

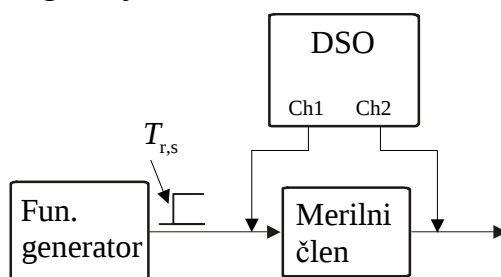
STROMAR⁵

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko znaša dvižni čas merilnega člena T_r , če smo ga merili z dvokanalnim DS osciloskopom z $B = 100\text{ MHz}$ in $f_s = 10\text{ MHz}$. Na prvem kanalu smo merili dvižni čas vhodnega signala v merilni člen in dobili $T_{r,1} = 7,0\text{ ns}$, na drugem pa dvižni čas izhodnega signala merilnega člena in dobili $T_{r,2} = 35,0\text{ ns}$. Pri meritvi na drugem kanalu smo uporabili filter za izločanje visokofrekvenčnih motenj $B_{\text{HF}} = 20\text{ MHz}$. Skicirajte merilno vezje in ugotovite uporabljeni način proženja!

Rešitev:

- Skica merilnega vezja:



- Ker sta izmerjena časa krajša kot vzorčni čas DSO $T_s = 1/f_s = 100\text{ ns}$, ju je bilo možno zmeriti le s ponavljajočim proženjem na DSO.
- Skupni dvižni čas na posameznem kanalu dobimo z geometrijskim (efektivnim) seštevanjem dvižnih časov zaporedno vezanih členov (predpostavljamo, da nimajo medsebojnega vpliva):

$$T_{r,1}^2 = T_{r,s}^2 + T_{r,\text{DSO1}}^2 \quad T_{r,s} - \text{dvižni čas signala generatorja}$$

$$T_{r,2}^2 = T_{r,s}^2 + T_{r,\text{MČ}}^2 + T_{r,\text{DSO2}}^2$$

- Iz razlike časov lahko izločimo dvižni čas samega merilnega člena:

$$T_{r,2}^2 - T_{r,1}^2 = T_{r,\text{MČ}}^2 + T_{r,\text{DSO2}}^2 - T_{r,\text{DSO1}}^2 \Rightarrow T_{r,\text{MČ}} = \sqrt{T_{r,2}^2 - T_{r,1}^2 - T_{r,\text{DSO2}}^2 + T_{r,\text{DSO1}}^2}$$

- Za člen prvega reda, s katerim aproksimiramo dinamično obnašanje analognega dela vhoda DSO, velja naslednja povezava med dvižnim časom in mejno frekvenco $T_r = 0,35/f_m$. Pasovna širina merilnega člena je določena z razliko zgornje in spodnje mejne frekvence: $B = f_{m,\text{zg}} - f_{m,\text{sp}}$. Ker je $f_{m,\text{sp}} \approx 0$, je dvižni čas enak $T_r = 0,35/f_m = 0,35/B$. Na drugem kanalu nam filter za izločanje visokofrekvenčnih motenj omeji zgornjo frekvenčno mejo na $B_{\text{HF}} = f_{m,\text{DSO2}} = 20\text{ MHz}$.

- Rezultati:

$$T_{r,\text{DSO1}} = \frac{0,35}{B} = \frac{0,35}{100\text{ MHz}} = 3,5\text{ ns}, \quad T_{r,\text{DSO2}} = \frac{0,35}{B_{\text{HF}}} = \frac{0,35}{20\text{ MHz}} = 17,5\text{ ns}$$

$$T_{r,\text{MČ}} = \sqrt{T_{r,2}^2 - T_{r,1}^2 - T_{r,\text{DSO2}}^2 + T_{r,\text{DSO1}}^2} = 29,7\text{ ns}$$

2. Napetost na uporu U smo izmerili $n_1 = 15$ -krat in dobili $\bar{U} = 111,51 \text{ V}$ in $s(U) = 0,80 \text{ V}$, upornost R pa $n_2 = 10$ -krat in dobili $\bar{R} = 12,653 \text{ k}\Omega$ in $s(R) = 0,075 \text{ k}\Omega$. Izračunajte celotno standardno negotovost in razširjeno negotovost moči na uporu, če je stopnja zaupanja $p = 99\%$!

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/v_i}$$

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(v)$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Moč na uporu: $P = \frac{U^2}{R} = \frac{(111,51 \text{ V})^2}{12,653 \text{ k}\Omega} = 982,72979 \text{ mW}$
- Celotna standardna negotovost: $u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)}$
 - deleži neposredno merjenih veličin v celotni standardni negotovosti:

$$u_1(P) = |c_1| u(U) = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| u(U) = \frac{2U}{R} \frac{s(U)}{\sqrt{n_1}} = \frac{2 \cdot 111,51 \text{ V}}{12,653 \text{ k}\Omega} \frac{0,80 \text{ V}}{\sqrt{15}} = 3,64 \text{ mW},$$

$$u_2(P) = |c_2| u(R) = \left| \frac{\partial P}{\partial R} \right| u(R) = \frac{U^2}{R^2} \frac{s(R)}{\sqrt{n_2}} = \frac{(111,51 \text{ V})^2}{(12,653 \text{ k}\Omega)^2} \frac{0,075 \text{ k}\Omega}{\sqrt{10}} = 1,84 \text{ mW}.$$

$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)} = \sqrt{(3,64 \text{ mW})^2 + (1,84 \text{ mW})^2} = 4,078 \text{ mW}.$$

$$\rightarrow u_c(P) = 4,1 \text{ mW}$$

- Pri določanju razširjene negotovosti uporabimo zaradi manjšega števila meritev Studentovo porazdelitev. Za določitev faktorja razširitve je potrebno poznati efektivno število prostostnih stopenj posredno merjene veličine:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/v_i} = \frac{(4,078 \text{ mW})^4}{(3,64 \text{ mW})^4/14 + (1,84 \text{ mW})^4/9} = 20,02$$

$v_i = n_i - 1$ - število prostostnih stopenj neposredno merjene veličine

- Po zaokrožitvi navzdol je $v_{\text{eff}} = 20$. Za stopnjo zaupanja $p = 99\%$ odčitamo iz tabele faktor razširitve $t_p(v) = t_{99}(20) = 2,85$.
- Razširjena negotovost za moč na uporu:

$$U_{99} = k_{99} u_c(P) = t_{99}(20) u_c(P) = 2,85 \cdot 4,078 \text{ mW} = 11,62 \text{ mW}$$

$$\rightarrow U_{99} = 12 \text{ mW}$$

3. Koliko se lahko največ razlikujeta odčitka dveh nazivno enakih voltmetrov ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D + 1\text{dig} + 0,5\text{mV})$), $U_D = 2\text{V}$, ločljivost: $\Delta U_q = 0,1\text{mV}$) zaradi lastnega pogreška pri merjenju iste napetosti, da bosta še vedno ustrezala specifikaciji. Razliko odčitkov ΔU ugotovite za celotno merilno območje $0 \div U_D$ in skicirajte! Kako se razmere spremenijo, če je vhodnemu signalu dodan šumni signal $U = 0,2\text{mV}$ s temenskim faktorjem $C = 3$, frekvenci zajemanja napetosti z voltmetroma pa nista sinhroni?

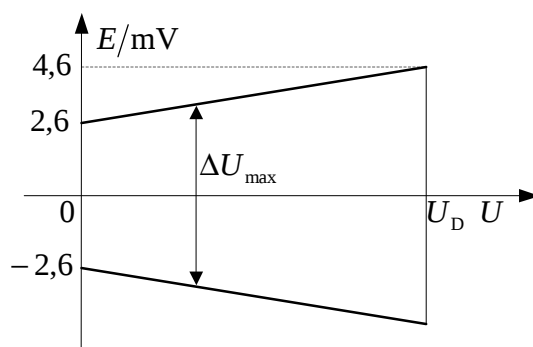
Rešitev:

- V najbolj neugodnem primeru lahko en voltmeter kaže za mejno vrednost lastnega pogreška več, kot je prava vrednost merjenega signala, in drugi za mejno vrednost lastnega pogreška manj in še vedno ustrezata specifikaciji. Skupna razlika je dvojna mejna vrednost lastnega pogreška:

$$\Delta U = 2 \cdot M = 2 \cdot (10^{-3}U + 10^{-3}U_D + 0,1\text{mV} + 0,5\text{mV}) = 2 \cdot (10^{-3}U + 2,6\text{mV})$$

$$\Delta U_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}U + 5,2\text{mV} \quad \underset{U=(0+2)\text{V}}{=} [5,2\text{mV} \div 9,2\text{mV}]$$

- Skica:

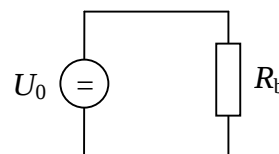


- Če je vhodnemu signalu dodan šum, ki ni lasten voltmetroma (ne sodi v lastni pogrešek instrumenta), se lahko odčitka povečata (oz. zmanjšata) v najbolj neugodnem primeru za temensko vrednost šuma:

$$\hat{u}_n = C_n \cdot U_n = 3 \cdot 0,2\text{mV} = 0,6\text{mV}$$

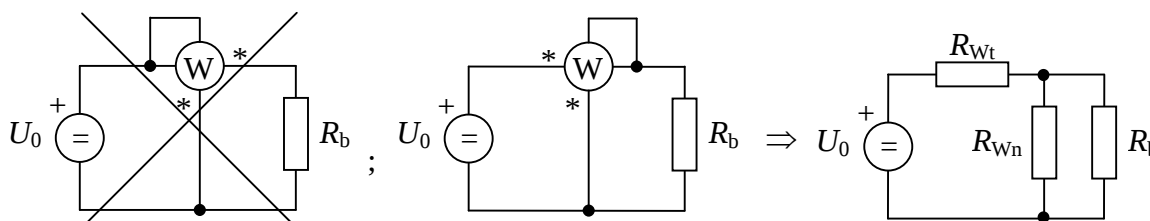
$$\Delta U_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}U + 5,2\text{mV} + 2 \cdot 0,6\text{mV} \quad \underset{U=(0+2)\text{V}}{=} [6,4\text{mV} \div 10,4\text{mV}]$$

4. Koliko je bila moč P_b na bremenu $R_b = 1000\Omega$, vezanem po sliki, pred priključitvijo vatmetra, ki nam pokaže $P_i = -66,4\text{ mW}$? Vatmeter je umerjen in ima lastni pogrešek $-0,3\text{ mW}$. Tokovna in napetostna veja vatmetra imata upornosti $R_{W,t} = 10\Omega$ oz. $R_{W,n} = 10\text{ M}\Omega$ ter skupno izhodno tokovno in izhodno napetostno sponko. Skicirajte merilno vezje s priključenim vatmetrom (označite vhodne sponke) ter določite P_b ! Vezje je napajano z idealnim napetostnim virom.



Rešitev:

- Merilno vezje
 - Ker ima vatmeter skupno izhodno tokovno in izhodno napetostno sponko in kaže negativno vrednost $P_i = -66,4\text{ mW} < 0$, je bila izmed dveh možnih priključitev uporabljena spodnja vezava (napetostna veja vatmetra je bila priključena neposredno na breme) z ustrezno nadomestno vezavo:



- Popravljeno vrednost moči dobimo z upoštevanjem lastnega pogreška vatmetra:

$$P_w = |P_i - E_w| = |-66,4\text{ mW} - (-0,3\text{ mW})| = 66,1\text{ mW}$$

- Ker imamo enosmerne razmere in je $R_0 = 0\Omega$ (idealni napetostni vir), lahko enostavno poiščemo povezavo med vrednostjo napajalne napetosti in močjo, ki jo kaže vatmeter:

$$P_w = I_w \cdot U_w, \quad I_w = \frac{U_0}{R_{Wt} + R_{Wn} \parallel R_b}, \quad U_w = I_w \cdot R_{Wn} \parallel R_b = \frac{U_0 \cdot R_{Wn} \parallel R_b}{R_{Wt} + R_{Wn} \parallel R_b}$$

$$P_w = \frac{U_0^2 \cdot R_{Wn} \parallel R_b}{(R_{Wt} + R_{Wn} \parallel R_b)^2} = U_0^2 \cdot \frac{10\text{ M}\Omega \parallel 1\text{ k}\Omega}{(10\Omega + 10\text{ M}\Omega \parallel 1\text{ k}\Omega)^2} = U_0^2 \cdot 9,80 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$$

$$\text{▪ Napajalna napetost je: } U_0 = \sqrt{\frac{66,1\text{ mW}}{9,8 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}}} = 8,213\text{ V}$$

- Pred priključitvijo vatmetra je bila moč na bremenu:

$$P_b = \frac{U_0^2}{R_b} = 67,45\text{ mW} \rightarrow P_b = 67,5\text{ mW}$$

5. Kolikšna je standardna negotovost delovne moči $w_c(P)$ pri polindirektnem merjenju, če ima porabnik fazni kot $\varphi = 30^\circ$ in smo uporabili tokovni merilni transformator ($m_K = \pm 0,1\%$, $\delta_{\max} = \pm 5'$) in vatmeter ($M_P = \pm (0,1\% P + 0,1\% P_D)$, $P = 2/3 P_D$, $P_D = 1400 \text{ W}$) pri nazivnih vrednostih in referenčnih pogojih? Za izračun negotovosti upoštevajte, da so dejanske vrednosti pogreškov majhne in izhodiščno enačbo:

$$P_i = P(1 + e_u)(1 + e_i)(1 + e_w)[1 - (\delta_u - \delta_i)\text{tg}\varphi]$$

Rešitev:

- Ker imamo polindirektno merjenje moči, se izhodiščna enačba reducira (nimamo napetostnega merilnega transformatorja):

$$P_i = P(1 + e_i)(1 + e_w)[1 + \delta_i \text{tg}\varphi]$$

- Posamezni prispevki k celotni negotovosti so:

$$u_1(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_i} \right| u(e_i) \approx P \cdot u(e_i)$$

$$u_2(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_w} \right| u(e_w) \approx P \cdot u(e_w)$$

$$u_3(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} \right| u(\delta_i) \approx P \cdot \text{tg}\varphi u(\delta_i)$$

- Celotna standardna negotovost je zato:

$$u_c(P) = P \sqrt{u^2(e_i) + u^2(e_w) + \text{tg}^2\varphi u^2(\delta_i)}$$

- Ker poznamo mejne vrednosti pogreškov, uporabimo enakomerno porazdelitev in od tod dobimo standardne negotovosti posameznih prispevkov $u = m/\sqrt{3}$:

$$u(e_i) = \frac{m_{K,i}}{\sqrt{3}} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{3}} = 5,77 \cdot 10^{-4}$$

$$u(e_w) = \frac{m_P}{\sqrt{3}} = \frac{M_P}{\sqrt{3} P} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{P_D}{P} \right) = 1,44 \cdot 10^{-3}$$

$$u(\delta_i) = \frac{\delta_{i,\max}}{\sqrt{3}} = \frac{5/60 \pi / 180}{\sqrt{3}} = 8,397 \cdot 10^{-4}$$

- Relativna standardna negotovost delovne moči je:

$$w_c(P) = \frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{u^2(e_i) + u^2(e_w) + \text{tg}^2\varphi u^2(\delta_i)} = 1,628 \cdot 10^{-3} \rightarrow w_c(P) = 1,7 \cdot 10^{-3}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko je informacijska kapaciteta digitalnega voltmetra, ki ima merilni doseg $U_D = 3\text{ V}$, mejo pogreška $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$ in čas meritve $T_M = 30\text{ ms}$? Voltmeter ima maksimalno vrednost lastnega šuma $\hat{u}_{\text{sum}} = 1\text{ mV}$.

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar imamo pogrešek v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj na merilnem območju $x_D = x_{\max} - x_{\min} (= 0) = x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)} \Rightarrow m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln\left(1 + \frac{ax_D}{b}\right)$$

- Spreminjajoči del je odvisen od merjene veličine: $ax = 0,1\%U$
 - Fiksni del pa sestavljata dva dela:
 - del lastnega pogreška voltmetra: $0,1\%U_D = 3\text{ mV}$
 - lastni šum voltmetra: $\hat{u}_{\text{sum}} = 1\text{ mV}$
- Če vzamemo za enoto informacije bit, ustreza številu amplitudnih stopenj m naslednja množina informacije kot dvojiški logaritem m :

$$S = \text{lb}(m) = \log_2(m)$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas T_M , je kapaciteta ali maksimalni informacijski pretok enak:

$$C = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m) = \frac{S}{T_M}$$

- Za dani voltmeter zapišemo pogrešek lasten instrumentu v obliki:

$$M_U = (0,1\%U + 0,1\%U_D + U_{\text{sum}}) = 10^{-3}U + 3\text{ mV} + 1\text{ mV} = 10^{-3}U + 4\text{ mV}$$

- In maksimalno število neodvisnih amplitudnih stopenj na območju $U_D = 3\text{ V}$:

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln\left(1 + \frac{10^{-3} \cdot 3\text{ V}}{4\text{ mV}}\right) = 280,8$$

- Največja množina informacije in maksimalni informacijski pretok sta:

$$S = \text{lb}(m_{\max}) = 8,13\text{ bit} \Rightarrow C = \frac{S}{T_M} = 271,1\text{ bit/s}$$

2. Baterijskemu polnilniku merite izhodno napetost v neobremenjenem stanju. Če uporabite digitalni multimeter izmerite 1,8981 V pri 10 MΩ notranje upornosti in 1,8999 V pri notranji upornosti 10 GΩ. Z nekim drugim inštrumentom z notranjo upornostjo 20 kΩ izmerite 1,2666 V in pri 30 kΩ 1,4250 V.

Koliko sta napetost praznega teka in notranja upornost polnilnika in s katerim inštrumentom ugotovimo to bolj pravilno?

Rešitev:

- Napetost praznega teka in notranjo upornost polnilnika baterij izračunamo s pomočjo podatkov meritev napetosti pri dveh različnih notranjih upornostih merilnega inštrumenta - voltmetra, ki se doseže s spremembo merilnega območja ali z dodajanjem vzporedno dodatnega upora.
- Rezultat prvega inštrumenta (A)

$$R_{V1A} = 10 \text{ M}\Omega, \quad U_{V1A} = 1,8981 \text{ V}$$

$$R_{V2A} = 10 \text{ G}\Omega, \quad U_{V2A} = 1,8999 \text{ V}$$

$$U_{V1A} = U_{AB} \frac{R_{V1A}}{R_{V1A} + R_{AB}}, \quad U_{V2A} = U_{AB} \frac{R_{V2A}}{R_{V2A} + R_{AB}}$$

- Po vmesnem računu dobimo:

$$U_A = U_{V1A} U_{V2A} \frac{R_{V2A} - R_{V1A}}{R_{V2A} U_{V1A} - R_{V1A} U_{V2A}} = 1,8999 \text{ V}$$

$$R_A = R_{V1A} \left(\frac{U_{V2A}}{U_{V1A}} - 1 \right) = 9,483 \text{ k}\Omega$$

- Rezultat drugega inštrumenta (B)

$$R_{V1B} = 20 \text{ k}\Omega, \quad U_{V1B} = 1,2666 \text{ V}$$

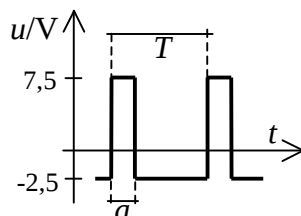
$$R_{V2B} = 30 \text{ k}\Omega, \quad U_{V2B} = 1,4250 \text{ V}$$

$$U_B = U_{V1B} U_{V2B} \frac{R_{V2B} - R_{V1B}}{R_{V2B} U_{V1B} - R_{V1B} U_{V2B}} = 1,9003 \text{ V}$$

$$R_B = R_{V1B} \left(\frac{U_{V2B}}{U_{V1B}} - 1 \right) = 2,501 \text{ k}\Omega$$

- Napetost praznega teka in notranjo upornost polnilnika izmerjena s prvim voltmetrom je bolj pravilna, ker merimo napetosti z večjo upornostjo voltmetra kot v drugem primeru in imamo manjši sistematični pogrešek!

3. Ceneni digitalni voltmeter želimo uporabiti za merjenje delovnega cikla D (ang. duty cycle) signala na sliki. Voltmeter meri izmenično napetost preko usmerjene srednje vrednosti tako, da je efektivna vrednost pravilno izmerjena le za sinusno obliko. Koliko znaša delovni cikel D , če voltmeter kaže efektivno vrednost 4,16 V?



$$D = \frac{a}{T} \cdot 100 \%$$

Rešitev:

- Voltmeter neposredno meri usmerjeno srednjo vrednost napetosti ter jo pomnoži z znanim faktorjem 1,11 tako, da v primeru sinusne napetosti pravilno pokaže efektivno vrednost.
- Voltmeter kaže 4,16 V, kar je v primeru signala na sliki napačna efektivna vrednost. Hkrati pa to pomeni, da znaša dejanska usmerjena srednja vrednost signala:

$$\overline{|u|} = \frac{U}{1,11} = \frac{4,16 \text{ V}}{1,11} = 3,75 \text{ V}$$

- Iz slike signala lahko določimo usmerjeno vrednost v odvisnosti od delovnega cikla, ki znaša:

$$\begin{aligned} \overline{|u|} &= \frac{1}{T} \left(\int_0^a |u| dt + \int_a^T |u| dt \right) = \frac{1}{T} (a \cdot 7,5 \text{ V} + (T - a) \cdot 2,5 \text{ V}) = \\ &= \frac{D}{100 \%} \cdot 7,5 \text{ V} + 2,5 \text{ V} - \frac{D}{100 \%} \cdot 2,5 \text{ V} = 3,75 \text{ V} \end{aligned}$$

- in izračunamo:

$$D = \frac{3,75 \text{ V} - 2,5 \text{ V}}{7,5 \text{ V} - 2,5 \text{ V}} \cdot 100 \% = 25 \%$$

4. Uporovnemu temperaturnemu senzorju smo izmerili karakteristiko. Podatki so v tabeli. Kolikšna je občutljivost senzorja, kolikšen je relativni pogrešek linearnosti in koliko je nelinearnost?

$t/^{\circ}\text{C}$	R_t/Ω
-60	4704
-40	5598
-20	6858
0	8313
20	10008
40	12299
60	14917
80	18124
100	21977
120	26885

Rešitev:

- Relativni pogrešek linearnosti se izračuna po enačbi

$$e_1 = \frac{R_t - R_n}{R_{t,\max} - R_{t,\min}}$$

- Iz nastavka

$$\frac{R_n - R_{t,\min}}{t - t_{\min}} = \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}}$$

- izračunamo nazivno karakteristiko R_n .

$$R_n = R_{t,\min} + \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}}(t - t_{\min}) = R_{t,\min} + S(t - t_{\min})$$

- Dopolnjena tabela:

$t/^{\circ}\text{C}$	R_t/Ω	R_n/Ω	$e_1/\%$
-60	4704	4704	0,0
-40	5598	7169	7,1
-20	6858	9633	12,5
0	8313	12098	17,1
20	10008	14562	20,5
40	12299	17027	21,3
60	14917	19491	20,6
80	18124	21956	17,3
100	21977	24420	11,0
120	26885	26885	0,0

- Nelinearnost določimo po enačbi

$$n = |e_1|_{\max} = \frac{|R_t - R_n|_{\max}}{R_{t,\max} - R_{t,\min}} = 21,3 \%$$

- občutljivost pa po enačbi

$$S = \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}} = 123,23 \Omega/^{\circ}\text{C}$$

5. Na bencinskih črpalkah merijo prostornino goriva v rezervoarjih na podlagi tehtanja in poznavanja gostote goriva. Ko dobavitelj goriva s cisterno pripelje gorivo na bencinsko črpalko, delavci na črpalki s pomočjo enačbe za gostoto goriva ρ določijo prostornino dobavljenega goriva V . Tehnica, ki je vgrajena v rezervoarjih, ima standardno negotovost tehtanja $u(m) = 50 \text{ kg}$. Termometer, s katerim delavci pomerijo temperaturo goriva, ima merilno negotovost $u(t) = 0,50^\circ\text{C}$.

Izračunajte, kakšna je dejanska prostornina goriva, ki ga črpalka dobi - kakšna je negotovost $u(V)$, če črpalka naroči $V = 30\,000$ litrov goriva pri temperaturi $t = 30^\circ\text{C}$?

$$\rho = 717,831 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot t$$

Rešitev:

- Volumen $V = m/\rho$ izrazimo z maso in gostoto goriva:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{m}{717,831 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot t}$$

- Izračunamo gostoto in maso goriva pri $t = 30^\circ\text{C}$

$$\rho = 717,831 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 30^\circ\text{C} = 742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$m = \rho V = 742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 30 \text{ m}^3 = 22\,264,56 \text{ kg}$$

- Standardno negotovost posredno merjenja prostornine zapišemo:

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial m} \cdot u(m)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot u(\rho)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \cdot u(m)\right)^2 + \left(-\frac{m}{\rho^2} \cdot u(\rho)\right)^2}$$

$$u(\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u(t) \rightarrow u(\rho) = 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot u(t) = 0,40535 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{1}{742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \cdot 50 \text{ kg}\right)^2 + \left(-\frac{22264,56 \text{ kg}}{\left(742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2} \cdot 0,40535 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2}$$

$$u(V) = 0,069335572 \text{ m}^3 \equiv 70 \text{ litrov}$$

- Zapišemo rezultat:

$$V = 30000 \text{ l}, \quad u(V) = 70 \text{ l}, \quad n = 1$$

- Lahko zaključimo, da pri temperaturi 30°C obstoji približno 68,3% verjetnost, da bencinska črpalka, ki za merjenje prostornine dobavljenega goriva uporablja termometer z merilno negotovostjo $0,50^\circ\text{C}$ in tehtnico z negotovostjo 50 kg , od dobavitelja dobi 70 litrov preveč ali pa 70 litrov premalo goriva.

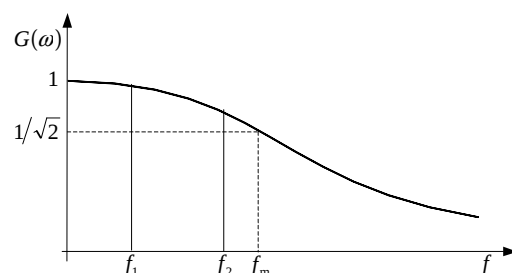
Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko je mejna frekvenca člena 1. reda, če smo z DSO izmerili pri vzbujujanju s sinusnim signalom frekvence $f_1 = 200 \text{ Hz}$ na izhodu člena temensko vrednost $U_1 = 4,95 \text{ V}$ in pri vzbujujanju s frekvenco $f_2 = 1000 \text{ Hz}$ napetost $U_2 = 4,63 \text{ V}$. Preostala napetost osciloskopa je bila $U_- = 20 \text{ mV}$. Merilni člen je bil vzbujaan s sinusnim signalom konstantne amplitude in zanemarljive enosmerne komponente!

Rešitev:

- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujujanju lahko zapišemo z uporabo mejne frekvence, kjer upoštevamo povezavo $2\pi f_m \tau = 1$:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$



- Samo izmenčni del karakteristike brez enosmerne komponente ($U_- = 0 \text{ V}$) nam pri dveh različnih frekvencah da dve izhodni napetosti pri konstantni vrednosti vhodne napetosti U_0 :

$$U_1 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}}, \quad U_2 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}}$$

- Za izločitev amplitude vzbujaalne napetosti poiščemo razmerje napetosti: $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}}$;

- Od tod dobimo mejno frekvenco iz izraza:

$$A = \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 = \frac{1 + (f_1/f_m)^2}{1 + (f_2/f_m)^2} \rightarrow f_m = \sqrt{\frac{A f_2^2 - f_1^2}{1 - A}} = 2583,2 \text{ Hz}$$

- Preostala napetost osciloskopa poveča napetosti za enosmerno komponento:

$$U_1 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} + U_-, \quad U_2 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}} + U_-$$

- Mejna frekvenca se izračuna iz popravljenega izraza za A_- :

$$A_- = \left(\frac{U_2 - U_-}{U_1 - U_-} \right)^2 = 0,874396 \rightarrow f_{m-} = \sqrt{\frac{A_- f_2^2 - f_1^2}{1 - A_-}} = 2577,4 \text{ Hz}$$

2. Katere vrednosti lahko pričakujemo na prikazovalniku voltmetra z $U_D = 100,0 \text{ V}$; $R_{V_0} = 200 \Omega/\text{V}$; $r = 0,2$, ko merimo napetost sinusnega vira? Netočnosti impedanc in frekvence zanemarite. Skicirajte vezje in fazorski diagram!

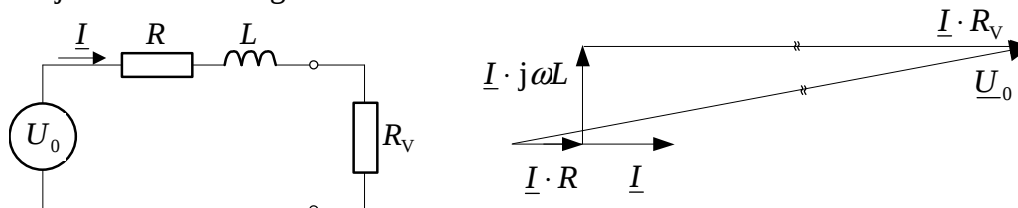
Vir: - napetost praznega teka: $U_0 = 100,0 \text{ V}$

- notranja impedanca: $R = 400 \Omega$ $L = 0,5 \text{ H}$;

- frekvenca: $f = 200 \text{ Hz}$

Rešitev:

- Vezje in fazorski diagram:



- Upornost voltmetra izračunamo iz karakteristične upornosti R_{V_0} in uporabljenega dosega voltmetra:

$$R_V = R_{V_0} \cdot U_D = 200 \Omega/\text{V} \cdot 100 \text{ V} = 20 \text{ k}\Omega$$

- Notranja impedanca vira je kompleksna z efektivno vrednostjo: $Z_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$
- Po priključitvi nam voltmeter kaže manj, kot je napetost praznega teka U_0 .

Imamo napetostni delilnik:
$$\underline{U}_V = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + \underline{Z}_0} = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + R + j\omega L}$$

- ki ga v efektivni obliki izrazimo z:

$$U_V = U_0 \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}} = 100 \text{ V} \frac{20 \text{ k}\Omega}{\sqrt{(20 \text{ k}\Omega + 400 \Omega)^2 + (2\pi \cdot 200 \text{ Hz} \cdot 0,5 \text{ H})^2}} = 97,9927 \text{ V}$$

- Ker je mejna vrednost lastnega pogreška voltmetra $M_U = \frac{r}{100} U_D = 0,2 \text{ V}$, lahko na prikazovalniku pričakujemo za to vrednost povečano oz. zmanjšano vrednost:

- Največja prikazana vrednost je :

$$U_{V,\max} = U_V + M_U = 97,9927 \text{ V} + 0,2 \text{ V} = 98,1927 \text{ V} \rightarrow U_{V,\max} = 98,2 \text{ V}$$

- Najmanjša prikazana vrednost je :

$$U_{V,\min} = U_V - M_U = 97,9927 \text{ V} - 0,2 \text{ V} = 97,7927 \text{ V} \rightarrow U_{V,\min} = 97,8 \text{ V}$$

3. S $5\frac{1}{2}$ -mestnim ohmmetrom $M_R = \pm(0,01\% R + 0,01\% R_D)$ smo merili stalno upornost pod enakimi pogoji ($n=10$). Koliko je standardna negotovost merilnega rezultata? Ocenite, kako se spremeni, če pri istih vrednostih uporabimo le $4\frac{1}{2}$ -mestni prikaz in upoštevamo dodatno negotovost zaradi zaokrožitve?

R/Ω : 99,123; 99,135; 99,146; 99,079; 99,104; 99,115; 99,098; 99,087; 99,112; 99,061

Rešitev:

- Standardna negotovost merilnega rezultata sestavljata dva prispevka: negotovost tipa A zaradi ponavljanja meritev in negotovost tipa B kot prispevek merilne metode in instrumentacije. V primeru negotovosti tipa B je prevladujoč lastni pogrešek ohmmetra.
- Negotovost tipa A dobimo z določitvijo srednje vrednosti, standardnega odklona meritev in standardne negotovosti:

$$\bar{R} = 99,106\Omega$$

$$s(R) = \sqrt{\frac{\sum_i (R_i - \bar{R})^2}{n-1}} = 0,025884\Omega$$

$$u_A = \frac{s(R)}{\sqrt{n}} = 0,008185\Omega$$

- Negotovost tipa B dobimo iz mejne vrednosti pogreška, kjer predpostavljamo pravokotno porazdelitev pogreška:

$$u_B = \frac{1}{\sqrt{3}} M_R = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-4} \cdot 99,106\Omega + 10^{-4} \cdot 200\Omega) = 0,01727\Omega$$

- $5\frac{1}{2}$ -mestni prikaz nam da $R_D = 200\Omega$ (maksimalni prikaz: 199,999).

- Skupna standardna negotovost je:

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0,01911\Omega \rightarrow u_c = 0,020\Omega$$

- $4\frac{1}{2}$ -mestni prikaz nam doda negotovost zaradi zaokrožitve na mestu 0,01 Ω :

$$u_z = \frac{0,01\Omega}{2\sqrt{3}} = 0,002887\Omega$$

- Skupna negotovost se nekoliko poveča, vendar se zaradi zaokrožitve na dve mesti to ne pozna:

$$u_{c_z} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2 + u_z^2} = 0,01933\Omega \rightarrow u_c = 0,020\Omega$$

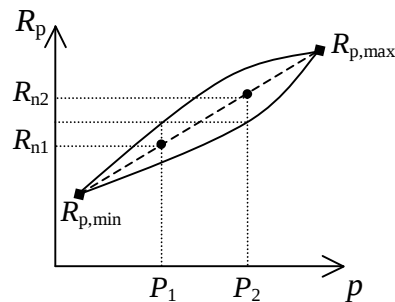
4. Z uporovnim senzorjem tlaka želimo meriti tlak v cevi. Izmerjena upornost senzorja znaša $R_p = 125 \Omega$. Določite interval možnih vrednosti tlaka v cevi za dano meritev, če je nelinearnost senzorja $n = 0,2\%$?

- Senzor tlaka: pri najnižjem tlaku 100 kPa ima senzor upornost $R_{p,\min} = 120 \Omega$, pri najvišjem tlaku 10 MPa pa $R_{p,\max} = 132 \Omega$.

Rešitev:

- Nelinearnost zapišemo kot $n = \frac{|R_p - R_n|}{R_{p,\max} - R_{p,\min}}$
- Poznamo izmerjeno vrednost R_p na dejanski karakteristiki, vendar iz nje ne moremo izračunati tlaka p , ker ne poznamo enačbe karakteristike.
- Tlak lahko izračunamo iz nazivne (linearne) karakteristike $R_n(p)$, ki pa se od dejanske razlikuje za pogrešek linearnosti E_1 oz. e_1 v relativni obliki. Ker ga ne poznamo, lahko določimo le njegove meje. Zato velja:

$$|e_1| \leq n \quad \text{oz.} \quad -n \leq e_1 \leq n$$
- Zato tudi vrednost R_n zavzame vrednosti na intervalu $[R_{n1}, R_{n2}]$ ter posledično tlak vrednosti na intervalu $[p_1, p_2]$.



- a) Izračunajmo najprej spodnjo mejo p_1 :

- Vrednost R_{n1} dobimo tako, da vzamemo $e_1 = +n$

$$R_p - R_{n1} = n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) \Rightarrow R_{n1} = R_p - n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) = 125 \Omega - 0,002 \cdot 12 \Omega = 124,976 \Omega$$

- Enačbo nazivne karakteristike (premice) zapišemo iz $R_{p,\min}$ in $R_{p,\max}$ ter $p_{\min}$ in $p_{\max}$.

$$R_n = R_{p,\min} + \frac{(R_{p,\max} - R_{p,\min})}{p_{\max} - p_{\min}}(p - p_{\min}) = R_{p,\min} + S \cdot (p - p_{\min}) \Rightarrow$$

in dobimo za p_1 :

$$\Rightarrow p_1 = p_{\min} + \frac{(R_{n1} - R_{p,\min})}{S} = 0,1 \text{ MPa} + \frac{124,976 \Omega - 120 \Omega}{12 \Omega / 9,9 \text{ MPa}} = 4,205 \text{ MPa}$$

- b) Podobno izračunamo tudi zgornjo mejo p_2 :

$$R_p - R_{n2} = n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) \Rightarrow R_{n2} = R_p + n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) = 125 \Omega + 0,002 \cdot 12 \Omega = 125,024 \Omega$$

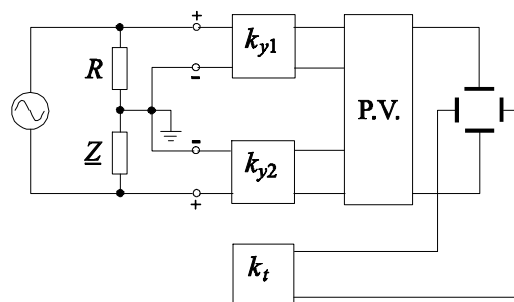
in

$$\Rightarrow p_2 = p_{\min} + \frac{(R_{n2} - R_{p,\min})}{S} = 0,1 \text{ MPa} + \frac{125,024 \Omega - 120 \Omega}{12 \Omega / 9,9 \text{ MPa}} = 4,245 \text{ MPa}$$

- Dejanski tlak glede na izmerjeno upornost leži na intervalu:

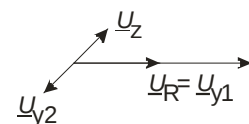
$$4,205 \text{ MPa} \leq p \leq 4,245 \text{ MPa}$$

5. Kakšna je slika na zaslonu elektronskega osciloscopa, če proži časovno bazo kanal-1, nivo proženja $N = 0$, strmina proženja $S > 0$, $k_{y1} = k_{y2}$, $f = 2 \text{ kHz}$, $k_t = 0,1 \text{ ms/d}$, $\underline{Z} = \frac{1}{2} R e^{j60^\circ}$? Narišite fazorski (kazalčni) diagram!



