j) = p_n(y - x_j)$$

$j = 1, 2, 3$ ; $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$



## 3.5.4. Prenesena informacija in vzajemna entropija diskretnih virov

· Kanal z diskretnimi simboli $x[n]$ in $y[n]$

$$x_j \quad \boxed{\text{INF. K.}} \quad y_k$$

$$I(y_k, x_j) = \log_2 \frac{P_{Y/X}(y_k \backslash x_j)}{P_Y(y_k)} = \log_2 \frac{P_{X/Y}(x_j \backslash y_k)}{P_X(x_j)}$$

$$P_Y(y_k) = \sum_{j=1}^{J} P(y_k \backslash x_j) \cdot P(x_j)$$

Vezana verjetnost: $P_{YX}(y_k, x_j) = P(Y = y_k \cap X = x_j) = P_{Y/X}(y_k \backslash x_j) \cdot P_X(x_j)$

$$P_{XY}(x_j, y_k) = P(X = x_j \cap Y = y_k) = P_{X/Y}(x_j \backslash y_k) \cdot P_Y(y_k)$$

Povprečna prenesena informacija

$$I(Y;X) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} P_{YX}(y_k, x_j) \cdot I(y_k; x_j)$$

$$\boxed{= \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} P_{YX}(y_k, x_j) \cdot \log_2 \frac{P(y_k \backslash x_j)}{P_Y(y_k)}}$$

razširimo:

$$I(Y;X) = \underbrace{\sum_{k=1}^{K} \underbrace{\sum_{j=1}^{J} P_{YX}(y_k, x_j)}_{P_Y(y_k)} \cdot \log_2 \frac{1}{P_Y(y_k)}}_{H(Y)} - \underbrace{\sum_{j=1}^{J} P(x_j) \sum_{k=1}^{K} P_{YX}(y_k, x_j) \cdot \log_2 \frac{1}{P(y_k \backslash x_j)}}_{H(Y/X)}$$

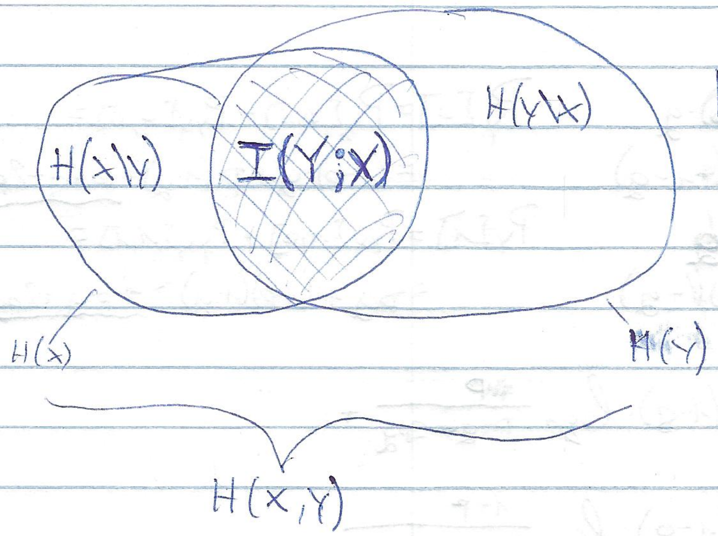
$H(Y/X) \leftarrow$ pogojna entropija

$$\boxed{I(Y;X) = H(Y) - H(Y/X)} \qquad \boxed{I(X;Y) = H(X) - H(X \backslash Y)}$$

TIK 30.11.2012

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)$$

vezana entropija




$$H(X,Y)=\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}P_{XY}(x_j,y_k)\log_2\frac{1}{P_{XY}(x_j,y_k)}$$

$H(X|Y)$ pomen: nedoločenost simbolov na vhodu po opazovanju izhoda

$$0\leq I(X;Y)\leq X(X)$$

## 3.5.5. Kapaciteta kanala:

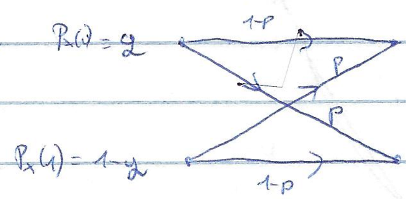
$$\boxed{C=\max_{P_X(x_j)}\left(I(X;Y)\right)}$$

[bit/simbol, sh/simbol]

Zgled BSC: binarni simetrični kanal

dva simbola $P_X(0)=q$, $P_X(1)=1-q$

kanal je simetričen: $P_{Y|X}(1,0)=P_{Y|X}(0,1)=p$



$$I(X;Y)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}P_{XY}(x_j,y_k)\cdot\log_2\frac{P(y_k/x_j)}{P_Y(y_k)}$$

$$P_{YX}[0,0]=P_{Y|X}[0,0]\cdot P_X[0]=(1-p)\cdot g$$
$$P_{YX}[0,1]=P_{Y|X}[0,1]\cdot P_X[1]=p\cdot(1-g)$$
$$P_{YX}[1,0]=P_{Y|X}[1,0]\cdot P_X[0]=p\cdot g$$
$$P_{YX}[1,1]=P_{Y|X}[1,1]\cdot P_X[1]=(1-p)(1-g)$$

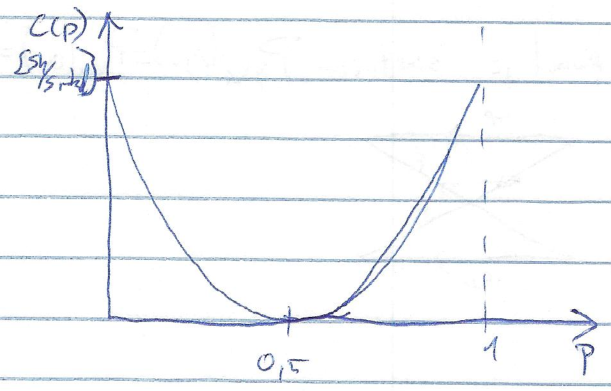
$$P_Y[0]=P_{YX}[0,1]+P_{YX}[0,0]=$$
$$=(1-p)\cdot g+p(1-g)=\underline{p+g-2pg}$$
$$P_Y[1]=P_{YX}[1,0]+P_{YX}[1,1]=$$
$$=pg+(1-p)(1-g)=\underline{1-p-g+2pg}$$

$$I(Y;X)=(1-p)g\cdot\log_2\frac{1-p}{p+g-2pg}+p(1-g)\cdot\log_2\frac{p}{p+g-2pg}+$$
$$+p\cdot g\cdot\log_2\frac{p}{1-p-g+2pg}+(1-p)(1-g)\cdot\log_2\frac{1-p}{1-p-g+2pg}$$

$$\left.\frac{\partial I(X;Y)}{\partial g}\right|_{g=g_{opt}}=0\qquad (1-2p)\cdot\ln\underbrace{\frac{1-(p+g-2pg)}{p+g-2pg}}_{1}=0$$

$$g_{opt}=\frac{1}{2}$$

$$C(p)=(1-p)\cdot\log_2 2(1-p)+p\log_2 2p$$



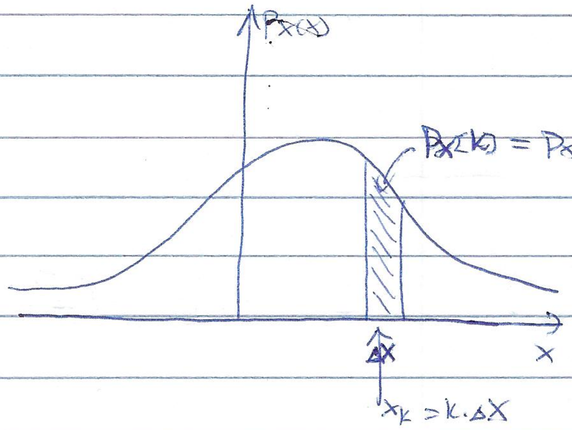
TIK

30.11.2012

# 3.5.6. Diferencialna entropija

$$H(x) = \sum_{k=1}^{K} P_x[k] \log_2 \frac{1}{P_x[k]}$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) \cdot \log_2 \frac{1}{p_x(x)} \cdot dx \qquad \text{dif. entropija}$$




7.12.12

$$H_x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{-\infty}^{\infty} P_x[k] \cdot \log_2 \frac{1}{P_x[k]} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum p_x(x_k) \cdot \Delta x \cdot \log_2 \frac{1}{p_x(x_k) \cdot \Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left( \sum_{-\infty}^{\infty} p_x(x_k) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p_x(x_k)}\right) \Delta x - \log_2 \Delta x \sum_{-\infty}^{\infty} p_x(x_k) \cdot \Delta x \right)$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) \cdot \log_2 \frac{1}{p_x(x)} dx}_{h(x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \log_2 \Delta x \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) dx}_{1}$$

$$\boxed{H_x = h(x) - \lim_{\Delta x \to 0} \log_2 \Delta x}$$

dif. ent.

Zvezni vir ima neskončno simbolov za to gre tudi entropija proti $\infty$.
Uporabno je za primerjanje, ker je tista limita ista in se odšteje.

# Diferencialna entropija gaussove porazdelitve

Pomožna zveza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\log_2\frac{p_Y(x)}{p_X(x)}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\cdot\ln\frac{p_Y(x)}{p_X(x)}\,dx \leq \frac{1}{\ln 2}\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\left(\frac{p_Y(x)}{p_X(x)}-1\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_Y(x)\,dx}_{1} - \frac{1}{\ln 2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx}_{1} = \emptyset$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\cdot\log_2\frac{1}{p_X(x)}\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\log_2\frac{1}{p_Y(x)}\,dx$$

$$\boxed{h(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\cdot\log_2\frac{1}{p_Y(x)}\,dx}$$

Izberemo X in Y, tako da imata enako srednjo vrednost $\bar{X}=\bar{Y}=\mu$
- imata enako varianco oz. standardno deviacijo $\sigma_X=\sigma_Y=\sigma$
- X ima poljubno porazdelitev, Y pa Gaussovo

$$p_Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$h(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\cdot\log_2\left(\sigma\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right)dx = \log_2\left(\sigma\cdot\sqrt{2\pi}\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx}_{1} + \frac{1}{2\sigma^2}\cdot\log_2 e\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 p_X(x)\,dx}_{\sigma^2}$$

$$h(x) \leq \frac{1}{2}\log_2\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\log_2 e = \frac{1}{2}\left[\log_2 \sigma^2 2\pi + \log_2 e\right] =$$

$$\boxed{h(x) \leq \frac{1}{2}\log_2\left(2\pi e\sigma^2\right)}$$

← enačaj velja ko je tudi x gaussova nakl. spr.

Če damo za $p_x$ Gaussovo porazdelitev, pot je desna stran enaka gaussovi porazdelitvi

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_Y(y) \cdot \log \frac{1}{P_Y(y)} dx = h(y) \leq \frac{1}{2} \log_2(2\pi e \sigma^2)$$

$h(x) \leq h(y)$ ; Y je gaussova nakl. spremenljivka
X je poljubna nakl. spr. z enako varianco $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

Zaključki:
1) Gaussova nakl. spr. s končno varianco $\sigma^2$ ima maximalno možno diferencialno entropijo
2) $h(x)$ za gaussovo nakl. spr. je enolično določena z varianco in je neodvisna od srednje vrednosti

## 3.5.7. Entropija (Vzajemna) dveh zveznih nakl. spr.

$$I(x;y) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} P_{XY}(x_j; y_k) \cdot \log_2 \frac{P_{Y/X}(y_k|x_j)}{P_Y(y_k)}$$ ; diskretne nakl. spr.

$$I(x;y) = \iint_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(x,y) \cdot \log_2 \frac{P_{Y/X}(x,y)}{P_Y(y)} dx\, dy$$ ; zvezna nakl. spr.