Rešitev:

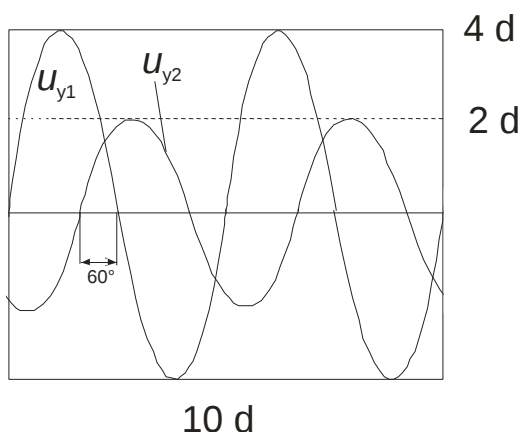
- Fazorski diagram prikazuje napetost na upor $\underline{U}_R = \underline{U}_{y1}$, ki je v fazi s tokom. Napetost na impedanci $\underline{U}_Z$ prehiteva napetost na upor za 60° . Ker sta negativni sponki na vходу osciloscopa vezani skupaj je prikazana napetost na kanalu dve $\underline{U}_{y2} = -\underline{U}_Z$ diametralna od napetosti na impedanci.



- Perioda signalov je enaka: $T = 1/f = 0,5 \text{ ms}$
 - Število delcev potrebnih za prikaz ene periode je

$$\frac{T}{k_t} = \frac{0,5 \text{ ms} \cdot \text{d}}{0,1 \text{ ms}} = 5 \text{ d},$$

- ker pa je zaslon širok 10 delcev sta na zaslonu prikazani dve periodi vsakega signala. Amplituda napetosti na impedanci je polovico manjša od napetosti na upor.



Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Z voltmetrom ($U_D = 1V$, ločljivost: $1mV$, $B = 1kHz$, člen prvega reda) merimo efektivno vrednost signala $u/V = 1 \cdot \sin \omega t + A_5 \cdot \sin 5\omega t$, $f = 500Hz$. Najmanj koliko mora biti amplituda pete harmonske komponente ($A_5 = ?$), da jo pri meritvi z voltmetrom zaznamo?

Rešitev:

- Efektivno vrednost napetosti sestavljata efektivna prispevka osnovne in pete harmonske komponente:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_5^2} = \sqrt{\left(K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(K_5 \frac{A_5}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

- Voltmeter zaradi svojega dinamičnega odziva člena 1. reda ($f_m = B = 1kHz$) različno oslabi napetosti na vhodu:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$

- $f_1 = 500Hz$: $K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} = 0,894428$;

- Efektivna vrednost osnovne komponente napetosti na voltmetru je:

$$U_1 = K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}} = 0,632456V$$

- $f_5 = 2500Hz$: $K_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_5/f_m)^2}} = 0,371391$

- Če želimo zaznati peto harmonsko komponento poleg osnovne komponente, mora biti njen efektivni prispevek večji za ločljivost voltmetra $\Delta U = 1mV$ od napetosti $U_1 = 0,632456V$:

$$U_1 + \Delta U = \sqrt{U_1^2 + U_5^2} \Rightarrow K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}} + \Delta U = \sqrt{\left(K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(K_5 \frac{A_5}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

- Amplitudo pete harmonske komponente dobimo s preureditvijo izraza:

$$\sqrt{(U_1 + \Delta U)^2 - U_1^2} = U_5 = K_5 \frac{A_5}{\sqrt{2}}$$

- $A_5 = \frac{\sqrt{2}}{K_5} \sqrt{(U_1 + \Delta U)^2 - U_1^2} = 0,1355V$

2. Napetost U , izražena v dBm_{50} (referenca 1mW , 50Ω) je dvakrat večja, kot če je izražena v dBm_{600} (referenca 1mW , 600Ω). Kolikšna je napetost U , izražena v enoti SI?

Rešitev:

- Kadar je napetost izražena v enoti decibel, je pri tem mišljeno njeno razmerje proti referenčni vrednosti U_{ref} . Izhodiščna definicija decibela je podana z desetiškim logaritmom dveh moči:

$$\frac{U}{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{P}{P_{\text{ref}}} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{R} \cdot \frac{R}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref}}} \right)$$

- $\frac{U}{\text{dBm}_{50}}$ - referenčna napetost U_{ref1} je enaka napetosti, kadar se na upor $R = 50\Omega$ sprošča moč $P = 1\text{mW}$:

$$U_{\text{ref1}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1\text{mW} \cdot 50\Omega} = 0,2236\text{V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{50}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,2236\text{V}} \right)$$

- $\frac{U}{\text{dBm}_{600}}$ - referenčna napetost U_{ref2} je enaka napetosti, kadar se na upor $R = 600\Omega$ sprošča moč $P = 1\text{mW}$:

$$U_{\text{ref2}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1\text{mW} \cdot 600\Omega} = 0,7746\text{V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{600}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,7746\text{V}} \right)$$

- Iz enačbe $\frac{U}{\text{dBm}_{50}} = 2 \frac{U}{\text{dBm}_{600}}$ izračunamo iskano napetost izraženo v SI enoti:

$$\blacksquare \quad 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref1}}} \right) = 2 \cdot 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref2}}} \right)$$

$$\blacksquare \quad \left(\frac{U}{U_{\text{ref1}}} \right) = \left(\frac{U}{U_{\text{ref2}}} \right)^2 \Rightarrow U = \frac{U_{\text{ref2}}^2}{U_{\text{ref1}}} = 2,683\text{V}$$

3. Koliko mest bi moral imeti prikazovalnik voltmetra ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$, $U_D = 2\text{ V}$), da se negotovost zaradi ločljivosti ne bi poznala v skupni negotovosti zaokroženi na dve cifri pri merjenju napetosti $U = 1,4\text{ V}$?

Rešitev:

- Skupno negotovost merjenja napetosti pretežno določa negotovost tipa B zaradi lastnega pogoška voltmetra. Mejna vrednost pogoška je:

$$M_U = \pm(1,4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}) = \pm 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- in negotovost tipa B: $u_1 = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = 1,963 \cdot 10^{-3} \text{ V} \rightarrow u_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

- Negotovost zaokrožena na dve cifri je $u_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}$. Največja vrednost, ki bi jo lahko dodali, ne da bi se poznalo pri tej zaokrožitvi, je

$$\frac{2,0099 \cdot 10^{-3} - 1,963 \cdot 10^{-3}}{\Delta U_z / V = 0,047 \cdot 10^{-3}},$$

- ker se tudi vrednost $u_1 = 2,0099 \cdot 10^{-3} \text{ V}$ zaokroži na $u_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

- Negotovost zaradi ločljivosti u_q ne sme v skupni negotovosti presegati prispevka zaradi zaokrožitve:

$$u_1 + \Delta U_z = \sqrt{u_1^2 + u_q^2} \Rightarrow \sqrt{(u_1 + \Delta U_z)^2 - u_1^2} = u_q$$

- $u_q = 4,32 \cdot 10^{-4} \text{ V}$

- Ker za pogošek ločljivosti privzamemo pravokotno porazdelitev, zapišemo

$$u_q = \frac{\Delta U}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \Delta U = 2\sqrt{3}u_q = 1,494 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- Ločljivost zaokrožimo navzdol na prvo dekadno vrednost
 $\Rightarrow \Delta U = 1\text{ mV}$, kar nam da $\rightarrow$ 4 mesta prikaza

4. Umerjali ste digitalni voltmeter s $6\frac{1}{2}$ mestnim prikazovalnikom. Koliko je standardna merilna negotovost tega voltmetra pri nastavljeni vrednosti, če je bila:

- razširjena merilna negotovost ($k = 2$) referenčnega inštrumenta $U_N = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ V}$,
- časovna nestabilnost merjene napetosti je razvidna iz

$$U_{N,\min} = 1,234567 \text{ V} \text{ in } U_{N,\max} = 1,246688 \text{ V},$$
- negotovost zaradi histereze znaša $u_{\text{hist}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V}$,
- negotovost zaradi lezenja znaša $u_{\text{lez}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ V}$,
- upoštevajte tudi negotovost zaradi ločljivosti umerjanega voltmetra.

Rešitev:

- Standardna negotovost referenčnega inštrumenta je za faktor razširitve manjša kot razširjena negotovost:

$$u(E_N) = \frac{U(E_N)}{k} = \frac{2,0 \cdot 10^{-6} \text{ V}}{2} = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ V},$$

- Negotovost zaradi nestabilnosti merjene napetosti aproksimiramo s pomočjo maksimalne in minimalne vrednosti izmerjenih vrednosti in za vrednotenje negotovosti najbolj neugodno porazdelitev pogreška – pravokotno obliko:

$$u(E_t) = \frac{|E_{N,\max} - E_{N,\min}|}{2\sqrt{3}} = \frac{|1,234567 \text{ V} - 1,246688 \text{ V}|}{2\sqrt{3}} = 3,499 \cdot 10^{-3} \text{ V},$$

- Negotovost zaradi histereze znaša $u_{\text{hist}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V}$ in zaradi lezenja $u_{\text{lez}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ V}$.
- Negotovost zaradi ločljivosti umerjanega voltmetra pa se izračuna iz podatka o $6\frac{1}{2}$ prikazu. Ločljivost Q namreč znaša

$$6\frac{1}{2} \Rightarrow 1,000000 \text{ V} \Rightarrow Q = 1 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

- iz nje pa dobimo negotovost zaradi ločljivosti ob upoštevanju pravokotne porazdelitve pogreška:

$$u(E_q) = \frac{Q}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot 10^{-6} \text{ V}}{2\sqrt{3}} = 2,88 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

- Skupna negotovost u_c tako znaša:

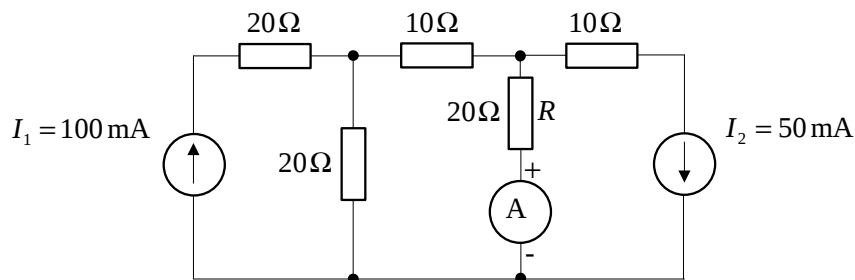
$$u_c(U_i) = \sqrt{u^2(E_N) + u^2(E_t) + u^2(E_{\text{his}}) + u^2(E_{\text{lez}}) + u^2(E_q)}$$

$$u_c(U_i) = \sqrt{(1,0 \cdot 10^{-6} \text{ V})^2 + (3,499 \cdot 10^{-3} \text{ V})^2 + (1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V})^2 + (1,2 \cdot 10^{-6} \text{ V})^2 + (2,889 \cdot 10^{-7} \text{ V})^2}$$

$$u_c(U_i) = 3,502 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- Po zaokrožitvi dobimo standardno negotovost: $u_c(U_i) = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

5. Koliko pokaže ampermeter z $U_{Ao} = 100 \text{ mV}$ in $I_D = 20 \text{ mA}$ pri merjenju toka skozi upor R ? Kolikšen je sistematični pogrešek zaradi vključitve ampermetra?



Rešitev:

- Kadar vključimo ampermeter v vezje, nam kaže manjši tok, kot je bil tok pred vključitvijo. Vzrok je v končni upornosti ampermetra, ki jo izračunamo iz karakterističnega padca napetosti U_{Ao} na izbranem merilnem območju:

$$R_A = \frac{U_{Ao}}{I_D} = \frac{100 \text{ mV}}{20 \text{ mA}} = 5 \Omega$$

- Tok skozi upor R brez ampermetra določimo po principu superpozicije. Upoštevati moramo, da ima tokovni generator neskončno veliko upornost in uporabiti enačbo za tokovni delilnik:

$$I_R = I_1 \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega} - I_2 \frac{10 \Omega + 20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega} = 0,4 I_1 - 0,6 I_2 = 10 \text{ mA}$$

- Ko vključimo ampermeter, se razmere spremenijo in tok se zmanjša:

$$\begin{aligned} I_A &= I_1 \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega + 5 \Omega} - I_2 \frac{10 \Omega + 20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega + 5 \Omega} = \\ &= 36,36 \text{ mA} - 27,27 \text{ mA} = 9,09 \text{ mA} \end{aligned}$$

- Sistematični pogrešek zaradi vključitve ampermetra je :

$$e = \frac{I_A}{I_R} - 1 = -0,0909 \rightarrow e = -9,09\%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Kolikšen je največji informacijski pretok digitalnega voltmetra, ki ima merilni doseg $U_D = 2\text{ V}$, mejo pogreška $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D + 2\text{ dig})$, ločljivost $\Delta U_q = 1\text{ mV}$ in čas meritve $T_M = 25\text{ ms}$?

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar je pogrešek odvisen od izmerjene vrednosti v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj v območju od $x_{\min}$ do $x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)} \Rightarrow m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln\left(1 + \frac{a(x_{\max} - x_{\min})}{b}\right)$$

- Če vzamemo za enoto informacije bit, ustreza številu amplitudnih stopenj m naslednja množina informacije kot dvojiški logaritem m :

$$S = \text{lb}(m) = \log_2(m)$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas T_M , je hitrost prenosa ali **informacijski pretok** enak:

$$I = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m) = \frac{S}{T_M}$$

- Za dani voltmeter zapišemo mejni pogrešek v obliki:

$$M_U = (0,1\%U + 0,1\%U_D + 2\text{ dig}) = 10^{-3}U + 2\text{ mV} + 2\text{ mV} = 10^{-3}U + 4\text{ mV}$$

- In maksimalno število neodvisnih amplitudnih stopenj na območju $U_D = 2\text{ V}$ ($x_{\min} = 0\text{ V}$, $x_{\max} = U_D$):

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln\left(1 + \frac{10^{-3}(U_D)}{4\text{ mV}}\right) = 203,7$$

- Največja množina informacije in maksimalni informacijski pretok sta:

$$S = \text{lb}(m_{\max}) = 7,67\text{ bit} \Rightarrow I_{\max} = \frac{S}{T_M} = 306,8\text{ bit/s}$$

2. Pred časom ste merili napetost. Odčitali ste izmerjeno vrednost 14,342 V . Takrat si niste zapisali podatke o uporabljenem instrumentu. Katerega od naslednjih prikazovalnikov je imel inštrument ($1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$ ali $4\frac{1}{2}$ mestni prikaz) in kakšen je merilni rezultat?

$$1\frac{1}{2} - M_U = (4\% U_D + 2\% U_i)$$

$$2\frac{3}{4} - u(U) = 0,11 \text{ V}$$

$$4\frac{1}{2} - M_U = (5\% U_i + 3\% U_D + 3\text{dig})$$

Rešitev:

- Izmerjena vrednost je $U_i = 14,342 \text{ V}$
 - Za tako izmerjeno vrednost potrebujemo instrument, ki ima na voljo 5 mest prikaza, to je s $4\frac{1}{2}$ mestnim prikazovalnikom. Instrument ima pri tej izmerjeni vrednosti merilni doseg 20 V (največja vrednost prikaza je 19,999).
- Mejni pogrešek je: $M_U = \left(\frac{5}{100}\right) \cdot 14,342 \text{ V} + \left(\frac{3}{100}\right) \cdot 20 \text{ V} + 3 \cdot 0,001 \text{ V} = 1,3201 \text{ V}$
- in standardna negotovost: $u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = 0,7621 \text{ V}$
- Merilni rezultat je:

$$\underline{U = 14,34 \text{ V} \quad , \quad u(U) = 0,77 \text{ V} \quad , \quad n = 1}$$

3. V katerih mejah se lahko nahaja celotna standardna negotovost izhodne veličine $y = 2x_1 + x_2$, če sta vhodni veličini x_1 in x_2 medsebojno odvisni in imata enako veliki standardni negotovosti $u(x_1) = u(x_2)$?

Rešitev:

- Standardno negotovost izhodne posredno merjene veličine $u_c(y)$ določa tudi koeficient korelacije r , kadar so neposredno merjene veličine medsebojno odvisne. V našem primeru dveh medsebojno odvisnih vhodnih veličin zapišemo:

$$u_c(y) = \sqrt{(c_1 u(x_1))^2 + (c_2 u(x_2))^2 + 2rc_1c_2u(x_1)u(x_2)}$$

- Koeficiente občutljivosti izračunamo z delnim odvajanjem:

$$y = 2x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 2, \quad c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1,$$

- in označimo negotovosti vhodnih veličin: $u(x_1) = u(x_2) = u(x)$

- Ker lahko koeficient korelacije r zavzame vrednosti med -1 in $+1$, se standardna negotovost spreminja:

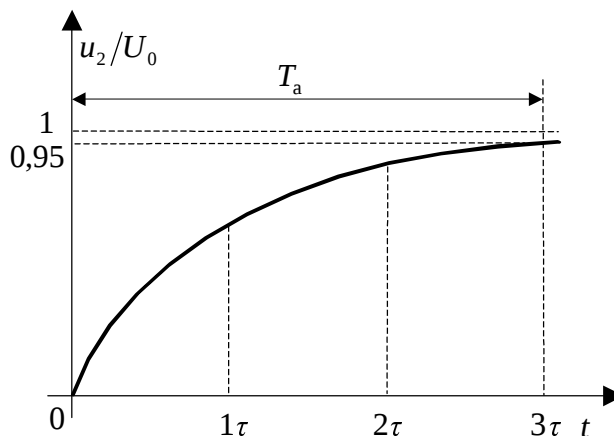
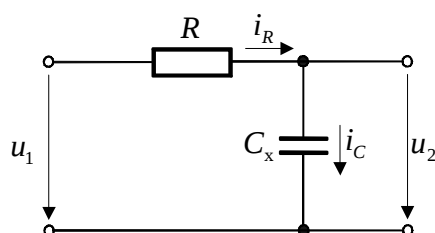
$$u_c(y) = \sqrt{4u^2(x) + u^2(x) + 4ru^2(x)}$$

- $r = -1$: $u_c(y) = \sqrt{u^2(x)} = u(x)$
- $r = +1$: $u_c(y) = \sqrt{9u^2(x)} = 3u(x)$
- Zaradi medsebojne odvisnosti se standardna negotovost izhodne posredno merjene veličine spreminja v mejah $u(x) \leq u_c(y) \leq 3u(x)$ in se precej razlikuje od primera, kadar so vhodne veličine medsebojno neodvisne $r = 0$!
- $r = 0$: $u_c(y) = \sqrt{5u^2(x)} = 2,24u(x)$

4. Kapacitivnost kondenzatorja C_x merimo tako, da kondenzator skupaj z uporom $R = 1200 \, \Omega$ vežemo v merilni člen prvega reda in merimo odzivni čas tega člena (znotraj $e = \pm 5\%$ od končnega odklona). C_x nato posredno izračunamo iz odzivnega časa. Kolikšna je ločljivost tako izmerjene kapacitivnosti, če odzivni čas merimo z ločljivostjo $1 \mu s$?

Rešitev:

- Skica vezja in potek izhodne napetosti:



- Odzivni čas T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 5\%$ končne vrednosti (zelo razširjen kriterij), velja za člen 1. reda:

$$\frac{u_2}{U_0} = 0,95 = (1 - e^{-T_a/\tau}) \Rightarrow T_a = 3\tau = 3RC$$

- Ločljivost določanja kapacitivnosti določimo z občutljivostjo $S = \partial C_x / \partial T_a$ in z ločljivostjo merjenja odzivnega časa.

$$C_x = \frac{T_a}{3R} \Rightarrow Q_{C_x} = \Delta C_x = \frac{\partial C_x}{\partial T_a} Q_{T_a} = \frac{Q_{T_a}}{3R} = \frac{1 \mu s}{3 \cdot 1200 \Omega} = 0,27 \text{ nF}$$

5. Uporovnemu senzorju temperature, za katerega velja $R_t = R_0 e^{bt}$, $R_0 = R_{0^\circ\text{C}} = 1000\Omega$, $R_{100^\circ\text{C}} = 1600\Omega$ vežemo vzporedno upor, tako da je skupna upornost pri temperaturi $t = 50^\circ\text{C}$ enaka $R_s = R_t(50^\circ\text{C})/2$. Kolikokrat je občutljivost skupne (linearizirane) karakteristike manjša od občutljivosti samega senzorja? Nazivna (idealna) karakteristika gre skozi začetno in končno točko dejanske karakteristike.

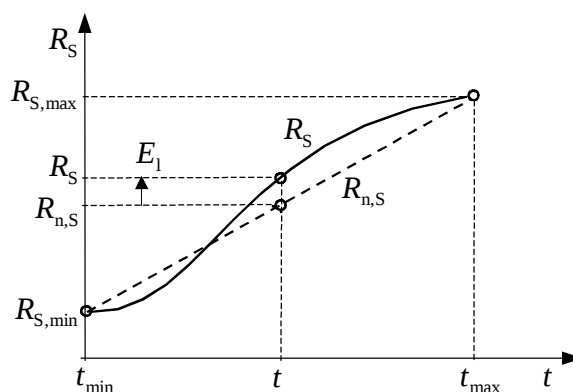
Rešitev:

- Iz karakteristike uporovnega senzorja, ki je podana z enačbo $R_t = R_0 e^{bt}$, pri čemer je R_0 upornost senzorja pri referenčni temperaturi 0°C , izračunamo koeficient b :

$$R_{100^\circ\text{C}} = R_{0^\circ\text{C}} e^{b \cdot 100^\circ\text{C}} \Rightarrow b = \frac{1}{100^\circ\text{C}} \cdot \ln\left(\frac{R_{100^\circ\text{C}}}{R_{0^\circ\text{C}}}\right) = 4,7 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$$

- Če vzporedno k senzorju z upornostjo R_t vežemo upor z upornostjo R_V , kateremu se upornost s temperaturo ne spreminja, se skupna karakteristika spremeni, občutljivost in nelinearnost pa se zmanjšata. Tako linearizirana karakteristika ima upornost R_s .

$$R_s = \frac{R_t \cdot R_V}{R_t + R_V}$$



- Ker je skupna upornost pri temperaturi $t = 50^\circ\text{C}$ enaka $R_s = R_t(50^\circ\text{C})/2$, mora biti upornost vzporedno vezanega upora R_V enaka:

$$R_V = R_{50^\circ\text{C}} = R_{0^\circ\text{C}} e^{b \cdot 50^\circ\text{C}} = 1264,91\Omega \Rightarrow R_s = R_t(50^\circ\text{C})/2$$

- Nazivna (idealna) karakteristika gre skozi začetno in končno točko dejanske karakteristike. Občutljivost je tako:

$$S = \frac{R_{t_{\max}} - R_{t_{\min}}}{t_{\max} - t_{\min}} = \frac{R_{100^\circ\text{C}} - R_{0^\circ\text{C}}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 6\Omega / ^\circ\text{C}$$

- Občutljivost skupne (linearizirane) karakteristike določa vzporedno vezan upor R_V :

$$S_s = \frac{\frac{R_{100^\circ\text{C}} \cdot R_V}{R_{100^\circ\text{C}} + R_V} - \frac{R_{0^\circ\text{C}} \cdot R_V}{R_{0^\circ\text{C}} + R_V}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 1,4795\Omega / ^\circ\text{C}$$

$$R_{s,\max} = \frac{R_{100^\circ\text{C}} \cdot R_V}{R_{100^\circ\text{C}} + R_V} = 706,43\Omega$$

$$R_{s,\min} = \frac{R_{0^\circ\text{C}} \cdot R_V}{R_{0^\circ\text{C}} + R_V} = 558,48\Omega$$

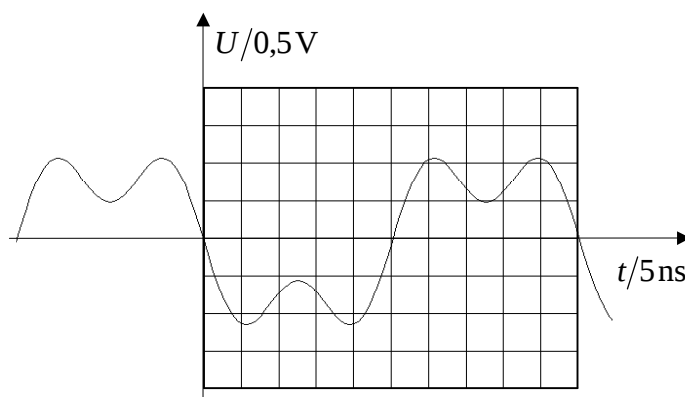
- Občutljivost skupne (linearizirane) karakteristike je manjša od občutljivosti samega senzorja: $\frac{S}{S_s} = 4,055$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Na osciloskop priključimo napetost $u/V = 1 \cdot \sin \omega t + 1/2 \cdot \sin 3\omega t$, $f = 20 \text{ MHz}$. Kakšna bi bila slika na zaslonu, če bi imel osciloskop neskončno mejno frekvenco? Kakšna pa je slika na zaslonu, če ima realni osciloskop pasovno širino $B = 20 \text{ MHz}$ (približek je člen 1. reda); $k_t = 5 \text{ ns/d}$; $k_y = 0,5 \text{ V/d}$; $N = 0 \text{ V}$; $S < 0$? Skicirajte!

Rešitev:

- V primeru idealnega osciloskopa z neskončno mejno frekvenco se signal dinamično ne popači. Na zaslonu se začne izrisovati pri prožilnem nivoju $N = 0 \text{ V}$ z negativno strmino $S < 0$. Pri nastavitvi časovne konstante $k_t = 5 \text{ ns/d}$ se izriše ena perioda signala $T = 1/f = 50 \text{ ns}$ in izkoristi zaslon (raster: $10d \times 8d$, $k_y = 0,5 \text{ V/d}$) kot prikazuje slika.



- Realni osciloskop dinamično popači sliko. Amplituda se zmanjša $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$ in fazni kot se poveča v odvisnosti od razmerja frekvence komponente in mejne frekvence:

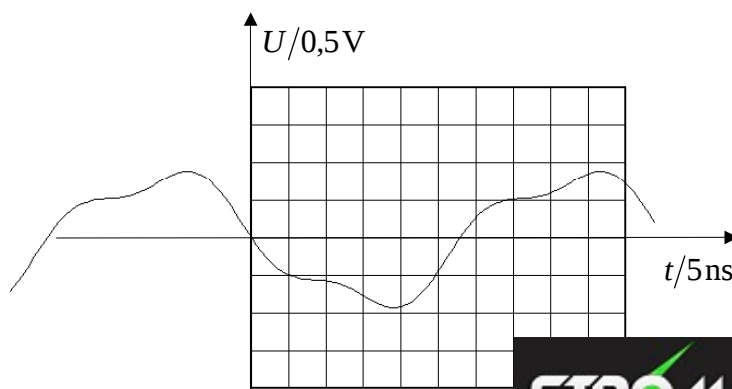
$$\varphi = -\arctg(\omega\tau) = -\arctg\left(\frac{2\pi f}{2\pi f_m}\right) = -\arctg(f/f_m)$$
- Zgornjo mejno frekvenco $f_{m,zg}$ določimo iz pasovne širine, če zanemarimo spodnjo mejno frekvenco $f_{m,sp} < 20 \text{ Hz}$.

$$B = f_{m,zg} - f_{m,sp}; \quad f_{m,sp} < 20 \text{ Hz} \Rightarrow B \doteq f_{m,zg} = f_m$$

- Za vsako od komponent moramo določiti dinamično zmanjšano amplitudo in fazni zamik:

$$\begin{aligned} \text{▪ } f/f_m = 1: \quad \frac{U_2}{U_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071, \quad \varphi = -0,785 \text{ rad} = -45^\circ \\ \text{▪ } f/f_m = 3: \quad \frac{U_2}{U_1} &= \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,3162, \quad \varphi = -1,249 \text{ rad} = -71,56^\circ \end{aligned}$$

- Popačeni signal ima funkcijo: $u/V = 0,707 \cdot \sin(\omega t - 45^\circ) + 1/2 \cdot 0,3162 \cdot \sin(3\omega t - 71,56^\circ)$
- in slika signala na zaslonu osciloskopa je:



2. Koliko je specifična prevodnost izražena v enoti SI, če je v ameriški literaturi navedeno, da znaša specifična upornost $16,54 \Omega \text{CM}/\text{ft}$?

- CM (circular mil) – 1CM je ploščina kroga, ki ima premer 1mil ;
- 1mil = 0,001in ; 1in (inch) = 25,4 mm ;
- 1ft (foot) = 12 in

Rešitev:

- Površina kroga 1CM izražena v SI enoti je:

$$\text{CM} = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \pi \frac{(1\text{mil})^2}{4} = \pi \frac{(0,001 \cdot 25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{4} = 5,067 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$$

- Dolžina 1ft izražena v SI enoti je : $1\text{ft} = 12 \cdot 25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,3048 \text{ m}$
- Od tod dobimo za specifično upornost izraženo v SI enotah:

$$\rho = 16,54 \frac{\Omega \text{CM}}{\text{ft}} = 27,496 \cdot 10^{-9} \Omega \text{m} = 27,496 \text{ n}\Omega \text{m}$$

- in za specifično prevodnost:

$$\lambda = \frac{1}{\rho} = 36,368 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}} = 36,368 \text{ M} \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

3. Podajte rezultat za $\cos\varphi$ s standardno negotovostjo!

- ampermeter: $I = 4,16 \text{ A}$, $I_D = 6 \text{ A}$, $r = 0,5$
- voltmeter: $U = 100 \text{ V}$, $U_D = 150 \text{ V}$, $r = 0,2$
- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $\cos\varphi_n = 0,8$, $r = 0,5$, $\alpha_D = 150 \text{ d}$, $\alpha = 107,2 \text{ d}$
(α pomeni odklon vatmetra v delcih d)

Rešitev:

- Najprej se izračuna $\cos\varphi$.

- Delovna moč:

$$P = P_D \frac{\alpha}{\alpha_D} = U_n I_n \cos\varphi_n \frac{\alpha}{\alpha_D} = 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot 0,8 \cdot \frac{107,2 \text{ d}}{150 \text{ d}} = 285,86 \text{ W}$$

$$P = UI \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{P}{UI} = 285,86 \text{ W} \cdot \frac{1}{100 \text{ V} \cdot 4,16 \text{ A}} = 0,687179$$

- Nato izračunamo skupno relativno in absolutno merilno negotovost.
 - relativno merilno negotovost zaradi produkta in kvocienta vhodnih veličin zapišemo z geometrijsko vsoto:

$$w_c(\cos\varphi) = \sqrt{w^2(P) + w^2(U) + w^2(I)}$$

- posamezne relativne merilne negotovosti izpeljane iz razreda danega na merilni doseg imajo obliko:

$$w(G) = \frac{u(G)}{G} = \frac{M(G)}{G\sqrt{3}} = \frac{r}{100} \frac{G_D}{G} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{100} \frac{\alpha_D}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- (opomba: ker oznaka razreda ni obkrožena, se za referenčno vrednost vzame merilni doseg.)

- zato lahko zapišemo za skupno relativno merilno negotovost:

$$w_c(\cos\varphi) = \sqrt{\left(\frac{0,5}{100} \frac{150}{107,2} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,2}{100} \frac{150}{100} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,5}{100} \frac{6}{4,16} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6,054 \cdot 10^{-3}$$

- Skupna absolutna merilna negotovost je:

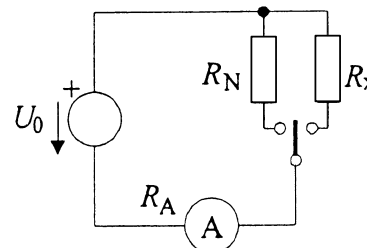
$$u_c(\cos\varphi) = w_c(\cos\varphi) \cdot \cos\varphi = 0,00416$$

- Rezultat za $\cos\varphi$ s standardno negotovostjo:

$$\cos\varphi = 0,6872 \qquad u_c(\cos\varphi) = 0,0042 \qquad n = 1$$

4. Katerega izmed uporov $R_1 \approx 9950\Omega$ ali $R_2 \approx 10500\Omega$ lahko bolj točno zmerimo po tokovni primerjalni metodi z ampermetrom $M_I = \pm(0,1\% I + 0,1\% I_D)$, $I_D = 2\text{ mA}$, ločljivost $1\mu\text{A}$, $R_A = 10\Omega$ in uporovnim etalonom $R_N = 10,000(1 \pm 10^{-4})\text{ k}\Omega$? Koliko je najmanjša dosegljiva standardna negotovost? Vezje napajamo z idealnim napetostnim virom.

Rešitev:



- Čez upor R_N teče tok: $I_N = \frac{U_0}{R_N + R_A}$
- Po preklopu stikala teče čez upor R_x tok: $I_x = \frac{U_0}{R_x + R_A}$
- Enačbi delimo in izrazimo R_x . Upoštevajoč konstantno napetost U_0 dobimo torej:

$$R_x = R_N \frac{I_N}{I_x} \left[1 + \frac{R_A}{R_N} \left(1 - \frac{I_x}{I_N} \right) \right]$$

- Če uporabimo poenostavljeni izraz $R_x = R_N I_N / I_x$, "pridelamo" sistematični pogrešek:

$$e = \frac{G_x - G_N}{G_A + G_N} \approx \frac{G_x - G_N}{G_A} = \frac{1/R_x - 1/R_N}{1/R_A} = 10^{-6}$$

- Primerjanje je tem bolj točno, čim bližje sta si relativno merjena upora ($R_x \leftrightarrow R_N$)!
 - $R_1 \approx 9950\Omega$: $\delta_1 = \frac{R_1 - R_N}{R_N} = -0,5\% \rightarrow$
 - $R_2 \approx 10500\Omega$: $\delta_2 = \frac{R_2 - R_N}{R_N} = 5\%$
 - po primerjalni metodi je moč izmeriti bolj točno R_1 .
- Skupna standardna negotovost poenostavljenega izraza $R_x = R_N \frac{I_N}{I_x}$, kadar sta si upora dovolj blizu ($|\delta| < 1\%$) in se odčitka I_N in I_x malo razlikujeta, je enaka:

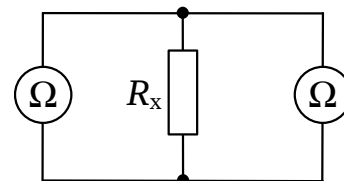
$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(R_N) + 2 \left(\frac{u(I_x)_q}{I_x} \right)^2}$$

- Najmanjšo dosegljivo standardno negotovost dobimo pri polni izkoriščenosti območja ampermetra $I_x \approx I_D$:

$$\frac{u(I_x)_q}{I_x} \Big|_{\min} = \frac{\Delta I_q}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{I_D} = \frac{10^{-6} \text{ A}}{2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ A}} = 1,443 \cdot 10^{-4}$$

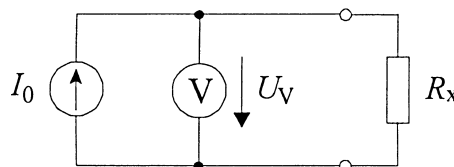
$$w_c(R_x) = \sqrt{(10^{-4}/\sqrt{3})^2 + 2(1,443 \cdot 10^{-4})^2} = 2,12 \cdot 10^{-4} \rightarrow w_c(R_x) = 2,2 \cdot 10^{-4}$$

5. Kolikšen je relativni sistematični pogrešek, če merimo upornost $R_x = 100 \Omega$ z dvema enakima idelanima ommetroma, kot je prikazano na sliki.



Rešitev:

- Oba ommetra s svojima tokovnimi viroma pošiljata enak tok skozi R_x (na sliki je prikazana nadomestna shema ommetra). R_x se izračuna iz izmerjene napetosti in nastavljenega toka.



- Kadar sta pozitivni sponki ommetrov priključeni na isto stran upora, se tokova čez upor seštevata in je na njem dvakrat večja napetost, kot bi bila pri enem ommetru. Ker sta nastavljena toka I_0 enaka, kažeta ommetra 200Ω . V tem primeru je sistematični pogrešek enak:

$$e = \frac{R'_x - R_x}{R_x} = \frac{200 \Omega - 100 \Omega}{100 \Omega} = 1 \rightarrow e = 100 \%$$

- Kadar sta pozitivni sponki ommetrov priključeni na nasprotni stran upora, se tokova čez upor odštevata in je na njem napetost nič. Zato kažeta ommetra 0Ω , sistematični pogrešek pa je:

$$e = \frac{R'_x - R_x}{R_x} = \frac{0 \Omega - 100 \Omega}{100 \Omega} = -1 \rightarrow e = -100 \%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko znaša efektivna vrednost vhodnega signala, ki je sestavljen iz osnovne ($f_1 = 20 \text{ MHz}$) in tretje harmonske komponente, če nam DSO ($B = 100 \text{ MHz}$, člen prvega reda), uporabljen kot spektralni analizator, pokaže dve komponenti: črto osnovne komponente z $U_1 = 15 \text{ dBV}$ in črto tretje, ki je za 20 dB manjša? Skicirajte razmere!