- za diskretno nakl. spr na vhodu:

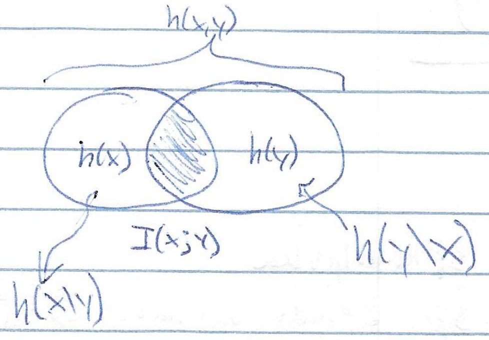
$$p_x(x)\, dx \Rightarrow P_X(x_j) > P(x = x_j)$$

$$I(x,Y) = \sum_{j=1}^{J} \int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(x_j,y) \cdot \log_2 \frac{P_{Y/X}(x_j,y)}{P_Y(y)} dy$$

$$\log_2 \frac{P_{Y/X}(x,y)}{P_Y/y} = \log_2 \frac{P_{Y/X}(x,y)\, p_X(x)}{P_Y(x) \cdot p_X(x)} = \log_2 \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x) \cdot P_Y(y)}$$

$$I(x;y) = h(x) + h(y) - h(x,y) \quad ; \quad h(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x,y) \log_2 \frac{1}{p_{xy}(x,y)} \, dx\, dy$$

$$I(x;y) = h(x) - h(x/y) = h(y) - h(y/x)$$ ; prenesena entropija je vedno manjša od entropije na vhodu.




## 3.5.8. Kapaciteta Gaussovega kanala

$$y[n] = x[n] + \eta[n]$$ → beli gaussov šum

$y[n] = y[n \cdot T]$ ; $T$ je perioda, $\frac{1}{T}$ pa frekvenca simbolov

$\eta[n]$ ... nakl. spr. z gaussovo distribucijo

$\overline{\eta^2} = \sigma_n^2 = N \quad ; \quad \overline{\eta} = 0$

- Za max. entropijo na vhodu izberemo $x[n]$ kot zvezno nakl. spremenljivko:

$$I(x;y) = h(x) - h(x|y)$$

- Za $p_x(x)$ izberemo porazdelitev, ki ima maximalno dif. entropijo pri omejeni moči (varianci):

$S = \overline{x^2} = \sigma_x^2 \quad ; \quad \overline{x} = 0$ $\quad$ $p_x(x)$ pa je gaussova porazdelitev

$$h_x = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma_x^2) = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e S)$$

TIIK 7. 12. 2012

• $Y[n]$ je vsota dveh ~~n~~ neodvisnih gaussovih nakl. spremenljivk, torej je tudi $y[n]$ gaussova.

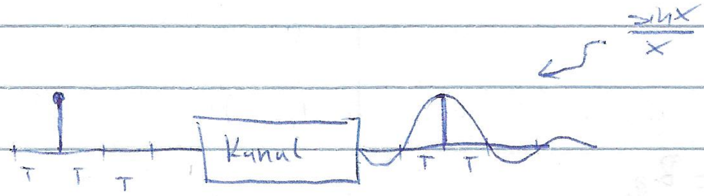
• $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \sigma_\eta^2$

• $\bar{Y} = \bar{X} + \bar{\eta} = 0$

• $\sigma_Y^2 = S + N$

• Za kanal brez spomina (ni upliva med simboli) mora širina kanala (zgornja frekvenčna meja) izpolnjevati 1. Nyquistov kriterij, t.j. prenos impulzov brez interference.

$\boxed{f_m \geq B = \frac{f_d}{2}}$ ← frekvenca simbolov $= \frac{1}{T}$ B ... mejna frekvenca



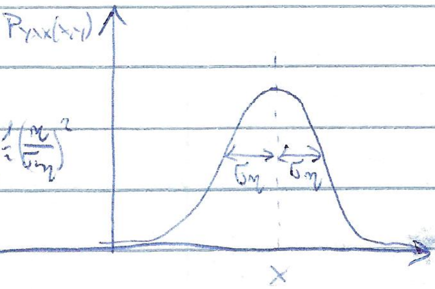

$I(X;Y) = h(Y) - h(Y|X)$

$p_{Y|X}(x,y)$ gostota verjetnosti sprejetega signala pri znani vrednosti X

$y = x + \eta$

$\eta = y - x$

$p_\eta(\eta) = \frac{1}{\sigma_\eta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\sigma_\eta}\right)^2}$




$p_{Y|X}(x,y) = \frac{1}{\sigma_\eta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-x)^2}{\sigma_\eta^2}} = p_\eta(y-x)$

$$h(Y|X) = \iint_{-\infty}^{\infty} p_{Y/X}(x,y) \cdot p_X(x) \cdot \log_2 \frac{1}{p_{Y/X}(x,y)} \, dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_\eta(y-x) \log_2 \frac{1}{p_\eta(y-x)} \, dy}_{h(\eta)}$$

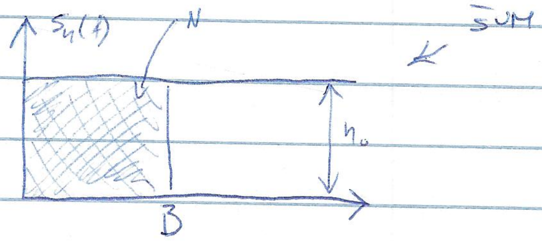
$h(\eta)$ - ni odvisna od srednje vrednosti, ki jo predstavlja X.

$$h(Y|X) = h(\eta) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx = h(\eta)$$

$$I(X;Y) = h(Y) - h(\eta) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e \sigma_Y^2) - \frac{1}{2}\log_2(2\pi e \sigma_\eta^2) =$$

$$I(X;Y) = \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_\eta^2} = \frac{1}{2}\log_2 \frac{S+N}{N}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)}$$ [Sh/simbol] ; kapaciteta gaussovega kanala




$N = B \cdot n_0$

$f_d \leq 2B$

$$\boxed{C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{n_0 \cdot B}\right)}$$ [Sh/s] ; tk. zapis enačbe

TIIK 7.12.12

## 3.5.9. Teorem o kodiranju na šumnem kanalu

$H < C$ potem niz lahko prenašamo s poljubno majhno verjetnostjo napake, to pa lahko dosežemo, če je dolžina sporočila dovolj dolga. Če gre dolžina $\to \infty$, gre verjetnost napake $\to 0$.

14.12.2012

## 3.5.10 Pomen kapacitete Gaussovega kanala

$$C = B \log_2\left(1 + \frac{S}{n_0 B}\right)$$

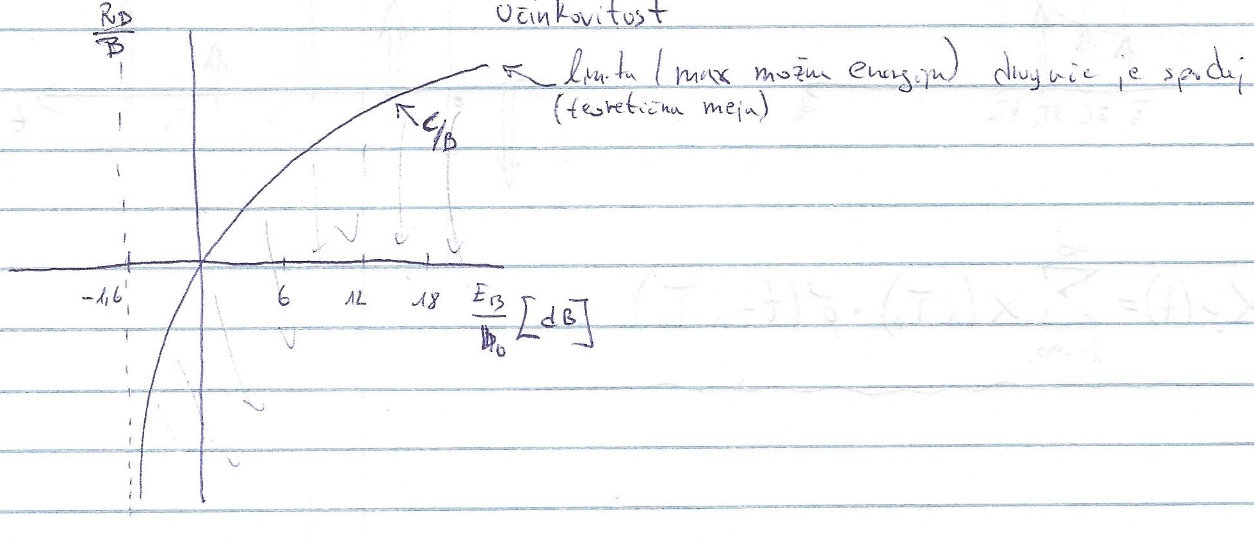
$$S = C \cdot E_B$$ ; $E_B$ energija za en bit

$$\frac{C}{B} = \log_2\left(1 + \frac{C \cdot E_B}{B \cdot n_0}\right)$$ ; $\frac{C}{B}$ ... učinkovitost kanala $\left[\frac{bit/sec}{Hz}\right]$

$n_0$ gostota šuma $\left[\frac{W}{Hz}\right]$

$$1 + \frac{C}{B} \cdot \frac{E_B}{n_0} = 2^{(C/B)} \Rightarrow \boxed{\frac{E_B}{n_0} = \frac{2^{(C/B)} - 1}{C/B}}$$

$\frac{E_B}{n_0}$ učinkovitost



$$C = B \cdot \log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right) = \frac{S}{n_0}\frac{n_0 B}{S}\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right) = \frac{S}{n_0}\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right)^{\frac{n_0 B}{S}}$$

$$\lim_{B\to\infty} = \frac{S}{n_0}\lim_{B\to\infty}\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right)^{\frac{n_0 B}{S}} = \frac{S}{n_0}\cdot\log_2 e = \frac{S}{n_0}\cdot\frac{1}{\ln 2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

# 4. Kodiranje analognih signalov

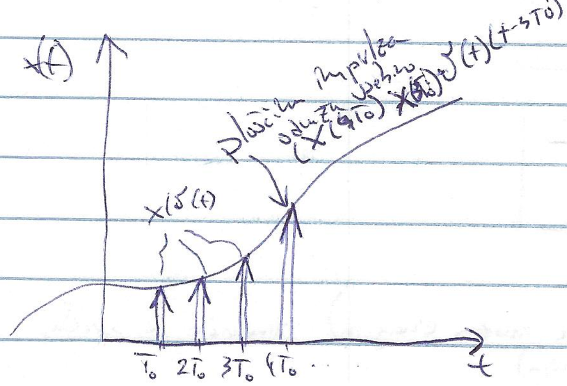
## 4.1. Osnovni postopek oz. formatiranje signala