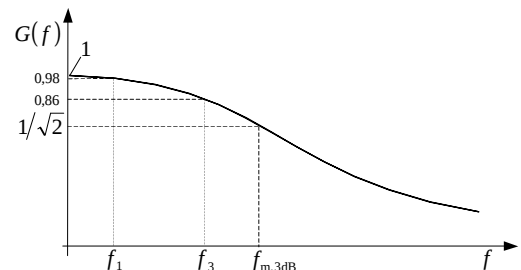
Rešitev:

- Efektivno vrednost napetosti vhodnega signala U_v sestavljata efektivna prispevka osnovne in tretje harmonske komponente:

$$U_v = \sqrt{U_{1,v}^2 + U_{3,v}^2} = \sqrt{\left(\frac{U_{1,i}}{K_1}\right)^2 + \left(\frac{U_{3,i}}{K_3}\right)^2}$$

- DSO zaradi svojega dinamičnega odziva (aproksimiran s členom 1. reda in mejno frekvenco $f_m \doteq B = 100 \text{ MHz}$) različno oslabi napetosti na vходу:

$$K = G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}} = \frac{U_i}{U_v}$$



- $f_1 = 20 \text{ MHz} : K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (20/100)^2}} = 0,9806$
- $f_3 = 60 \text{ MHz} : K_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_3/f_m)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (60/100)^2}} = 0,8574$

- Kadar je napetost izražena v enoti decibel, je pri tem mišljeno njeno razmerje proti referenčni vrednosti U_{ref} . Izhodiščna definicija decibela je podana z desetiškim logaritmom dveh moči:

$$\frac{U}{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{P}{P_{\text{ref}}} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{R} \cdot \frac{R}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref}}} \right)$$

- Osnovna komponenta napetosti je podana v enoti dBV, kar pomeni, da je referenčna napetost $U_{\text{ref}} = 1 \text{ V}$, in za izmerjeno napetost osnovne komponente dobimo:

$$U_{1,i} = U_{\text{ref}} \cdot 10^{\frac{U/\text{dBV}}{20}} = 1 \text{ V} \cdot 10^{\frac{15}{20}} = 5,6234 \text{ V}$$

- Ker je tretja harmonska komponenta za 20 dB manjša od prve, ki služi v tem primeru za referenčno vrednost, dobimo desetkrat manjšo napetost

$$U_{3,i}/\text{dB} = 20 \log \left(\frac{U_{3,i}}{U_{1,i}} \right) = -20 \text{ dB} \rightarrow U_{3,i} = \frac{1}{10} U_{1,i} = 0,5623 \text{ V}$$

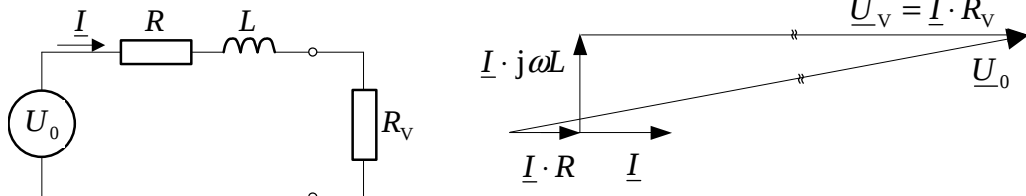
- Popravljen efektivna vrednost napetosti vhodnega signala je:

$$U_v = \sqrt{\left(\frac{U_{1,i}}{K_1}\right)^2 + \left(\frac{U_{3,i}}{K_3}\right)^2} = 5,772 \text{ V}$$

2. Kako velika mora biti upornost voltmetra $R_V = ?$, $M_U = \pm(0,10\%U + 0,10\%U_D + 1\text{dig})V$, ločljivost 100mV , L_V zanemarljiva, ko merimo z njim napetost sinusnega vira $U_0 = 100,00\text{V}$ - prazni tek; $f = 200\text{Hz}$, $R = 500\Omega$, $L = 0,4\text{H}$, da bo sistematični pogrešek priključitve zanemarljiv? Skicirajte vezje in fazorski diagram!

Rešitev:

- Vezje in fazorski diagram:



- Po priključitvi nam voltmetr kaže manj, kot je napetost praznega teka U_0 . Imamo

$$\text{napetostni delilnik: } \underline{U}_V = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + \underline{Z}_0} = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + R + j\omega L}$$

$$\text{▪ ki ga v efektivni obliki izrazimo z: } U_V = U_0 \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}}$$

- Sistematični pogrešek priključitve $e = U_V/U_0 - 1$ je zanemarljiv, kadar je manjši od desetine merilne negotovosti rezultata:

$$e \leq \frac{w(U)}{10} = \frac{1}{10} \frac{m_U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{10\sqrt{3}} \frac{M_U}{U} = \frac{1}{10\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{U_D}{U} + \frac{1\text{dig}}{U} \right)$$

- Če je sistematični pogrešek priključitve zanemarljiv, je vrednost napetosti na voltmetru približno enaka napetosti praznega teka $U \doteq U_0$. Merilni doseg voltmetra mora biti $U_D \geq U$. Najmanjšo mejno vrednost lastnega pogreška m_U in s tem najstrožji pogoj za določitev upornosti voltmetra dobimo, kadar je $U_D = U$. Od tod dobimo:

$$|e| = \left| \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}} - 1 \right| \leq \frac{1}{10\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{100,0\text{V}}{100,0\text{V}} + \frac{100\text{mV}}{100,0\text{V}} \right) = 1,732 \cdot 10^{-4}$$

- Upoštevati moramo, da je sistematični pogrešek priključitve negativen. Za primer enačaja lahko tako zapišemo kvadratično enačbo: $1 - e = \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}}$

$$R_V = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 - 4\left(1 - \frac{1}{(1-e)^2}\right)(R^2 + (\omega L)^2)}}{2\left(1 - \frac{1}{(1-e)^2}\right)} = \frac{-1000\Omega \pm 1000,348\Omega}{-6,93 \cdot 10^{-4}} = \frac{-502,6\Omega}{+2,887\text{M}\Omega}$$

- Pravilna rešitev je $R_V = 2,887\text{M}\Omega$ oziroma voltmetr mora imeti večjo upornost.

$$R_V \geq 2,887\text{M}\Omega$$

3. Izpeljite prikrojeno veličinsko enačbo za jakost električnega polja na razdalji r od izvora, ki seva z močjo P , za $E/(V/m)$, P/mW in r/cm , če je ustrezna veličinska enačba $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$? Uporabite jo za izračun E , če je $P = 2,6 mW$ in $r = 1 cm$!

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}, \quad c_0 \approx 300\,000 \text{ km/s}$$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$
- Pri prehodu na prikrojeno veličinsko enačbo moramo vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, množiti in deliti z željeno enoto:

$$E \frac{V/m}{V/m} = \sqrt{P \frac{mW}{mW} \cdot \mu_0 c_0 / 2\pi \left(r \frac{cm}{cm}\right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številske faktor:

$$E/V/m = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot \frac{\sqrt{10^{-3} W}}{V/m} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{10^{-2} m} = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot K$$

- Številske faktor je v našem primeru enak:

- $K = \frac{\sqrt{10^{-3} VA}}{10^{-2} V} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}}$

- Upoštevajoč vrednosti za $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ in $c_0 \doteq 300\,000 \text{ km/s}$

dobimo: $K = \frac{\sqrt{10^{-3}}}{10^{-2}} \frac{\sqrt{VA}}{V} \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 300 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{2\pi}}$

- in končno $K = 3,1623 \sqrt{\frac{A}{V}} \sqrt{60 \frac{H}{s}} = 24,495 \sqrt{\frac{A}{V} \cdot \frac{Vs}{A} \cdot \frac{1}{s}} \approx 24,5$

- Prikrojena veličinska enačba je: $E/V/m = 24,5 \cdot \sqrt{P/mW / (r/cm)^2}$
- Za dane podatke $P = 2,6 mW$ in $r = 1 cm$ izračunamo jakost električnega polja s pomočjo prikrojene veličinske enačbe:

$$E/V/m = 24,5 \cdot \sqrt{2,6 mW/mW / (1 cm/cm)^2} = 39,5 \rightarrow E = 39,5 V/m$$

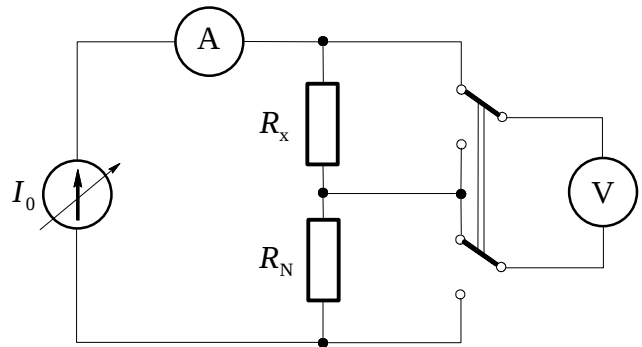
4. Napišite merilni rezultat za upornost $R_x \approx 10\text{k}\Omega$, ki smo jo merili z napetostno primerjalno metodo. Izmerjene vrednosti so naslednje:

- $U_N = 9,324\text{ V}$, $U_x = 9,284\text{ V}$
- $R_V = 1\text{M}\Omega$, $R_N = 10\text{k}\Omega$, $m_{R_N} = 10^{-4}$
- $M_V = (10^{-4}U + 3 \cdot 10^{-4}U_D + 3\text{dig})$,
 $U_D = 10\text{ V}$

Rešitev:

- Iz poenostavljenega izraza za napetostno primerjalno metodo izračunamo vrednost:

$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} = 9957,100\Omega$$



- Pri tem smo zaradi končne upornosti voltmetra $R_V = 1\text{M}\Omega$ naredili sistematični pogrešek:

$$e = \frac{R_N - R_x}{R_x + R_V} = 4,24 \cdot 10^{-5}$$

- Ker sta primerjani upornosti in ustrezno napetosti blizu skupaj $U_x/U_N = 0,9957$, se vpliv lastnega pogreška voltmetra v kvocientu zanemari. Pri določanju standardne negotovosti merilnega rezultata sodeluje dvakrat negotovost zaradi ločljivosti voltmetra $u(U_x)_q = \Delta U_{\min} / (2\sqrt{3}) = 1\text{ mV} / (2\sqrt{3})$, ker dvakrat odčitamo, in negotovost referenčnega upora:

$$\frac{u_c(R_x)}{R_x} = \sqrt{\left(\frac{u(R_N)}{R_N}\right)^2 + 2\left(\frac{u(U_x)_q}{U_x}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{m(R_N)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta U_{\min}}{2\sqrt{3}U_x}\right)^2} = 7,257 \cdot 10^{-5}$$

- Pri tem smo upoštevali, da je tokovni vir zelo stabilen, sicer bi morali upoštevati še negotovost odčitavanja ampermetra ($u(I_A)_q/I_A$).
- Sistematični pogrešek ni zanemarljiv $e \leq w_c/10$ in ga upoštevamo v končnem rezultatu:

$$R_x = 9957,100 \cdot (1 - e)\Omega = 9956,678\Omega$$

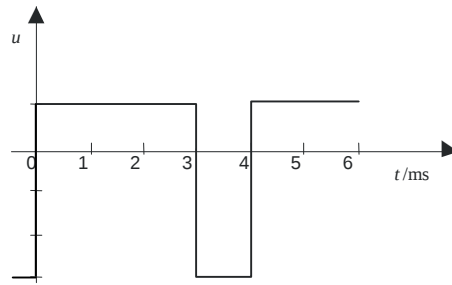
- Ker je popravek relativno zelo majhen, lahko za standardno negotovost uporabimo kar vrednost pri poenostavljenem izrazu $w_c(R_x) = 7,257 \cdot 10^{-5}$. Absolutna vrednost negotovosti je

$$u_c(R_x) = w_c(R_x) \cdot R_x = 0,7226\Omega \rightarrow u_c(R_x) = 0,73\Omega$$

- Zaokrožen merilni rezultat se zapiše v obliki:

$$R_x = 9956,68\Omega ; u_c(R_x) = 0,73\Omega ; n = 1$$

5. Koliko kažeta voltmeter z vrtljivim železom ter voltmeter z vrtljivo tuljavico in vgrajenim usmernikom, če nanju priključimo izmenično napetost s temensko vrednostjo $\hat{u} = 25 \text{ V}$?



Rešitev:

- Voltmeter z vrtljivim železom je eden od voltmetrov, ki merijo pravilno efektivno vrednost napetosti, ki je definirana na periodo signala $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$.

- Za dano obliko napetosti je efektivno vrednost enaka:

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{T} \left[\left(\hat{u}^2 \cdot \frac{3}{4} T \right) + \left((-3\hat{u})^2 \cdot \frac{1}{4} T \right) \right] = \hat{u}^2 \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4} \right) = 3 \cdot \hat{u}^2$$

$$U = \sqrt{3} \cdot \hat{u} = \sqrt{3} \cdot 25 \text{ V} = 43,3 \text{ V}$$

- Voltmeter z vrtljivo tuljavico in vgrajenim usmernikom se odziva na usmerjeno srednjo vrednost $U_r = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt$. Lahko meri enosmerno in izmenično napetost. Običajno je inštrument narejen za merjenje sinusne veličine, zato je njegova skala pomnožena s faktorjem oblike za sinusni signal $F_0 = \frac{U}{U_r} = \frac{\hat{u}/\sqrt{2}}{2\hat{u}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111$, da nam kaže efektivno vrednost.

$$U^* = F_0 \cdot U_r$$

- Za dano obliko napetosti je usmerjena srednja vrednost enaka:

$$U_r = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt = \frac{1}{T} \left[\left(\hat{u} \cdot \frac{3}{4} T \right) + \left(|-3\hat{u}| \cdot \frac{1}{4} T \right) \right] = \hat{u} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) = 1,5 \cdot \hat{u}$$

- Voltmeter kaže napačno efektivno vrednost napetosti, ki ni sinusne oblike.

$$U^* = F_0 \cdot U_r = 1,11 \cdot 1,5 \cdot 25 \text{ V} = 41,7 \text{ V}$$

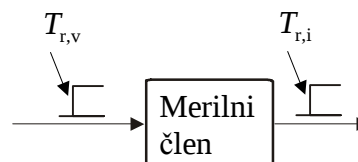
Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Dvižni čas signala na vhodu merilnega člena je $T_{r,v} = 8\text{ ns}$ in dvižni čas signala na izhodu je $T_{r,i} = 14\text{ ns}$. Do katere frekvence lahko uporabljamo merilni člen, da bo pogrešek amplitude pod 1%? Dinamično obnašanje merilnega člena aproksimiramo s členom 1. reda. Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Merilni člen zaradi svoje dinamike podaljša dvižni čas. Dvižni časi se geometrično seštevajo. Doprinos merilnega člena je tako:

$$T_{r,i}^2 = T_{r,v}^2 + T_{r,\zeta}^2 \Rightarrow T_{r,\zeta} = \sqrt{T_{r,i}^2 - T_{r,v}^2} = 11,49\text{ ns}$$



- Ker obnašanje merilnega člena aproksimiramo s členom 1. reda, lahko iz dvižnega časa določimo časovno konstanto in mejno frekvenco:

$$T_{r,v}^2 = T_r = \ln 9 \cdot \tau \Rightarrow \tau = T_r / \ln 9$$

$$f_{m,3dB} = \frac{0,35}{T_r} = 30,46\text{ MHz}$$

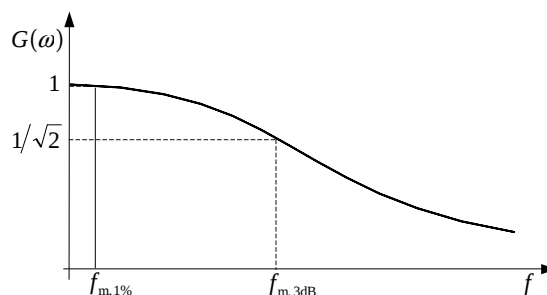
- Amplitudna karakteristika člena 1. reda upade za en odstotek pri frekvenci $f_{m,1\%}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_{m,1\%} \tau)^2}} = 0,99 \Rightarrow 1 + \left(2\pi f_{m,1\%} \frac{T_r}{\ln 9}\right)^2 = \left(\frac{1}{0,99}\right)^2$$

- Da bo pogrešek amplitude pod 1% lahko uporabljamo merilni člen do frekvence:

$$f_{m,1\%} = \frac{1}{2\pi} \frac{\ln 9}{T_r} \sqrt{\left(\frac{1}{0,99}\right)^2 - 1} = 4,34\text{ MHz}$$

- Skica razmer:



2. Skicirajte vezje za merjenje upornosti po UI metodi (varianta z manjšim sistematičnim pogreškom) in podajte merilni rezultat s standardno in razširjeno negotovostjo ($k = 2$)!

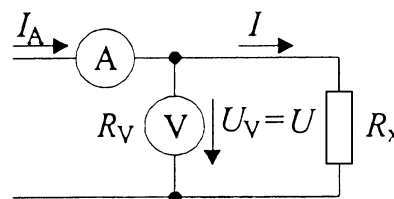
- voltmeter: $U_D = 20 \text{ V}$, $U = 7,60 \text{ V}$, $M_U = \pm(0,10\%U + 0,10\%U_D + 10 \text{ mV})$,
 $R_V = 10 \text{ M}\Omega$
- ampermeter: $I_D = 200 \text{ mA}$, $I = 167,3 \text{ mA}$, $M_I = \pm(0,10\%I + 0,10\%I_D + 1 \text{ dig})$,
 $U_{A_0} = 200 \text{ mV}$

Rešitev:

- Oceno upornosti dobimo iz kvocienta: $R_x = \frac{U}{I} = \frac{7,60 \text{ V}}{167,3 \text{ mA}} = 45,427 \Omega$

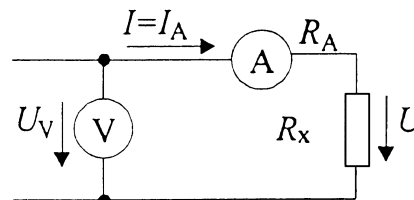
- Kadar priključimo voltmeter neposredno na upor, je izmerjena napetost tudi napetost na upor in je tok ampermetra prevelik za tok skozi končno upornost voltmetra. Sistematični pogrešek je sorazmeren razmerju R_x/R_V :

$$e_1 = -\frac{R_x}{R_x + R_V} \doteq -\frac{R_x}{R_V} = -4,54 \cdot 10^{-6}$$



- Če priključimo ampermeter neposredno pred upor, je tok ampermetra enak toku skozi upor in je napetost voltmetra prevelika za padec na upornosti ampermetra $R_A = U_{A_0}/I_D = 1 \Omega$. Sistematični pogrešek je sorazmeren kvocientu:

$$e_2 = -\frac{R_A}{R_x} = -2,2 \cdot 10^{-2}$$



- Izberemo prvo varianto z manjšim sistematičnim pogreškom $|e_1| < |e_2|$
- Standardna negotovost upornosti je sestavljena iz dveh prispevkov (voltmetra in ampermetra):

$$w(U) = \frac{m_U}{\sqrt{3}} = \frac{M_U/U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{20 \text{ V}}{7,60 \text{ V}} + \frac{10 \text{ mV}}{7,60 \text{ V}} \right) = 2,856 \cdot 10^{-3}$$

$$w(I) = \frac{m_I}{\sqrt{3}} = \frac{M_I/I}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{200 \text{ mA}}{167,3 \text{ mA}} + \frac{0,1 \text{ mA}}{167,3 \text{ mA}} \right) = 1,613 \cdot 10^{-3}$$

- Skupno standardno negotovost v relativni in absolutni obliki zapišemo:

$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)} = 3,28 \cdot 10^{-3} \rightarrow w_c(R_x) = 3,3 \cdot 10^{-3}$$

$$u_c(R_x) = w_c(R_x) \cdot R_x = 0,149 \Omega \rightarrow u_c(R_x) = 0,15 \Omega$$

- Tudi razširjeno negotovost s faktorjem razširitve $k = 2$ zaokrožimo na dve mesti:

$$U_c(R_x) = k \cdot u_c(R_x) = 2 \cdot u_c(R_x) = 0,298 \Omega \rightarrow u_c(R_x) = 0,30 \Omega$$

- Sistematični pogrešek je zanemarljiv, saj velja $e < w_c(R_x)/10$. Zato lahko rezultat za R_x zapišemo kar v obliki $R_x = U/I = 45,43 \Omega$.

- Merilni rezultat s standardno negotovostjo podamo v obliki:

$$R_x = 45,43 \Omega; \quad u_c(R_x) = 0,15 \Omega; \quad n = 1$$

- in merilni rezultat z razširjeno negotovostjo v obliki:

$$R_x = 45,43 \Omega; \quad u_c(R_x) = 0,30 \Omega; \quad n = 1$$

3. Dvema kondenzatorjema z enako nazivno vrednostjo, smo izmerili kapacitivnost z istim instrumentom. Standardna negotovost je 0,40%. Kondenzatorja vezemo zaporedno. Kolikšna je standardna negotovost kapacitivnosti te vezave? $r(C_1, C_2) = 1$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Impedanco zaporedne vezave dveh enakih kondenzatorjev ($C_1 = C_2 = C$) zapišemo v obliki:

$$Z = \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{1}{\omega \cdot C_s}$$

- Pri čemer je skupna kapacitivnost enaka: $C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C}{2}$

- Pri določanju standardne negotovosti zaporedne vezave kondenzatorjev moramo upoštevati standardni negotovosti merjenja kapacitivnosti $u(C)$, koeficienta občutljivosti c in korelacijski faktor r kot zahteva podana enačba.

- Ker smo posamezno kapacitivnost merili z istim instrumentom, sta njuni standardni negotovosti enaki: $u(C_1) = u(C_2) = u$
 - Koeficienta občutljivosti dobimo z delnim odvajanjem skupne enačbe:

$$c_1 = \frac{\partial C_s}{\partial C_1} = \frac{C_2(C_1 + C_2) - C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$c_2 = \frac{\partial C_s}{\partial C_2} = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

- Celotna standardna negotovost kapacitivnosti zaporedne vezave kondenzatorjev ob upoštevanju koeficienta korelacije $r(C_1, C_2) = 1$ je:

$$u_c(C_s) = \sqrt{(c_1 u(C_1))^2 + (c_2 u(C_2))^2 + 2 \cdot c_1 c_2 \cdot u(C_1) u(C_2)}$$

$$u_c(C_s) = \sqrt{\left(\frac{u}{4}\right)^2 + \left(\frac{u}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot u^2} = \sqrt{4 \left(\frac{u}{4}\right)^2} = \frac{u}{2}$$

- in v relativni obliki:

$$w_c(C_s) = u_c(C_s) / C_s = \frac{u}{2} \cdot \frac{2}{C} = w(C) = 4,0 \cdot 10^{-3}$$

4. Koliko je efektivnih stopenj prostosti ν_{ef} , če je izhodna veličina $y = P = I^2 R$, relativni standardni negotovosti vhodnih veličin $w(I) = 2\%$ in $w(R) = 3\%$, meritev toka $n_1 = 16$, meritev upornosti pa $n_2 = 13$?

$$\nu_{\text{ef}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/\nu_i}$$

Rešitev:

- Za izračun efektivnih stopenj prostosti po gornji enačbi potrebujemo skupno merilno negotovost, ki jo izračunamo iz posameznih prispevkov s pomočjo parcialnih odvodov.

- Izhodiščna enačba: $P = I^2 R$

- Delež k skupni negotovosti zaradi negotovosti toka:

$$w_1(P) = \frac{u_1(P)}{P} = \frac{\partial P}{\partial I} \frac{u(I)}{P} = 2IR \frac{u(I)}{P} = 2 \cdot w(I) = 2 \cdot (2 \cdot 10^{-2}) = 4 \cdot 10^{-2}$$

- Delež k skupni negotovosti zaradi negotovosti upora:

$$w_2(P) = \frac{u_2(P)}{P} = \frac{\partial P}{\partial R} \frac{u(R)}{P} = I^2 \frac{u(R)}{P} = w(R) = 3 \cdot 10^{-2}$$

- Ker imamo produkt vhodnih veličin, je skupno negotovost $u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)}$ primerneje izraziti v relativni obliki:

$$w_c(P) = \frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{w_1^2(P) + w_2^2(P)} = \sqrt{(4 \cdot 10^{-2})^2 + (3 \cdot 10^{-2})^2} = 5 \cdot 10^{-2}$$

- Število efektivnih stopenj prostosti je za eno manjše od števila meritev, ker z izračunom aritmetične sredine $\bar{x}$, ki sodeluje pri določanju eksperimentalnega standardnega odklona aritmetične sredine – standardne negotovosti tipa A

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n(n-1)}, \text{ zmanjšamo stopnjo prostosti za ena.}$$

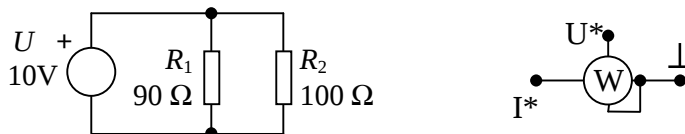
$$\nu_1 = n_1 - 1 = 15, \quad \nu_2 = n_2 - 1 = 12$$

- Število efektivnih stopenj prostosti se z negotovostmi v relativni obliki izrazi:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{\frac{u_c^4(P)}{\frac{u_1^4(P)}{\nu_1} + \frac{u_2^4(P)}{\nu_2}} \cdot \frac{P^4}{P^4}}{\frac{w_c^4(P)}{\frac{w_1^4(P)}{\nu_1} + \frac{w_2^4(P)}{\nu_2}}} = \frac{(5 \cdot 10^{-2})^4}{\frac{(4 \cdot 10^{-2})^4}{15} + \frac{(3 \cdot 10^{-2})^4}{12}} = 26,24$$

$$\rightarrow \nu_{\text{eff}} = 26$$

5. Kako bi priključili vatmeter s skupno izhodno sponko (glej sliko vatmetra), da bi z njim izmerili moč na upor R_1 v narisanim vezju ter da bo sistematični pogrešek glede na moč, ki je bila na R_1 pred priključitvijo, najmanjši? Skicirajte merilno vezje z vključenim vatmetrom. Koliko kaže vatmeter, če je njegova upornost v tokovni veji $10\ \Omega$, upornost v napetostni veji pa je zanemarljivo velika?

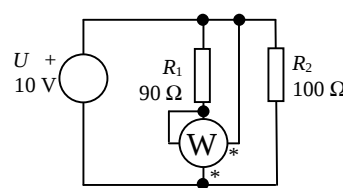
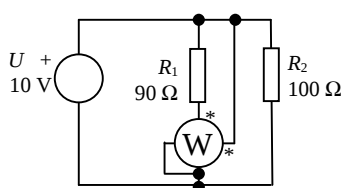


Rešitev:

- Možni priključitvi vatmetra s skupno izhodno sponko:

možnost 1:

možnost 2:



- Dodatni dve možnosti priključitve bi bili še, če bi vatmeter priključili pred uporom namesto za njim, vendar pa to ne spremeni kazanja vatmetra.
- Najprej izračunamo moč, ki jo je trošil R_1 pred priključitvijo vatmetra:

$$P_{R_1} = U_{R_1} \cdot I_{R_1} = U_{R_1} \frac{U_{R_1}}{R_1} = \frac{U^2}{R_1} = \frac{100\text{ V}^2}{90\ \Omega} = 1,1\text{ W}$$

- Po vključitvi vatmetra v vezje po prvi možnosti vezave nam kaže ob upoštevanju notranje upornosti v tokovni veji vatmetra R_{Wt} vrednost:

$$P_{W1} = U_{W1} \cdot I_{W1} = U \cdot \frac{U}{R_1 + R_{Wt}} = \frac{100\text{ V}^2}{100\ \Omega} = 1\text{ W},$$

- Sistematični pogrešek glede na moč pred priključitvijo znaša

$$E_1 = P_{W1} - P_{R_1} = 1\text{ W} - 1,1\text{ W} = -0,1\text{ W}.$$

- Če bi izbrali drugo priključitev, bi vatmeter kazal:

$$P_{W2} = U_{W2} \cdot I_{W2} = \frac{U \cdot R_1}{R_1 + R_{Wt}} \cdot \frac{U}{R_1 + R_{Wt}} = \frac{U^2 \cdot R_1}{(R_1 + R_{Wt})^2} = \frac{100\text{ V}^2 \cdot 90\ \Omega}{100\ \Omega^2} = 0,9\text{ W},$$

- Sistematični pogrešek pa bi bil

$$E_2 = P_{W2} - P_{R_1} = 0,9\text{ W} - 1,1\text{ W} = -0,2\text{ W}$$

- Ugotovimo lahko torej, da je prva priključitev ustrežnejša, ker da manjši sistematični pogrešek.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Pri vzorčenju sinusnega signala z digitalnim spominskim osciloskopom (enkratno proženje) smo dobili frekvenco prikazanega signala 2 MHz. Pri katerih frekvencah vhodnega signala je možno rekonstruirati prikazani signal, če je frekvenca vzorčenja $f_s = 20$ MHz in dvižni čas vertikalnega kanala osciloscopa $T_r = 4$ ns, da amplitudni pogrešek ni večji kot 10%? Za prikaz je bila uporabljena interpolacija s funkcijo $y = \sin x/x$.

Rešitev:

- Frekvenco prikazanega signala $f' = 2$ MHz na DSO z enkratnim proženjem smo lahko dobili, kadar je bil na vходу signal $f = 2$ MHz in je bil pravilno razpoznan ali pa pri frekvencah, ki se nahajajo okoli mnogokratnikov vzorčne frekvence $f_s = 20$ MHz.

$$f' = |kf_s - f| \quad k = 1, 2, \dots$$

- Za iskane frekvence zapišemo:

$$f = kf_s \pm f'$$

k	f/MHz
1	18, 22
2	38, 42
3	58, 62
..	..

- Ker imamo najboljšo možno interpolacijo s funkcijo $y = \sin x/x$, pogrešek zaradi interpolacije zanemarimo. Pogrešek, ki preostane, je pogrešek zaradi dinamike analognega dela osciloscopa (tipično aproksimiran s členom 1. reda). Mejno frekvenco osciloscopa dobimo iz dvižnega časa:

$$f_m = f_{m,1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi(T_r/\ln 9)} = \frac{0,35}{T_r}$$

- Nas zanima, do katere frekvence upade amplituda za manj kot 10%.

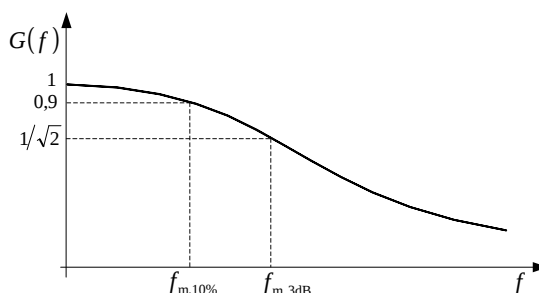
$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f/f_{m,1/\sqrt{2}}\right)^2}} = 0,9$$

- in od tod dobimo

$$f_{m,10\%} = \frac{0,35}{T_r} \sqrt{\left(\frac{1}{0,9}\right)^2 - 1} = 42,37 \text{ MHz}$$

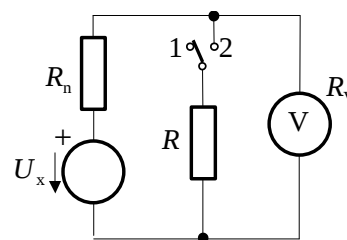
- Frekvence, pri katerih smo lahko rekonstruirali sinusni signal $f' = 2$ MHz, in istočasno amplitudni pogrešek ni bil večji kot 10%, so: $f/\text{MHz} = 2, 18, 22, 38, 42$

- Skica razmer:



2. Če je preklopnik v položaju 1, pokaže voltmetr $U_1 = 10\text{ V}$, če je v položaju 2 pa $U_2 = 9\text{ V}$. Koliko je neznana napetost U_x ? Koliko je sistematični pogrešek merilne metode, če proglasimo za neznano napetost kar U_1 ?

$$R = 10\text{ M}\Omega, \quad R_V = 10\text{ M}\Omega$$



Rešitev:

- Ko je preklopnik v položaju 1, nam kaže voltmetr padec napetosti U_1 na upor $R_1 = R_V$:

$$R_1 = R_V = 10\text{ M}\Omega, \quad U_1 = U_x \frac{R_1}{R_1 + R_n}$$

- Ko je preklopnik v položaju 2, nam kaže voltmetr padec napetosti U_2 na vzporedni kombinaciji uporov R_V in R :

$$R_2 = \frac{R_V R}{R_V + R} = 5\text{ M}\Omega, \quad U_2 = U_x \frac{R_2}{R_2 + R_n}$$

- Iz dveh enačb izračunamo neznano napetost:

$$U_x = U_1 U_2 \frac{R_2 - R_1}{R_2 U_1 - R_1 U_2} = 11,25\text{ V}$$

- Če proglasimo za neznano napetost kar U_1 , je sistematični pogrešek enak:

$$e = \frac{U_1}{U_x} - 1 = -11,1\%$$

3. Digitalni amperimeter kaže $I = 16,72 \text{ mA}$. Izrazite popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo, če smo instrument uporabili pri temperaturi $t = 8^\circ \text{C}$!

- meja pogreška: $M_I = \pm(0,15\% I + 2 \text{ dig})$
- referenčno območje: $23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$
- nazivno območje uporabe: $0^\circ \text{C} \div 50^\circ \text{C}$
- temperaturni koeficient: $\pm(0,012\% I + 1 \text{ dig})/^\circ \text{C}$

Rešitev:

- Če bi uporabili instrument pri referenčnih pogojih, bi bila meja lastnega pogreška:

$$M_I = \pm \left(\frac{0,15}{100} I + 0,02 \text{ mA} \right) = \pm 0,045 \text{ mA}$$

- Ker smo instrument uporabili izven referenčnega območja v nazivnem območju uporabe za vplivno veličino temperaturo, se meja pogreška poveča za mejo spremembe kazanja $M_{I,s} = M_I + M_I^0$. V našem primeru smo izstopili iz referenčnega območja na spodnji meji pri $23^\circ \text{C} - 5^\circ \text{C} = 18^\circ \text{C}$, zato moramo upoštevati razliko temperature do te vrednosti:

$$M_I^0 = \pm \left(\left(\frac{0,012}{100} I + 0,01 \text{ mA} \right) / ^\circ \text{C} \right) \cdot (18^\circ \text{C} - 8^\circ \text{C}) = \pm 0,12 \text{ mA}$$

- Skupna meja pogreška (lastnega in spremembe kazanja) je:

$$M_{I,s} = M_I + M_I^0 = \pm 0,165 \text{ mA}$$

- in standardna negotovost pri privzeti pravokotni porazdelitvi gostote verjetnosti pogreška:

$$u(I) = \frac{M_{I,s}}{\sqrt{3}} = 0,09535 \text{ mA} = 0,096 \text{ mA}$$

- Ker je negotovost manjša od ločljivosti, zaokrožimo na mestu, ki ga določa ločljivost:

$$u(I) = 0,096 \text{ mA} \rightarrow 0,10 \text{ mA}$$

- Merilni rezultat podamo v obliki:

$$I = 16,72 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,10 \text{ mA}, \quad n = 1$$

4. Upornost uporovnega senzorja temperature znaša $R_t = 3050 \Omega$. Zapišite merilni rezultat za izmerjeno temperaturo, če je nelinearnost senzorja $n = 0,5\%$, negotovost ohmmetra pa je zanemarljiva. Senzor ima pri 0°C upornost 9800Ω , pri 100°C pa 200Ω .

Rešitev:

- Ker ne poznamo enačbe za upornost senzorja v odvisnosti od temperature, lahko temperaturo, ki ustreza $R_t = 3050 \Omega$, izračunamo iz linearne karakteristike. Odstopanje dejanske karakteristike od linearne je največ $+0,5\%$ oz. $-0,5\%$. Ker je predznak nedoločen, imamo opravka z negotovostjo izmerjene temperature.
- Najprej zapišimo enačbo nazivne (linearne) karakteristike.

$$R_n = \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}} \cdot (t - t_{\min}) + R_{t,\min} = \frac{200 \Omega - 9800 \Omega}{100^\circ\text{C}} \cdot t + 9800 \Omega = -96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \cdot t + 9800 \Omega$$

- Zaradi nelinearnosti n se upornost R_n od dejanske upornosti R_t lahko razlikuje za največ $\pm 0,5\%$. Velja torej

$$n = \left| \frac{R_t - R_n}{R_{t,\max} - R_{t,\min}} \right| = \pm 0,5\%$$

$$\Rightarrow +0,005 = \frac{3050 \Omega - R_n}{200 \Omega - 9800 \Omega} \Rightarrow R_{n,\max} = 3098 \Omega$$

$$\Rightarrow -0,005 = \frac{3050 \Omega - R_n}{200 \Omega - 9800 \Omega} \Rightarrow R_{n,\min} = 3002 \Omega$$

- Iz linearne karakteristike izračunamo naslednji dve temperaturi:

$$t_{\max} = \frac{R_{n,\max} - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = \frac{3098 \Omega - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = 69,813^\circ\text{C}$$

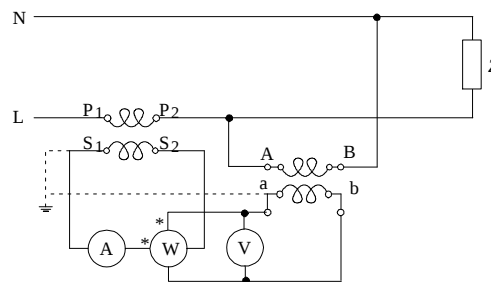
$$t_{\min} = \frac{R_{n,\min} - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = \frac{3002 \Omega - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = 70,813^\circ\text{C}$$

- Iz tega zaključimo, da (posredno) izmerjena temperatura leži na intervalu $[t_{\max}, t_{\min}]$. Od tu dobimo mejo pogreška M_t ter standardno negotovost, za katero predpostavimo enakomerno porazdelitev, ter (ustrezno zaokrožen) merilni rezultat:

$$t_i = \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2} = 70,31^\circ\text{C}, \quad u(t) = \frac{M_t}{\sqrt{3}} = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{2\sqrt{3}} = 0,29^\circ\text{C}, \quad n = 1$$

5. Kolikšne so delovna, jalova in navidezna moč porabnika?

- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $\alpha_D = 15000$, $\alpha = 12427$;
- voltmeter: $U = 102 \text{ V}$;
- ampermeter: $I = 4,72 \text{ A}$;
- tokovnik: $I_{pn} = 75 \text{ A}$, $I_{sn} = 5 \text{ A}$
- napetostnik: $U_{pn} = 35 \text{ kV}$, $U_{sn} = 100 \text{ V}$



Rešitev:

- Meritev moči porabnika se izvaja preko merilnih transformatorjev. Ker so merilni instrumenti priključeni na sekundarni strani merilnih transformatorjev, je seveda potrebno upoštevati prestavno razmerje, ki je enako razmerju primarnega nazivnega toka in sekundarnega nazivnega toka za tokovni merilni transformator. Enako je pri napetostnem merilne transformatorju. Torej

$$K_{in} = \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \quad \text{oziroma} \quad K_{un} = \frac{U_{pn}}{U_{sn}}.$$

- Delovna moč je moč, ki jo kaže vatmeter priključen na sekundarno stran merilnih transformatorjev, pomnožena s prestavnima razmerjema. Delovna moč je tako

$$P = K_{un} \cdot K_{in} \cdot P_w = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} \cdot \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \cdot \left(U_n \cdot I_n \cdot \frac{\alpha}{\alpha_D} \right)$$

$$P = \frac{35 \text{ kV}}{100 \text{ V}} \cdot \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} \cdot 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{12427}{15000} = 2,175 \text{ MW}$$

- Navidezna moč je produkt napetosti in toka, ki ju merimo z voltmetrom oziroma ampermetrom zopet na sekundarni strani merilnih transformatorjev.

$$S = K_{un} \cdot K_{in} \cdot U \cdot I = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} \cdot \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \cdot U \cdot I = \frac{35 \text{ kV}}{100 \text{ V}} \cdot \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} \cdot 102 \text{ V} \cdot 4,72 \text{ A} = 2,528 \text{ MVA}$$

- Jalova moč se izpelje iz enačbe za navidezno moč $S^2 = P^2 + Q^2$.

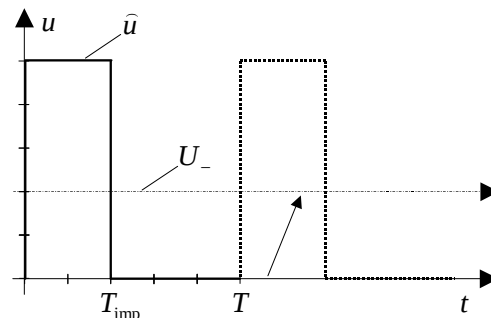
$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(2,528 \text{ MVA})^2 - (2,175 \text{ MW})^2} = 1,288 \text{ MVAr}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Pravokotno pulzno napetost u frekvence $f = 20\text{ kHz}$ in širine pulza $T_{\text{imp}} = 20\mu\text{s}$ merimo z voltmetrom, ki meri pravilno efektivno vrednost. Koliko je temenska vrednost $\hat{u}$ vhodne napetosti, če voltmeter kaže $U = 110\text{ mV}$ in je enosmerna komponenta napetosti blokirana?

Rešitev:

- Na podlagi podatkov ima signal pravokotno pulzno obliko, kjer je perioda ponavljanja pulzov enaka $T = 1/f = 50\mu\text{s}$.



- Enosmerna komponenta signala, ki je blokirana, je enaka srednji vrednosti. Ker imamo v dveh intervalih periode konstantni vrednosti $\hat{u}$ in nič, lahko zapišemo:

$$U_- = \bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt = \frac{1}{T} \left(\hat{u} \frac{2}{5} T + 0 \frac{3}{5} T \right) = \frac{2}{5} \hat{u}$$

- Po blokiran enosmerni komponenti imamo tudi sedaj v dveh intervalih periode konstantni vrednosti $(\hat{u} - U_-)$ in $(-U_-)$. Voltmeter se odziva na efektivno vrednost signala $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 \, dt}$, kar nam pri dani obliki signala da:

$$U^2 = \frac{1}{T} \left((\hat{u} - U_-)^2 \frac{2}{5} T + (-U_-)^2 \frac{3}{5} T \right) = \frac{1}{T} \left(\left(\hat{u} - \frac{2}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{2}{5} T + \left(-\frac{2}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{3}{5} T \right) =$$

$$U^2 = \left(\left(\frac{3}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{3}{5} \right) = \frac{9 \cdot 2}{25 \cdot 5} \hat{u}^2 + \frac{4 \cdot 3}{25 \cdot 5} \hat{u}^2 = \frac{30}{125} \hat{u}^2$$

- Od tod dobimo za temensko vrednost vhodne napetosti

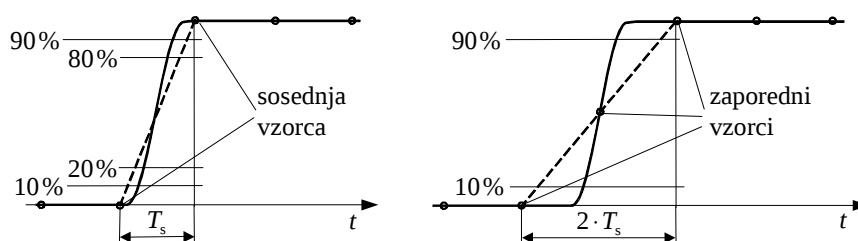
$$\hat{u} = \sqrt{\frac{125}{30}} U = 224,53\text{ mV}$$

- in zaokrožimo na ločljivost voltmetra: $\hat{u} = 225\text{ mV}$

2. Kolikšen je najmanjši dvižni čas, ki ga lahko pomerimo z osciloskopom pri enkratnem proženju, če perioda vzorčenja osciloskopa $T_s = 1\text{ns}$ ni povsem točna in ima mejo pogreška $M_{T_s} = \pm 50\text{ps}$. Osciloskop ima definiran dvižni čas kot čas, ki ga signal porabi za prehod od 20% do 80% obeh stacionarnih stanj? Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Pri digitalnih spominskih osciloskopih je dvižni čas določen s periodo vzorčenja in se spreminja pri linearni interpolaciji od $0,8T_s$ (leva slika) do $1,6T_s$ (desna slika). Iz obeh skrajnih primerov vidimo, da se pri enakem skoku napetosti merjenega signala uporabljajo dva ali trije vzorci, ker dogodek ni sinhroniziran z vzorci.



- Pri enkratnem proženju smo pri merjenju dvižnega časa omejeni s periodo vzorčenja T_s .
- Če dvižni čas definiramo kot čas, ki je potreben za prehod od 20% do 80% nivoja signala, bo tudi izmerjeni dvižni čas znašal

$$T_{r,\min} = (0,8 - 0,2) \cdot T_s = 0,6T_s$$

- Ker osciloskop periode vzorčenja nima točno nastavljene, bomo v najboljšem primeru izmerili minimalni dvižni čas

$$T'_{r,\min} = 0,6 \cdot (T_s - M_{T_s}) = 0,6 \cdot 950 \text{ ps} = 570 \text{ ps}$$

3. Koliko je še lahko notranja upornost R_0 napetostnega vira ($U_0 = 7\text{ V}$), da bi z voltmetrom merili napetost praznega teka brez korekcije zaradi priključitve instrumenta?

$$M_U = \pm(0,5\%U + 0,5\%U_D), U_D = 10\text{ V}, R_V = 10\text{ M}\Omega$$

Rešitev:

- Sistematični pogrešek zaradi priključitve instrumenta je zanemarljiv, kadar je desetkrat manjši od negotovosti izmerjene vrednosti $|E| \leq \frac{1}{10}u(U)$.

- V našem primeru je enak razliki napetosti, ki jo kaže priključen voltmeter, in napetostjo praznega teka:

$$E = U'_0 - U_0 = \frac{R_V}{R_0 + R_V}U_0 - U_0 = \frac{R_V - R_0 - R_V}{R_0 + R_V}U_0 = \frac{-R_0}{R_0 + R_V}U_0$$

- Iz absolutne vrednosti sistematičnega pogreška, ki je sicer negativen, izračunamo iskano vrednost notranje upornosti:

$$|E| = \frac{R_0}{R_0 + R_V}U_0 \quad \rightarrow \quad R_0 = \frac{E R_V}{U_0 - E}$$

- Merilna negotovost izmerjene napetosti je enaka

$$u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{0,5}{100} 7\text{ V} + \frac{0,5}{100} 10\text{ V} \right) = 49,07\text{ mV}$$

- Zanemarljivi sistematični pogrešek mora biti manjši kot $E \leq 4,907\text{ mV}$, kar nam da vrednost za notranjo upornost:

$$E \leq 4,907\text{ mV} \quad \rightarrow \quad \left(R_0 = \frac{E R_V}{U_0 - E} \right) \leq 7,016\text{ k}\Omega$$

4. Podajte popolni merilni rezultat z razširjeno negotovostjo za hipotenuzo trikotnika c , če je stopnja zaupanja $p = 95\%$! Rezultati ponovljenih meritev katet so naslednji:

$$\bar{a} = 172,35 \text{ mm}, s(a) = 1,42 \text{ mm}, n_1 = 5$$

$$\bar{b} = 294,64 \text{ mm}, s(b) = 1,68 \text{ mm}, n_2 = 8$$

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/v_i}, \quad v_i = n_i - 1$$

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(v)$	
	$p = 95\%$	$p = 99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Vrednost hipotenuze izračunamo s pomočjo srednjih vrednosti katet:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 341,346 \text{ mm}$$

- Standardna negotovost posredno merjene veličine katete je sestavljena iz deležev negotovosti obeh katet: $u_c(c) = \sqrt{u_a^2 + u_b^2}$

- Delež ene katete sestavlja koeficient občutljivosti $\partial c / \partial a$ oz. $\partial c / \partial b$ in standardna negotovost merjenja katete pri več meritvah $s(a) / \sqrt{n_1}$ oz. $s(b) / \sqrt{n_2}$.

- Koeficienta občutljivosti:

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} 2a = \frac{a}{c} = 0,50491 \quad \text{in} \quad \frac{\partial c}{\partial b} = \frac{b}{c} = 0,86317$$

- Deleža negotovosti katet:

$$u_a = \frac{\partial c}{\partial a} u(a) = \frac{a}{c} \frac{s(a)}{\sqrt{n_1}} = 0,3207 \text{ mm} \quad \text{in} \quad u_b = \frac{\partial c}{\partial b} u(b) = \frac{b}{c} \frac{s(b)}{\sqrt{n_2}} = 0,5127 \text{ mm}$$

- Standardna merilna negotovost katete je $u_c(c) = 0,6047 \text{ mm}$

- Efektivno število prostostnih stopenj, ki določajo raven zaupanja posredno merjene veličine na podlagi večkrat neposredno merjenih veličin, določajo negotovosti le-teh in število ponovitev meritev. Efektivno število prostostnih stopenj vedno zaokrožimo navzdol, saj je s tem pri enaki stopnji zaupanja interval negotovosti večji.

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(c)}{u_a^4/(n_1 - 1) + u_b^4/(n_2 - 1)} = \frac{u_c^4(c)}{u_a^4/4 + u_b^4/7} = 10,69 \rightarrow v_{\text{eff}} = 10$$

- Iz tabele dobimo za faktor razširitve: $v_{\text{eff}} = 10 \rightarrow k = t_{95\%} = 2,23$

- Zaokrožena razširjena negotovost je: $U_{95} = t_{95\%} \cdot u_c(c) = 1,348 \text{ mm} \rightarrow 1,4 \text{ mm}$
- Merilni rezultat:

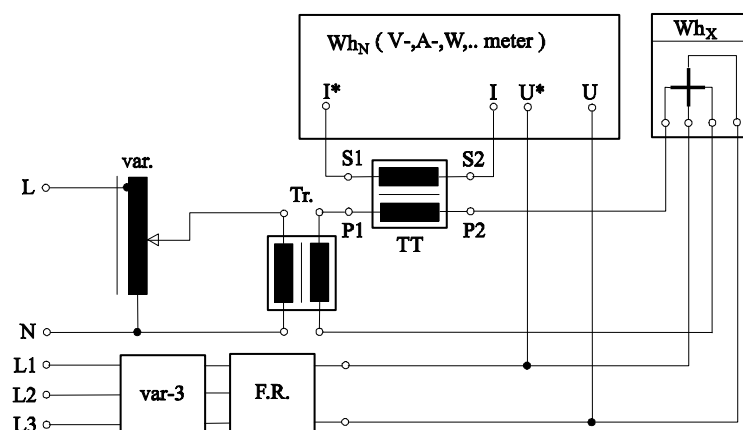
$$c = 341,3 \text{ mm}; U(c) = 1,4 \text{ mm}; k = 2,23; v_{\text{eff}} = 10; p = 95\%$$

5. Skicirajte vezje za preskus razreda enofaznega indukcijskega števca delovne energije in izračunajte, če je pri spodnjih podatkih pogrešek še v dopustnih mejah!

- indukcijski števec: $U_r = 220\text{ V}$, $10 - 40\text{ A}$, $K = 600\text{ vrt/kWh}$, $r = \textcircled{2}$, $N = 174\text{ vrt}$
- digitalni števec el. energije: $W_N = 29,18\text{ Wh}$
- tokovnik: $I_{pn} = 10\text{ A}$, $I_{sn} = 1\text{ A}$

Rešitev:

- Vezalna shema preskušanja razreda točnosti indukcijskega števca električne energije.



- Za izračun lastnega pogreška pri merjenju energije potrebujemo energijo preskušane števca W_s in referenčno energijo W :

$$e = \frac{W_s - W}{W}$$

- Energija preskušane števca se izračuna iz števila vrtljajev in konstante števca.

$$W_s = \frac{N}{K}$$

- Referenčna energija pa je energija referenčnega števca električne energije W_N pomnožena s tokovno konstanto $K_i = I_{pn}/I_{sn}$, ker je instrument na sekundarni strani tokovnega transformatorja.

$$W = K_i \cdot W_N$$

- Lastni pogrešek je tako

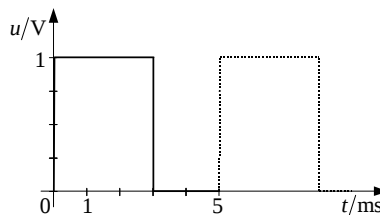
$$e = \frac{W_s - W}{W} = \frac{\frac{174\text{ vrt.}}{600\text{ vrt/kWh}} - \frac{10\text{ A}}{1\text{ A}} \cdot 29,18\text{ Wh}}{\frac{10\text{ A}}{1\text{ A}} \cdot 29,18\text{ Wh}} = -0,0062 \rightarrow e = -0,62\%$$

- Števec je prestal preskus, saj je lastni pogrešek e manjši kot dopustna maksimalna vrednost lastnega pogreška m , ki jo določena z razredom $\textcircled{r}$ podanim na izmerjeno vrednost kot referenčno vrednostjo:

$$|e| = 0,0062 < m = \frac{r}{100} = 0,02$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko časa po prehodu v novo stacionarno stanje moramo počakati z meritvijo napetosti $U = 1\text{V}$ z digitalnim voltmetrom ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$; $U_D = 1,200\text{V}$), katerega dinamično obnašanje aproksimiramo s členom prvega reda $f_m = 1\text{kHz}$, da bo dinamični pogrešek zanemarljiv? Skicirajte približni potek dinamičnega pogreška $E(t)$ za dani vhodni signal?



Rešitev:

- Karakteristika odziva člena 1. reda na stopničasto obliko signala je:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = 1 - e^{-t/\tau}$$

- Dinamični pogrešek predstavlja razliko med izmerjeno (izhodno) vrednostjo in pravo (vhodno) vrednostjo signala.. V relativni obliki ga zapišemo:

$$e_{din} = \frac{U_{iz} - U_{vh}}{U_{vh}} = \frac{U_{iz}}{U_{vh}} - 1 = -e^{-t/\tau}$$

- Ima negativni predznak in eksponentno upada v odvisnosti od časovne konstante: $\tau = \frac{1}{2\pi f_m} = 159,2\mu\text{s}$

- Ker ima sistematični značaj pogreška, je zanemarljiv, kadar je dovolj majhen proti standardni negotovosti merilnega rezultata:

$$|e_{din}| \leq \frac{1}{10} w(U)$$

- Kadar je podana mejna vrednost lastnega pogreška, privzamemo enakomerno pravokotno porazdelitev pogreška in zapišemo standardno negotovost v relativni obliki:

$$w(U) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_U}{U} = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} + 10^{-3} \frac{U_D}{U}) = 1,27 \cdot 10^{-3}$$

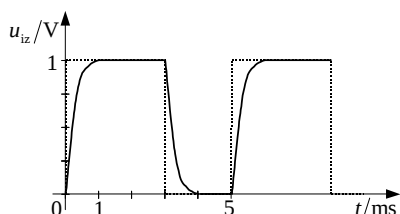
- Dinamični pogrešek mora biti manjši od:

$$|e_{din}| \leq \frac{1}{10} w(U) \rightarrow e^{-t/\tau} \leq 1,27 \cdot 10^{-4}$$

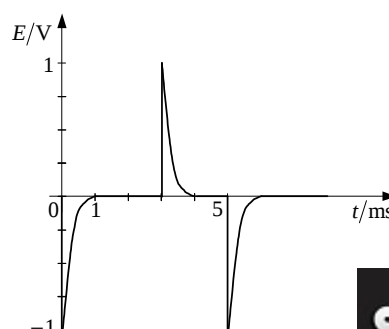
- in odzivni čas daljši od:

$$t \geq -\tau \ln(1,27 \cdot 10^{-4}) \rightarrow t \geq 1,428\text{ms}$$

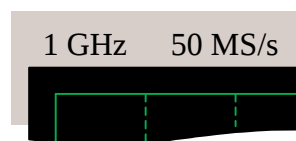
- Skica pogreška:



→



2. Z digitalnim osciloskopom merimo divžni čas T_r neperiodičnega digitalnega signala, katerega prava vrednost znaša $T_r = 1\text{ ns}$. Kakšen divžni čas T_r' izmerimo, če je osciloskop označen tako kot na izseku na sliki?



Rešitev:

- Z levo oznako na digitalnem osciloskopu je podana pasovna širina oziroma mejna frekvenca:

$$B = f_{m,zg} - f_{m,sp} \doteq f_{m,zg} \Big|_{f_{m,sp} < 10\text{ Hz}} = 1\text{ GHz}$$

- z desno pa vzorčna frekvenca:

$$f_s = 50\text{ M} \frac{\text{vzorcev(Samples)}}{\text{sekundo}} = 50\text{ MHz}$$

- Ker gre za neperiodičen signal, lahko pomerimo divžni čas samo z enkratnim proženjem.

- Če bi imeli dovolj veliko vzorčno frekvenco, tako da bi bilo veliko število vzorcev v divžnem času tudi pri enkratnem proženju, bi bil skupni divžni čas $T_{r,sk}$ geometrijsko podaljšan zaradi dinamičnega prispevka osciloskopa:

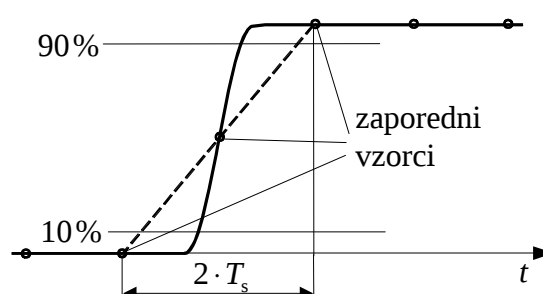
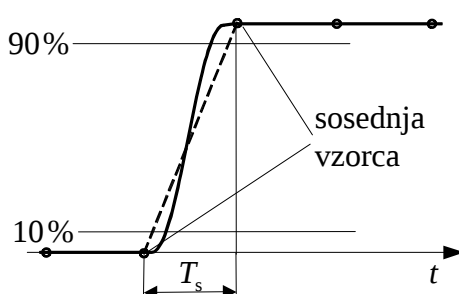
$$T_{r,sk} = \sqrt{T_{r,DSO}^2 + T_r^2} = \sqrt{\left(\frac{0,35}{f_m}\right)^2 + T_r^2} = \sqrt{(0,35\text{ ns})^2 + (1\text{ ns})^2} = 1,06\text{ ns}$$

- Ta divžni čas je precej krajši od vzorčnega časa $T_s = 1/f_s = 20\text{ ns}$, zato bo izmerjeni divžni čas T_r' pri enkratnem proženju odvisen le od periode vzorčenja T_s in bo zaradi nesinhronizacije z merjenim signalom zavzel vrednosti med

$$0,8 \cdot T_s \leq T_r' \leq 1,6 \cdot T_s$$

$$\text{oz. } \frac{0,8}{50\text{ MHz}} \leq T_r' \leq \frac{1,6}{50\text{ MHz}},$$

- kar pomeni $16\text{ ns} \leq T_r' \leq 32\text{ ns}$



3. Rezultat kalibracije voltmetra v štirih točkah je prikazan v tabeli. Prva kolona predstavlja referenčno vrednost, druga kolona kaže izmerjeno vrednost. Preračunana merilna negotovost voltmetra je $0,3\text{ V}$. Koliko znaša pogrešek kalibriranega instrumenta (kolona tri) in koliko je korekcija kalibriranega instrumenta (kolona štiri)?

U_{ref}/V	U_i/V	E/V	K/V
10,0	10,2		
15,0	14,9		
20,0	19,8		
25,0	25,1		

Pri uporabljanju voltmetra ste izmerili $10,1\text{ V}$. Zapišite enačbo in pravo vrednost rezultata!

Rešitev:

- Pogrešek kalibriranega instrumenta je razlika izmerjene vrednosti in referenčne vrednosti. Korekcija pa ima obratni predznak pogreška in se prišteva k rezultatu.

U_{ref}/V	U_i/V	E/V	K/V
10,0	10,2	+ 0,2	- 0,2
15,0	14,9	- 0,1	+0,1
20,0	19,8	- 0,2	+0,2
25,0	25,1	+0,1	- 0,1

- Če pri uporabi instrumenta izmerimo z voltmetrom $10,1\text{ V}$, znaša prava vrednost

$$U = U_i + K = 10,1\text{ V} + (-0,2\text{ V}) = 9,9\text{ V}$$

- pri tem uporabimo korekcijo $K = -0,2\text{ V}$ za izmerjeno točko $U_i = 10,2\text{ V}$ iz tabele, saj sta vrednosti $10,1\text{ V}$ in $10,2\text{ V}$ zelo blizu ($\Delta U/U \approx 1\%$) in se lastni pogrešek instrumenta zelo malo spremeni $E_{10,1\text{ V}} \approx E_{10,2\text{ V}}$.

- Merilni rezultat je enak

$$\underline{\underline{U = 9,9\text{ V} \quad , \quad u(U) = 0,3\text{ V} \quad , \quad n = 1}}$$

4. Prikrojena veličinska enačba $E/(V/m) \approx 0,3 \frac{\sqrt{P/kW}}{r/km}$ podaja jakost električnega polja na razdalji r od izvora, ki seva z močjo P . Ali je uporabna za približno oceno, če je ustrezna veličinska enačba $E = \sqrt{P/2\pi\epsilon_0 c_0 r^2}$ $\epsilon_0 \approx 8,85 \text{ pF/m}$, $c_0 \approx 300\,000 \text{ km/s}$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P/2\pi\epsilon_0 c_0 r^2}$
- Pri prehodu na prikrojeno veličinsko enačbo moramo vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, množiti in deliti z željeno enoto :

$$E \frac{V/m}{V/m} = \sqrt{P \frac{kW}{kW} / \epsilon_0 c_0 2\pi \left(r \frac{km}{km} \right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številski faktor:

$$E/V/m = \sqrt{P/kW / (r/km)^2} \cdot \frac{\sqrt{10^3 W}}{V/m} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 c_0 2\pi}} \frac{1}{10^3 m} = \sqrt{P/kW / (r/km)^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

$$K = \frac{\sqrt{10^3 VA}}{10^3 V} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 c_0 2\pi}}$$

- Upoštevajoč vrednosti za $\epsilon_0 \doteq 8,85 \text{ pF/m}$ in $c_0 \doteq 300\,000 \text{ km/s}$

$$\text{dobimo: } K = \frac{\sqrt{10^3}}{10^3} \frac{\sqrt{VA}}{V} \sqrt{\frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot 2\pi \cdot 300 \cdot 10^6 \text{ m/s}}}$$

$$\text{in končno } K = 3,1623 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{A}{V}} \sqrt{60 \frac{s}{F}} = 0,245 \sqrt{\frac{A}{V} \cdot \frac{V}{As}} = 0,245$$

- Prikrojena veličinska enačba je: $E/V/m = 0,245 \cdot \sqrt{P/kW} / r/km$
- Enačba $E/(V/m) \approx 0,3 \frac{\sqrt{P/kW}}{r/km}$ je neuporabna, ker je sistematični pogrešek večji, kot je pogrešek zaokrožitve koeficienta na eno cifro $K = 0,245 \rightarrow 0,2$ ($e = \frac{0,2}{0,245} - 1 = -0,184 \rightarrow e = -18,4\%$):

$$e = \frac{0,3}{0,245} - 1 = 0,224 \rightarrow e = 22,4\%$$

5. Katere vrednosti lahko pričakujemo s 95 odstotno verjetnostjo na prikazovalniku voltmetra, ko merimo napetost vira, ki ima notranjo upornost $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ in napetost praznega teka, ki je bila določena na podlagi devetih meritev:

$$U_0 = 6,8925 \text{ V}, u(U_0) = 20 \text{ mV} \quad (n = 9) ?$$

Uporabljeni voltmeter ima podatke:
 $M_U = \pm(0,02\%U + 0,01\%U_D + 2\text{dig})$ $U_D = 10 \text{ V}$,
 $R_V = 10 \text{ M}\Omega$, ločljivost $\Delta U_q = 100 \mu\text{V}$

Negotovosti notranje upornosti R_0 in upornosti voltmetra R_V zanemarite!

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(v)$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Napetostni delilnik nam da: $U_V = U_0 \frac{R_V}{R_0 + R_V} = U_0 \cdot 0,999 = 6,885614 \text{ V}$
- Standardna negotovost je sestavljena iz prispevka voltmetra – negotovost tipa B - in prispevka negotovosti napetosti na vhodu, ki je bila ocenjena z devetimi meritvami – negotovost tipa A:

$$u_B(U_V) = \frac{1}{\sqrt{3}} M_U = \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \cdot 10^{-4} U_V + 1 \cdot 10^{-4} U_D + 0,2 \text{ mV}) = 1,488 \text{ mV}$$

$$u_A(U_V) = \frac{\partial U_V}{\partial U_0} u_A(U_0) = \frac{R_V}{R_0 + R_V} u_A(U_0) = 19,98 \text{ mV} \rightarrow u_A(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- Skupno standardno negotovost sestavljata oba prispevka.:

$$u_c(U_V) = \sqrt{u_A^2(U_V) + u_B^2(U_V)} = 20,05 \text{ mV} \rightarrow u_c(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- v danem primeru je prispevek negotovosti tipa A prevladujoč. Zato je prevladujoča tudi porazdelitev pogreška tega prispevka.
- Ker je skupna standardna negotovost tipa A dobljena na manjšem številu meritev, uporabimo pri določanju faktorja razširitve t-porazdelitev in število prostostnih stopenj $\nu_{\text{eff}} = n - 1 = 9 - 1 = 8$
 - Iz tabele dobimo za faktor razširitve: $\nu_{\text{eff}} = 8 \rightarrow k = t_{95\%} = 2,31$
- Razširjena negotovost je: $U_{95}(U_V) = t_{95\%} \cdot u_c(U_V) = 46,2 \text{ mV}$
- S 95 odstotno verjetnostjo lahko pričakujemo rezultate med $U_V - U_{95}(U_V)$ in $U_V + U_{95}(U_V)$:

$$6,839414 \text{ V} < U_V < 6,931814 \text{ V} \rightarrow 6,8394 \text{ V} < U_V < 6,9318 \text{ V}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko je največji informacijski pretok digitalnega voltmetra, ki ima merilno območje $-200\text{ V} \dots +200\text{ V}$, mejo pogreška $M_U = \pm(0,05\%U + 2\text{ dig})$, ločljivost $\Delta U_q = 10\text{ mV}$ in naredi 15 meritev v sekundi?

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar je pogrešek odvisen od izmerjene vrednosti v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj v območju od $x_{\min}$ do $x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m_{\max} = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2(ax + b)} \Rightarrow m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max} + b}{ax_{\min} + b} \right|$$

- Če vzamemo za enoto informacije bit, ustreza številu amplitudnih stopenj m naslednja množina informacije kot dvojiški logaritem m :

$$S = \text{lb}(m) = \log_2(m)$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas $T_M = 1/f_M$, je hitrost prenosa ali **informacijski pretok** enak:

$$I = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m) = \frac{S}{T_M} = f_M \cdot S$$

- Za dani voltmeter zapišemo mejni pogrešek v obliki:

$$M_U = \pm(0,05\%U + 2\text{ dig}) = 0,5 \cdot 10^{-3}U + 20\text{ mV}$$

- In maksimalno število neodvisnih amplitudnih stopenj na merilnem območju ($x_{\min} = -200\text{ V}$, $x_{\max} = +200\text{ V}$):

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 200\text{ V} + 20\text{ mV}}{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot (-200\text{ V}) + 20\text{ mV}} \right| = 406,5$$

- Največja množina informacije in maksimalni informacijski pretok sta:

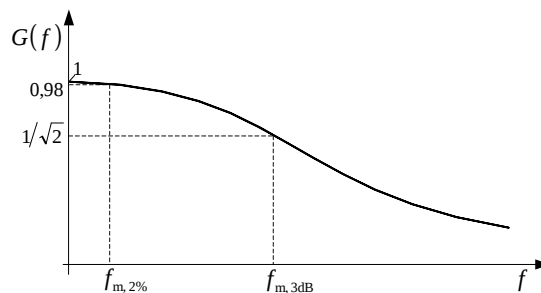
$$S = \text{lb}(m_{\max}) = 8,67\text{ bit} \Rightarrow I_{\max} = f_M \cdot S = 130,0\text{ bit/s}$$

2. Do katere frekvence signalna smemo uporabljati digitalni spominski osciloskop ($B = 100 \text{ MHz}$; člen 1. reda; $f_s = 10 \text{ MHz}$), da bo amplitudni pogrešek pri večkratnem proženju pod dvema odstotkoma? Do katere frekvence uporabljamo DSO pri enkratnem proženju (točkovno prikazovanje)? Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Pri **večkratnem proženju**, kjer imamo dovolj vzorcev v opazovanem signalu, določa obnašanje osciloskopa karakteristika člena 1. reda.
- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega (prikazanega) signala pri sinusnem vzbujanju zapišemo z uporabo mejne frekvence:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$



- Mejna frekvenca je določena s pasovno širino:

$$B = f_{m,zg} - f_{m,sp} \doteq f_{m,zg} \Big|_{f_{m,sp} < 10 \text{ Hz}} = 100 \text{ MHz}$$

- Nas zanima, do katere frekvence upade amplituda za manj kot 2% .

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}} = 0,98$$

- in od tod dobimo

$$f_{m,2\%} = f_m \sqrt{\left(\frac{1}{0,98}\right)^2 - 1} = 20,3 \text{ MHz}$$

- Pri **enkratnem proženju** in točkovni podaji moramo za dobro razpoznavanje sinusnega signala imeti dovolj veliko število vzorcev na periodo (25), zato je uporabna pasovna širina:

$$B_{pt} = \frac{f_s}{25} = \frac{10 \text{ MHz}}{25} = 400 \text{ kHz}$$

- Do te frekvence je priporočeno uporabljati DSO pri enkratnem proženju in točkovni podaji signala.

3. Digitalni ampermeter kaže $I = 17,24 \text{ mA}$. Izračunajte merilni rezultat, če smo instrument uporabili pri temperaturi $t = 46^\circ \text{C}$!

- meja pogreška: $M_I = \pm(0,15\% I + 2 \text{ dig})$
- referenčno območje: $23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$
- nazivno območje: $0^\circ \text{C} \div 55^\circ \text{C}$
- temperaturni koeficient: $\pm(0,015\% I + 1 \text{ dig})/^\circ \text{C}$

Rešitev:

- Če bi uporabili instrument pri referenčnih pogojih, bi bila meja lastnega pogreška:

$$M_I = \pm \left(\frac{0,15}{100} 17,24 \text{ mA} + 0,02 \text{ mA} \right) = \pm 45,86 \mu\text{A}$$

- Ker smo instrument uporabili izven referenčnega območja v nazivnem območju uporabe za vplivno veličino temperaturo, se meja pogreška poveča za mejo spremembe kazanja $M_{I,s} = M_I + M_I^0$. V našem primeru smo izstopili iz referenčnega območja na zgornji meji pri $23^\circ \text{C} + 5^\circ \text{C} = 28^\circ \text{C}$, zato moramo upoštevati razliko temperature od te vrednosti:

$$M_I^0 = \pm \left(\left(\frac{0,015}{100} 17,24 \text{ mA} + 0,01 \text{ mA} \right) / ^\circ \text{C} \right) \cdot (46^\circ \text{C} - 28^\circ \text{C}) = \pm 226,5 \mu\text{A}$$

- Skupna meja pogreška (lastnega in spremembe kazanja) je:

$$M_{I,s} = M_I + M_I^0 = \pm 0,2724 \text{ mA}$$

- in standardna negotovost pri privzeti pravokotni porazdelitvi gostote verjetnosti pogreška:

$$u(I) = \frac{M_{I,s}}{\sqrt{3}} = 0,157 \text{ mA} = 0,16 \text{ mA}$$

- Merilni rezultat podamo v obliki:

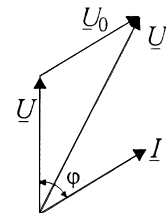
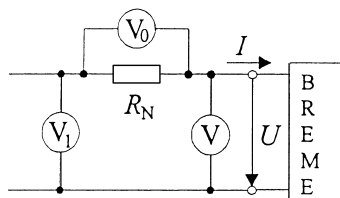
$$I = 17,24 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,16 \text{ mA}, \quad n = 1$$

4. Izrazite merilni rezultat za delovno moč $P = (U_1^2 - U^2 - U_0^2) / (2R_N)$ s standardno negotovostjo, če je $U_1 = 170 \text{ V}$, $U = U_0 = 100 \text{ V}$, $M_{U_1} = M_U = M_{U_0} = \pm 1 \text{ V}$, $R_N = 10 \text{ k}\Omega$, $M_{R_N} = \pm 50 \Omega$!

Rešitev:

- Delovna moč za dane podatke je

$$P = \frac{(170 \text{ V})^2 - 2 \cdot (100 \text{ V})^2}{2 \cdot 10 \text{ k}\Omega} = 445 \text{ mW}$$



- Celotno standardno negotovost sestavljajo deleži neposredno merjenih veličin:

$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P)}$$

- Deleži neposredno merjenih veličin tvorijo faktorji občutljivosti in ustrezne negotovosti:

$$u_1(P) = |c_1| u(U_1) = \left| \frac{\partial P}{\partial U_1} \right| u(U_1) = \frac{U_1}{R_N} u(U_1),$$

$$u_2(P) = |c_2| u(U) = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| u(U) = \frac{U}{R_N} u(U)$$

$$u_3(P) = |c_3| u(U_0) = \left| \frac{\partial P}{\partial U_0} \right| u(U_0) = \frac{U_0}{R_N} u(U_0)$$

$$u_4(P) = |c_4| u(R_N) = \left| \frac{\partial P}{\partial R_N} \right| u(R_N) = \frac{P}{R_N} u(R_N)$$

- Negotovosti voltmetrov so enake: $u(U_1) = u(U) = u(U_0) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = 0,578 \text{ V}$

- Negotovost upora R_N , ki služi posredno za merjenje toka, je:

$$u(R_N) = \frac{M_{R_N}}{\sqrt{3}} = 28,9 \Omega$$

- Ovrednotena celotna standardna negotovost je tako:

$$u_c(P) = \sqrt{\frac{(U_1^2 + U^2 + U_0^2)}{R_N^2} u^2(U) + \left(\frac{P}{R_N} \right)^2 u^2(R_N)} = \sqrt{1,63 \cdot 10^{-4} \text{ W}^2 + 1,65 \cdot 10^{-6} \text{ W}^2} = 12,8 \text{ mW}$$

- Zaokrožen merilni rezultat je:

$$P = 445 \text{ mW}, \quad u_c(P) = 13 \text{ mW}, \quad n = 1$$

5. Izpeljite številsko enačbo za delovno moč (merjenje z elektronskim osciloskopom: $P = f C k_x k_y A$), če uporabljamo enote: $[P] = \mu\text{W}$, $[f] = \text{Hz}$, $[C] = \text{nF}$, $[k_x] = [k_y] = \text{V/d}$ ($1\text{d} = 0,5\text{in}$, $1\text{in} = 25,4\text{mm}$), $[A] = \text{cm}^2$ in jo uporabite za naslednje podatke: $f = 50\text{Hz}$, $C = 47,3\text{nF}$, $k_x = 5\text{V/d}$, $k_y = 2\text{V/d}$ in $A = 35,8\text{cm}^2$!