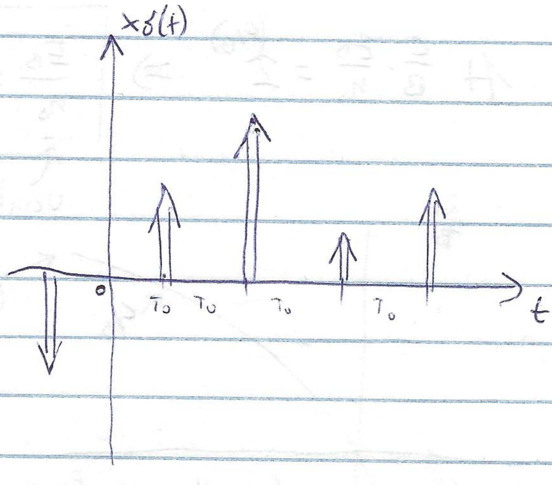
### 4.1.1. Diskretizacija po času - Vzorčenje

#### 4.1.1.1. Vrste vzorčenja

a) Idealno vzorčenje:

Vzorčenje z dirackovimi impulzi $(\delta(t))$

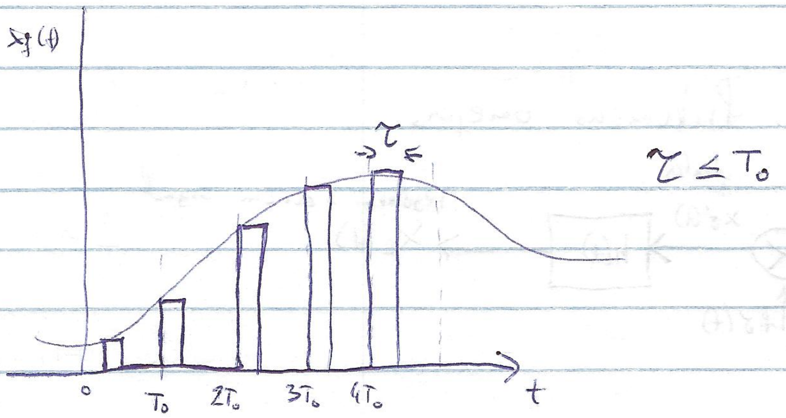


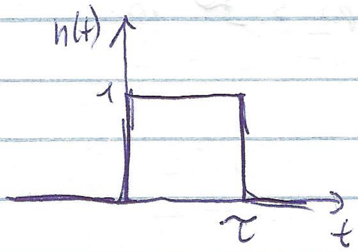

$$X_\delta(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i\cdot T_0)\cdot\delta(t-i\cdot T_0)$$

TIIK 14. 12. 2012

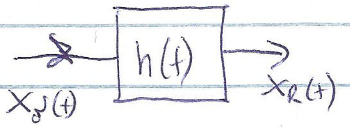
## b) Regularno vzorčenje (flat top sampling)




$$X_R(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i \cdot T_0) \cdot h(t - iT_0)$$




impulzni odziv zadrževalnika

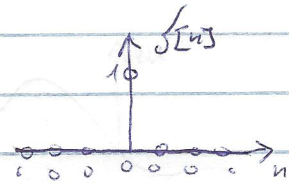



$X_\delta(\omega)$ $H(\omega)$ $X_R(\omega) = H(\omega) \cdot X_\delta(\omega)$

## c) Časovno diskreten signal

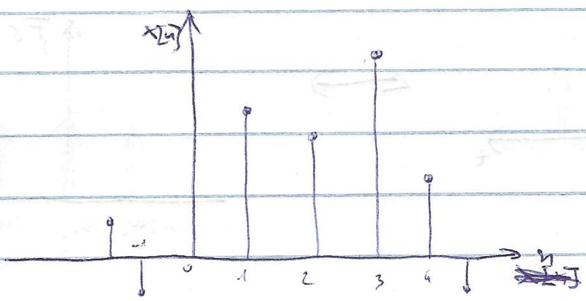
$$x(n \cdot T_0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i \cdot T_0)\, \delta[n-i]$$

↖ kroneckerjeva $\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{za } n=0 \\ 0 & \text{za } n \neq 0 \end{cases}$



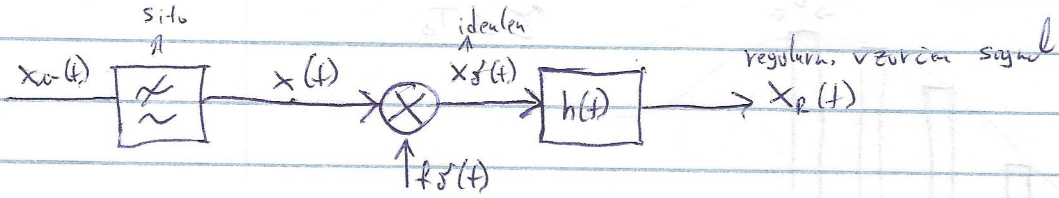

↓ spustimo $T_0$

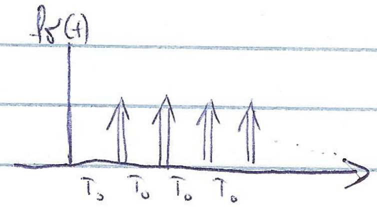
$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i \cdot T_0) \cdot \delta[n-i]$$



## 4.1.1.2 Postopek vzorčenja v časovnem prostoru

vhodni signal $x_a(t)$ ga frekvenčno omejimo




$$f_\delta(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - i \cdot T_0)$$ ← je periodičen signal

obstaja zapis s $\mathcal{F}$ vrsto

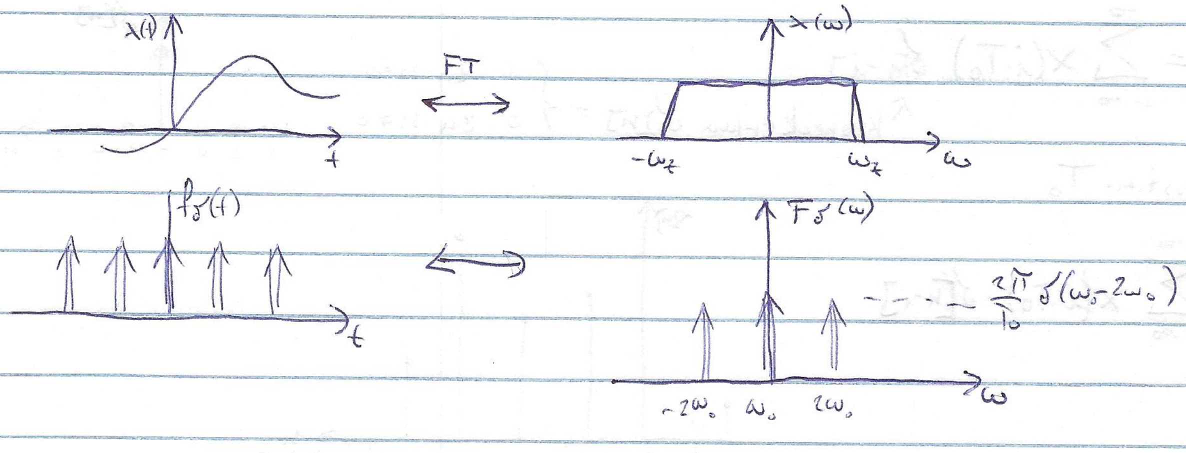
→ osnovna krožna frekvenca

$$f_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$x_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \underline{\underline{\frac{1}{T_0}}}$$

$$f_\delta(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

## 4.1.1.3. Spekter idealno vzorčenega signala



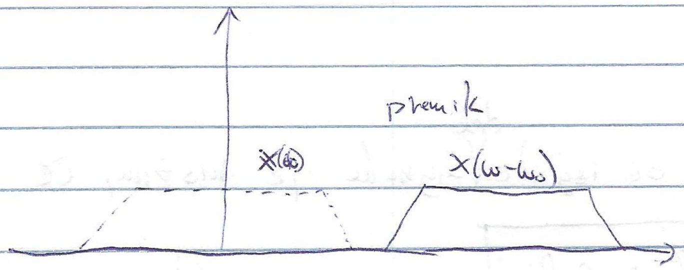
TIIK 14.11.2012

$$f_\delta(t) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \longleftrightarrow F_\delta(\omega) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega - k\omega_0)$$

Pravila za FT

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(\omega-\omega_0)$$

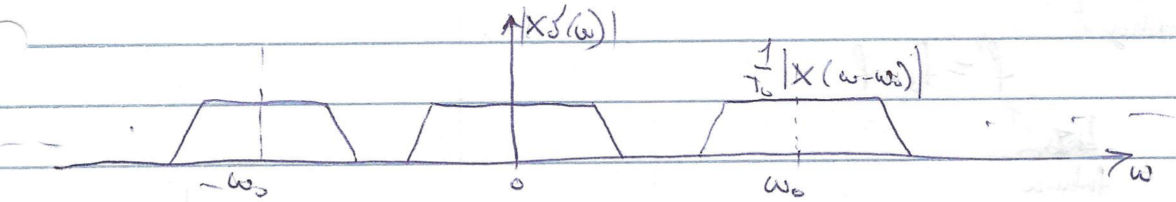



$$x_\delta(t) = x(t)\cdot f_\delta(t) = x(t)\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)e^{jk\omega_0 t}$$

$$\updownarrow$$

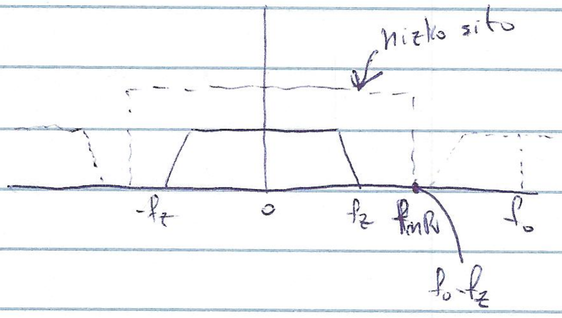
$$\boxed{X_\delta(\omega) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_0)}$$

Frekvenčni spekter idealno vzorčenega signala



## 4.1.1.4. Teorem o vzorčenju in rekonstrukciji - WKS teorem

1) Rekonstrukcija zveznega signala




$$f_z < f_{mf} < f_0 - f_z$$

2) Rekonstrukcija brez popačenja oz. izgube dela signala je možna, če velja:

$$f_0 - f_z > f_z \quad ; \quad \boxed{f_0 \geq 2 f_z}$$

$f_0$ – frekvenca vzorčenja; $f_z$ – zgornja mejna frekvenca

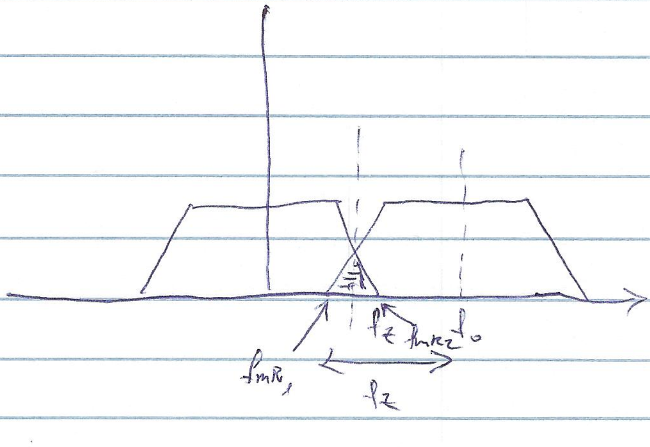
WKS - Whittaker (1915), Kotelnikov (1933), Shannon (1949)

v praksi je $f_0 \geq 2{,}2 f_z$

3) Če pogoj $f_0 \geq 2f_z$ ni izpolnjen, pride do prekrivanja spektrov, (aliasing)

$$f' = f_0 - f$$

$f'$ – lažna frekvenca




$f_{mR_1} = f_0 - f_z$ ← izguba spektra nad to frekvenco

$f_{mR_2} = f_0 - f_z \div f_z$ pri je popačen (spekter)