Rešitev:

- Izrazimo veličine kot produkt številске vrednosti in enot

$$\{P\}[P] = \{f\}[f]\{C\}[C]\{k_x\}[k_x]\{k_y\}[k_y]\{A\}[A]$$

- in preoblikujemo v

$$\{P\} = \{f\}[C]\{k_x\}\{k_y\}[A] \frac{[f][C][k_x][k_y][A]}{[P]}.$$

- Vstavimo za splošne enote posameznih veličin enote, katere želimo uporabljati

$$\frac{[f][C][k_x][k_y][A]}{[P]} = \frac{\text{Hz nF} \frac{\text{V}}{12,7\text{mm}} \frac{\text{V}}{12,7\text{mm}} \text{cm}^2}{\mu\text{W}} = \frac{\text{Hz } 10^{-9}\text{F} \left(\frac{\text{V}}{12,7 \cdot 10^{-3}\text{m}} \right)^2 10^{-4}\text{m}^2}{10^{-6}\text{W}} = 6,2 \cdot 10^{-4}$$

- kjer smo uporabili enoto za $[k_x] = [k_y] = \frac{\text{V}}{\text{d}} = \frac{\text{V}}{0,5 \cdot 25,4\text{mm}} = \frac{\text{V}}{12,7\text{mm}}$

- Želena številška enačba se tako glasi:

$$\{P\} = 6,2 \cdot 10^{-4} \{f\}[C]\{k_x\}\{k_y\}[A]$$

- Izračunajmo delovno moč za dane vrednosti:

$$\{P\} = 6,2 \cdot 10^{-4} \cdot 50 \cdot 47,3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 35,8 = 524,9354 \quad (\text{v } \mu\text{W})$$

- Za rezultat dobimo le številsko vrednost. Zato moramo pri uporabi številskih enačb vedno navesti, za kakšne enote veljajo.

- Za naš primer:

$$\{P\} = 6,2 \cdot 10^{-4} \{f\}[C]\{k_x\}\{k_y\}[A] \left(\frac{P}{\mu\text{W}}, \frac{f}{\text{Hz}}, \frac{C}{\text{nF}}, \frac{k_x}{\text{V/d}}, \frac{k_y}{\text{V/d}}, \frac{A}{\text{cm}^2} \right)$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. V kakšnem razmerju so si mejne vrednosti pogreškov, če imamo enakomerno, trikotno, trapezno ($\beta = 0,66$) in Gaussovo ($z = 3$) porazdelitev gostote verjetnosti pogreška z enakimi standardnimi odkloni (negotovostmi) $\sigma_e = \sigma_{tri} = \sigma_{tra} = \sigma_G = \sigma$? Skicirajte!

Rešitev:

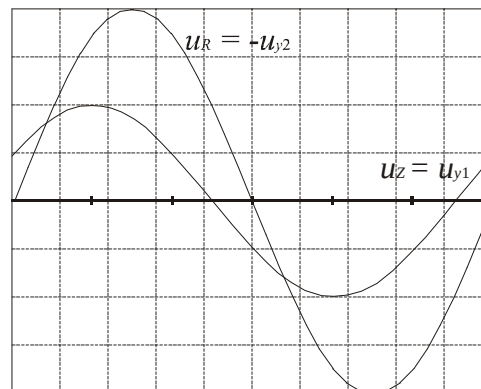
- Razmerja mejnih vrednosti pogreškov proti standardnim odklonom za različne porazdelitve:
 - Enakomerna porazdelitev: $M_e = \sqrt{3} \cdot \sigma$
 - Trikotna porazdelitev: $M_{tri} = \sqrt{6} \cdot \sigma$
 - Trapezna porazdelitev: $M_{tra} = \sqrt{6} / \sqrt{1 + \beta^2} \cdot \sigma = \sqrt{6} / \sqrt{1 + 0,66^2} \cdot \sigma$
 - Gaussova porazdelitev: $M_G = z \cdot \sigma = 3 \cdot \sigma$

Razmerja mejnih pogreškov:

$$M_e : M_{tri} : M_{tra} : M_G = \sqrt{3} \cdot \sigma : \sqrt{6} \cdot \sigma : \sqrt{6} / \sqrt{1 + 0,66^2} \cdot \sigma : 3 \cdot \sigma$$

$$M_e : M_{tri} : M_{tra} : M_G = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{2}/1,2 : \sqrt{3}$$

2. Dvokanalni osciloskop ima na zaslonu prikazano sliko. Časovno bazo proži kanal-1. Frekvenca je $f = 50 \text{ kHz}$, $k_{y1} = k_{y2}$. Kakšen je nivo proženja N ? Kakšna je strmina proženja S ? Koliko je odklonski koeficient časovne baze k_t ? Podajte enačbo, ki kaže odvisnost $\underline{Z}$ od R ?



Rešitev:

- Nivo proženja je: $N = \frac{\hat{u}_{y1}}{2} = \frac{\hat{u}_R}{4}$
- Strmina proženja je naraščajoča, ker je referenčna točka začetka odklanjanja na levem robu zaslona osciloskopa in v tej točki signal u_{y1} narašča: $S > 0$
- Odklonski koeficient časovne baze je: $k_t = \frac{1}{50 \text{ kHz} \cdot 10 \text{ d}} = 2 \text{ } \mu\text{s/d}$
- Funkcijska odvisnost impedance in upornosti je: $\underline{Z} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot e^{j30^\circ}$

3. Narišite vezje za merjenje upornosti $R_x \approx 100\Omega$ ($P_{\max} = 1W$) z U-I metodo in izberite merilna območja tako, da bo merilna negotovost najmanjša. Slednjo izračunajte! Izberite varianto z manjšim sistematičnim pogreškom.

- voltmeter: $U_D = (1, 10, 100)V$, $R_{V_0} = 10k\Omega/V$, $r = 0,2$
- ampermeter: $I_D = (50, 100, 500)mA$, $U_{A_0} = 0,2V$, $r = 0,2$

Rešitev:

- Maksimalni dopustni vrednosti U in I na upor omejujeta izbor merilnih območij:

$$R = 100\Omega, P_{\max} = 1W \Rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{R}} = 100mA \text{ oz. } U_{\max} = \sqrt{P_{\max} \cdot R} = 10V$$

- Skupno negotovost upornosti določata negotovosti merjenja napetosti in toka
 $w(R) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)}$:

$$w(U) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100} \frac{U_D}{U} \quad \text{in} \quad w(I) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100} \frac{I_D}{I}$$

- Relativna oblika negotovosti je v obeh primerih najmanjša, kadar je odčitek blizu merilnega dosega:

$$U \approx U_D \Rightarrow w(U)_{\min} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100} \quad \text{in} \quad I \approx I_D \Rightarrow w(I)_{\min} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100}$$

- Za dani upor in merilne dosege instrumentov je to možno doseči z $U_D = 10V$ in $I_D = 100mA$.
- Skupna minimalna standardna negotovost je tako:

$$w(R) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \sqrt{1^2 + 1^2} = 1,633 \cdot 10^{-3}$$

- Za izbor variante z manjšim sistematičnim pogreškom potrebujemo še upornosti instrumentov:

$$U_D = 10V \Rightarrow R_V = R_{V_0} \cdot U_D = 10k\Omega/V \cdot 10V = 100k\Omega$$

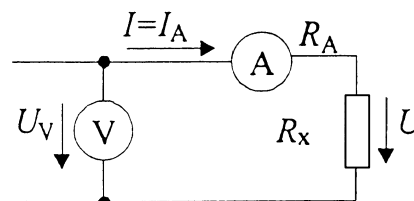
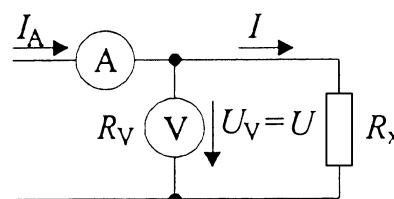
$$I_D = 100mA \Rightarrow R_A = \frac{U_{A_0}}{I_D} = \frac{0,2V}{100mA} = 2\Omega$$

- Kadar priključimo voltmeter neposredno na upor, je tok ampermetra prevelik za tok skozi končno upornost voltmetra. Sistematični pogrešek je sorazmeren razmerju R_x/R_V :

$$e_1 = -\frac{R_x}{R_x + R_V} \doteq -\frac{R_x}{R_V} \doteq -10^{-3}$$

- Če priključimo ampermeter neposredno pred upor, je napetost voltmetra prevelika za padec na upornosti ampermetra. Sistematični pogrešek je sorazmeren kvocientu:

$$e_2 = -\frac{R_A}{R_x} = -2 \cdot 10^{-2}$$



- Izberemo prvo varianto z manjšim sistematičnim pogreškom $|e_1| < |e_2|$

4. Do katere frekvence smemo uporabljati uporovni etalon (člen 1. reda), s časovno konstanto $\tau = 20\text{ ns}$, da ne bo fazni zamik večji od 1° . Za koliko odstotkov pri tej frekvenci odstopa Z od R_N ?

Rešitev:

- Frekvenčna karakteristika člena 1. reda je:

$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

- Od tod dobimo iz razmerja imaginarnega in realnega dela karakteristike $\text{tg}\varphi = \frac{\Im(G)}{\Re(G)}$ fazno karakteristiko $\varphi = -\text{atg}(\omega\tau)$.

- Iskana frekvenca za fazni zamik 1° je:

$$\text{tg}\varphi = \omega\tau \quad \rightarrow \quad f = \frac{\text{tg}\varphi}{2\pi\tau} = 138,9\text{ kHz}$$

- Odstopanje impedance Z od vrednosti pri enosmernem vzbujanju R_N določa amplitudna karakteristika člena 1. reda:

$$\frac{Z}{R_N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} = 0,9998477$$

- Pri frekvenci $f = 138,9\text{ kHz}$ odstopa Z od R_N za:

$$\Delta Z = 1 - 0,999848 = 1,52 \cdot 10^{-4}$$

5. Kot je znano, znaša permeabilnost vakuumu (magnetna konstanta) točno $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ hitrost svetlobe pa točno $299\,792\,458 \text{ m/s}$. Razložite zakaj! Ali poznate še kakšno veličino, katere vrednost je znana absolutno točno?

Rešitev:

- Absolutna točnost magnetne konstante za permeabilnost vakuumu $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ je posledica definicije ampera:

- Amper je nespremenljiv električni tok, ki pri prehodu skozi dva premočrtna, vzporedna, neskončno dolga vodnika zanemarljivega krožnega prereza, postavljena v vakuumu v medsebojni razdalji 1 metra, povzroča med njima silo $2 \cdot 10^{-7}$ newtna na meter dolžine.

$$F = lIB = l\mu_0 \frac{I^2}{2\pi d} \quad \Rightarrow \quad \mu_0 = \frac{F}{l} \frac{2\pi d}{I^2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}} \frac{2\pi \cdot 1\text{m}}{(1\text{A})^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

- Svetlobna hitrost je določena preko definicije za meter:
 - Meter je dolžina poti, ki jo v vakuumu napravi svetloba v $1/299\,792\,458$ sekunde.
- Tudi električna konstanta ϵ_0 je preko svetlobne hitrosti v vakuumu $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ absolutno točno določena z enačbo:

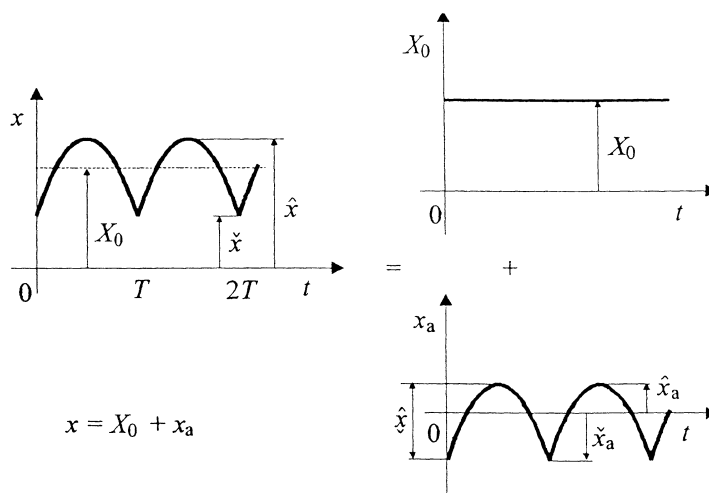
$$c^2 \mu_0 \epsilon_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Naštejte parametre, ki določajo pulzirajočo periodično veličino. Skicirajte jih in opišite v enačbah! Kako je določena efektivna valovitost?

Rešitev:

- Pulzirajoča** veličina je sestavljena iz **enosmerne** in **izmenične** komponente:



- **Maksimalno** vrednost označujemo z $\hat{x}$ ali x_m ,
- **Minimalno** vrednost označujemo z $\check{x}$ ali $x_{\min}$,
- **Enosmerno** komponento označujemo z X_0 ,
 - **Aritmetična srednja vrednost** – povprečna vrednost – je enaka enosmerni komponenti: $\overline{X} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = X_0$, ker je povprečna vrednost **izmenične** komponente x_a nič: $\overline{X}_a = \frac{1}{T} \int_0^T x_a(t) dt = 0$
- **Efektivna vrednost** pulzirajoče veličine: $X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$
 - če upoštevamo $x(t) = X_0 + x_a(t)$, dobimo: $X = \sqrt{X_0^2 + X_a^2}$
- Če pulzirajoča veličina ne spreminja predznaka, jo imenujemo **valovita veličina**.
 - Kadar je enosmerna komponenta primarnega pomena, podamo **valovitost** z najbolj pogosto uporabljeno **efektivno valovitostjo**: $r = \frac{X_a}{|X_0|}$
 - kjer je $X_a = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x_a^2(t) dt}$ efektivna vrednost izmenične komponente in $|X_0|$ absolutna vrednost enosmerne komponente.

2. Na zaslonu osciloskopa ($B=10\text{MHz}$; člen 1. reda) imamo zajeto periodo napetosti signala $u = \hat{u} \cdot \sin(20\pi t/\mu\text{s})$. Podajte merilni rezultat za efektivno in temensko vrednost napetosti signala na vhodu! Položaj signala smo sposobni oceniti z ločljivostjo $0,2\text{mm}$. $\hat{y} = 4,30\text{d}$, $k_y = 0,5\text{V/d}$, $m_y = 2 \cdot 10^{-2}$, $1\text{d} = 10\text{mm}$, $k_t = ?$

Rešitev:

- Frekvenca vhodnega signala je: $2\pi ft = 20\pi t/\mu\text{s} \rightarrow f = 10/\mu\text{s} = 10\text{MHz}$
 - Ker je x-os osciloskopov tipično razdeljena na 10 delov, mora biti konstanta časovne baze enaka:

$$10\text{d} \cdot k_t = T = 1/f \rightarrow k_t = \frac{1}{f} \frac{1}{10\text{d}} = \frac{10\text{ns}}{\text{d}}$$

- Ker je frekvenca signala enaka zgornji mejni frekvenci $B = f_m = f$ in za člen 1. reda velja $\hat{u}_{\text{prikaz}} = \hat{u}/\sqrt{2}$, dobimo za temensko napetost sinusnega signala na vhodu osciloskopa:

$$\hat{u}_{\text{prikaz}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \rightarrow \hat{u} = \sqrt{2} \cdot \hat{u}_{\text{prikaz}} = \sqrt{2} \cdot 4,30\text{d} \cdot 0,5\text{V/d} = 3,0406\text{V}$$

- in za efektivno napetost: $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 2,15\text{V}$
- Standardno negotovost prikaza na osciloskopu določata prispevka mejnega pogreška osciloskopa in pogrešek ločljivosti pri odčitku temenske vrednosti $\hat{y} = 4,30\text{d} \cdot 10\text{mm/d} = 43\text{mm}$:

$$w(y) = \sqrt{\left(\frac{m_y}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{3}y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,2\text{mm}}{2\sqrt{3} \cdot 43\text{mm}}\right)^2} = 0,0116 \rightarrow 0,012$$

- Merilni rezultat za temensko vrednost napetosti signala na vhodu je tako:

$$\hat{u} = 3,041\text{V} \quad , \quad u(\hat{u}) = \hat{u} \cdot w(y) = 0,0365\text{V} \rightarrow u(\hat{u}) = 0,037\text{V}, \quad n = 1$$

- in merilni rezultat za efektivno vrednost napetosti signala na vhodu:

$$U = 2,150\text{V} \quad , \quad u(U) = U \cdot w(y) = 0,0258\text{V} \rightarrow u(U) = 0,026\text{V}, \quad n = 1$$

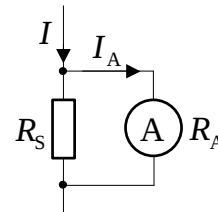
3. Ampermetru želimo s souporom razširiti merilno območje na $I'_D = 2\text{ A}$. Določite soupor tako, da bo standardna negotovost tokovnega delilnika zanemarljiva! Skicirajte vezje.

- ampermeter: $I_D = 200,0\text{ mA}$; $U_{A_0} = 200\text{ mV}$; $M_I = \pm(0,6\%I + 1\text{dig.})$; $m_{R_A} = \pm 5 \cdot 10^{-4}$

Rešitev:

- Merilno območje ampermetra razširimo s souporom R_S kot kaže

vezje in dobimo tokovni delilnik: $I_A = I \frac{R_S}{R_S + R_A}$



- Delilno razmerje je:

$$K = \frac{I_A}{I} = \frac{R_S}{R_S + R_A} = \frac{I_D}{I'_D} = \frac{200\text{ mA}}{2\text{ A}} = \frac{1}{10}$$

- Po izračunu upornosti ampermetra $R_A = \frac{U_{A_0}}{I_D} = \frac{200\text{ mV}}{200,0\text{ mA}} = 1\Omega$ določimo še

iskano vrednost upornosti soupora: $R_S = \frac{KR_A}{1-K} = 0,1111\Omega$

- Standardno negotovost delinika, ki jo sestavljata negotovost upornosti ampermetra $w(R_A)$ in iskana negotovost soupora $w(R_S)$, zapišemo:

$$w(K) = \frac{u(K)}{K} = \frac{1}{K} \sqrt{\left(\frac{\partial K}{\partial R_S} u(R_S)\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial R_A} u(R_A)\right)^2}$$

- Faktorja občutljivosti sta: $\frac{\partial K}{\partial R_S} = \frac{R_A}{(R_A + R_S)^2}$ in $\frac{\partial K}{\partial R_A} = -\frac{R_S}{(R_A + R_S)^2}$

$$w(K) = \sqrt{\left(\frac{(R_A + R_S)}{R_S} \frac{R_A}{(R_A + R_S)^2} u(R_S)\right)^2 + \left(\frac{(R_A + R_S)}{R_S} \frac{R_S}{(R_A + R_S)^2} u(R_A)\right)^2}$$

$$w(K) = \frac{R_A}{R_A + R_S} \sqrt{\left(\frac{u(R_S)}{R_S}\right)^2 + \left(\frac{u(R_A)}{R_A}\right)^2}$$

- Negotovost delinika je zanemarljiva, če velja: $w(K) \leq \frac{w(I)}{5}$

- Standardno merilno negotovost zaradi ampermetra določimo iz meje pogreška:

$$M_I = \pm(0,6\%I + 0,1\text{ mA}), \quad m_I = \frac{M_I}{I} = \pm\left(6 \cdot 10^{-3} + \frac{10^{-4}\text{ A}}{I}\right)$$

- Minimalna vrednost standardne merilne negotovosti v relativni obliki je pri največjem toku $I = I_D$:

$$w(I) = \frac{m_I}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(6 \cdot 10^{-3} + \frac{10^{-4}\text{ A}}{I_D}\right) = 3,75 \cdot 10^{-3} \quad \text{in} \quad w(K) \leq \frac{w(I)}{5} = 7,506 \cdot 10^{-4}$$

- Iskano negotovost soupora $w(R_S)$ določimo iz izraza:

$$w(K) = \frac{R_A}{R_A + R_S} \sqrt{w^2(R_S) + w^2(R_A)}, \quad w(R_A) = m(R_A)/\sqrt{3} = 2,887 \cdot 10^{-4}$$

- Soupore mora biti enak $R_S = 0,1111\Omega$ in imeti standardno negotovost manjšo kot

$$w(R_S) = \sqrt{\left(\frac{R_A + R_S}{R_A}\right)^2 w^2(K) - w^2(R_A)} = 7,9 \cdot 10^{-4}$$

4. Rezultat kalibracije ampermetra v štirih točkah je prikazan v tabeli. Prva kolona predstavlja referenčno vrednost, druga kolona kaže izmerjeno vrednost. Preračunana merilna negotovost ampermetra je 0,1 A. Koliko znaša pogrešek kalibriranega inštrumenta (kolona tri) in koliko je korekcija kalibriranega inštrumenta (kolona štiri)? Pri uporabljanju ampermetra ste izmerili 15 A. Zapišite enačbo in pravo vrednost rezultata!

$I_{\text{ref}} / \text{A}$	I_i / A	E / A	K / A
10,0	9,8		
15,0	15,1		
20,0	19,8		
25,0	25,1		

Rešitev:

- Pogrešek kalibriranega inštrumenta je razlika izmerjene vrednosti in referenčne vrednosti. Korekcija pa ima obratni predznak pogreška in se prišteva k rezultatu.

$I_{\text{ref}} / \text{A}$	I_i / A	E / A	K / A
10,0	9,8	-0,2	0,2
15,0	15,1	0,1	-0,1
20,0	19,8	-0,2	0,2
25,0	25,1	0,1	-0,1

- Če pri uporabi inštrumenta izmerimo z ampermetrom 15 A, znaša prava vrednost

$$\underline{I = I_i + K = 15 \text{ A} + (-0,1 \text{ A}) = 14,9 \text{ A}}$$

- Pri tem smo upoštevali, da se lastni pogrešek instrumenta E v okolici točke kalibracije (primer: $I_i = 15,1 \text{ A} \rightarrow E = 0,1 \text{ A}$) zelo malo spremeni.
- Merilni rezultat pa je enak

$$\underline{I = 14,9 \text{ A} \quad , \quad u(I) = 0,1 \text{ A} \quad , \quad n = 1}$$

5. Izpeljite številsko enačbo za jalovo moč tuljave ($Q = I^2 \omega L$), če so neposredno merjene veličine izražene v A, Hz in mH, jalovo moč pa želimo imeti v enoti kvar!

Rešitev:

- Veličinsko enačbo $Q = I^2 \omega L$ zapišemo s produkti številskih vrednosti in enot:

$$\{Q\}[Q] = \{I\}^2 [I]^2 \{\omega\}[\omega] \{L\}[L]$$

- in preoblikujemo v obliko: $\{Q\} = \{I\}^2 \{\omega\} \{L\} \frac{[I]^2 [\omega] [L]}{[Q]}$

- Kvocien uporabljenih enot je številsko vrednost:

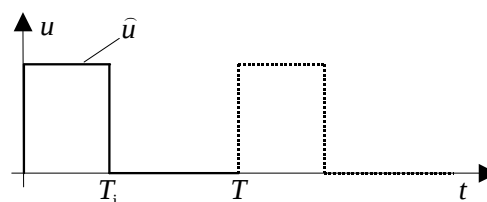
$$\frac{[I]^2 [\omega] [L]}{[Q]} = \frac{\text{A}^2 \cdot \text{Hz} \cdot 10^{-3} \text{H}}{10^3 \text{VA}} = 10^{-6} \frac{\text{AH}}{\text{Vs}} = 10^{-6}$$

- Ker za rezultat dobimo le številsko vrednost, moramo navesti tudi, za kakšne enote velja:

$$\{Q\} = \{I\}^2 \{\omega\} \{L\} \cdot 10^{-6} \rightarrow Q = 10^{-6} I^2 \omega L \quad \left(\frac{Q}{\text{kvar}}, \frac{I}{\text{A}}, \frac{\omega}{\text{Hz}}, \frac{L}{\text{Hz}} \right)$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Voltmetra sta priključena na napetost u . Voltmeter, ki se odziva na srednjo vrednost usmerjene napetosti, kaže $U_1 = 1\text{ V}$, voltmeter, ki se odziva na efektivno vrednosti, kaže pa $U_2 = 2\text{ V}$. Kolikšni so temenska vrednost napetosti $\hat{u}$, relativna širina pulza T_i/T in oblikovni faktor F ?



Rešitev:

- Srednja vrednost usmerjene napetosti:
$$|\overline{U}| = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt = \frac{1}{T} (\hat{u} T_i) = \hat{u} \frac{T_i}{T}$$

- Prvi voltmeter je umerjen za sinusno obliko signala in kaže:

$$U_1 = F_0 \cdot |\overline{U}| = F_0 \cdot \hat{u} \frac{T_i}{T}$$

- pri čemer je oblikovni faktor za sinusno obliko: $F_0 = \frac{U}{|\overline{U}|} = 1,111$

- Efektivna vrednost napetosti, ki jo kaže drugi voltmeter, je enaka:

$$U_2 = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\hat{u}^2 \frac{T_i}{T} + 0 \frac{(T - T_i)}{T}} = \hat{u} \sqrt{\frac{T_i}{T}}$$

- Razmerje napetosti je odvisno od relativne širine pulza T_i/T :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\hat{u} \sqrt{\frac{T_i}{T}}}{F_0 \cdot \hat{u} \frac{T_i}{T}} = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{\sqrt{\frac{T_i}{T}}}{\frac{T_i}{T}} = \frac{1}{F_0} \cdot \sqrt{\frac{T}{T_i}}$$

- Od tod sledi
$$\frac{T}{T_i} = \left(F_0 \cdot \frac{U_2}{U_1} \right)^2 = 4,938$$

- Temenska vrednost napetosti je enaka: $\hat{u} = U_2 \sqrt{\frac{T}{T_i}} = 4,444\text{ V}$

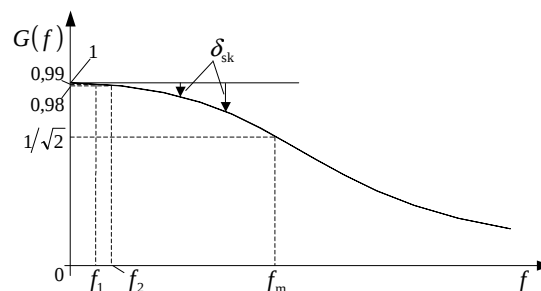
- Relativna širina impulza je: $\frac{T_i}{T} = 0,2025$

- in oblikovni faktor: $F = \frac{U}{|\overline{U}|} = F_0 \frac{U_2}{U_1} = 2,222$

2. Določite referenčno območje in nazivno območje uporabe voltmetra, ki meri temensko vrednost $M_U = \pm(0,5\%U + 0,5\%U_D)$, $U_D = 1V$, za vplivno veličino frekvenco, če upoštevamo samo dinamično obnašanje voltmetra. Voltmeter se odzove na napetostno stopnico kot člen 1. reda in doseže 95% končnega odklona v času $T_a = 5\mu s$. Skicirajte potek spremembe kazanja!

Rešitev:

- V našem primeru določa referenčno območje za vplivno veličino frekvenco dinamično obnašanje voltmetra in njegov mejni pogrešek. Ta bo najmanjši in s tem tudi najmanjše referenčno območje, če upoštevamo monotono povečanje spremembe kazanja (glej skico $\delta_{sk} = \Delta U_{sk} / U_{vh}$), kadar je merjena veličina blizu merilnega dosega.



$$m_{U,\min} = \frac{M_U}{U_D} = \pm \left(5 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3} \frac{U_D}{U_D} \right) = 10^{-2}$$

- Ker je dinamično obnašanje voltmetra opisano s členom 1. reda, zapišemo za mejno frekvenco:

$$0,95U_0 = U_0(1 - e^{-T_a/\tau}) \rightarrow f_m = \frac{\ln 20}{2\pi T_a} = 95,357 \text{ kHz}$$

- in od tod razmerje izhodne izmerjene napetosti proti vhodni merjeni

$$\text{napetosti: } \frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$

- Kljub ohranjanju vrednosti vhodne merjene napetosti, dobimo z večanjem frekvence spremembo kazanja $\Delta U_{sk} = U_{iz} - U_{vh}$. Referenčno območje za vplivno veličino frekvenco je v našem primeru od frekvence 0 Hz do frekvence, ko se sprememba kazanja izenači z mejnim pogreškom in upade amplituda na izhodu za $m_{U,\min}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}} = 1 - m_{U,\min} = 0,99 \rightarrow f_1 = f_m \sqrt{\left(\frac{1}{0,99}\right)^2 - 1} = 0,1425 \cdot f_m = 13,59 \text{ kHz}$$

- Referenčno območje je tako od 0 Hz do 13,6 kHz.

- V nazivnem območju uporabe je dopustno odstopanje spremembe kazanja povečano še za vrednost mejnega pogreška $\Delta U_{sk,\max} \leq 2M_U$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}} = 1 - 2m_{U,\min} = 0,98 \rightarrow f_2 = f_m \sqrt{\left(\frac{1}{0,98}\right)^2 - 1} = 0,203 \cdot f_m = 19,36 \text{ kHz}$$

- Nazivno območje uporabe je tako od 13,6 kHz do 19,4 kHz.

3. Koliko znaša merilni rezultat za faktor popačenja ($THD_{IEC} = \sqrt{X^2 - X_1^2} / X_1$) napetostnega signala oblike $u = 100(\sin \omega t + 1/3 \sin 3\omega t + 1/50 \sin 50\omega t) V$, če ima spektralni analizator standardno negotovost določanja amplitude $w(\hat{u}) = 10^{-2}$?

Rešitev:

- Faktor popačenja je razmerje efektivne vrednosti harmonskih komponent proti efektivni vrednosti osnovne komponente:

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U_1} = \frac{\sqrt{U_3^2 + U_{50}^2}}{U_1}$$

- Naš signal ima tri komponente, katerih efektivne vrednosti so:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100 V}{\sqrt{2}} = 70,71 V; U_3 = \frac{\hat{u}_1}{3\sqrt{2}} = 23,57 V; U_{50} = \frac{\hat{u}_1}{50\sqrt{2}} = 1,4142 V$$

- Faktor popačenja je: $THD_{IEC} = \frac{\sqrt{U_3^2 + U_{50}^2}}{U_1} = 0,33393$

- Ker petdeseta harmonska komponenta zelo malo prispeva k faktorju popačenja

$$THD_{IEC} \approx \frac{U_3}{U_1} = 0,3333 \text{ in je zato njen vpliv na skupno negotovost zanemarljiv,}$$

lahko zapišemo za relativno obliko standardne negotovosti za faktor popačenja $THD_{IEC} = U_3 / U_1$:

$$w(THD) = \sqrt{w^2(\hat{u}_1) + w^2(\hat{u}_3)} = 1,414 \cdot 10^{-2}$$

- Pri tem smo upoštevali, da sta relativni negotovosti določanja amplitude in efektivne vrednosti enaki $w(\hat{u}) = w(U)$.
- V absolutni obliki je standardna negotovost: $u(THD) = w(THD) \cdot THD = 4,722 \cdot 10^{-3}$
- Merilni rezultat je tako:

$$THD_{IEC} = 0,3339, \quad u(THD) = 0,0048, \quad n = 1$$

4. Trem kondenzatorjem z enako nazivno vrednostjo, smo izmerili kapacitivnost z istim instrumentom. Standardna negotovost je bila $0,2\mu\text{F}$. Kondenzatorje vežemo vzporedno. Koliko je standardna negotovost kapacitivnosti te vezave? $r(x_i, x_j) = 1$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Kapacitivnost vzporedne vezave kondenzatorjev je:

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

- Skupno standardno negotovost zapišemo z upoštevanjem faktorjev korelacije:

$$u_c(y) = \sqrt{[c_1 u(C_1)]^2 + [c_2 u(C_2)]^2 + [c_3 u(C_3)]^2 + 2[c_1 c_2 r(C_1, C_2) u(C_1) u(C_2)] + \dots}$$

- Faktorji občutljivosti so:

$$c_1 = \frac{\partial C}{\partial C_1} = 1, \quad c_2 = \frac{\partial C}{\partial C_2} = 1, \quad c_3 = \frac{\partial C}{\partial C_3} = 1$$

- posamezne negotovosti pa: $u(C_1) = u(C_2) = u(C_3) = u(C)$

- Standardna negotovost kapacitivnosti vzporedne vezave je:

$$u_c(C) = \sqrt{3 \cdot u^2(C) + 2[3 \cdot u(C)u(C)]} = u(C)\sqrt{9} = 3u(C) = 0,6\mu\text{F}$$

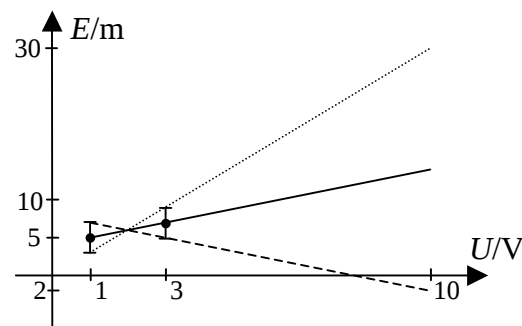
5. Ker smo omejeni z območjem referenčnega voltmetra, umerimo naš voltmeter v dveh točkah, in sicer pri 1 V ter 3 V. Izmerjeni odstopanji od referenčnega voltmetra sta v teh dveh točkah 5 mV oz. 7 mV. Kolikšno bo največje možno odstopanje, ki ga napovemo pri 10 V, če smo zgornji odstopanji izmerili z mejnim pogreškom 2 mV in če predpostavimo, da je karakteristika umerjanega voltmetra linearna?

Rešitev:

- Z umerjanjem ali kalibracijo pri $U_1 = 1 \text{ V}$ smo ugotovili odstopanje $E_1 = 5 \text{ mV}$.
 - Ker to odstopanje določimo z mejnim pogreškom $m_E = 2 \text{ mV}$, to pomeni, da dejansko odstopanje leži v intervalu $5 \text{ mV} \pm 2 \text{ mV}$ oz. med $E_{1,\min} = 3 \text{ mV}$ in $E_{1,\max} = 7 \text{ mV}$.

- Podobno velja tudi za drugo točko U_2 , kjer dejansko odstopanje E_2 leži v intervalu med $E_{2,\min} = 5 \text{ mV}$ in $E_{2,\max} = 9 \text{ mV}$.

- Ob predpostavki linearne karakteristike umerjanega voltmetra lahko grafično prikažemo ti dve kalibracijski točki, kot kaže skica:



- Če predpostavimo, da sta izmerjeni odstopanji pravi vrednosti, bi odstopanje pri 10 V lahko izračunali z naslednjo enačbo:

$$E_{10V} = \frac{E_2 - E_1}{U_2 - U_1} \cdot (10 \text{ V} - U_1) + E_1 = \frac{7 \text{ mV} - 5 \text{ mV}}{3 \text{ V} - 1 \text{ V}} \cdot (10 \text{ V} - 1 \text{ V}) + 5 \text{ mV} = 14 \text{ mV}$$

- Ker je odstopanje izmerjeno z mejnim pogreškom, bo v najbolj neugodnem primeru odstopanje pri 10 V znašalo:

$$E'_{10V} = \frac{E_{2,\max} - E_{1,\min}}{U_2 - U_1} \cdot (10 \text{ V} - U_1) + E_{1,\min} = \frac{9 \text{ mV} - 3 \text{ mV}}{3 \text{ V} - 1 \text{ V}} \cdot (10 \text{ V} - 1 \text{ V}) + 3 \text{ mV} = 30 \text{ mV}$$

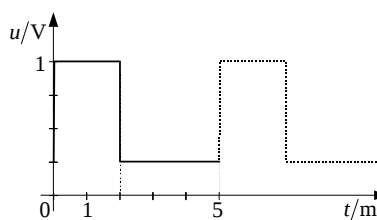
oz.

$$E''_{10V} = \frac{E_{2,\min} - E_{1,\max}}{U_2 - U_1} \cdot (10 \text{ V} - U_1) + E_{1,\max} = \frac{5 \text{ mV} - 7 \text{ mV}}{3 \text{ V} - 1 \text{ V}} \cdot (10 \text{ V} - 1 \text{ V}) + 7 \text{ mV} = -2 \text{ mV}$$

- Največje odstopanje, ki bi ga lahko pri 10 V napovedali na podlagi izmerjenih odstopanj, je torej 30 mV.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Ali z digitalnim voltmetrom ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$; $U_D = 1,200 \text{ V}$), katerega dinamično obnašanje aproksimiramo s členom prvega reda $f_m = 500 \text{ Hz}$, lahko pomerimo oba nivoja signala, tako da je dinamični pogrešek zanemarljiv. Skicirajte približni potek dinamičnega pogreška $E(t)$ za dani vhodni signal?