4) Signal pred vzorčenjem vedno vodimo preko nizkega sita z mejno frekvenco $f_m$;

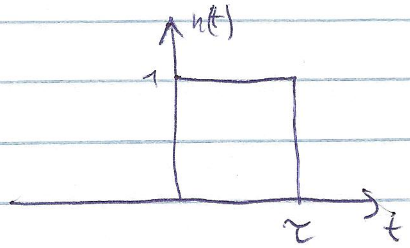
$$f_z \le f_m \le \frac{f_0}{2}$$

Zato, da se frekvence nad $f_0/2$ ne preslikajo v spekter signala $0 \div f_z$

## 4.1.1.5 Spekter regularno vzorčenega signala

$$x_\delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow x_R(t) = x_\delta(t) * h(t)$$

$$X_R(\omega) = X_\delta(\omega) \cdot H(\omega)$$

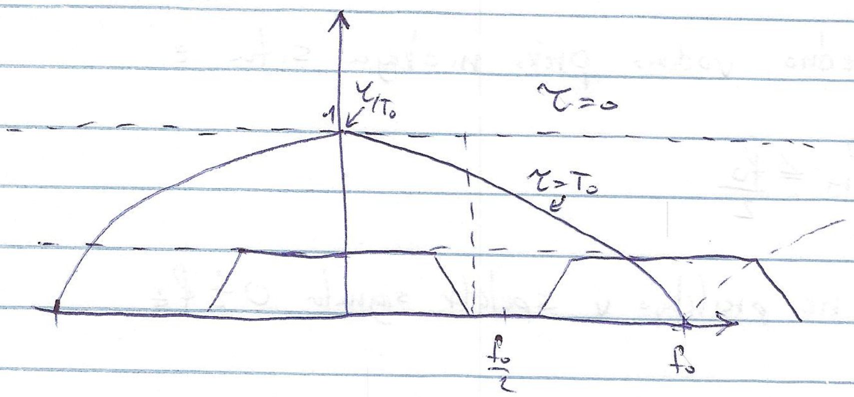


$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt =$$

$$H(\omega) = \tau \cdot \frac{e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}}{2j\frac{\omega\tau}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} =$$

$$\boxed{H(\omega) = \tau \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \cdot e^{-\left(j\frac{\omega\tau}{2}\right)}}$$

$$\boxed{X_R(\omega) = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_0) \cdot \underbrace{e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}}_{\text{linearni fazni zakasnitev za } \frac{\tau}{2}}}$$



$$\left|\frac{H(f)}{H(0)}\right| = \left|\frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}\right|$$

za $\tau \to 0$ ... idealno vzorčenje

$\tau = T_0$ ... najširši impulz

$$\left|\frac{H(f)}{H(0)}\right| = \frac{\sin\left(\frac{\pi f}{f_0}\right)}{\left(\frac{\pi f}{f_0}\right)} = \begin{cases} 1 & \text{za } f=0 \\ 2/\pi & \text{za } f=f_0/2 \\ 0 & \text{za } f=f_0 \end{cases}$$

$2/\pi$ za $f=f_0/2$ – dušenje – 3,9 dB

21.12.2012

Osnovni del spektra $x_R$ s širino $\tau$

$$|X_R(f)| = \underbrace{\frac{\tau}{T_0}}_{\text{slabljenje}} \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot |X(f)|$$

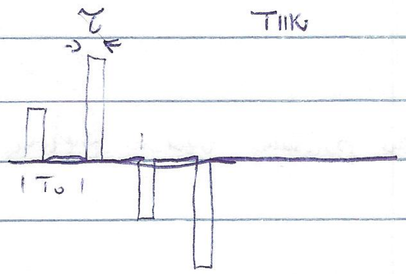
frekvenčno slabljenje višjega dela spektra odpravimo z:

a) korekcijsko sito

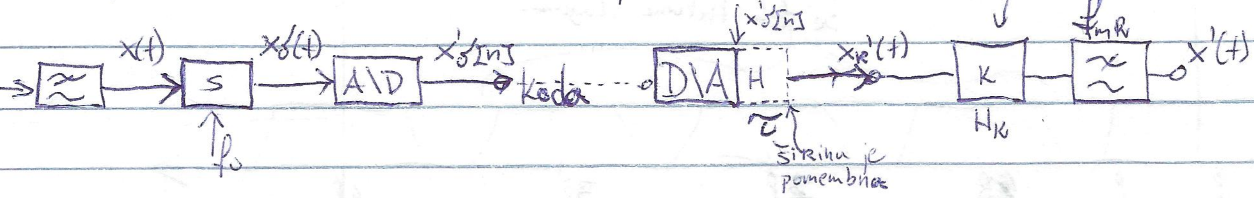
b) z dovolj ozkimi impulzi na izhodu D/A pretvornika in ustreznim ojačanjem

c) z digitalno interpolacijo in enostavnim analognim filtriranjem

21.12.'12




Izvedba prenosa vzorcev signala in njihova rekonstrukcija

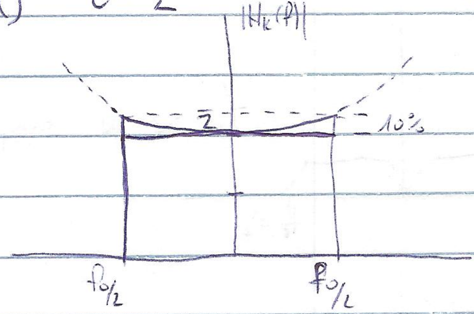



$$|X_R'(f)| = |X_R(f)| \cdot |H_K(f)| = |X(f)|$$

$$|H_K(f)| = \frac{|X_R(f)|}{|X(f)|} = \frac{T_0}{\tau} \frac{\pi \tau f}{\sin(\pi \tau f)}$$

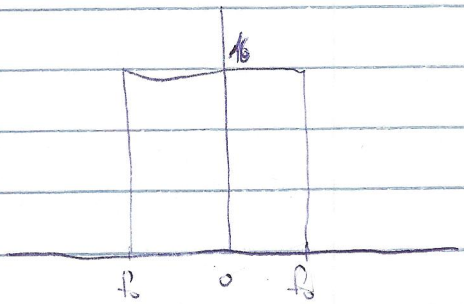
Korekcijski faktor

a) $\tau = \frac{T_0}{2}$ $\qquad \rightarrow \pi f \tau = \pi \frac{f_0}{2} \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{4}$



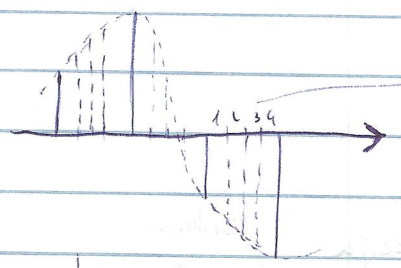

$$\frac{\pi/4}{\sin \pi/4} = \frac{\pi}{4} \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \doteq 1.1 \Rightarrow 10\% \text{ več}$$

b) dovolj ozki impulzi $\tau = \frac{T_0}{16}$

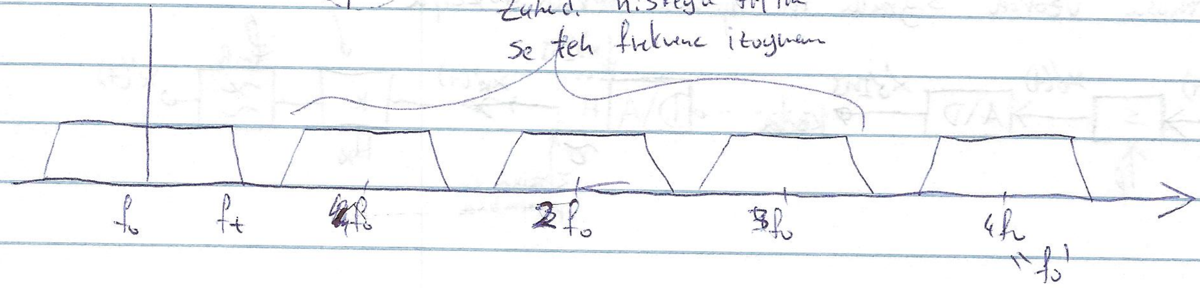


c) Z interpolacijo

interpoliramo nove vrednosti, navidezno povišamo vzorčno frekvenco v tem primeru za faktor 4




Zaradi nizkega filtra se teh frekvenc izognemo

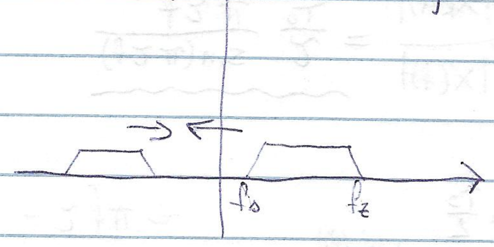



## 4.1.1.6. Vzorčenje ozkopasovnih signalov

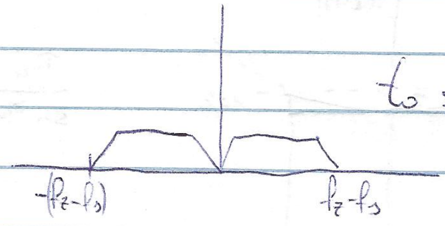
$$f_0 \ge 2(f_z - f_s) = 2B$$

$$f_0 \ge 2B$$

Frekvenčna translacija




To se ne izvaja



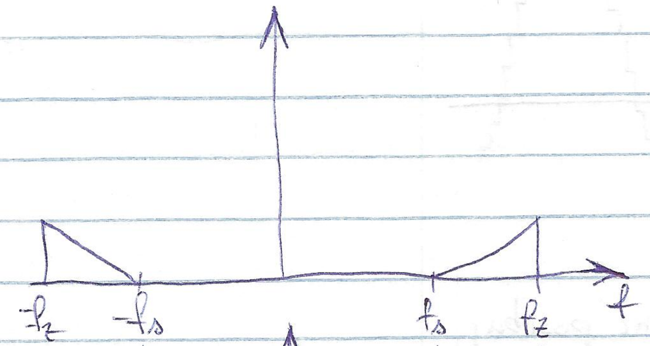

Praktično to uresničimo če velja $f_s > B$

$f_z \ge k \cdot B$ ; $k > 2$ ; $k \in \mathbb{N}$

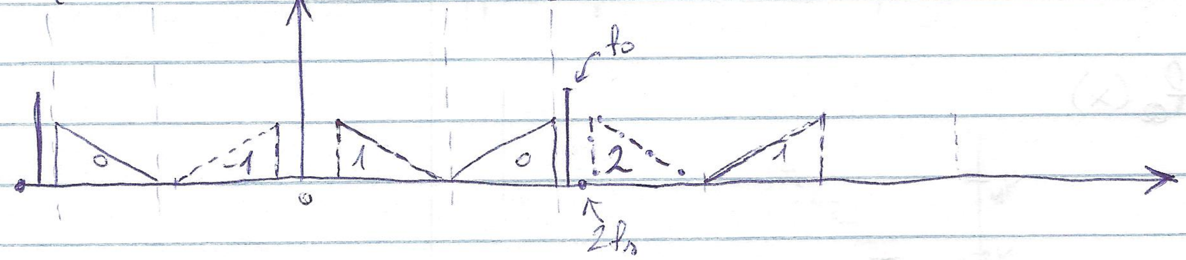
$$k = \mathrm{int}\left[\frac{f_z}{f_z - f_s}\right]$$

$$\frac{2f_z}{k} \le f_0 \le \frac{2f_s}{k-1}$$

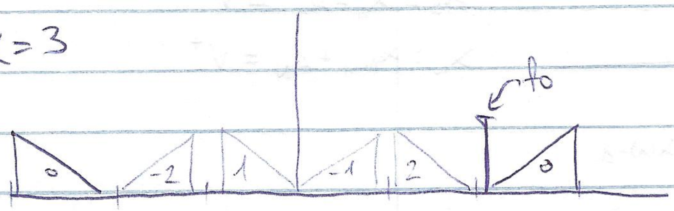
# Zgled za $k=2$



$f_z \leq f_0 \leq 2f_s$



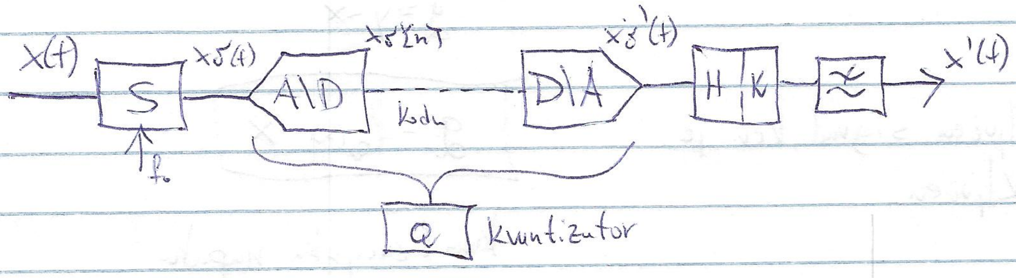
$k=3$

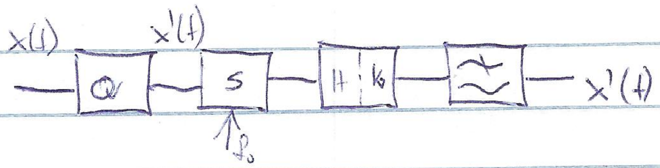


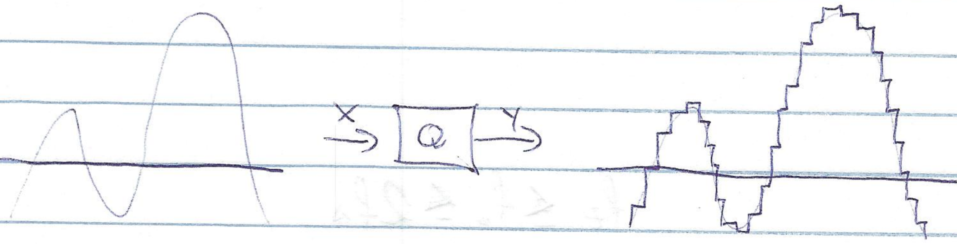
$\frac{2}{3} f_z \leq f_0 \leq f_s$

## 4.1.2. Diskretizacija amplitude - kvantizacija

### 4.1.2.1. Kvantizator - vir degradacije



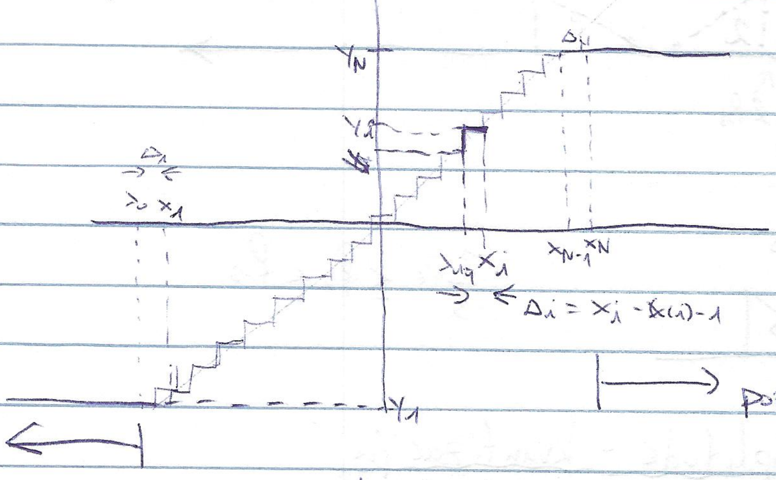





kvantiziran signal

Skalarni kvantizator - obdeluje vsak vzorec posebaj

$$y = f_Q(x)$$




$x_0 = x_1 - \Delta_1 = V^-$

$x_N = x_{N-1} + \Delta_N = V^+$

neg. prekora ← doseg kvantizatorja →

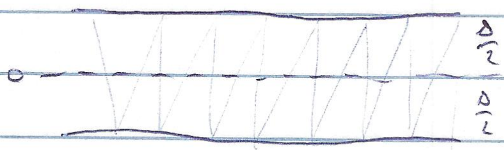
$$y = x + q$$

$$q = y - x$$

$$\boxed{q = f_Q(x) - x}$$

kvantizacijska napaka

Q(t) je naključen signal, ker je x(t) tudi naključen



TIIK 21.12.2012

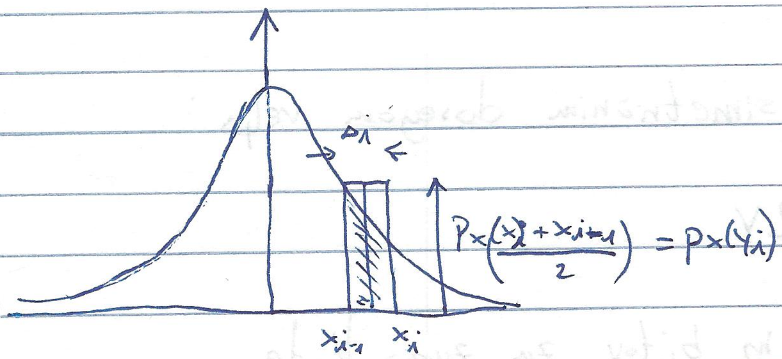
$$N_q = \overline{Q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 \cdot p(q)\,dq = \int_{-\infty}^{\infty} (f_Q(x)-x)^2 p_x(x)\,dx$$

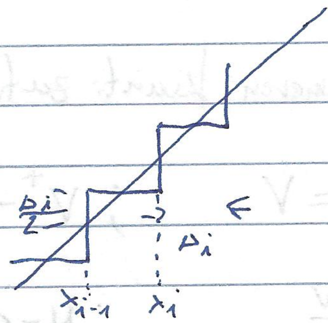
## 4.1.2.2. Moč ~~[illegible]~~ tega popačenja

$Q_z(t)$ - napaka v stopničastem delu
$Q_p(t)$ - napaka pri prikomčenju obsega

$\overline{Q^2} = \overline{Q_z^2} + \overline{Q_p^2}$ krajše $N_q = N_z + N_p$

$$N_z = \int_{V^-}^{V^+} (f_Q(x)-x)^2 p_x(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (y_i - x)^2 p_x(x)\,dx$$




$q \leq \frac{\Delta_i}{2}$ $\quad y_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$

$x_i = y_i - \frac{\Delta_i}{2}$
$x_i = y_i + \frac{\Delta_i}{2}$

$$N_z = \sum_{i=1}^{N} \int_{y_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{y_i + \frac{\Delta_i}{2}} (y_i - x)^2 \cdot p_x(y_i)\,dx = \sum_{Y=1}^{N} p_x(y_i) \int_{y_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{y_i + \frac{\Delta_i}{2}} (y_i - x)^2\,dx$$

$$\int_{y_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{y_i + \frac{\Delta_i}{2}} (y_i - x)^2\,dx = -\left.\frac{(y_i - x)^3}{3}\right|_{y_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{y_i + \frac{\Delta_i}{2}} = \frac{\Delta_i^3}{12}$$

$$N_z = \sum_{i=1}^{N} p_x(y_i) \cdot \frac{\Delta_i^3}{12}$$

$$P_\Delta(\Delta_i) = p_x(y_i) \cdot \Delta_i$$

$$= P(x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$

$$\boxed{N_z = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 \cdot P_\Delta(\Delta_i)}$$

sr. kvad. vrednost naše stopnice

$$\boxed{N_z = \frac{\overline{\Delta^2}}{12}}$$

Za enakomeren kvantizator velja: $\Delta_i = \Delta$ ; enake stopnice

$$\overline{\Delta^2} = \Delta^2 \Rightarrow \boxed{N_z = \frac{\Delta^2}{12}}$$

Za enakomeren kvantizator s simetričnim dosegom velja:

$V^+ = -V^- = V$ ; $V^+ - V^- = 2V$

$\Delta = \frac{2V}{N}$ ; $N = 2^m$ ; m bitov za zapis kode

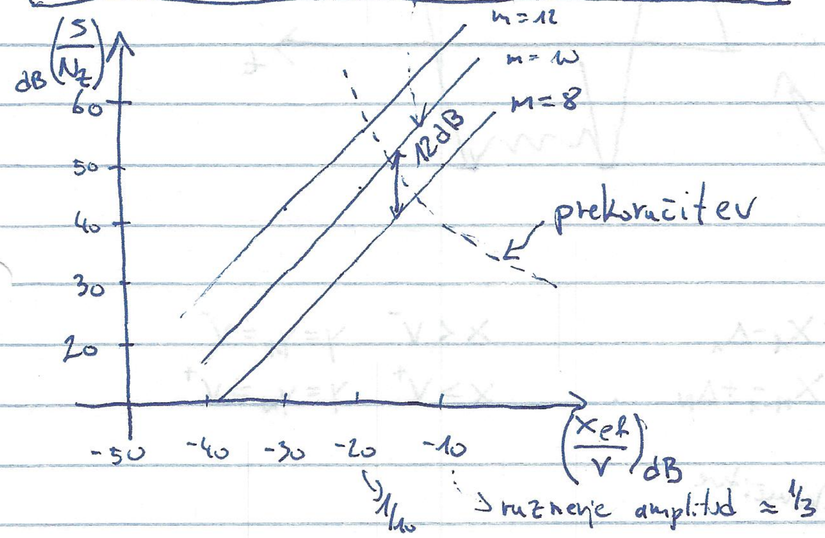
$$\frac{S}{N_z} = \frac{X_{eff}^2}{\sigma_z^2} = \frac{X_{eff}^2}{\Delta^2/12} = 12N^2 \frac{X_{eff}^2}{(2V)^2} = 3 \cdot 2^{2m} \cdot \left(\frac{X_{eff}}{V}\right)^2$$