Rešitev:

- Karakteristika odziva člena 1. reda na stopničasto obliko signala je: $\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = 1 - e^{-t/\tau}$
 - Dinamični pogrešek predstavlja razliko med izmerjeno (izhodno) vrednostjo in pravo (vhodno) vrednostjo signala.. V relativni obliki ga zapišemo:

$$e_{din} = \frac{U_{iz} - U_{vh}}{U_{vh}} = \frac{U_{iz}}{U_{vh}} - 1 = -e^{-t/\tau}$$

- Ima negativni predznak in eksponentno upada v odvisnosti od časovne konstante: $\tau = 1/(2\pi f_m) = 318,3 \mu\text{s}$
- Ker je dinamični pogrešek sistematičen, je zanemarljiv, kadar je dovolj majhen proti standardni negotovosti merilnega rezultata:

$$|e_{din}| \leq w(U)/10$$

- Kadar je podana mejna vrednost lastnega pogreška, privzamemo enakomerno pravokotno porazdelitev pogreška. V našem primeru imamo dve vrednosti signala (1,0 V ; 0,25 V) in ustrezni standardni negotovosti v relativni obliki:

$$w(U_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_U}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} + 10^{-3} \frac{1,2 \text{ V}}{1,0 \text{ V}}) = 1,27 \cdot 10^{-3}$$

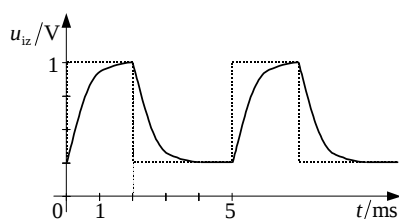
$$w(U_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_U}{U_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} + 10^{-3} \frac{1,2 \text{ V}}{0,25 \text{ V}}) = 3,35 \cdot 10^{-3}$$

- Dinamični pogrešek mora biti manjši od $|e_{din}| = e^{-t/\tau} \leq w(U)/10$ in odzivni čas daljši od:

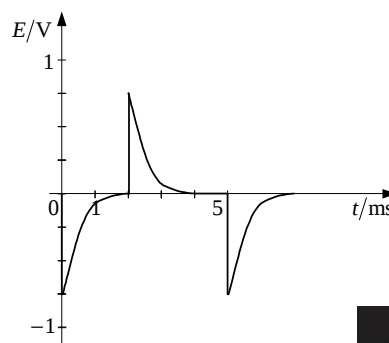
$$t_1 \geq -\tau \ln(1,27 \cdot 10^{-4}) = 2,856 \text{ ms} \quad \text{oz.} \quad t_2 \geq -\tau \ln(3,35 \cdot 10^{-4}) = 1,815 \text{ ms}$$

- Pri nivoju $U_1 = 1,0 \text{ V}$ ne moremo zanemariti dinamičnega pogreška, ker je trajanje prekratko $t_1 > 2,0 \text{ ms}$, pri nivoju $U_2 = 0,25 \text{ V}$ pa lahko $t_2 < 3,0 \text{ ms}$.

- Skica pogreška:



→



2. Digitalni voltmeter kaže $U_i = 122,4 \text{ mV}$. Izrazite popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo, če smo instrument uporabili pri temperaturi $t = 39^\circ \text{C}$!

- meja pogreška: $M_U = \pm(0,15\%U + 3 \text{ dig})$
- referenčno območje: $23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$
- nazivno območje uporabe: $0^\circ \text{C} \div 55^\circ \text{C}$
- temperaturni koeficient: $\pm(0,013\%U + 1 \text{ dig})/^\circ \text{C}$

Rešitev:

- Če bi uporabili instrument pri referenčnih pogojih ($23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$), bi bila meja lastnega pogreška:

$$M_U = \pm \left(\frac{0,15}{100} U_i + 3 \text{ dig} \right) = \pm \left(\frac{0,15}{100} 122,4 \text{ mV} + 3 \cdot 0,1 \text{ mV} \right) = \pm 0,484 \text{ mV}$$

- Ker smo instrument uporabili izven referenčnega območja v nazivnem območju uporabe za vplivno veličino temperaturo ($0^\circ \text{C} \div 55^\circ \text{C}$), se meja pogreška poveča za mejo spremembe kazanja $M_{U,s} = M_U + M_U^0$. V našem primeru smo izstopili iz referenčnega območja na zgornji meji pri $23^\circ \text{C} + 5^\circ \text{C} = 28^\circ \text{C}$, zato moramo upoštevati razliko temperature do te vrednosti:

$$M_U^0 = \pm \left(\left(\frac{0,013}{100} 122,4 \text{ mV} + 0,1 \text{ mV} \right) / ^\circ \text{C} \right) \cdot (39^\circ \text{C} - 28^\circ \text{C}) = \pm 1,275 \text{ mV}$$

- Skupna meja pogreška (lastnega in spremembe kazanja) je:

$$M_{U,s} = M_U + M_U^0 = \pm 1,759 \text{ mV}$$

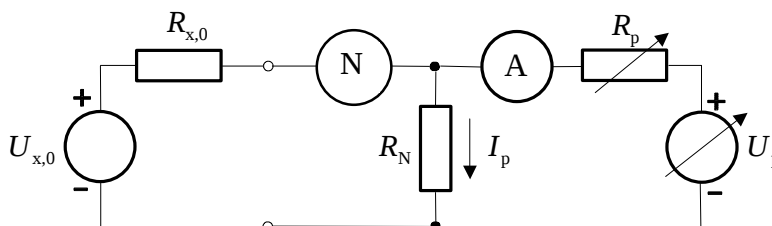
- in standardna negotovost pri privzeti pravokotni porazdelitvi gostote verjetnosti pogreška:

$$u(U) = \frac{M_{U,s}}{\sqrt{3}} = 1,0156 \text{ mV} = 1,1 \text{ mV}$$

- Merilni rezultat podamo v obliki:

$$U = 122,4 \text{ mV}, \quad u(U) = 1,1 \text{ mV}, \quad n = 1$$

3. Izrazite polni merilni rezultat za merjeno napetost U_x , ki jo merimo po Lindeck-Rothejevem principu kompenzacije ($U_{x,0} = I_A R_N + U_V$) ter naslednjimi merilnimi podatki:



- V-meter: povprečna vrednost: $\bar{U}_V = 0,21 \text{ mV}$, standardni odklon: $s(U_V) = 150 \mu\text{V}$, $n = 30$;
- A-meter: $I_A = 1,0456 \text{ mA}$, $M_I = \pm(2 \cdot 10^{-4} I_A + 5 \text{ dig})$
- etalonski upor $R_N = 1000 \Omega$, $u(R_N) = 0,1 \Omega$

Rešitev:

- Neznano napetost U_x izmerimo tako, da jo primerjamo z znano U_N , ki jo realiziramo kot padec napetosti, ki ga povzroči spremenljivi električni tok I_p na znanem kompenzacijskem uporu $R_k = R_N$ (Lindeck-Rothejev princip kompen.).

- Pri izravnavi čez ničelni indikator praktično ne teče noben tok $I \rightarrow 0$ zato merjeni vir ni obremenjen, pomožni tok je enak toku ampermetra $I_p \doteq I_A$ in merimo napetost praznega teka.

$$U_{x,0} \doteq U_N = I_p R_k \quad \Rightarrow \quad U_{x,0} \doteq I_A R_N$$

- Ker nimamo popolne izravnave, moramo upoštevati še ničelni indikator in v splošnem zapišemo: $U_{x,0} = I_A R_N + U_V$
- V našem primeru smo večkrat pomerili odklon 'nič', zato uporabimo srednjo vrednost ($\bar{U}_V$) in zapišemo:

$$U_{x,0} = I_A \cdot R_N + \bar{U}_V = 1,0456 \text{ mA} \cdot 1000 \Omega + 0,21 \text{ mV} = 1,04581 \text{ V}$$

- Za popolni merilni rezultat potrebujemo še ovrednotenje standardne negotovosti, ki je sestavljena tako iz negotovosti tipa A (prispevek ničelnega indikatorja - U_V) kot negotovosti tipa B (prispevka ampermetra in uporovnega etalona):

$$\begin{aligned} u(U_{x,0}) &= \sqrt{\left[\left| \frac{\partial U_x}{\partial I_A} \right| \cdot u(I_A) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_x}{\partial R_N} \right| \cdot u(R_N) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_x}{\partial U_V} \right| \cdot u(\bar{U}_V) \right]^2} \\ &= \sqrt{R_N^2 \cdot \left(\frac{M_I}{\sqrt{3}} \right)^2 + I_A^2 \cdot u^2(R_N) + \left(\frac{s(U_V)}{\sqrt{n}} \right)^2} \\ &= \sqrt{(10^3 \Omega)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0456 \text{ mA} + 0,0005 \text{ mA}}{\sqrt{3}} \right)^2 + (1,0456 \text{ mA})^2 (0,1 \Omega)^2 + \left(\frac{150 \mu\text{V}}{\sqrt{30}} \right)^2} \\ u(U_{x,0}) &= \sqrt{(4,0941 \cdot 10^{-4})^2 + (1,0456 \cdot 10^{-4})^2 + (0,274 \cdot 10^{-4})^2} = 4,234 \cdot 10^{-4} \text{ V} \end{aligned}$$

- Popolni merilni rezultat zaokrožimo: $U_{x,0} = 1,04565 \text{ V}$ $u(U_{x,0}) = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ V}$

4. V katerih mejah se lahko nahaja celotna standardna negotovost $w_c(y)$ izhodne veličine $y = x_1^2 x_2$, če sta vhodni veličini x_1 in x_2 medsebojno odvisni in imata enako veliki relativni standardni negotovosti $w(x_1) = w(x_2)$?

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Standardno negotovost izhodne posredno merjene veličine $u_c(y)$ določa tudi koeficient korelacije r , kadar so neposredno merjene veličine medsebojno odvisne. V našem primeru dveh medsebojno odvisnih vhodnih veličin zapišemo standardno negotovost izhodne veličine v absolutni obliki:

$$u_c(y) = \sqrt{(c_1 u(x_1))^2 + (c_2 u(x_2))^2 + 2r c_1 c_2 u(x_1) u(x_2)}$$

- in v relativni obliki:

$$w_c(y) = \frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\left(c_1 \frac{u(x_1)}{y}\right)^2 + \left(c_2 \frac{u(x_2)}{y}\right)^2 + 2r c_1 c_2 \frac{u(x_1) u(x_2)}{y^2}}$$

- Koeficiente občutljivosti izračunamo z delnim odvajanjem:

$$y = x_1^2 x_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 x_2, \quad c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1^2,$$

- jih vstavimo v enačbo

$$w_c(y) = \sqrt{\left(2x_1 x_2 \frac{u(x_1)}{y}\right)^2 + \left(x_1^2 \frac{u(x_2)}{y}\right)^2 + 2r \cdot 2x_1 x_2 x_1^2 \frac{u(x_1) u(x_2)}{y^2}}$$

- in jo uredimo

$$w_c(y) = \sqrt{\left(2 \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + 2r \cdot 2 \frac{u(x_1)}{x_1} \frac{u(x_2)}{x_2}} = \sqrt{(2w(x_1))^2 + (w(x_2))^2 + 2r \cdot 2w(x_1)w(x_2)}$$

- Ker sta relativni standardnih negotovosti $u(x_1)/x_1 = w(x_1) = w(x_2) = u(x_2)/x_2$ enaki, zapišemo:

$$w_c(y) = \sqrt{4w^2(x) + w^2(x) + 4rw^2(x)}$$

- Koeficient korelacije r lahko zavzame vrednosti med -1 in $+1$, zato se standardna negotovost ustrezno spreminja:

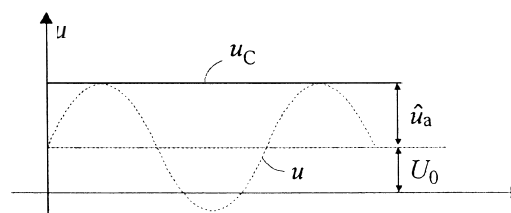
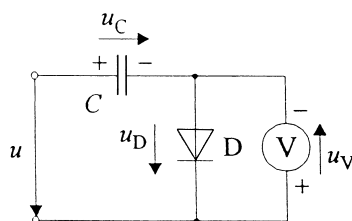
- $r = -1$: $w_c(y) = \sqrt{w^2(x)} = w(x)$

- $r = +1$: $w_c(y) = \sqrt{9w^2(x)} = 3w(x)$

- Zaradi medsebojne odvisnosti se standardna negotovost izhodne posredno merjene veličine spreminja v mejah $w(x) \leq w_c(y) \leq 3w(x)$ in se precej razlikuje od primera, kadar so vhodne veličine medsebojno neodvisne $r = 0$!

- $r = 0$: $w_c(y) = \sqrt{5w^2(x)} = 2,24w(x)$

5. Kaj meri voltmeter v narisanim vezju pri dani pulzirajoči napetosti u . Opišite in izpeljite enačbe. Voltmeter se odziva na srednjo vrednost signala.



Rešitev:

- Če želimo meriti samo izmenično komponento u_a pulzirajoče napetosti $u = U_0 + u_a$, kjer je U_0 enosmerna komponenta, priključimo instrument vzporedno k diodi in zaporedno kondenzatorju.

- Napetost na kondenzatorju u_C v ustaljenem stanju je enaka temenski vrednosti:

$$u_C = U_0 + \hat{u}_a$$

- Napetost na diodi je neodvisna od enosmerne komponente.

$$u_D = u - u_C = (U_0 + u_a) - (U_0 + \hat{u}_a) = u_a - \hat{u}_a$$

- Voltmeter priključimo tako, da je odklon enak invertirani vrednosti napetosti na diodi in dobimo pozitivno vrednost temenske vrednosti izmenične komponente:

$$u_V = -u_D = \hat{u}_a - u_a$$

- Ker se voltmeter odziva na srednjo vrednost (npr. integracijski voltmeter), je srednja vrednost napetosti u_V enaka maksimalni vrednosti izmenične komponente, ker je srednja vrednost izmenične sinusne komponent napetosti u_a enaka nič.

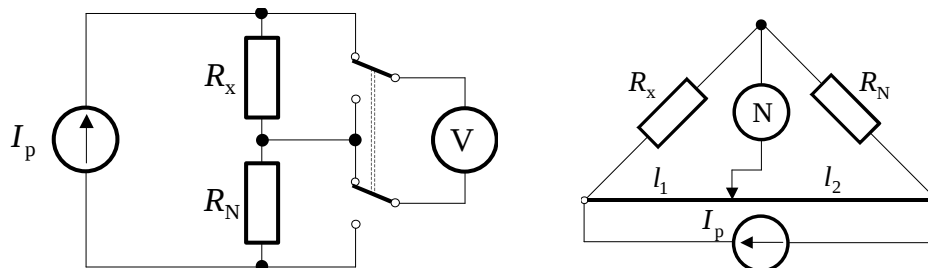
$$\bar{U}_V = \frac{1}{T} \int_0^T u_V dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\hat{u}_a - u_a) dt = \hat{u}_a - \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T u_a dt}_{=0} = \hat{u}_a$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Naštejte merilne metode in podajte njihovo delitev? Opišite in skicirajte primerjalno in zamenjalno merilno metodo.

Rešitev:

- Poznamo dve bistveno različni metodi:
 - odklonsko**, pri kateri je odklon (ali kazanje) instrumenta osnova za določitev vrednosti merjene veličine;
 - ničelno**, ko instrument kaže nič oziroma nima odklona in določimo vrednost merjene veličine na podlagi drugih, znanih pogojev merilnega vezja.
- Obe metodi lahko nadalje delimo še na: **navadne, primerjalne, zamenjalne, diferenčne in posebne.**
- Primerjalna** odklonska in ničelna merilna metoda

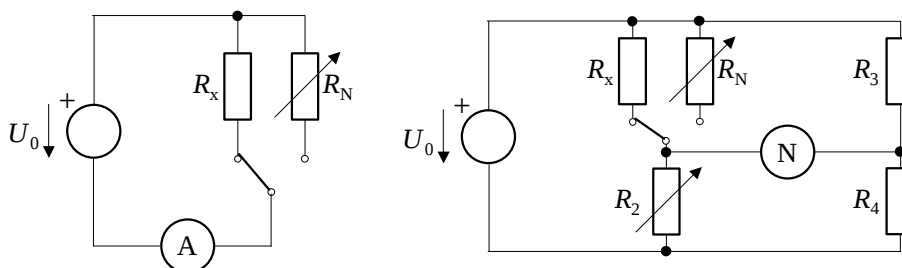


- Pri **primerjalni odklonski** metodi med seboj primerjamo napetost na neznanem uporu z napetostjo na znanem (tok mora biti **konstanten!**):

$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} \quad \Leftarrow \quad I_p = \text{konst.} = \frac{U_x}{R_x} = \frac{U_N}{R_N}$$

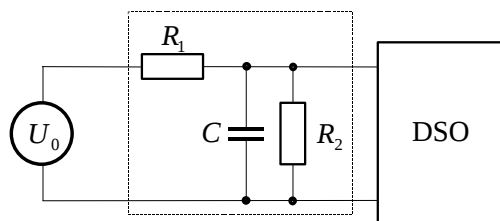
- Pri **primerjalni ničelni** metodi moramo mostiček s premikanjem drsnika po uporovni žici najprej uravnovesiti (tok ni nujno, da je stalen!): $R_x = R_N l_1 / l_2$

- Zamenjalna** odklonska in ničelna metoda



- Pri **zamenjalni** (substitucijski) **odklonski** metodi ugotovimo vrednost iskane veličine tako, da vzpostavimo v merilnem vezju dvakrat enake pogoje:
 - prvič je vključen neznani upor (merjenec);
 - drugič je vključen znani in spremenljivi upor –referenca
- Točnost instrumenta ni pomembna!

2. Določite mejno frekvenco člena, ki ga vzbuja s sinusno napetostjo. Koliko je temenska vrednost napetosti na zaslonu osciloskopa pri vzbujujanju z mejno frekvenco, če je $U_0 = 10\text{ V}$, $R_1 = 763\text{ k}\Omega$, $R_2 = 92,4\text{ k}\Omega$, $C = 18,3\text{ nF}$.



Rešitev:

- Opraviti imamo s členom 1. reda, ki ima časovno konstanto τ enako:

$$\tau = a\tau_1 = aR_1C$$

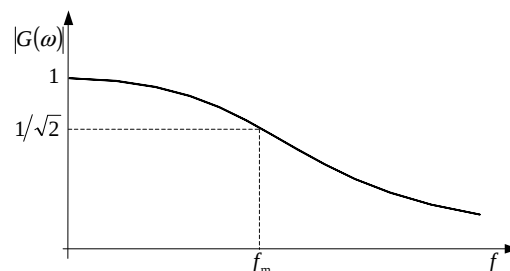
- pri čemer je a delilno razmerje uporov in določa napetost v stacionarnem stanju:

$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,108 ; \quad U_2 = aU_0 = 1,08\text{ V}$$

- Časovna konstanta je:

$$\tau_1 = R_1C = 13,96\text{ ms} \rightarrow \tau = a\tau_1 = 1,508\text{ ms}$$

- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje efektivnih vrednosti vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujujanju zapišemo:



$$|G(\omega)| = \frac{\hat{u}_{iz}}{\hat{u}_{vh}} = \frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}}$$

- Pri mejni frekvenci upade izhodna napetost relativno na $1/\sqrt{2}$ (moč izhodnega signala se prepolovi $P_{iz}/P_{vh} = U_{iz}^2/U_{vh}^2 = 1/2$). To se zgodi, kadar je $2\pi f_m\tau = 1$:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_m\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow f_m = \frac{1}{2\pi\tau} = 105,5\text{ Hz}$$

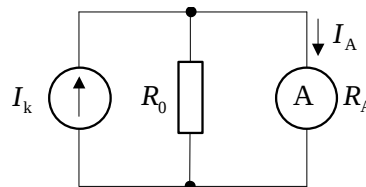
- Temenska vrednost izhodne napetosti pri sinusnem vzbujujanju je:

$$\hat{u}_{iz} = \sqrt{2} U_{iz} = \sqrt{2} a \frac{U_{vh}}{\sqrt{2}} = aU_0 = 1,08\text{ V}$$

3. V katerem intervalu se lahko nahajajo vrednosti, ki jih kaže ampermeter ($I_D = 200,00 \text{ mA}$, $M_I = \pm(0,04\% I_i + 0,03\% I_D + 1 \text{ dig})$, $R_A = 1 \Omega$), ko merimo tok tokovnega vira, ki ima kratkostični tok $I_k = 185,37 \text{ mA} \pm 0,61 \text{ mA}$ in notranjo upornost $R_0 = 500 \Omega$?

Rešitev:

- Kadar vključimo ampermeter v vezje, nam kaže manjši tok, kot je kratkostični. Vzrok je v končni upornosti ampermetra $R_A \neq 0$. Opraviti imamo s tokovnim delilnikom:



$$I_A = I_k \frac{R_0}{R_0 + R_A} = K I_k = 0,998 I_k$$

- Ker se lahko vrednost kratkostičnega toka spreminja, se ustrezno tudi vrednost toka skozi ampermeter. To znaša v našem primeru:

$$I_A = 0,998 I_k = 185,00 \text{ mA} \pm 0,609 \text{ mA}$$

- Ampermeter ima tudi lastni pogrešek, ki se spreminja v mejah:

$$M_I = \pm(4 \cdot 10^{-4} I_i + 3 \cdot 10^{-4} I_D + 1 \text{ dig}) =$$

$$M_I = \pm(4 \cdot 10^{-4} \cdot 185,00 \text{ mA} + 3 \cdot 10^{-4} \cdot 200,00 \text{ mA} + 0,01 \text{ mA}) = \pm 0,144 \text{ mA}$$

- Od pričakovane vrednosti $I_A = 185,00 \text{ mA}$ lahko odčitek odstopa za mejno odstopanje toka skozi ampermeter $M_{I_A} = \pm 0,609 \text{ mA}$ in mejno vrednost lastnega pogreška ampermetra:

$$M = M_{I_A} + M_I = \pm(0,609 \text{ mA} + 0,144 \text{ mA}) = \pm 0,75 \text{ mA}$$

- Vrednosti, ki jih lahko kaže ampermeter, se nahajajo v intervalu:

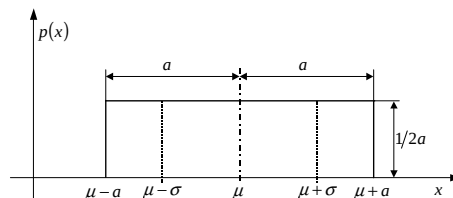
$$184,25 \text{ mA} \leq I_{\text{prikaz}} \leq 185,75 \text{ mA}$$

4. Koliko je standardna negotovost $u_c(y) = ?$ posredno merjene veličine $y = a + b + c + d$, če so porazdelitve pogreškov: pri veličini a enakomerna, veličina b trikotna, pri veličini c trapezna ($\beta = 0,66$) in pri veličini d Gaussova ($z = 3$)? Pri vseh porazdelitvah so mejne vrednosti pogreškov enake $M_e = M_{tri} = M_{tra} = M_G = M = 0,01$ in korelacijski koeficienti enaki 0. Skicirajte razmere!

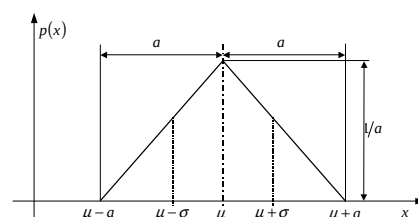
Rešitev:

- Standardni odkloni za različne porazdelitve:

- Enakomerna porazdelitev: $\sigma_a = M_e / \sqrt{3}$

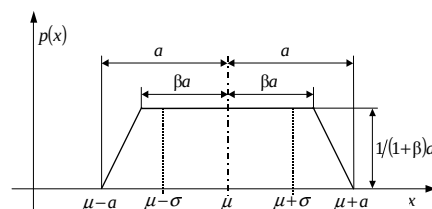


- Trikotna porazdelitev: $\sigma_b = M_{tri} / \sqrt{6}$

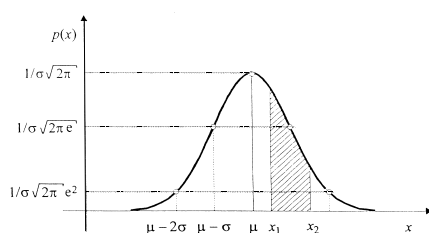


- Trapezna porazdelitev:

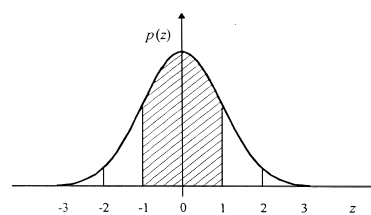
$$\sigma_c = M_{tra} \sqrt{1 + \beta^2} / \sqrt{6} = M_{tra} \sqrt{1 + 0,66^2} / \sqrt{6}$$



- Gaussova porazdelitev: $\sigma_d = M_G / 3$



⇒



$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$z = (x - \mu) / \sigma$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

- Standardno negotovost izhodne posredno merjene veličine $u_c(y)$ določajo prispevki posameznih neposredno merjenih veličin. Kadar te veličine niso mesebojno odvisne (korelirane), zapišemo standardno negotovost izhodne veličine v absolutni obliki:

$$u_c(y) = \sqrt{(c_a u(x_a))^2 + (c_b u(x_b))^2 + (c_c u(x_c))^2 + (c_d u(x_d))^2}$$

- Ker so standardne negotovosti enake standardnim odklonom ($u(x_a) = \sigma_a, \dots$) in koeficienti občutljivosti enaki $c_a = c_b = c_c = c_d = 1$, zapišemo:

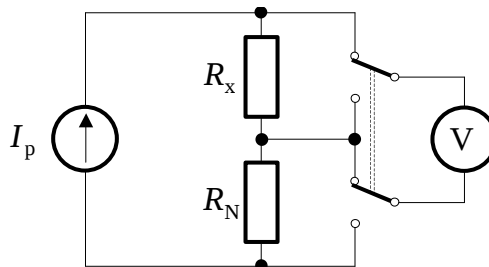
$$u_c(y) = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 + \sigma_d^2} = M \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1 + 0,66^2}{6} + \frac{1}{9}} = M \cdot 0,922$$

$$u_c(y) = 9,3 \cdot 10^{-3}$$

5. Zapišite popolni merilni rezultat za uporovno razmerje $r_x = R_1/R_2$, ki ga merimo z napetostno primerjalno metodo, če smo z istim voltmetrom izmerili padca napetosti na obeh uporih $U_1 = 3,825 \text{ V}$ in $U_2 = 3,786 \text{ V}$. Vpliva stabilnosti tokovnega vira in notranje upornosti voltmetra sta zanemarljiva. Skicirajte merilno vezje.

Rešitev:

- Pri napetostno primerjalni metodi merimo napetost najprej na upor R_1 in nato na drugem R_2 . Ker v obeh primerih teče skozi njiju enak tok (stabilen tokovni vir) in ker je notranja upornost voltmetra zanemarljivo velika, lahko zapišemo:



$$I_0 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{U_1}{U_2} = r_x$$

- Uporovno razmerje r_x torej znaša: $r_x = \frac{U_1}{U_2} = \frac{3,825 \text{ V}}{3,786 \text{ V}} = 1,01030$

- Uporovno razmerje izračunamo iz dveh napetosti, zato izračunamo negotovost $u(r_x)$ iz naslednje enačbe:

$$\frac{u(r_x)}{r_x} = \sqrt{\left[\frac{u(U_1)}{U_1}\right]^2 + \left[\frac{u(U_2)}{U_2}\right]^2}$$

- Ker se napetosti razlikujeta za manj kot 1% in se voltmeter dvakrat enako moti, lahko lastni pogrešek voltmetra v kvocientu zanemarimo in nam ostaneta pogreška odčitavanja, ker nista medsebojno odvisna (podrobnejša razlaga v skripti za vaje). Tako dobimo:

$$\frac{u(r_x)}{r_x} = \sqrt{\left[\frac{u(U_1)_q}{U_1}\right]^2 + \left[\frac{u(U_2)_q}{U_2}\right]^2},$$

- pri čemer $u(U_1)_q$ in $u(U_2)_q$ pomenita negotovosti zaradi ločljivost voltmetra Q_U , ki je v obeh primerih enaka (isti voltmeter). Glede na izmerjeni oz. prikazani vrednosti znaša ločljivost $Q_U = 1 \text{ dig} = 1 \text{ mV}$. Tako znaša negotovost uporovnega razmerja:

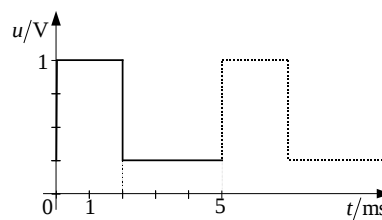
$$u(r_x) = r_x \cdot \sqrt{\left[\frac{1 \text{ mV}}{3,825 \text{ V} \cdot \sqrt{3}}\right]^2 + \left[\frac{1 \text{ mV}}{3,786 \text{ V} \cdot \sqrt{3}}\right]^2} = 1,01030 \cdot 2,146 \cdot 10^{-4} = 2,17 \cdot 10^{-4}$$

- Zaokrožen popolni merilni rezultat zapišemo v obliki:

$$r_x = 1,01030, \quad u(r_x) = 2,2 \cdot 10^{-4}, \quad n = 1$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko bi moral biti informacijski pretok digitalnega voltmetra, ki ima merilno območje $(0\text{ V} \dots U_D = 1,200\text{ V})$ in mejo pogreška $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$, da bi z njim lahko pomerili oba nivoja danega signala? Koliko bi morala biti kapaciteta digitalnega voltmetra pri danem časovnem spreminjanju signala in uporabljenem merilnem dosegu?



$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar je pogrešek odvisen od izmerjene vrednosti v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj v območju od $x_{\min}$ do $x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2(ax + b)} \Rightarrow m = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max} + b}{ax_{\min} + b} \right|$$

- Pri dani obliki signala moramo z voltmetrom pomeriti nivo $U_1 = 1\text{ V} = x_{\max,1}$ v času $T_{M,1} = 2\text{ ms}$ in nivo $U_2 = 0,25\text{ V} = x_{\max,2}$ v času $T_{M,2} = 3\text{ ms}$. V obeh primerih je spodnja meja območja $U_0 = 0\text{ V} = x_{\min}$. Število neodvisnih amplitudnih stopenj, ki jih moramo ločiti v obeh primerih je:

$$m_1 = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max,1} + b}{b} \right| = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{10^{-3} \cdot 1,0\text{ V} + 1,2\text{ mV}}{1,2\text{ mV}} \right| = 304,1$$

$$m_2 = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max,2} + b}{b} \right| = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{10^{-3} \cdot 0,25\text{ V} + 1,2\text{ mV}}{1,2\text{ mV}} \right| = 95,6$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas T_M , je hitrost prenosa ali **informacijski pretok** enak $I = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m)$. Za prvi nivo je potreben večji informacijski pretok:

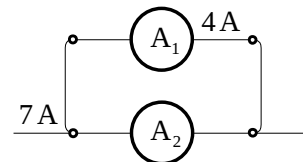
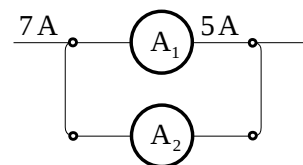
$$I_1 = \frac{1}{T_{M,1}} \text{lb}(m_1) = \frac{8,248\text{ bit}}{2\text{ ms}} = 4124,1 \frac{\text{bit}}{\text{s}} \quad \text{in} \quad I_2 = \frac{1}{T_{M,2}} \text{lb}(m_2) = \frac{6,579\text{ bit}}{3\text{ ms}} = 2193,1 \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

- Kapaciteto** voltmetra ali maksimalni informacijski pretok za dano časovno spreminjanje signala dobimo, če upoštevamo, da lahko signal zavzame vrednost na dosegu $U_i = U_D = x_{\max}$ ($C = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m_{\max})$):

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max} + b}{b} \right| = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{10^{-3} \cdot 1,2\text{ V} + 1,2\text{ mV}}{1,2\text{ mV}} \right| = 347,6$$

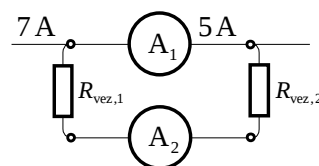
$$C = \frac{1}{T_{M,1}} \text{lb}(m_{\max}) = \frac{8,4412\text{ bit}}{2\text{ ms}} = 4220,6 \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

2. Dva brezhibna ampermetra sta priključena vzporedno v vejo s tokom $I_0 = 7\text{ A}$ na dva različna načina, tako kot kažeta skici. Ampermeter A_1 ($I_D = 6\text{ A}$, $U_{A_0} = 60\text{ mV}$) kaže v prvem primeru 5 A , v drugem pa 4 A . Kaj povzroči to razliko in zakaj tolikšno? Koliko je upornost ampermetra A_2 ?



Rešitev:

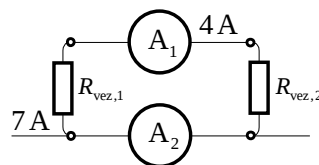
- Razliko v toku skozi ampermeter A_1 povzročata upornosti vezi med ampermetroma $R_{\text{vez},1}$ in $R_{\text{vez},2}$.



- Vezavi nam dasta dva različna tokovna delilnika:

$$\frac{I_{A,1}}{I_0} = \frac{R_{A,2} + R_{\text{vez}}}{R_{A,1} + R_{A,2} + R_{\text{vez}}} = \frac{5}{7}$$

$$\text{in } \frac{I_{A,1}}{I_0} = \frac{R_{A,2}}{R_{A,1} + R_{A,2} + R_{\text{vez}}} = \frac{4}{7}$$



- Pri tem smo upoštevali z $R_{\text{vez}} = R_{\text{vez},1} + R_{\text{vez},2}$ skupno upornost veznih žic.

- Upornost ampermetra A_1 določimo iz podatkov:

$$R_{A,1} = \frac{U_{A_0}}{I_D} = \frac{60\text{ mV}}{6\text{ A}} = 10\text{ m}\Omega$$

- Upornost ampermetra A_2 in R_{vez} pa določimo iz razmerja enačb tokovnega delilnika:

$$\frac{R_{A,2} + R_{\text{vez}}}{R_{A,2}} = \frac{5}{4} \rightarrow 4R_{\text{vez}} = R_{A,2}$$

- in od tod:

$$\frac{I_{A,1}}{I_0} = \frac{4R_{\text{vez}}}{R_{A,1} + 5R_{\text{vez}}} = \frac{4}{7} \rightarrow R_{\text{vez}} = \frac{R_{A,1}}{2} = 5\text{ m}\Omega$$

- Upornost drugega ampermetra A_2 je:

$$R_{A,2} = 4R_{\text{vez}} = 20\text{ m}\Omega$$

3. Ugotovite nelinearnost uporovnega senzorja temperature na območju med 0°C in 100°C , če gre nazivna karakteristika skozi začetno točko karakteristike in točko pri temperaturi 80°C ! Skicirajte krivuljo pogreška linearnosti.

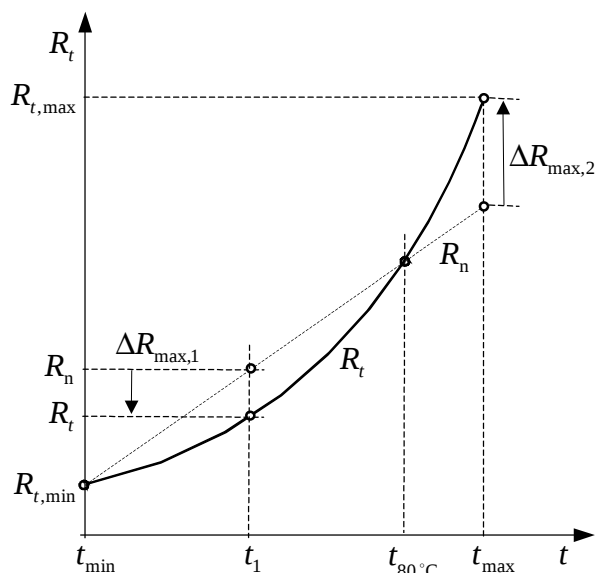
$$R_t = R_0 e^{bt}, \quad R_0 = R_{0^{\circ}\text{C}} = 1000\Omega, \quad R_{100^{\circ}\text{C}} = 1600\Omega$$

Rešitev:

- Manjkajoči koeficient b realne karakteristike $R_t = R_0 e^{bt}$ določimo iz podatkov:

$$b = \frac{1}{100^{\circ}\text{C}} \ln \frac{R_{100^{\circ}\text{C}}}{R_{0^{\circ}\text{C}}} = 4,7 \cdot 10^{-3} / ^{\circ}\text{C}$$

- Odstopanja nelinearnosti $\Delta R = R_t - R_n$ določamo na nazivno karakteristiko R_n , ki gre skozi začetno točko karakteristike in točko pri temperaturi 80°C !



$$R_n = R_{0^{\circ}\text{C}} + \frac{R_{80^{\circ}\text{C}} - R_{0^{\circ}\text{C}}}{80^{\circ}\text{C}} (t - t_{0^{\circ}\text{C}}) = R_{0^{\circ}\text{C}} + S \cdot t = 1000\Omega + 5,71 \frac{\Omega}{^{\circ}\text{C}} t$$

- Največje odstopanje $\Delta R_{\max} = ?$ moramo iskati na dveh odsekih $(0 \div 80)^{\circ}\text{C}$ in $(80 \div 100)^{\circ}\text{C}$.
 - Na prvem odseku $(0 \div 80)^{\circ}\text{C}$ z delnim odvajanjem razlike karakteristik in enačenjem z 0:

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial t} = b R_0 e^{bt} - S = 0 \rightarrow t_1 = t_{\Delta R_{\max,1}} = 41,25^{\circ}\text{C} \text{ in } \Delta R_{\max,1} = -21,41\Omega$$
 - Na drugem odseku $(80 \div 100)^{\circ}\text{C}$ je največje odstopanje kar pri končni točki (glej skico):

$$\Delta R_{\max,2}(t = 100^{\circ}\text{C}) = R_{100^{\circ}\text{C}} - R_{n,100^{\circ}\text{C}} = 1600\Omega - 1570,6\Omega = 29,43\Omega$$
- Za dano nazivno karakteristiko na območju $R_D = R_{100^{\circ}\text{C}} - R_{0^{\circ}\text{C}} = 600\Omega$ je nelinearnost enaka:

$$n = \frac{\Delta R_{\max}(t = 100^{\circ}\text{C})}{R_D} = \frac{29,43\Omega}{600\Omega} = 4,9\%$$

4. Koliko je standardna negotovost aritmetične sredine treh vrednosti napetosti U_1 , U_2 in U_3 , če so vzete iz populacije z eksperimentalno standardno negotovostjo $s_p = 3,0 \text{ mV}$ ($n_p = 300$)? Koliko vrednosti bi morali uporabiti za tvorjenje aritmetične sredine, da bi standardno negotovost aritmetične sredine treh vrednosti prepolovili?