TIK

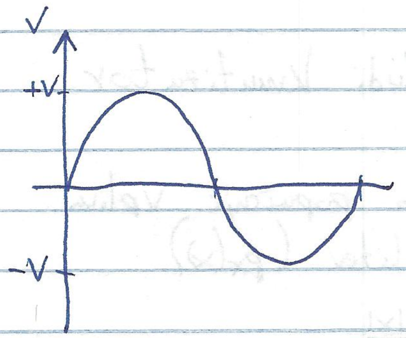
4.1.13

$$\left(\frac{S}{N_Z}\right)_{dB} = 10\cdot\log\frac{S}{N_Z} = 10\cdot\log 3 + m\cdot 20\log 2 + 20\cdot\log\frac{X_{ef}}{V}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N_Z}\right)_{dB} = 4{,}77 + 6{,}02\cdot m + \left(\frac{X_{ef}}{V}\right)_{dB}}$$




Vsak dodaten bit nam stopnico razpolovi, šum se dodu za 6 dB

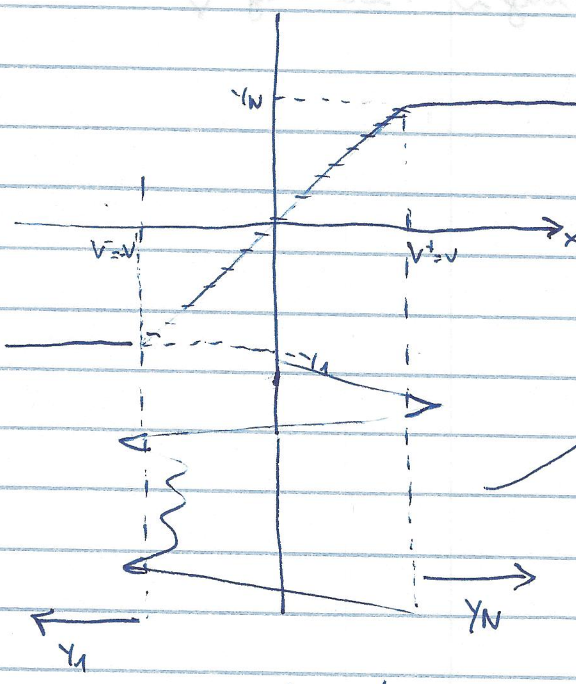


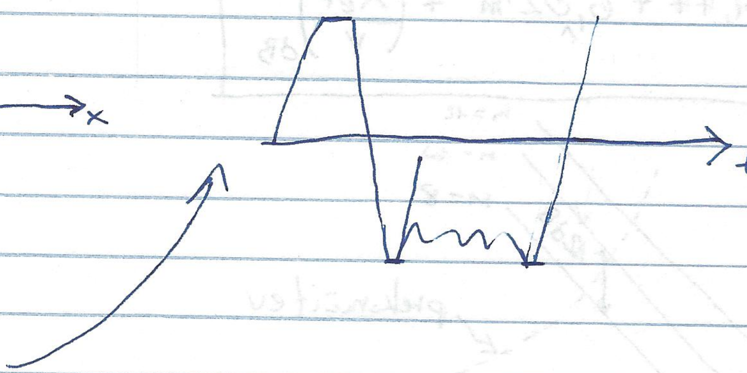

brez popačenja zaradi prekoračitve za sinus velja: $X_m = V$

$X_{ef} = V/\sqrt{2}$

$$\frac{X_{ef}}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow dB \Rightarrow 20\cdot\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\,dB$$

## 4.1.2.3. Prekoračitveno popačenje za simetrični kvantizator




$V^- = X_1 - \Delta_1$

$V^+ = X_{N-1} + \Delta_N$

$x < V^- \quad y = y_1 \doteq V^-$

$x > V^+ \quad y = y_N \doteq V^+$

moč prekoračitve

sr. kv. vrednost prekoračitve

$$N_p = \overline{Q_p^2} = \int_{-\infty}^{V^-} (y_1 - x)^2 \cdot p_x(x)\,dx + \int_{V^+}^{\infty} (y_N - x)^2 \cdot p_x(x)\,dx$$

Za zvokovne signale je $p_x(x)$ simetrična, kot je tudi kvantizator

$$N_p = 2 \cdot \int_{V}^{\infty} (V - x)^2 \cdot p_x(x)\,dx$$

prekoračitveno popačenje vpliva tudi porazdelitev $(p_x(x))$

- Za Laplaceovo porazdelitev : $p_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2}} \cdot e^{-\sqrt{2}\frac{|x|}{\sigma_x}}$ ; $\sigma_x = X_{ef}$

$$\boxed{N_p = X_{ef}^2 \cdot e^{-\sqrt{2}\frac{V}{X_{ef}}} = S \cdot e^{-\sqrt{2}\frac{V}{X_{ef}}}}$$

$$\frac{V}{X_{ef}} = 10^{\frac{(V/X_{ef})_{dB}}{20}}$$

$$\cancel{\frac{S}{N_p} = e^{\sqrt{2}\frac{|X_{ef}|}{V}}}$$

$$\boxed{\frac{S}{N_p} = e^{\sqrt{2}\frac{V}{X_{ef}}}}$$

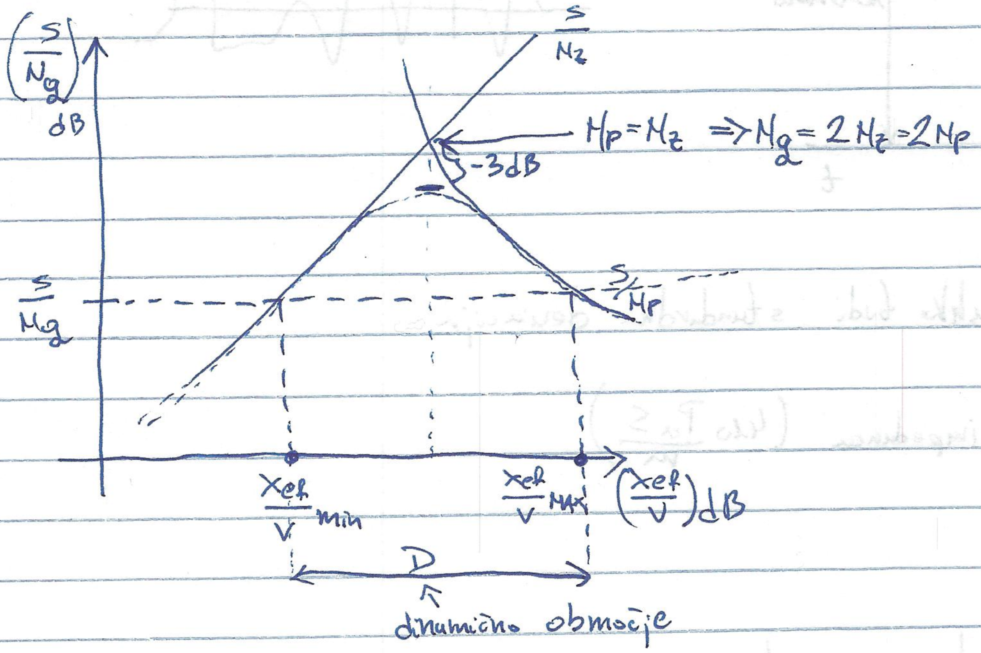
$$\boxed{\left(\frac{S}{N_p}\right)_{dB} = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \log e \cdot 10^{\frac{(V/X_{ef})_{dB}}{20}}}$$

TIIK 4.1.2013

## 4.1.2.4. Celotno popačenje in dinamično območje

$$N_Q = N_Z + N_P$$

$$\frac{S}{N_Q} = \frac{S}{N_Z} + \frac{S}{N_P} = \frac{1}{\frac{N_Z}{S} + \frac{N_P}{S}} = \left[\left(\frac{S}{N_Z}\right)^{-1} + \left(\frac{S}{N_P}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

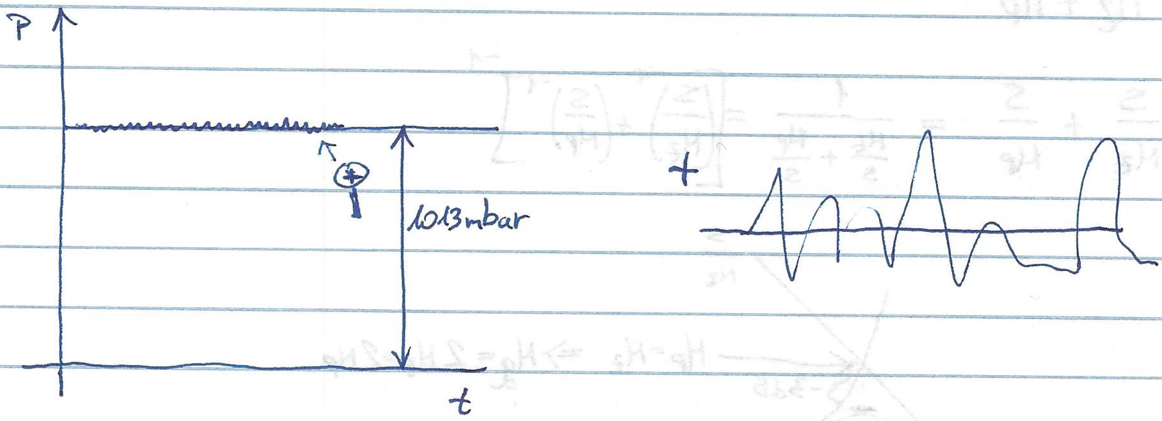



$$D_{dB} = 20\log\frac{X_{ef\,max}}{X_{ef\,min}} = 20\log\left(\frac{X_{ef\,max}}{V}\cdot\frac{V}{X_{ef\,min}}\right)$$

$$D_{dB} = 20\cdot\log\frac{X_{ef\,max}}{V} - 20\log\frac{X_{ef\,min}}{V} = \left(\frac{X_{ef\,max}}{V}\right)_{dB} - \left(\frac{X_{ef\,min}}{V}\right)_{dB}$$

# 4.2. Zvokovni signal

## 4.2.1. Zvok in sluh – enota za jakost zvoka




$p_0 = 20\,\mu Pa$ lahko tudi standardna deviacija

$j = \frac{p^2}{Z}$ → akustična impedanca $\left(410 \frac{Pa\,s}{m}\right)$

$j_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$

slušni prag je frekvenčno odvisen

$$SPL = 10 \cdot \log \frac{j_{ef}}{j_0} = 20 \cdot \log \frac{p_{ef}}{p_0}$$

## 4.2.2. Audio signal

Zajema frekvence med 20Hz in 20kHz

– Porazdelitev gostote verjetnosti: v glavnem uporabljamo Gaussovo porazdelitev:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2} \quad ; \quad \sigma_x = \sigma_x(t) = X_{ef}(t)$$

porazdelitev se spreminja

TIIK 4.1.2013

# Lestvica audio signalov po kvaliteti

| ime | f | D [dB] | $f_{o\,vzorčenje}$ |
|---|---|---|---|
| DVD audio | 20 Hz - 48 kHz | 140 | 96 kHz |
| CD | 20 Hz - 20 kHz | 96 | 44,1 kHz in 48 kHz |
| FM | 40 Hz - 15 kHz | 73 | 32 kHz |
| Srednje pasovni audio | 20 - 11 kHz | 73 | 24 kHz |
| AM | 50 - 7 kHz | 73 | 16 kHz |