Rešitev:

- Standardno negotovost aritmetične sredine $n = 3$ vrednosti $\bar{U} = \frac{1}{3}(U_1 + U_2 + U_3)$ dolčajo prispevki negotovosti neposredno merjenih vrednosti napetosti:

$$u_c(\bar{U}) = \sqrt{(c_1 u(U_1))^2 + (c_2 u(U_2))^2 + (c_3 u(U_3))^2}$$

- Ker so vrednosti vzete iz iste populacije z eksperimentalno ocenjeno standardno negotovostjo $s_p = 3,0 \text{ mV}$ na velikem številu meritev $n_p = 300$, imajo vse enako standardno negotovost:

$$u(U_1) = u(U_2) = u(U_3) \doteq s_p$$

- Faktorji občutljivosti so enaki delnim odvodom:

$$c_1 = \frac{\partial \bar{U}}{\partial U_1} = c_2 = c_3 = \frac{1}{3} \quad \text{oz. splošno } c_n = \frac{1}{n}$$

- Standardna negotovost aritmetične sredine je enaka:

$$u_c(\bar{U}) = \frac{1}{3} \sqrt{3s_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{3}} = 1,732 \text{ mV}$$

- oz. splošno: $u_c(\bar{U}) = \frac{1}{n} \sqrt{ns_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{n}} !!$

- Če želimo standardno negotovost aritmetične sredine treh vrednosti prepoloviti, moramo pri tvorjenju uporabiti več ($n = 12$) vrednosti:

$$\frac{u_c(\bar{U})_{n=3}}{2} = \frac{s_p}{2\sqrt{3}} = \frac{s_p}{\sqrt{12}} = 0,866 \text{ mV} \quad \leftrightarrow \quad n = 12$$

5. Podajte merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo $u_{68,3}$ in razširjeno merilno negotovostjo U_{95} , če je $s_p = 0,333 \text{ V}$ in meja pogreška merilnega instrumenta $M_U = \pm(1,0\% U_i + 1 \text{ dig})$. Ročno merjeni rezultati so v tabeli 1.

Tabela 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$U \text{ (V)}$	12,3	11,9	12,0	12,4	12,1	12,4	12,1	12,3	12,2	12,1	11,8	11,9	12,3	12,2	12,0

Tabela 2

$p / \%$	50	68,3	95	95,5	99	99,73	99,99
k	0,675	1	1,96	2,0	2,58	3	3,90

Rešitev:

- Povprečna vrednost izmerjenih vrednosti je enaka:

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j = \frac{1}{15} (12,3 \text{ V} + 11,9 \text{ V} + \dots + 12,0 \text{ V}) = 12,1333 \text{ V}$$

- Negotovost tipa A se izračuna iz standardnega odklona populacije s_p :

$$u_A(U) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{0,333 \text{ V}}{\sqrt{15}} = 0,08598 \text{ V}$$

- Negotovost tipa B se upošteva iz meje pogreška merilnega instrumenta:

$$u_B(U) = \frac{M}{\sqrt{3}} = \frac{\pm(1,0\% U_i + 1 \text{ dig})}{\sqrt{3}} = 0,12779 \text{ V}$$

- Skupna merilna negotovost tako znaša:

$$u(U) = \sqrt{u_A^2(U) + u_B^2(U)} = 0,1541 \text{ V}$$

- Merilni rezultat s standardno negotovostjo ($u_{68,3}$) je:

$$U = 12,13 \text{ V}, \quad u(U) = 0,16 \text{ V}, \quad n = 15, \quad k = 1, \quad p = 68,3\%$$

- Merilni rezultat z razširjeno merilno negotovostjo (U_{95}) pa je:

$$U = 12,13 \text{ V} \pm 0,31 \text{ V}, \quad n = 15, \quad k = 1,96, \quad p = 95\%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Ugotovite odzivni čas T_a , dvižni čas T_r in mejno frekvenco f_m merilne naprave (člen 1. reda), če je znan odziv na stopnico $U_0 = 5\text{ V}$ v dveh točkah: $u_2(t = 1\text{ ms}) = 3,46\text{ V}$ in $u_2(t \rightarrow \infty) = 4\text{ V}$. Narišite sliko ene periode na zaslonu osciloskopa ($k_{y1} = k_{y2}$) za dano napravo, če jo vzbuja sinusnim signalom frekvence f_m ! $u_{vh} = u_{y1}$, $u_{iz} = u_{y2}$

Rešitev:

- Če merilno napravo aproksimiramo s členom 1. reda, je odziv na stopnico enak:

$$u_2 = U_0(1 - e^{-t/\tau})$$

- Iz druge znane točke odziva $u_2(t \rightarrow \infty) = 4\text{ V}$, ko je prehodni pojav že izzvenel, dobimo novo stacionarno stanje U_0^* .

$$4\text{ V} = U_0^*(1 - e^{-\infty/\tau}) = U_0^*$$

- Iz prve znane točke odziva $u_2(t = 1\text{ ms}) = 3,46\text{ V}$ pa **časovno konstanto**:

$$3,46\text{ V} = 4\text{ V}(1 - e^{-1\text{ ms}/\tau}) \rightarrow \tau = 1\text{ ms} / -\ln\left(1 - \frac{3,46\text{ V}}{4\text{ V}}\right) = 0,50\text{ ms}$$

- V **odzivnem času** T_a naraste u_2 po dogovor na 95% končne vrednosti:

$$0,95U_0^* = U_0^*(1 - e^{-T_a/\tau}) \rightarrow T_a = \tau \ln 20 = 1,50\text{ ms}$$

- V **dvižnem času** T_r naraste u_2 po dogovor od 10% do 90% od prvega $u_2(t = 0) = 0\text{ V}$ do drugega $u_2(t \rightarrow \infty) = 4\text{ V}$ stacionarnega stanja :

$$0,1U_0 = U_0(1 - e^{-t_1/\tau}) \quad \text{in} \quad 0,9U_0 = U_0(1 - e^{-(t_1+T_r)/\tau})$$

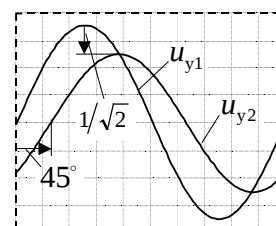
- od koder dobimo: $T_r = \tau \ln 9 = 1,10\text{ ms}$

- Mejna frekvenca** je določena z upadom razmerja izhodne z vhodno napetostjo na $1/\sqrt{2}$:

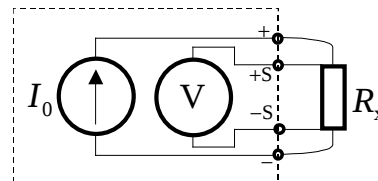
$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_m)^2 \tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow f_m = \frac{1}{2\pi \tau} = 318,3\text{ Hz}$$

- Slika ene periode na zaslonu osciloskopa:

- Pri mejni frekvenci amplituda izhodnega signala upade na $1/\sqrt{2}$ in sinus zaostane za kot $\varphi = 45^\circ$.



2. Kolikšna je relativna sistematična napaka merjenja upornosti $R_x = 75\Omega$, če jo merimo 4-vodno z digitalnim multimetrom, ki ima notranjo upornost med S-sponkama voltmetra $R_v = 1M\Omega$?



Rešitev:

- V 4-vodnem načinu merjenja upornosti multimeter meri padec napetosti neposredno na upor. Zato nimamo opravka s sistematičnim pogreškom zaradi priključnih žic.
- Po drugi strani pa tok, ki ga generira multimeter z notranjim tokovnim virom, ne gre ves skozi upor R_x , ampak se ga določen delež zaradi končne upornosti voltmetra odcepi skozi voltmeter. Ker multimeter (ohmmeter) izračuna upornost iz nastavljenega (generiranega) toka in izmerjenega padca napetosti, imamo zaradi parazitnega (odcepljenega) toka skozi voltmeter opravka s sistematično napako.
- Dejansko izmerjena upornost tako znaša:

$$R'_x = R_x \parallel R_v = \frac{R_x \cdot R_v}{R_x + R_v}$$

- Ker je prava vrednost upora enaka $R_x = 75\Omega$, imamo opravka z relativno sistematično napako:

$$e = \frac{R'_x - R_x}{R_x} = \frac{\frac{R_x \cdot R_v}{R_x + R_v} - R_x}{R_x} = -\frac{R_x}{R_x + R_v} \approx -7,5 \cdot 10^{-5}$$

3. Rezultat kalibracije ampermetra v štirih točkah je prikazan v tabeli. Prva kolona predstavlja referenčno vrednost, druga kolona kaže izmerjeno vrednost. Preračunana merilna negotovost ampermetra je 0,45 A. Koliko znaša pogrešek kalibriranega inštrumenta (kolona tri) in koliko je korekcija kalibriranega inštrumenta (kolona štiri)? Pri uporabljanju ampermetra ste izmerili 6 A. Zapišite enačbo in korigiran merilni rezultat!

I_{ref}/A	I_i/A	E/A	K/A
1,98	2,00		
3,95	4,00		
6,03	6,00		
8,04	8,00		

Rešitev:

- Pogrešek kalibriranega instrumenta je razlika izmerjene vrednosti in referenčne vrednosti. Korekcija pa ima obratni predznak pogreška in se prišteva k rezultatu.

I_{ref}/A	I_i/A	E/A	K/A
1,98	2,00	+0,02	-0,02
3,95	4,00	+0,05	-0,05
6,03	6,00	-0,03	+0,03
8,04	8,00	-0,04	+0,04

- Če pri uporabi instrumenta izmerimo z ampermetrom 6 A, znaša prava vrednost

$$\underline{\underline{I = I_i + K = 6 \text{ A} + (+0,03 \text{ A}) = 6,03 \text{ A}}}$$

- pri tem uporabimo korekcijo $K = +0,03 \text{ A}$ za izmerjeno točko $I_i = 6 \text{ A}$ iz tabele.

- Merilni rezultat je enak

$$\underline{\underline{I = 6,03 \text{ A} \quad , \quad u(I) = 0,45 \text{ A} \quad , \quad n = 1}}$$

4. Katere vrednosti lahko pričakujemo z 99 odstotno verjetnostjo na prikazovalniku voltmetra, ko merimo napetost vira, ki ima notranjo upornost $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ in napetost praznega teka, ki je bila določena na podlagi sedmih meritev:

$$U_0 = 6,8925 \text{ V}, \quad u(U_0) = 20 \text{ mV} \quad (n = 7) ?$$

Uporabljeni voltmeter ima podatke:

$$M_U = \pm(0,02\%U + 0,01\%U_D + 2\text{dig}), \quad U_D = 10 \text{ V},$$

$$R_V = 10 \text{ M}\Omega, \quad \text{ločljivost } \Delta U_q = 100 \mu\text{V}$$

Negotovosti notranje upornosti R_0 in upornosti voltmetra R_V zanemarite!

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(\text{v})$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Napetostni delilnik nam da: $U_V = U_0 \frac{R_V}{R_0 + R_V} = U_0 \cdot 0,999 = 6,885614 \text{ V}$
- Standardna negotovost je sestavljena iz prispevka voltmetra – negotovost tipa B - in prispevka negotovosti napetosti na vhodu, ki je bila ocenjena z devetimi meritvami – negotovost tipa A:

$$u_B(U_V) = \frac{1}{\sqrt{3}} M_U = \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \cdot 10^{-4} U_V + 1 \cdot 10^{-4} U_D + 0,2 \text{ mV}) = 1,488 \text{ mV}$$

$$u_A(U_V) = \frac{\partial U_V}{\partial U_0} u_A(U_0) = \frac{R_V}{R_0 + R_V} u_A(U_0) = 19,98 \text{ mV} \rightarrow u_A(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- Skupno standardno negotovost sestavljata oba prispevka.:

$$u_c(U_V) = \sqrt{u_A^2(U_V) + u_B^2(U_V)} = 20,05 \text{ mV} \rightarrow u_c(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- v danem primeru je prispevek negotovosti tipa A prevladujoč. Zato je prevladujoča tudi porazdelitev pogreška tega prispevka.
- Ker je skupna standardna negotovost tipa A dobljena na manjšem številu meritev, uporabimo pri določanju faktorja razširitve t-porazdelitev in število prostostnih stopenj $\nu_{\text{eff}} = n - 1 = 7 - 1 = 6$

$$\text{Iz tabele dobimo za faktor razširitve: } \nu_{\text{eff}} = 6 \rightarrow k = t_{99\%} = 3,71$$

- Razširjena negotovost je: $U_{99}(U_V) = t_{99\%} \cdot u_c(U_V) = 74,2 \text{ mV}$
- Z 99 odstotno verjetnostjo lahko pričakujemo rezultate med $U_V - U_{99}(U_V)$ in $U_V + U_{99}(U_V)$:

$$6,8114 \text{ V} < U_V < 6,9598 \text{ V}$$

5. Izpeljite številsko enačbo za faktor kvalitete $Q = 2\pi fR(C_1 + C_2)$, če so neposredno merjene veličine izražene v kHz, k Ω in nF ter jo uporabite za naslednje podatke:

$$f = 10 \text{ kHz}, R = 12 \text{ k}\Omega, C_1 = 10 \text{ nF}, C_2 = 25 \text{ nF}$$

Rešitev:

- Veličinsko enačbo $Q = 2\pi fR(C_1 + C_2)$ zapišemo s produkti številskih vrednosti in enot:

$$\{Q\}[Q] = 2\pi \{f\}[f] \{R\}[R] (\{C_1\}[C_1] + \{C_2\}[C_2])$$

- Upoštevati moramo, da sta enoti za kapacitivnosti C_1 in C_2 enaki $[C_1] = [C_2] = [C]$. Veličinsko enačbo preoblikujemo v obliko:

$$\{Q\} = 2\pi \{f\} \{R\} (\{C_1\} + \{C_2\}) \frac{[f][R][C]}{[Q]}$$

- Kvocient uporabljenih enot je številaska vrednost:

$$\frac{[f][R][C]}{[Q]} = \frac{10^3 \text{ Hz} \cdot 10^3 \Omega \cdot 10^{-9} \text{ F}}{1} = 10^{-3} \frac{\Omega \text{ F}}{\text{s}} = 10^{-3},$$

- ki ga pomnožimo še s številskim faktorjem 2π : $2\pi \cdot 10^{-3}$

- Ker za rezultat dobimo le številsko vrednost, moramo navesti tudi, za kakšne enote velja:

$$\{Q\} = 2\pi \cdot 10^{-3} \{f\} \{R\} (\{C_1\} + \{C_2\}) \rightarrow Q = 2\pi \cdot 10^{-3} fR(C_1 + C_2) \left(\frac{f}{\text{kHz}}, \frac{R}{\text{k}\Omega}, \frac{C}{\text{nF}} \right)$$

- Za dane podatke dobimo:

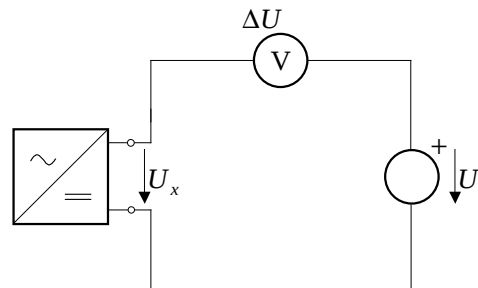
$$Q = 2\pi \cdot 10^{-3} \cdot f \cdot R \cdot (C_1 + C_2) = 2\pi \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 12 \cdot (10 + 25) = 26,39$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Značilno za diferenčno metodo je, da je doprinos negotovosti voltmetra, ki meri le majhno razliko med neznano in referenčno napetostjo, k negotovosti napetosti U_x zanemarljiv. Skicirajte vezje in določite težo prispevka negotovosti voltmetra!

Rešitev:

- Diferenčno metodo uporabljamo, kadar nas zanima sprememba fizikalne veličine.



- Razlike med neznano vrednostjo in referenčno vrednostjo ni potrebno meriti zelo točno, kadar je razlika majhna! Dokaz:

- Če je napetostna razlika $\Delta U = U_v$ majhna, lahko izenačimo U_x in U_r :

$$U_x = U_r + U_v \approx U_r$$

- Standardna negotovost napetosti U_x je enaka:

$$u(U_x) = \sqrt{\left(\frac{\partial U_x}{\partial U_r} u(U_r)\right)^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial U_v} u(U_v)\right)^2} = \sqrt{(u(U_r))^2 + (u(U_v))^2}$$

- in v relativni obliki:

$$w(U_x) = \frac{u(U_x)}{U_x} \approx \sqrt{\left(\frac{u(U_r)}{U_r}\right)^2 + \left(\frac{U_v}{U_r} \frac{u(U_v)}{U_v}\right)^2} = \sqrt{w^2(U_r) + \left(\frac{U_v}{U_r}\right)^2 w^2(U_v)}$$

$$w(U_x) \approx \sqrt{w^2(U_r) + \left(\frac{U_v}{U_x}\right)^2 w^2(U_v)} \quad \Rightarrow \quad w(U_x)_{U_v/U_x \rightarrow 0} \rightarrow w(U_r)$$

- Teža prispevka negotovosti voltmetra je enaka U_v/U_x .

2. V verigo (kaskado) vezana merilna člena – prvi ima mejno frekvenco $f_{m1} = 100 \text{ kHz}$, drugi pa časovno konstanto $\tau_2 = 1 \mu\text{s}$ (člena 1. reda) - povzročata pri frekvenci f fazni pogrešek 1° . Katera je ta frekvenca in kolikšen je pri tem amplitudni pogrešek?

Rešitev:

- Za merilni člen, ki ga aproksimiramo s členom 1. reda ($u_2 = U_0(1 - e^{-t/\tau})$), zapišemo amplitudno in fazno karakteristiko:

$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 \tau^2}}; \quad \varphi = -\arctg \omega \tau$$

- od koder lahko izrazimo frekvenco f , če poznamo fazni kot φ in časovno konstanto τ kot v našem primeru:

$$f = \frac{\text{tg} \varphi}{2\pi \tau}$$

- Pri kaskadni vezavi merilnih členov se skupni dvižni čas geometrično podaljša:

$$T_{rs}^2 = T_{r1}^2 + T_{r2}^2$$

- Če merilno napravo aproksimiramo s členom 1. reda, je povezava dvižnega časa in časovne konstante enaka:

$$T_r = \tau \ln 9 = 2,2 \tau$$

- Iz zgornjega izvedemo, da je tudi skupna časovna konstanta kaskadno vezanih merilnih členov enaka geometrični vsoti:

$$\tau_s = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$$

- Povezava mejne frekvence in časovne konstante za člen 1. reda je: $\tau = \frac{1}{2\pi f_m}$

- in za prvi merilni člen velja: $\tau_1 = \frac{1}{2\pi f_{m1}} = 1,5915 \mu\text{s}$

- Skupna časovna konstanta je tako:

$$\tau_s = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = 1,8796 \mu\text{s}$$

- Sedaj lahko izračunamo iskano frekvenco:

$$f = \frac{\text{tg} \varphi}{2\pi \tau_s} = 1478 \text{ Hz}$$

- Amplitudni pogrešek dobimo iz amplitudne karakteristike:

$$e_A = \frac{|U_2|}{|U_1|} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f \tau_s)^2}} - 1 = -1,52 \cdot 10^{-4}$$

3. Digitalni amperimeter s $4\frac{1}{2}$ -mestnim prikazovalnikom ima mejo pogreška $M_I = \pm(0,1\% I_i + 0,1\% I_D + 2 \text{ dig})$, kaže pa $I_i = 4,567 \text{ mA}$. Izrazite popolni merilni rezultat toka s standardno negotovostjo! Kakšen pa je popolni merilni rezultat, če je amperimeter umerjen in je lastni pogrešek $E = -8 \mu\text{A}$, razširjena negotovost ($k = 2$) pa $U = 21 \mu\text{A}$?

Rešitev:

- Kadar imamo eno meritev in je podan mejni pogrešek, predpostavimo, da je gostota porazdelitve pogreška pravokotne oblike in zapišemo standardno negotovost z:

$$u(I) = \frac{M_I}{\sqrt{3}},$$

- ki v našem prvem primeru znaša:

$$\begin{aligned} u(I) &= \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} I_i + 10^{-3} I_D + 2 \text{ dig}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} 4,567 \text{ mA} + 10^{-3} 19,999 \text{ mA} + 0,002 \text{ mA}) = \frac{1}{\sqrt{3}} 0,0266 \text{ mA} \\ u(I) &= 0,01534 \text{ mA} \rightarrow u(I) = 0,016 \text{ mA} \end{aligned}$$

- pri tem smo upoštevali, da je merilni doseg pri $4\frac{1}{2}$ -mestnem prikazu (največja vrednost je 19,999) $I_D = 19,999 \text{ mA}$ in vrednost zadnjega digita 0,001 mA.

- Popolni merilni rezultat toka s standardno negotovostjo zapišemo:

$$I_i = 4,567 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,016 \text{ mA}, \quad n = 1$$

- Če je instrument umerjen, poznamo lastni pogrešek instrumenta E in popravimo izmerjeno vrednost:

$$I = I_i - E = 4,567 \text{ mA} - (-8 \mu\text{A}) = 4,575 \text{ mA}$$

- Standardno negotovostjo dobimo v drugem primeru iz razširjene negotovosti:

$$u(I) = \frac{U(I)}{k} = \frac{0,021 \text{ mA}}{2} = 0,0105 \text{ mA} \rightarrow u(I) = 0,011 \text{ mA}$$

- Merilni rezultat podan s standardno negotovostjo za drugi primer je enak:

$$I_i = 4,575 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,011 \text{ mA}, \quad n = 1$$

4. V tabeli so zapisane diagonalne napetosti v četrtinskem Wheatstonovem mostiču, ki so bile izmerjene z voltmetrom $U_{5,izm}$. Mostiček je bil napajan z $U_0 = 4V$. Koliko je pogrešek zaradi nelinearnosti E , ki je definiran kot razlika med izmerjenimi vrednostmi voltmetra in idealno karakteristiko četrtinskega mostiča? Narišite graf $E(\Delta R/R)$!

$\Delta R/R$	$U_{5,izm} / mV$
-0,10	-112
-0,08	-90
-0,06	-68
-0,04	-45
-0,02	-22
0	-1
0,02	20
0,04	44
0,06	64
0,08	88
0,1	110

Rešitev:

- Idealno karakteristiko četrtinskega mostiča izračunamo z

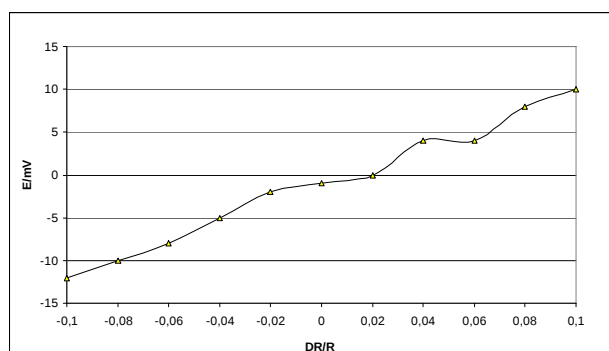
$$U_{5,izr} = \frac{U_0 \Delta R}{4R}$$

- Pogrešek nelinearnosti E je enak:

$$E = U_{5,izm} - U_{5,izr}$$

$\Delta R/R$	$U_{5,izm} / mV$	$U_{5,izr} / mV$	E / mV
-0,10	-112	-100	-12
-0,08	-90	-80	-10
-0,06	-68	-60	-8
-0,04	-45	-40	-5
-0,02	-22	-20	-2
0	-1	0	-1
0,02	20	20	0
0,04	44	40	4
0,06	64	60	4
0,08	88	80	8
0,1	110	100	10

- Graf:



5. Kolikšna je napetost U , izražena v enoti SI, če znaša 10 dBm_{50} (referenca 1 mW , 50Ω)? Kolikšna pa je, če jo izrazimo v dBm_{600} (referenca 1 mW , 600Ω).?

Rešitev:

- Kadar je napetost izražena v enoti decibel, je pri tem mišljeno njeno razmerje proti referenčni vrednosti U_{ref} . Izhodiščna definicija decibela je podana z desetiškim logaritmom dveh moči:

$$\frac{U}{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{P}{P_{\text{ref}}} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{R} \cdot \frac{R}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref}}} \right)$$

- Pri zapisu $\frac{U}{\text{dBm}_{50}}$ je referenčna napetost U_{ref1} enaka napetosti, kadar se na upor $R = 50 \Omega$ sprošča moč $P = 1 \text{ mW}$:

$$U_{\text{ref1}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1 \text{ mW} \cdot 50 \Omega} = 0,2236 \text{ V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{50}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,2236 \text{ V}} \right)$$

- V našem primeru je napetost U , izražena v enoti SI ($[U] = \text{V}$), enaka:

$$\frac{10 \text{ dBm}_{50}}{\text{dBm}_{50}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,2236 \text{ V}} \right) \Rightarrow U = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 0,2236 \text{ V} = 0,7071 \text{ V}$$

- Pri zapisu $\frac{U}{\text{dBm}_{600}}$ je referenčna napetost U_{ref2} je enaka napetosti, kadar se na upor $R = 600 \Omega$ sprošča moč $P = 1 \text{ mW}$:

$$U_{\text{ref2}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1 \text{ mW} \cdot 600 \Omega} = 0,7746 \text{ V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{600}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,7746 \text{ V}} \right)$$

- in za naš primer dobimo:

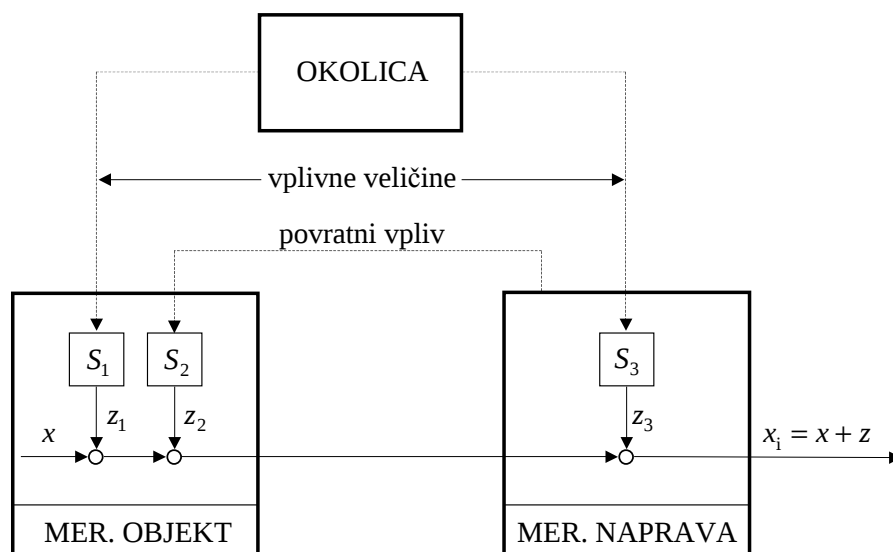
$$\frac{U}{\text{dBm}_{600}} = 20 \log \left(\frac{0,7071 \text{ V}}{0,7746 \text{ V}} \right) = -0,792 \Rightarrow U = -0,792 \text{ dBm}_{600}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Opišite postopek merjenja in razložite osnovno shemo merjenja!

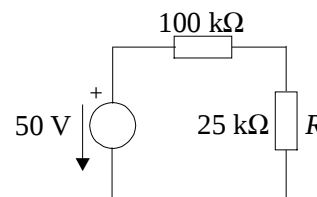
Rešitev:

- **Merjenje** je postopek, pri katerem primerjamo neznano vrednost neke fizikalne veličine z znano količino istovrstne veličine (enoto) – neposredno merjenje.
 - $I = 6\text{ A}$ - efektivna vrednost električnega toka,
 - 6 - številska vrednost,
 - A (amper) - enota za električni tok.
- Izmerjena vrednost je eden od parametrov neke fiz. veličine (i - trenutna vrednost, $\hat{i}$ - temenska vrednost, $\bar{I}$ - srednja vrednost itn.).
- **Osnovna shema merjenja:**
 - merilni objekt – nosilec merjene veličine,
 - merilna naprava – nam daje izmerjeno vrednost.



- Izmerjena vrednost x_1 se za vsoto treh delnih motenj $z_1 + z_2 + z_3$ razlikuje od prave vrednosti
 - S_1 - občutljivost merilnega objekta na vplivne veličine,
 - S_2 - povratni vpliv na priključitev merilne naprave,
 - S_3 - občutljivost merilne naprave na vplivne veličine.
- Razliko med izmerjeno vrednostjo in pravo vrednostjo imenujemo merilni pogrešek.

2. Želimo izmeriti napetost na $25\text{k}\Omega$ uporu z voltmetroma, ki imata doseg $U_D = 20\text{ V}$. Prvi ima karakteristično upornost $1\text{k}\Omega/\text{V}$, drugi pa $20\text{k}\Omega/\text{V}$. Ugotovite, koliko voltmetra kažeta in kolikšen je sistematični pogrešek pri posamezni meritvi?



Rešitev:

- Pred priključitvijo voltmetrov, je napetost na uporu R enaka:

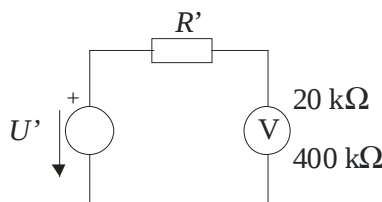
$$U_R = 50\text{ V} \cdot \frac{25\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega + 25\text{k}\Omega} = 10\text{ V}$$

- Po priključitvi voltmetrov z notranjima upornostima :

$$R_{V_1} = U_D \cdot R_{V_1,0} = 20\text{ V} \cdot 1\text{k}\Omega/\text{V} = 20\text{k}\Omega \text{ oziroma}$$

$$R_{V_2} = U_D \cdot R_{V_2,0} = 20\text{ V} \cdot 20\text{k}\Omega/\text{V} = 400\text{k}\Omega$$

- dobimo naslednje nadomestno vezje:



- kjer sta $U' = U_R$ in R' (vzporedna vezava uporov $100\text{k}\Omega$ in $25\text{k}\Omega$):

$$R' = \frac{25\text{k}\Omega \cdot 100\text{k}\Omega}{25\text{k}\Omega + 100\text{k}\Omega} = 20\text{k}\Omega$$

- Kazanje prvega voltmetra je tako enako:

$$U_{V_1} = 10\text{ V} \cdot \frac{20\text{k}\Omega}{20\text{k}\Omega + 20\text{k}\Omega} = 5\text{ V}$$

- in sistematični pogrešek je:

$$E_1 = 5\text{ V} - 10\text{ V} = -5\text{ V}; \quad e_1 = \frac{-5\text{ V}}{10\text{ V}} = -50\%$$

- Kazanje drugega voltmetra pa je enako:

$$U_{V_2} = 10\text{ V} \cdot \frac{400\text{k}\Omega}{400\text{k}\Omega + 20\text{k}\Omega} = 9,524\text{ V}$$

- in sistematični pogrešek je enak:

$$E_2 = 9,524\text{ V} - 10\text{ V} = -0,476\text{ V}; \quad e_2 = \frac{-0,476\text{ V}}{10\text{ V}} = -4,76\%$$

3. S signalnim analizatorjem smo merili efektivno vrednost signala, ki ima poleg osnovne še harmonsko komponento, in faktor popačenja ($THD_{IEC} = \sqrt{X^2 - X_1^2} / X_1$):

$$U = 1,0000 \text{ V} ; u(U) = 2,5 \text{ mV} ; n = 1$$

$$THD = 0,2000 ; u(THD) = 0,0015 ; n = 1$$

Koliko znaša merilni rezultat pri določanju osnovne komponente signala? $r(U, THD) = 0$

Rešitev:

- Iz enačbe za faktor popačenja $THD = \sqrt{U^2 - U_1^2} / U_1$ izrazimo osnovno komponento:

$$U_1 = \frac{U}{\sqrt{1 + THD^2}} = 0,98058 \text{ V}$$

- Standardna negotovost posredno merjene osnovne komponente je sestavljena iz negotovosti vhodnih veličin U in THD :

$$u(U_1) = \sqrt{(c_1 u(U))^2 + (c_2 u(THD))^2} = \sqrt{(2,4515 \text{ mV})^2 + (0,2667 \text{ mV})^2} = 2,466 \text{ mV}$$

- kjer sta faktorja občutljivosti:

$$c_1 = \frac{\partial U_1}{\partial U} = \frac{1}{\sqrt{1 + THD^2}} = 0,9806$$

$$|c_2| = \left| \frac{\partial U_1}{\partial THD} \right| = \left| -U \frac{THD}{\sqrt{(1 + THD^2)^3}} \right| = 0,1778 \text{ V}$$

- Merilni rezultat pri določanju osnovne komponente signala znaša:

$$U_1 = 0,9806 \text{ V} , \quad u(U_1) = 2,5 \text{ mV} , \quad n = 1$$

4. Koliko je največji relativni pogrešek zaokrožanja merilne negotovosti pri zaokrožanju ne eno veljavno cifro in koliko pri dveh veljavnih cifrah? Kolikšno relativno vrednost negotovosti bi v teh primerih morali dodati? Pri zaokrožanju upoštevamo samo prvo cifro, ki jo že opustimo (če je 0 navzdol, če je 1,2,.. pa navzgor).

Rešitev:

- Zaokrožitev na eno cifro:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednosti prve veljavne cifre 1.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2$ imamo večji pogrešek kot pri zaokrožanju navzdol $u = 0,1099.. \rightarrow u_z = 0,1$:

$$u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,2 - 0,11}{0,11} = 81,8\% !$$

$$u \doteq 0,11 \rightarrow u_z = 0,1 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,1 - 0,11}{0,11} = -9,1\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na eno cifro bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,2^2 - 0,11^2}}{0,11} = \frac{0,167}{0,11} = 151,8\% !$$

- Zaokrožitev na dve cifri:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednostih prvih dveh veljavnih cifer 11.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11$ imamo največji pogrešek:

$$u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,11 - 0,101}{0,101} = 8,9\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na dve cifri bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,11^2 - 0,101^2}}{0,101} = \frac{0,0436}{0,101} = 43,1\%$$

5. Koliko je najkrajši čas določanja lastnega pogreška voltmetra $M_{U,X} = \pm(0,5\%U + 0,5\%U_D + 1\text{dig})$, $U_{D,X} = 1,000\text{ V}$, $T_{r,X} = 10\text{ ms}$ (člen 1. reda) pri točki merilnega dosega, ki ga preskušamo z referenčnim voltmetrom $M_{U,N} = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D + 1\text{dig})$, $U_{D,N} = 1,200\text{ V}$, $T_{r,N} = 100\text{ ms}$ (člen 1. reda), da bo dinamični pogrešek zanemarljiv? Upoštevajte, da je bila predhodna točka preskušanja pri polovici dosega.

Rešitev:

- Dinamični pogrešek člena prvega reda pri odzivu na stopnico, ki se zgodi, ko nastavimo novo točko preskušanja ($U_0/2 \rightarrow U_0$), opišemo z:

$$E_{\text{din}} = \frac{U_0}{2} e^{-t/\tau}$$

- Ker je referenčni voltmeter desetkrat počasnejši kot preskušani voltmeter njegova dinamika določa najkrajši čas preizkušanja. Iskano časovno konstanto zato določimo iz dviznega časa referenčnega voltmetra:

$$\tau = \frac{T_{r,N}}{\ln 9} = 45,51\text{ ms}$$

- Sistematični dinamični pogrešek je zanemarljiv, kadar je manjši od desetine negotovosti preskušane voltmetra:

$$\frac{U_0}{2} e^{-t/\tau} \leq \frac{1}{10} \frac{M_{U,X}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{10} \frac{0,5\%U_0 + 0,5\%U_D + 1\text{mV}}{\sqrt{3}}$$

- Ker je preskusna točka $U_0 = U_{D,X}$, zapišemo:

$$e^{-t/\tau} \leq \frac{1}{5} \frac{0,5\% + 0,5\% + \frac{1\text{mV}}{U_{D,X}}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{5} \frac{10^{-2} + 10^{-3}}{\sqrt{3}} = 1,27 \cdot 10^{-3}$$

- Od tod dobimo najkrajši čas določanja lastnega pogreška voltmetra za dano preskusno točko:

$$t \geq -\tau \cdot \ln(1,27 \cdot 10^{-3}) = 0,3035\text{ s}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Kako bi bili povezani dvižni čas, odzivni čas in mejna frekvenca člena prvega reda, če bi za odstopanja kot kriterij uporabili mejo 1% ?