# Perceptivne lastnosti sluha

- psihoakustične lastnosti

Za neprilagodljive (neadaptivne) sisteme upoštevamo le najsplošnejše:

- frekvenčni pas 20 Hz - 20 kHz
- absolutni prag slišnosti - večinoma frekvenčno neodvisen
- sprejemljivost motilnih signalov

primer: telefonski signal

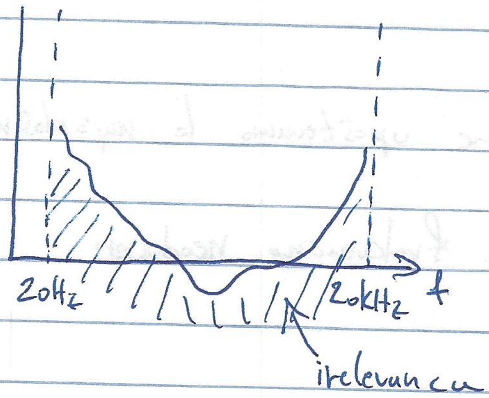
$f = 300 \div 3400\,\text{Hz}$ - zadostna razumljivost

| S/N | |
|---|---|
| ≥ 30 dB | šum slišimo le ob pavzah |
| ≥ 20 dB | zadovoljivo za glasne in srednje glasne govore |
| ≥ 16 dB | zadovoljivo le za tihe signale |

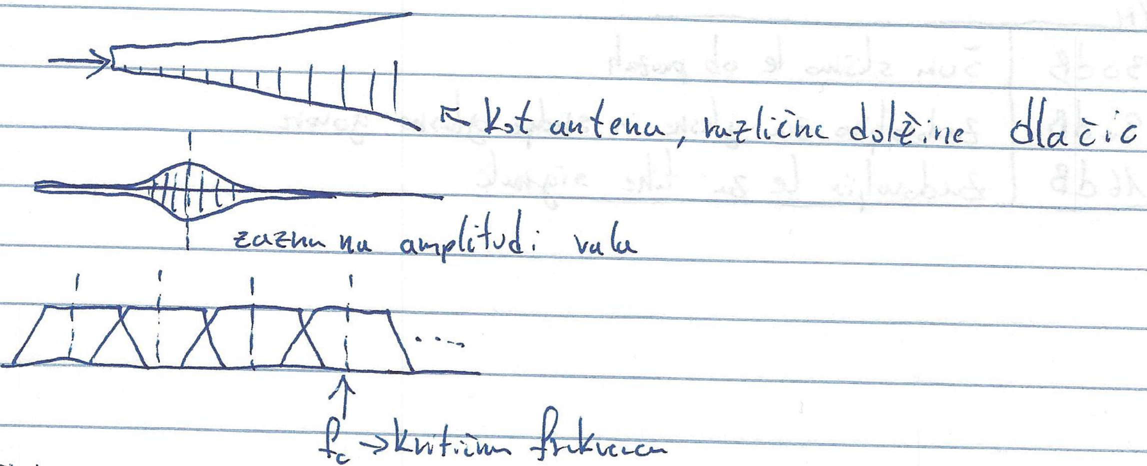
11.1.2012

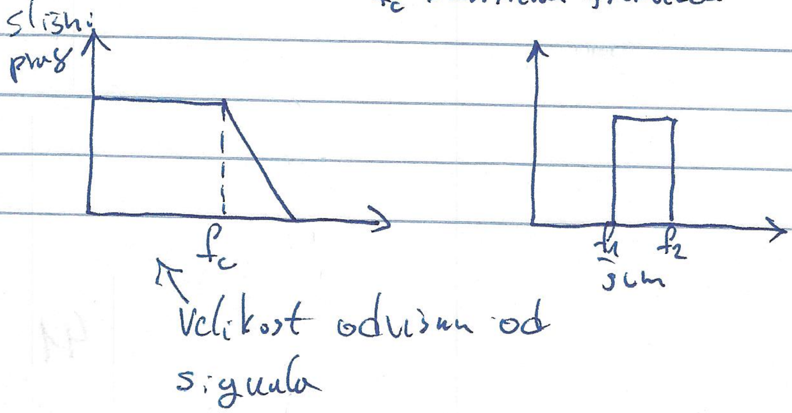
## 4.2.1.3. Redundanca in irelevanca audio signala

Redundanca je v podobnosti levega in desnega signala pri stereofonskem signalu, sicer je ne zaznamo prav mnogo.
irelevance pa je več.
Pomembnejša je irelevanca.
Imamo dve vrste irelevance: absolutna in relativna.
Relativna glede na ciljno kvaliteto
Absolutna je tisto, česar človek ne more zaznati

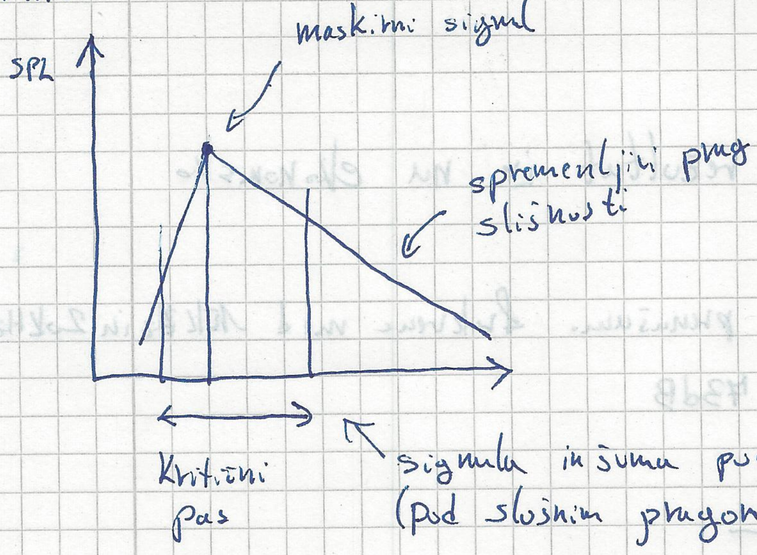



polž v ušesu:

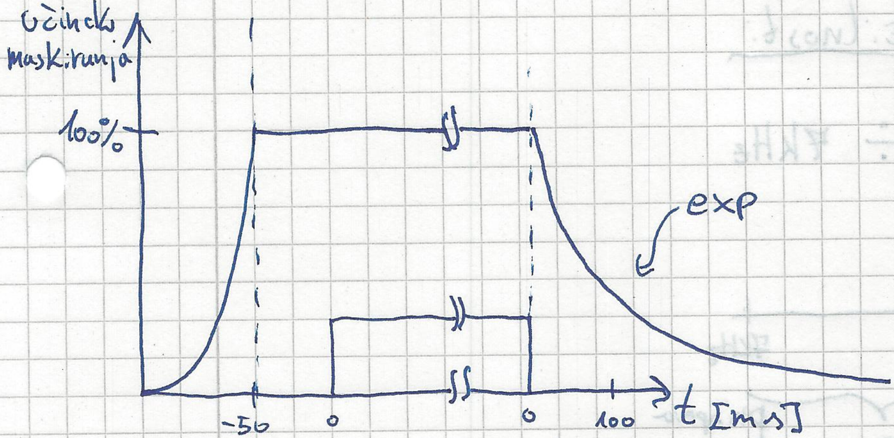


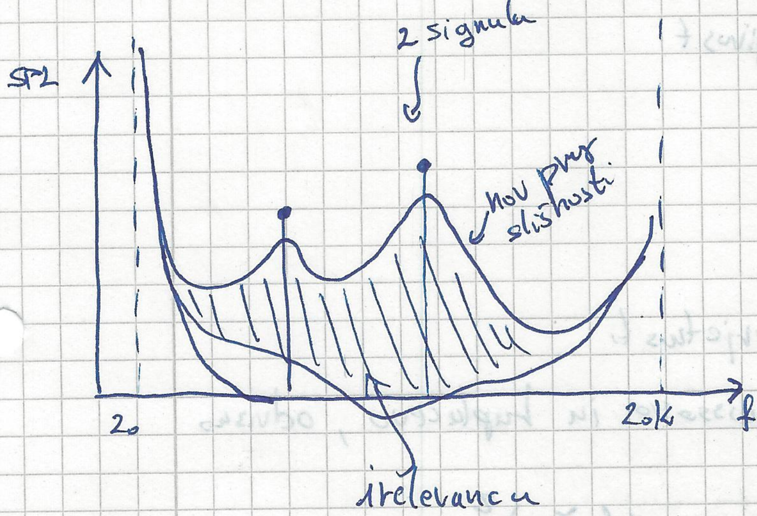




Če je šum pod slišnim pragom se ga ne sliši




signala in šuma pod tem območjem ne slišimo (pod slušnim pragom)




uporabljajo

- MP3, OggVorbis, AAC

## Relativna irelevanca

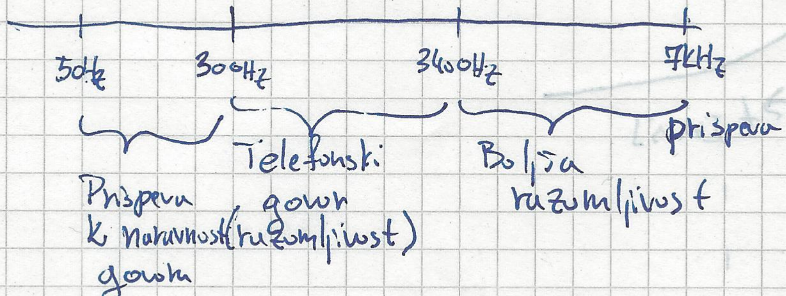
Gre na željeni končni rezultat in na ekonomsko tehnični kompromis.

FM audio signal: ne prenašamo frekvenc med 15kHz in 20kHz in dinamika 73dB

## 4.2.2 Govorni Signal

### 4.2.2.1. Osnovne značilnosti

Spekter: 50Hz ÷ 7kHz




### Statistične lastnosti

pdf - funkcija gostote verjetnosti

Se giblje med Gaussovo in Laplacevo, odvisno od dolžine segmenta.

Za gaussa: $p_x(x) = \frac{1}{\sigma_x(t)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_x(t)}\right)^2}$

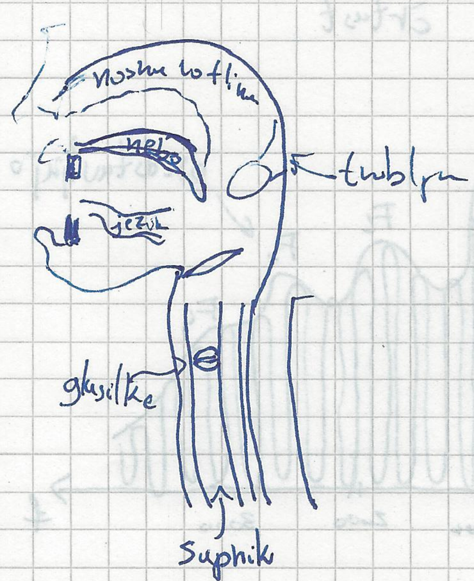
$\sigma_x$ je funkcija časa, za intervale pod 20ms vzamemo da je konstantna

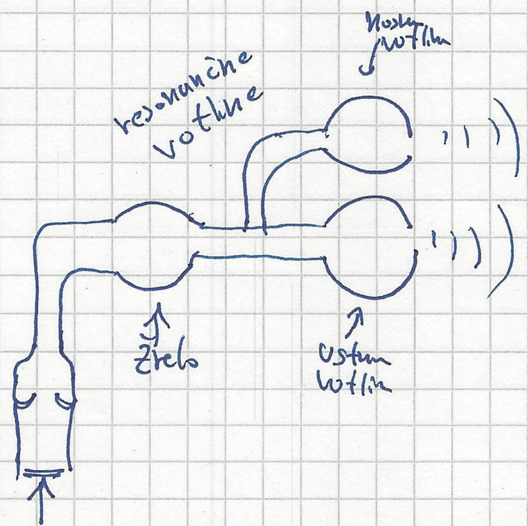
Za daljše segmente pa uporabljamo Laplacevo.

11.1.2013

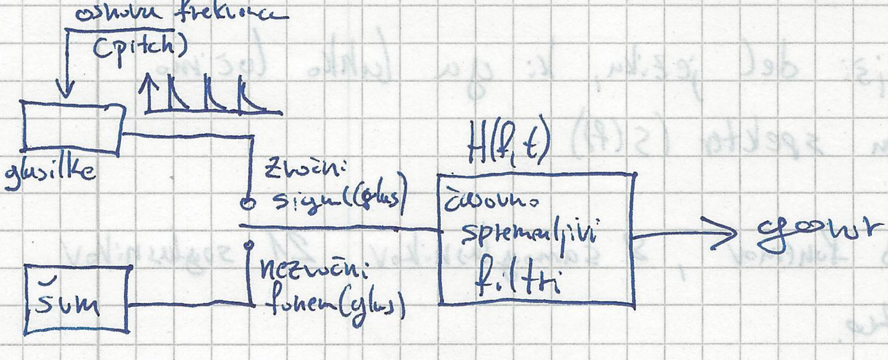
## 4.2.2.2 Govorni trakt

- glasilke
- žrelo
- nosna votlina
- ustna votlina
- jezik
- mehko in trdo nebo
- ustnice in dlesni



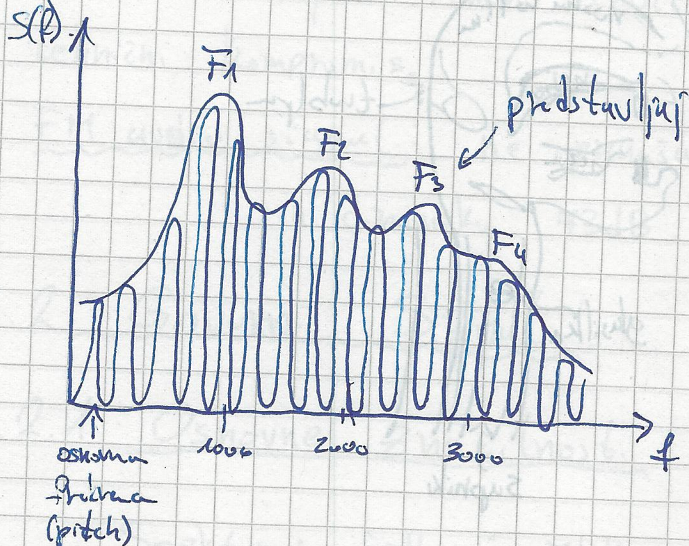




## Signalni model oblikovanja govora




fonem je najmanjši gradnik govora ki ima zvezen spekter

Spekter znotraj enega fonema je konstanten. Zvočni fonemi - spekter je črtast.




Nezvočni fonem


Fonem je najmanjši del jezika, ki ga lahko ločimo.
Ima konstanten spekter (S(f))

Slovenščina ima 29 fonemov, 8 samoglasnikov 21 soglasnikov
Angleščina jih ima 40.

Čas fonema traja 10-20 ms

Osnovna perioda:

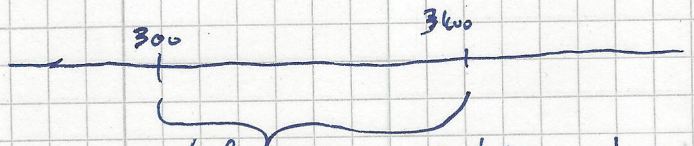
moški: 50-200 Hz

ženske: 120-400 Hz

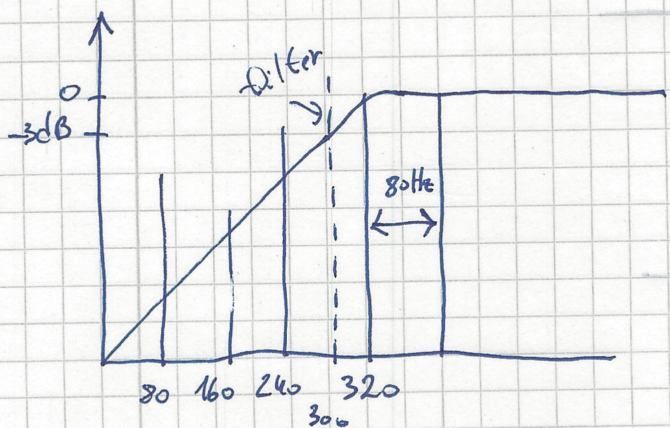
# 4.2.2.3. Redondanca in irelevanca govora

Redondanca je v govoru močno prisotna
- poznan je model nastanka govornega signala

## Irelevanca




tel. govor zadošča dvema pogojema:
- zadostna razumljivost
- relativno velika prepoznavnost govora




$f_0 = 8kHz$

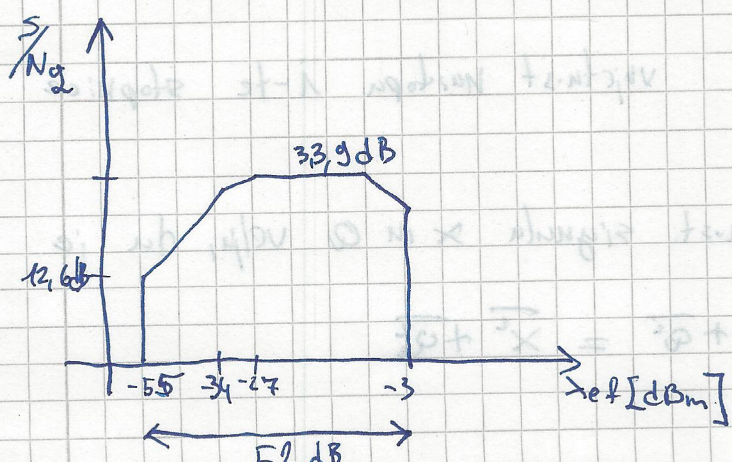
$\frac{f_0}{2} = 4kHz \rightarrow f_z = 3400Hz$

$f_s = 300Hz$

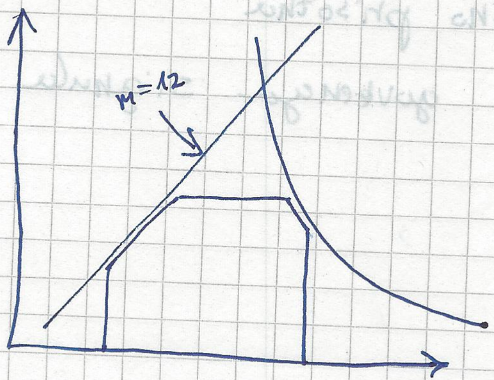
# 4.3. Kodiranje govora

## 4.3.1. Neenakomerna kvantizacija (logaritemska kompresija)

ITU-T G.712 predvideva konstantno razmerje S/N na širokem področju

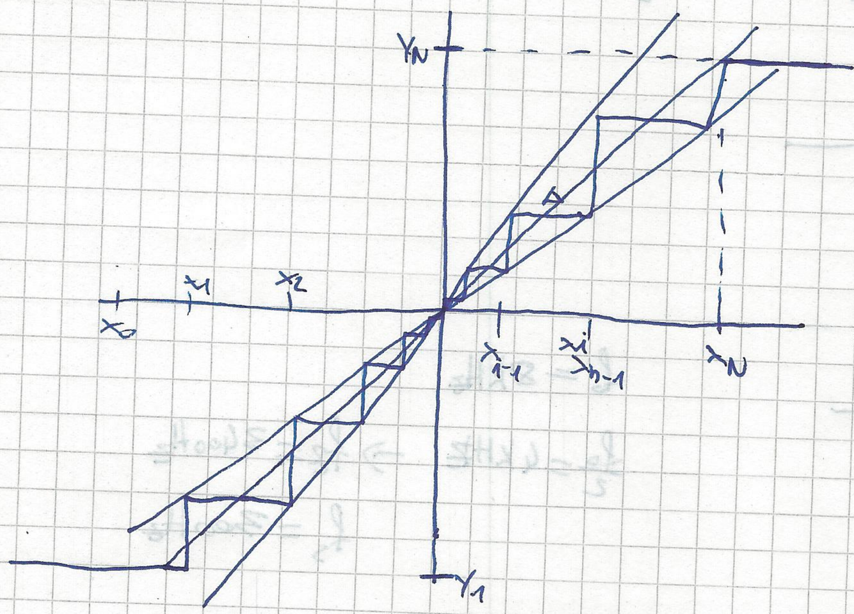


Za enakomerni kvantizator




$R = m \cdot f_0 = 12 \cdot 8\,kHz = 96\,kbit/s$ ← preveč

Zato uporabimo neenakomerno kvantizacijo




$$x \rightarrow \boxed{Q} \xrightarrow{Y} \qquad Y = f_e(x) = x + q$$

$$\frac{S_x}{N_z} \qquad \overline{Q^2} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 P(\Delta_i) = N_z$$

$$P_{\Delta i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_x(x)\,dx \qquad \text{vrjetnost nastopa } i\text{-te stopnice}$$

Zaradi statistične neodvisnosti signala $x$ in $Q$ velja, da je

$$\overline{Y^2} = \overline{(x+Q)^2} = \overline{x^2} + \underbrace{\overline{2xQ}}_{0} + \overline{Q^2} = \overline{x^2} + \overline{Q_m^2}$$

$$S_Y = S_x + N_z$$

$$\boxed{\frac{S_X}{N_Z} = \frac{S_Y - N_Z}{N_Z} = \frac{S_Y}{N_Z} - 1}$$

$$P_Y(y_i) = P_\Delta(\Delta_i)$$

$$\overline{Y^2} = \sum_{i=1}^{M} y_i^2 P_Y(y_i) = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 P_\Delta(\Delta_i)$$

Zaradi simetričnosti spremenimo indekse

$$(1, 2, \ldots M) \rightarrow (-M, -(M-1), \ldots -2, -1, 1, 2, \ldots M)$$

Upoštevamo tudi $\Delta_{-i} = \Delta_i$

$$S_Y = \overline{Y^2} = 2 \cdot \sum_{j=1}^{M} y_j^2 \cdot P_\Delta(\Delta_j)$$

$$N_Z = \frac{1}{12} \cdot 2 \sum_{j=1}^{M} \Delta_j^2 P_\Delta(\Delta_j)$$

$$\frac{S_X}{N_Z} = 12 \cdot \frac{\sum_{j}^{N} y_j^2 \cdot P_\Delta(\Delta_j)}{\sum_{j}^{N} \Delta_j^2 P_\Delta(\Delta_j)}$$