Rešitev:

- Za merilni člen, ki ga aproksimiramo s členom 1. reda, lahko v časovnem prostoru zapišemo odziv na stopničasto obliko signal z velikostjo U_0 enačbo:

$$u_2 = U_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

- Odzivni čas** T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 1\%$ končne vrednosti, velja med odzivnim časom in časovno konstanto τ povezava:

$$\frac{u_2}{U_0} = 0,99 = (1 - e^{-T_a/\tau}) \Rightarrow T_{a,1\%} = -\tau \cdot \ln(0,01) = 4,605 \cdot \tau$$

- Če merilno napravo aproksimiramo s členom 1. reda, je povezava **dvižnega časa** in časovne konstante enaka:

$$T_r = \tau \ln 9 = 2,2 \tau$$

- Od tod dobimo povezavo med dvižnim časom in odzivnim časom

$$T_r = 2,2 \tau = 2,2 \frac{T_{a,1\%}}{4,605} = 0,478 \cdot T_{a,1\%}$$

- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujanju lahko zapišemo:

$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 \tau^2}}$$

- Če določimo **mejno frekvenco** kot frekvenco, kjer upade amplituda za 1% proti izhodiščni vrednosti $|U_2|/|U_1| = 1$, lahko zapišemo:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_{m,1\%})^2 \tau^2}} = 0,99 \Rightarrow f_{m,1\%} = \frac{1}{2\pi \tau} \sqrt{\left(\frac{1}{0,99}\right)^2 - 1} = \frac{2,27 \cdot 10^{-2}}{\tau}$$

- Od tod dobimo povezavo med mejno frekvenco in odzivnim časom:

$$f_{m,1\%} = \frac{2,27 \cdot 10^{-2} \cdot 4,605}{T_{a,1\%}} = \frac{0,1044}{T_{a,1\%}} \Rightarrow f_{m,1\%} \cdot T_{a,1\%} \doteq 0,1$$

2. Koliko je največji relativni pogrešek zaokrožanja merilne negotovosti pri zaokrožanju ne eno veljavno cifro in koliko pri dveh veljavnih cifrah? Kolikšno relativno vrednost negotovosti bi v teh primerih morali dodati? Pri zaokrožanju upoštevamo samo prvo cifro, ki jo že opustimo (če je 0 navzdol, če je 1,2,.. pa navzgor).

Rešitev:

- Zaokrožitev na eno cifro:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednosti prve veljavne cifre 1.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2$ imamo večji pogrešek kot pri zaokrožanju navzdol $u = 0,1099.. \rightarrow u_z = 0,1$:

$$u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,2 - 0,11}{0,11} = 81,8\% !$$

$$u \doteq 0,11 \rightarrow u_z = 0,1 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,1 - 0,11}{0,11} = -9,1\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na eno cifro bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,2^2 - 0,11^2}}{0,11} = \frac{0,167}{0,11} = 151,8\% !$$

- Zaokrožitev na dve cifri:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednostih prvih dveh veljavnih cifer 11.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11$ imamo največji pogrešek:

$$u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,11 - 0,101}{0,101} = 8,9\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na dve cifri bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,11^2 - 0,101^2}}{0,101} = \frac{0,0436}{0,101} = 43,1\%$$

3. Po odklonski metodi želimo z voltmetrom ($U_D = 1,1 \text{ V}$) izmeriti neznano napetost. Najprej kratko sklenemo sponki voltmetra in naredimo prvo serijo meritev napetosti. Povprečna vrednost izmerjenih vrednosti $U_{V,0}$ je $+1,2 \mu\text{V}$, njihov eksperimentalni standardni odklon $s_0(u)$ pa $0,3 \mu\text{V}$. Zatem na voltmeter priključimo neznano napetost in izmerimo drugo serijo meritev. Povprečna vrednost izmerjenih vrednosti U_V je $+1,000245 \text{ V}$, njihov eksperimentalni standardni odklon $s_1(u)$ pa $22 \mu\text{V}$. Izračunajte efektivno število mest prikaza uporabljenega voltmetra $ENOD$ in efektivno število amplitudnih stopenj za izmerjeno merilno vrednost.

$$ENOD = \log_{10} \left(\frac{U_D}{s(u)} \right)$$

Rešitev:

- Efektivno število mest prikaza uporabljenega voltmetra $ENOD$ je

$$ENOD = \log_{10} \left(\frac{U_D}{s_0(u)} \right) = \log_{10} \left(\frac{1,1 \text{ V}}{0,3 \mu\text{V}} \right) = 6,56$$

- Efektivno število amplitudnih stopenj za izmerjeno merilno vrednost določimo iz korigiranega rezultata in skupnega standardnega odklona.

- Korigirani rezultat odklona voltmetra za eno meritev je

$$U_{V,\text{kor}} = U_V - U_{V,0} = 1,000245 \text{ V} - 1,2 \mu\text{V} = 1,0002438 \text{ V}$$

- Skupni standardni odklon je

$$s_{\text{sk}}(u) = \sqrt{s_0^2(u) + s_1^2(u)} = \sqrt{(0,3 \mu\text{V})^2 + (22 \mu\text{V})^2} = 22 \mu\text{V}$$

- in efektivno število amplitudnih stopenj za izmerjeno merilno vrednost:

$$m(u) = \frac{U_{V,\text{kor}}}{s_{\text{sk}}(u)} = \frac{1,0002438 \text{ V}}{22 \mu\text{V}} = 45465,6$$

4. Izpeljite številsko enačbo za jakost električnega polja na razdalji r od izvora, ki seva z močjo P , za $E/(V/m)$, P/mW in r/cm , če je ustrezna veličinska enačba $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$? Uporabite jo za izračun E , če je $P = 2,8 mW$ in $r = 2 cm$!

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m, \quad c_0 \approx 300\,000 km/s$$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$
- Pri prehodu na številsko enačbo uporabimo prikrojeno veličinsko enačbo, v kateri bomo kasneje izpustili enote. Vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, moramo množiti in deliti z želeno enoto:

$$E \frac{V/m}{V/m} = \sqrt{P \frac{mW}{mW} \cdot \mu_0 c_0 / 2\pi \left(r \frac{cm}{cm}\right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številski faktor:

$$E/V/m = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot \frac{\sqrt{10^{-3} W}}{V/m} \cdot \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{10^{-2} m} = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

$$K = \frac{\sqrt{10^{-3} VA}}{10^{-2} V} \cdot \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Upoštevajoč vrednosti za $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$ in $c_0 \doteq 300\,000 km/s$

$$\text{dobimo: } K = \frac{\sqrt{10^{-3}}}{10^{-2}} \cdot \frac{\sqrt{VA}}{V} \cdot \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} H/m \cdot 300 \cdot 10^6 m/s}{2\pi}}$$

- in končno $K = 3,1623 \sqrt{\frac{A}{V}} \sqrt{60 \frac{H}{s}} = 24,495 \sqrt{\frac{A}{V} \cdot \frac{Vs}{A} \cdot \frac{1}{s}} \approx 24,5$

- V prikrojeni veličinski enačbi sedaj izpustimo enote in dobimo številsko enačbo, ki potrebuje še komentar uporabljenih enot.

$$E = 24,5 \cdot \sqrt{P/r^2}, \quad \left(\frac{E}{V/m}, P/mW, r/cm \right)$$

- Za dane podatke $P = 2,8 mW$ in $r = 2 cm$ izračunamo jakost električnega polja s pomočjo številске enačbe:

$$E = 24,5 \cdot \sqrt{P/r^2} = 24,5 \cdot \sqrt{2,8/2^2} = 20,5, \quad \left(\frac{E}{V/m} \right)$$

5. Podajte merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo za sedemkrat merjeno napetost U_x !

U_x/mV	184,548	184,550	184,553	184,551	184,549	184,549	184,544
-----------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Na razpolago je šest serij meritev z isto merilno opremo pod enakimi pogoji:

n_j	21	16	31	16	26	31
$s_j/\mu\text{V}$	57	54	72	63	78	51

Upoštevajte korekcijo $-7\mu\text{V}$. $s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2(x) + (n_2-1)s_2^2(x) + \dots + (n_r-1)s_r^2(x)}{(n_1-1) + (n_2-1) + \dots + (n_r-1)}}$

Rešitev:

- Najprej izračunamo povprečno vrednost sedmih izmerjenih vrednosti.

$$\bar{U}_x = \frac{\sum_{i=1}^n U_{xi}}{n} = 184,54914 \text{ mV}$$

- Nato izračunamo standardni odklon populacije meritev iz posameznih eksperimentalnih standardnih odklonov vzorcev meritev, iz serij meritev, ki so na razpolago in so bile izvedene z isto merilno opremo pod enakimi pogoji.

$$s_p = \sqrt{\frac{20 \cdot 57^2 \mu\text{V}^2 + 15 \cdot 54^2 \mu\text{V}^2 + 30 \cdot 72^2 \mu\text{V}^2 + 15 \cdot 63^2 \mu\text{V}^2 + 25 \cdot 78^2 \mu\text{V}^2 + 30 \cdot 51^2 \mu\text{V}^2}{(21-1) + (16-1) + (31-1) + (16-1) + (26-1) + (31-1)}} \\ = 64,0546 \mu\text{V}$$

- Naslednji korak je izračun merilne negotovosti izmerjenih tokov iz standardnega odklona populacije meritev, deljenega s številom izmerjenih vrednosti.

$$u(U_x) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{64,0546 \mu\text{V}}{\sqrt{7}} = 24,21 \mu\text{V}$$

- Pri rezultatu moramo upoštevati še korekcijo $(-7\mu\text{V})$, ki se prišteje rezultatu.

$$U_x = \bar{U}_x + K = 184,54914 + (-7\mu\text{V}) = 184,54214 \text{ mV}$$

- Po zaokrožitvi merilne negotovosti dobimo rezultat s standardno negotovostjo.

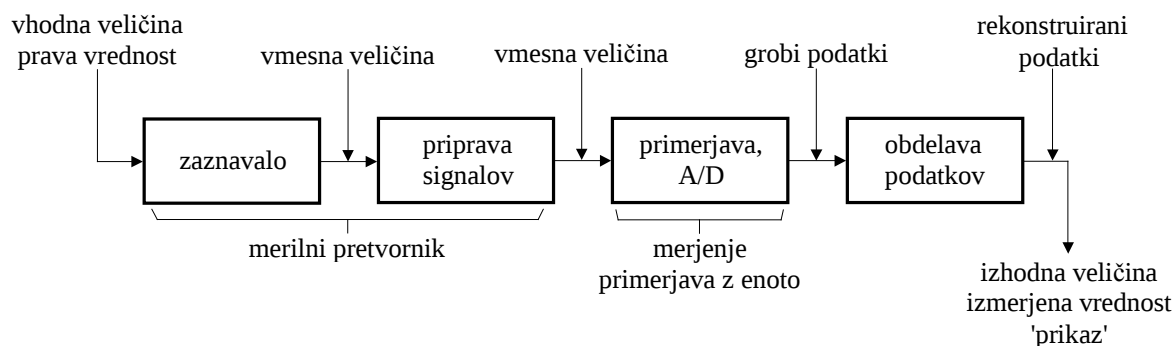
$$I_x = 184,542 \text{ mV} \quad u(I_x) = 25 \mu\text{V} \quad n = 7$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

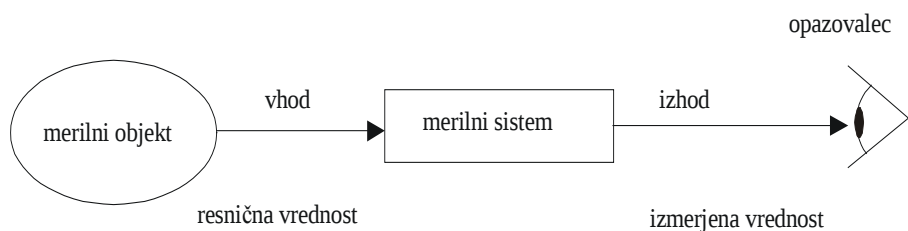
1. Skicirajte zgradbo merilnega sistema in opišite funkcije posameznih blokov v shemi! V čem se razlikujeta klasični in moderni pogled na merilni sistem?

Rešitev:

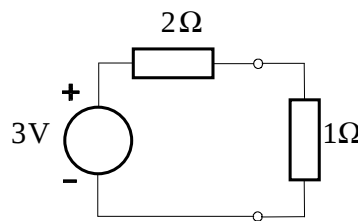
- Zgradba merilnega sistema:



- Vhodni signal vstopa v merilni pretvornik, ki je sestavljen iz zaznavala (tudi tipalo, čutilo ali senzor) in faze priprave signalov na obdelavo (ojačiti, preoblikovati, pretvoriti v veličino, ki je uporabna za neposredno primerjanje).
- Za merilnim pretvornikom je faza primerjanja merjene veličine z enoto:
 - Merjenje v ožjem smislu!
 - Izvrši se z analogno-digitalnim pretvornikom.
 - Signal za primerjavo mora biti v enosmerni obliki.
- Za analogno-digitalnim pretvornikom je faza obdelave signalov za :
 - interpretacijo podatkov, prikaz podatkov in prenos podatkov.
 - opravi funkcijo rekonstrukcije in različne matematične obdelave (npr. računanje povprečne vrednosti, integriranje, odvajanje ipd.).
- V klasični shemi je opravljal vlogo A/D pretvornika človek s svojimi čutili (tipično človeško oko).



2. Želimo izmeriti tok na upor 1Ω z ampermetroma, ki imata doseg $I_D = 1\text{A}$. Prvi ima karakteristični padec napetosti $U_{A_0,1} = 50\text{mV}$, drugi pa $U_{A_0,2} = 500\text{mV}$. Ugotovite, koliko ampermetra kažeta in kolikšen je sistematični pogrešek pri posamezni meritvi?



Rešitev:

- Pred vključitvijo ampermetrov, je tok skozi oba zaporedno vezana upora enak:

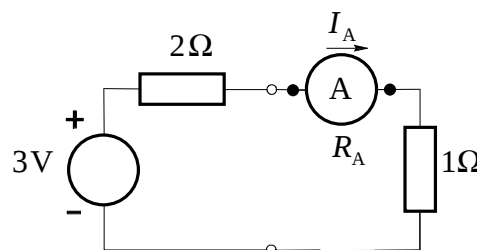
$$I_0 = \frac{3\text{V}}{2\Omega + 1\Omega} = 1\text{A}$$

- Po vključitvi ampermetrov z notranjima upornostima :

$$R_{A_1} = \frac{U_{A_0,1}}{I_D} = \frac{50\text{mV}}{1\text{A}} = 0,05\Omega \text{ oziroma}$$

$$R_{A_2} = \frac{U_{A_0,2}}{I_D} = \frac{500\text{mV}}{1\text{A}} = 0,5\Omega$$

- dobimo naslednje nadomestno vezje:



- Kazanje prvega ampermetra je tako enako:

$$I_{A,1} = \frac{3\text{V}}{2\Omega + 1\Omega + R_{A_1}} = 0,9836\text{A}$$

- in sistematični pogrešek je negativen:

$$E_1 = I_{A,1} - I_0 = 0,9836\text{A} - 1\text{A} = -0,0164\text{A} ;$$

$$e_{A,1} = \frac{I_{A,1} - I_0}{I_0} = -1,64 \cdot 10^{-2}$$

- Kazanje drugega ampermetra je enako:

$$I_{A,2} = \frac{3\text{V}}{2\Omega + 1\Omega + R_{A_2}} = 0,8571\text{A}$$

- in sistematični pogrešek je večji:

$$E_1 = I_{A,2} - I_0 = 0,8571\text{A} - 1\text{A} = -0,143\text{A} ;$$

$$e_{A,2} = \frac{I_{A,2} - I_0}{I_0} = -1,43 \cdot 10^{-1}$$

3. Kako bi se spreminjalo efektivno število amplitudnih stopenj m_D voltmetra ($U_D = 1V$), če bi imel lastni šum voltmetra enakomerno ali trikotno ali trapezno ($\beta = 0,7$) ali Gaussovo ($z = 3$) porazdelitev gostote pogreška z enakimi mejnimi vrednostmi $M_e = M_{tri} = M_{tra} = M_G = M = 0,1mV$? Koliko je pri tem efektivno število mest prikaza ENOD?

$$ENOD = \log_{10} \left(\frac{U_D}{s(u)} \right)$$

Rešitev:

- Za določitev efektivnega števila amplitudnih stopenj moramo poznati standardni odklon lastnega šuma, ki je za dane porazdelitve enak:

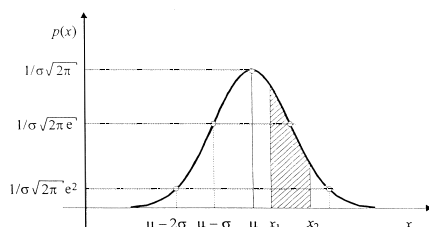
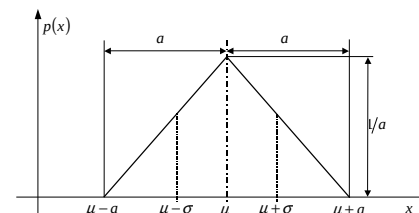
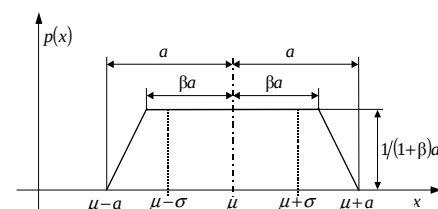
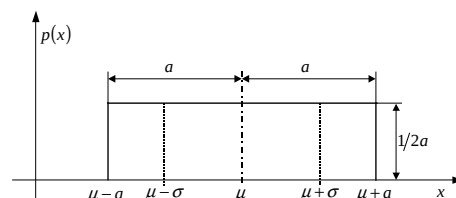
- Enakomerna porazdelitev: $\sigma_e = M_e / \sqrt{3}$

- Trapezna porazdelitev:

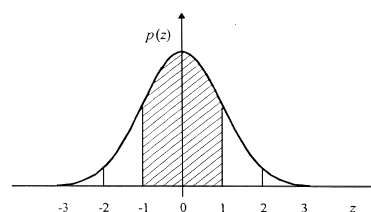
$$\sigma_{tra} = M_{tra} \sqrt{1 + \beta^2} / \sqrt{6} = M_{tra} \sqrt{1 + 0,7^2} / \sqrt{6}$$

- Trikotna porazdelitev: $\sigma_{tri} = M_{tri} / \sqrt{6}$

- Gaussova porazdelitev: $\sigma_G = M_G / 3$



⇒



$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$z = (x - \mu) / \sigma$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

- Efektivno število amplitudnih stopenj m za posamezno porazdelitev je enako:

$$m_e = \frac{U_D}{\sigma_e} = \sqrt{3} \frac{U_D}{M} = \sqrt{3} \frac{1V}{0,1mV} = \sqrt{3} \cdot 10^4 = 1,73 \cdot 10^4;$$

$$ENOD_e = \log_{10}(m_e) = \log_{10}(1,732 \cdot 10^4) = 4,24$$

$$m_{tra} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1 + 0,7^2}} \cdot 10^4 = 2,01 \cdot 10^4, \quad ENOD_{tra} = \log_{10}(m_{tra}) = 4,30;$$

$$m_{tri} = \sqrt{6} \cdot 10^4 = 2,45 \cdot 10^4, \quad ENOD_{tri} = \log_{10}(m_{tri}) = 4,39;$$

$$m_G = 3 \cdot 10^4, \quad ENOD_G = \log_{10}(m_G) = 4,48$$

4. Izpeljite prikrojeno veličinsko enačbo za zapisano izhodno veličino E , če jo želimo izračunati iz izmerjenih podatkov, kjer je $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m, $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s in

$$E = \sqrt{\frac{P\mu_0 c_0}{2\pi x^2}} \quad [E] = \text{V/m}; \quad [P] = \text{kW}; \quad [x] = \text{km}$$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi x^2}$
- Pri prehodu na prikrojeno veličinsko enačbo moramo vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, množiti in deliti z željeno enoto :

$$E \frac{\text{V/m}}{\text{V/m}} = \sqrt{P \frac{\text{kW}}{\text{kW}} \cdot \mu_0 c_0 / 2\pi \left(x \frac{\text{km}}{\text{km}}\right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številski faktor:

$$E/\text{V/m} = \sqrt{P/\text{kW} / (x/\text{km})^2} \cdot \frac{\sqrt{10^3 \text{ W}}}{\text{V/m}} \cdot \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{10^3 \text{ m}} = \sqrt{P/\text{kW} / (x/\text{km})^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

$$K = \frac{\sqrt{10^3 \text{ VA}}}{10^3 \text{ V}} \cdot \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Upoštevajoč vrednosti za $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m in $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s

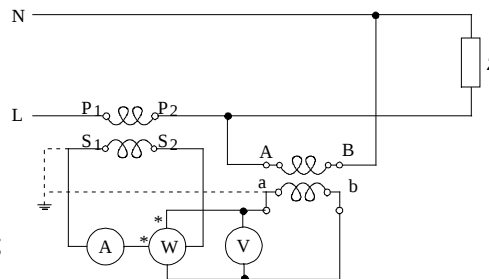
$$\text{dobimo: } K = \frac{\sqrt{10^3}}{10^3} \cdot \frac{\sqrt{\text{VA}}}{\text{V}} \cdot \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2\pi}}$$

- in končno $K = 3,162 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{\text{A}}{\text{V}}} \sqrt{60 \frac{\text{H}}{\text{s}}} = 0,24495 \sqrt{\frac{\text{A}}{\text{V}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot \frac{1}{\text{s}}} \approx 0,245$

- Prikrojena veličinska enačba je: $E/\text{V/m} = 0,245 \cdot \sqrt{P/\text{kW} / (x/\text{km})^2}$

5. Podajte popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo za faktor moči porabnika! $\lambda = P/S$

- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $y_D = 20000$,
 $y = 19111$, $r = 0,2$;
- voltmeter: $U = 105,0 \text{ V}$, $M_U = \pm(0,1\%U + 1\text{dig})$;
- ampermeter: $I = 4,820 \text{ A}$, $M_I = \pm(0,2\%I + 2\text{dig})$;
- tokovnik: $I_{pn} = 75 \text{ A}$, $I_{sn} = 5 \text{ A}$, $r = 0,1$;
- napetostnik: $U_{pn} = 50 \text{ kV}$, $U_{sn} = 100 \text{ V}$, $r = 0,1$



Rešitev:

- Faktor moči je enak razmerju delovne in navidezne moči porabnika $\lambda = P/S = P/UI$. Ker se tako vatmeter kot voltmeter in ampermeter nahajajo na sekundarni strani merilnih transformatorjev, lahko zapišemo:

$$\lambda = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{K_{um} K_{in} P_W}{K_{um} U_V \cdot K_{in} I_A} = \frac{P_W}{U_V I_A}$$

- Delovna moč, ki jo kaže vatmeter, je enaka:

$$P_W = U_n \cdot I_n \cdot \frac{y}{y_D} = 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{19111}{20000} = 477,78 \text{ W}$$

- in faktor moči je:

$$\lambda = \frac{P_W}{U_V I_A} = \frac{477,78 \text{ W}}{105,0 \text{ V} \cdot 4,820 \text{ A}} = 0,94403$$

- Ker je izhodna veličina λ enaka produktu in kvocientu vhodnih veličin, je skupna standardna negotovost za faktor moči v relativni obliki je sestavljena iz treh prispevkov na spodnji način:

$$w_c(\lambda) = \sqrt{w^2(U_V) + w^2(I_A) + w^2(P_W)} = 2,16 \cdot 10^{-3}$$

- kjer so posamezni deleži:

$$w(U_V) = \frac{M_U}{U \sqrt{3}} = \frac{10^{-3} + 0,1 \text{ V} / 105,0 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 1,127 \cdot 10^{-3},$$

$$w(I_A) = \frac{M_I}{I \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 0,001 \text{ A} / 4,820 \text{ A}}{\sqrt{3}} = 1,394 \cdot 10^{-3},$$

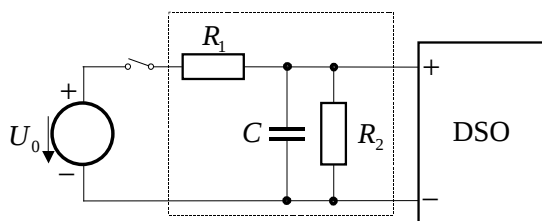
$$w(P_W) = \frac{r(P_W)}{100} \frac{y_D}{y} \frac{1}{\sqrt{3}} = 1,208 \cdot 10^{-3} \quad (\text{razred je podan na doseg})$$

- Zaokrožen popolni merilni rezultat zapišemo s standardno negotovostjo $u_c(\lambda) = w_c(\lambda) \cdot \lambda = 2,04 \cdot 10^{-3}$:

$$\lambda = 0,9440, \quad u_c(\lambda) = 0,0021, \quad n = 1$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Narišite odziv člena, ki ga merimo z osciloskopom, ko vklopimo stikalo. Izračunajte kapacitivnost kondenzatorja C , če je odzivni čas znotraj enega odstotka stacionarnega stanja $T_{a,1\%} = 7,52 \text{ ms}$ in je $U_0 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 763 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 92,4 \text{ k}\Omega$.

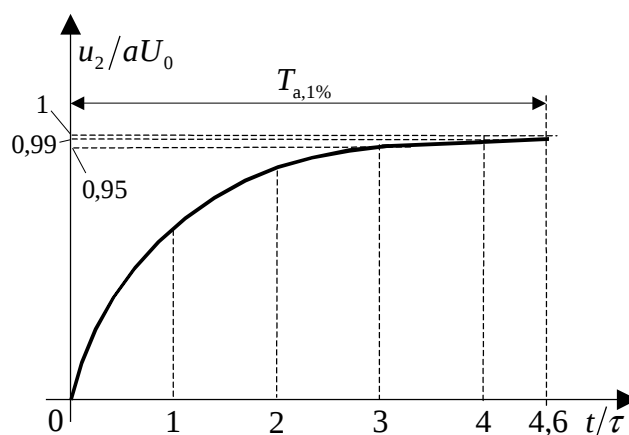


Rešitev:

- Opraviti imamo s členom 1. reda, ki ima časovno konstanto τ enako:

$$\tau = a\tau_1 = aR_1C$$

- pri čemer je a delilno razmerje uporov in določa napetost v stacionarnem stanju:



$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,108 ; \quad U_2 = aU_0 = 1,08 \text{ V}$$

- Časovna konstanta je:

$$\tau = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} C$$

- Odzivni čas T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 1\%$ končne vrednosti, velja za člen 1. reda:

$$\frac{u_2}{aU_0} = 0,99 = \left(1 - e^{-T_{a,1\%}/\tau}\right) \Rightarrow T_{a,1\%} = \ln 100 \cdot \tau \approx 4,6 \tau$$

- V našem primeru je odzivni čas enak $T_{a,1\%} = 7,52 \text{ ms}$ in od tod izračunamo iskano kapacitivnost:

$$C = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \tau = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cdot \frac{T_{a,1\%}}{4,6}$$

$$C = \frac{763 \cdot 10^3 \Omega + 92,4 \cdot 10^3 \Omega}{763 \cdot 10^3 \Omega \cdot 92,4 \cdot 10^3 \Omega} \cdot \frac{7,52 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{4,6} = 19,84 \text{ nF}$$

2. Koliko kaže vltmeter, ki se odziva na pravilno efektivno vrednost napetosti, in vltmeter, ki se odziva na usmerjeno vrednost napetosti, če ju priključimo na napetost $u/V = 150 + 100 \sin \omega t + 30 \sin 3\omega t$?

Rešitev:

- Pravilno efektivno vrednost napetosti dobimo z geometričnim seštevanjem efektivnih vrednosti komponent signala (enosmerne, osnovne in tretje harmonske komponente):

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{(150 \text{ V})^2 + \left(\frac{100 \text{ V}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30 \text{ V}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 167,18 \text{ V}$$

- Usmerjena vrednost napetosti je enaka:

$$U_r = |\bar{u}| = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

- Ker v našem primeru signal ($u/V = 150 + 100 \sin \omega t + 30 \sin 3\omega t$) nima negativne vrednosti, lahko zapišemo: $U_r = \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$. Srednja vrednost obeh sinusnih komponent v periodi je enaka nič in za naš primer zapišemo:

$$\bar{u} = 150 \text{ V}$$

- Instrumenti, ki se odzivajo na usmerjeno vrednost napetosti, imajo pomnoženo skalo z **oblikovni faktorjem** za sinusno obliko:

$$F_0 = \frac{X}{X_r} = \frac{\hat{x}/\sqrt{2}}{2\hat{x}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111$$

- Voltmeter, ki se odziva na usmerjeno vrednost napetosti, nam zato kaže:

$$U = F_0 \cdot \bar{u} = 1,111 \cdot 150 \text{ V} = 166,65 \text{ V}$$

3. Naštejte osnovne veličine in osnovne enote SI sistema. Zapišite upornost $R = 10\Omega$ le z osnovnimi enotami SI sistema (npr. preko izpeljanih veličin moči, sile)?

Rešitev:

- Mednarodni sistem veličin ISQ temelji na sedmih osnovnih veličinah: čas, dolžina, masa, električni tok, termodinamična temperatura, množina snovi in svetilnost.
 - Leta 2008 je Mednarodni urad za mere in uteži (BIPM) izdal 3. izdajo mednarodnega slovar iz metrologije (VIM), v katerem je za razliko od 2. izdaje, kjer je definiran le mednarodni sistem enot SI (fr. *Système international*), dodana še definicija mednarodnega sistema veličin ISQ (ang. *International System of Quantities*), na katerem SI temelji.
- Mednarodni sistem enot SI vsebuje sedem osnovnih enot: sekunda, meter, kilogram, amper, kelvin, mol in kandela.
- Da dobimo enote le osnovnih veličin, moramo upornost predstaviti z enačbo, v kateri nastopajo le osnovne veličine z osnovnimi enotami. Zato lahko uporabimo različne zakone, ki jih poznamo iz fizike. Upornost R lahko npr. zapišemo po ohmovem zakonu z enačbo:

$$R = \frac{U}{I}$$

- Ker je tok I že osnovna veličina, je potrebno razstaviti le napetost U . To lahko naredimo npr. preko električne moči P :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{P}{I^2}$$

- Ker tudi moč ni osnovna veličina, jo lahko razstavimo npr. preko sile F in hitrosti v . Silo nadalje preko pospeška a , preko hitrosti v do dolžine in časa.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{P}{I \cdot I} = \frac{F \cdot v}{I^2} = \frac{F \cdot l}{t \cdot I^2} = \frac{m \cdot a \cdot l}{t \cdot I^2} = \frac{m \cdot v \cdot l}{t \cdot t \cdot I^2} = \frac{m \cdot l \cdot l}{t \cdot t \cdot t \cdot I^2} = \frac{m \cdot l^2}{t^3 \cdot I^2}$$

- Zapišemo lahko tudi enotsko enačbo:

$$[R] = \frac{[m] \cdot [l]^2}{[t]^3 \cdot [I]^2}$$

- ter končno upornost $R = 10\Omega$ kot:

$$R = \{R\} \cdot [R] = 10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3 \cdot \text{A}^2}$$

4. Uporoma z enako nazivno vrednostjo, smo izmerili upornost z istim instrumentom. Standardna negotovost je bila $0,2 \text{ m}\Omega$. Upora vežemo vzporedno. Koliko je standardna negotovost upornosti te vezave? $r = 1$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Upornost vzporedne vezave uporov je:

$$R_{\text{sk}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Skupno standardno negotovost zapišemo z upoštevanjem faktorjev korelacije:

$$u_c(R_{\text{sk}}) = \sqrt{[c_1 u(R_1)]^2 + [c_2 u(R_2)]^2 + 2[c_1 c_2 r(R_1, R_2) u(R_1) u(R_2)]}$$

- Faktorji občutljivosti so:

$$c_1 = \frac{\partial R_{\text{sk}}}{\partial R_1} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

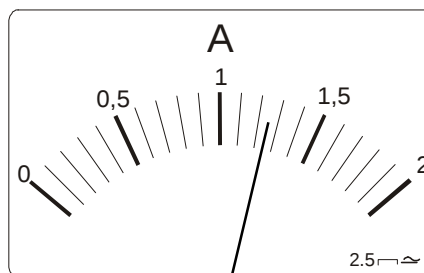
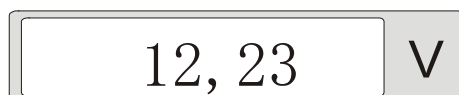
$$c_2 = \frac{\partial R_{\text{sk}}}{\partial R_2} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

- posamezne negotovosti pa: $u(R_1) = u(R_2) = u(R)$
- Standardna negotovost upornosti vzporedne vezave je:

$$u_c(R_{\text{sk}}) = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{u(R)}{4} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot 1 \cdot u^2(R)} = \sqrt{\frac{4}{16}} u(R) = \frac{u(R)}{2} = 0,1 \text{ m}\Omega$$

5. S pomočjo analognega ampermetra in digitalnega voltmetra merimo enosmerno moč P , ki se troši na bremenu. S spodnjih slik odčitajte izmerjeni vrednosti za tok I_A in napetost U_V . Podajte popolni merilni rezultat za moč bremena P . Ugotovite, ali ločljivosti inštrumentov lahko zanemarimo?

Sistematične pogreške zaradi vključitve inštrumentov zanemarimo. Največja merilna napaka (meja pogreška) za voltmeter je $M_U = \pm(0,10\% U + 7 \text{ dig})$. Predpostavite, da ste sposobni analogni inštrument odčitati na eno desetinko razdelka natančno.



Rešitev:

- Voltmeter kaže $U_V = 12,23 \text{ V}$, ampermeter pa $I_A = 1,25 \text{ A}$.
 - Iskana moč je enaka: $P = I_A U_V = 1,25 \text{ A} \cdot 12,23 \text{ V} = 15,2875 \text{ W}$
- Doseg ampermetra je $I_D = 2 \text{ A}$. Razred ampermetra je $r = 2,5$.
- Ločljivost prikazovalnika voltmetra je $1 \text{ dig} = 0,01 \text{ V}$.
- Zaokroženi merilni negotovosti ampermetra in voltmetra v relativni obliki sta:

$$w(I_A) = \frac{u(I_A)}{I_A} = \frac{M_I}{\sqrt{3}} \frac{1}{I_A} = \frac{r}{100} I_D \frac{1}{I_A \sqrt{3}}$$

$$w(I_A) = \frac{2,5}{100} \frac{2 \text{ A}}{1,25 \text{ A}} \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,02309 \approx 0,024$$

$$w(U_V) = \frac{u(U_V)}{U_V} = \frac{M_U}{\sqrt{3}} \frac{1}{U_V} = \frac{(0,10\% U_V + 7 \text{ dig})}{\sqrt{3} \cdot U_V}$$

$$w(U_V) = \frac{(0,10\% \cdot 12,23 \text{ V} + 7 \cdot 0,01 \text{ V})}{\sqrt{3} \cdot 12,23 \text{ V}} = 0,003882 \approx 0,0039$$

- Zaokroženi negotovosti zaradi odčitavanja in ločljivosti instrumenta (ampermeter smo odčitali z efektivno ločljivostjo ene desetine razdelka $Q_I = 0,1 \text{ A}/10 = 0,01 \text{ A}$):

$$w(I_A)_q = \frac{u(I_A)_q}{I_A} = \frac{Q_I}{I_A \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{0,01 \text{ A}}{1,25 \text{ A} \cdot 2\sqrt{3}} = 0,0023094 \approx 0,0023$$

$$w(U_V)_q = \frac{u(U_V)}{U_V} = \frac{1 \text{ dig}}{U_V \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{0,01 \text{ V}}{12,23 \text{ V} \cdot 2\sqrt{3}} = 2,3603 \cdot 10^{-4} \equiv 2,4 \cdot 10^{-4}$$

- Negotovost zaradi ločljivosti voltmetra je zanemarljiva.

$$w(P) = \sqrt{w^2(I_A) + w^2(I_A)_q + w^2(U_V) + w^2(U_V)_q}$$

$$w(P) = \sqrt{(0,024)^2 + (0,0023)^2 + (0,0039)^2 + (0,00024)^2}$$

$$w(P) = 0,02442 \equiv 0,025$$

$$w(P) = \sqrt{w^2(I_A) + w^2(U_V)} = \sqrt{(0,024)^2 + (0,0039)^2} = 0,02431 \equiv 0,025$$

$$u(P) = w(P)P = 0,025 \cdot 15,2875 \text{ W} = 0,3822 \text{ W} = 0,39 \text{ W}$$

- Popolni merilni rezultat je:

$$P = 15,29 \text{ W} , \quad u(P) = 0,39 \text{ W} , \quad n = 1$$

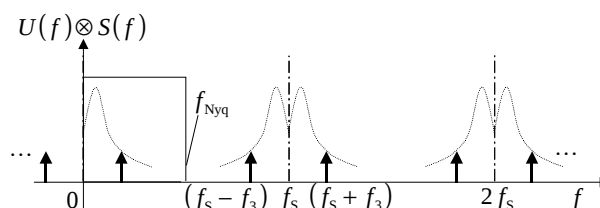
Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Naštejte pogoške, ki nastopijo pri digitalizaciji signala in jih na kratko opišite. Koliko je največji pogrešek ne-koherence pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti $u(t)/V = 1 \sin(100\pi t/s)$, če jo merimo v intervalu dolgem $T_M = 30 \text{ ms}$?

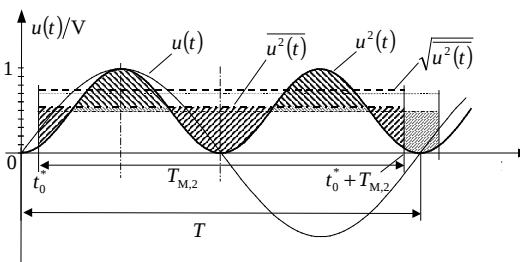
Rešitev:

- Pri digitalizaciji signala nastopi več pogreškov:

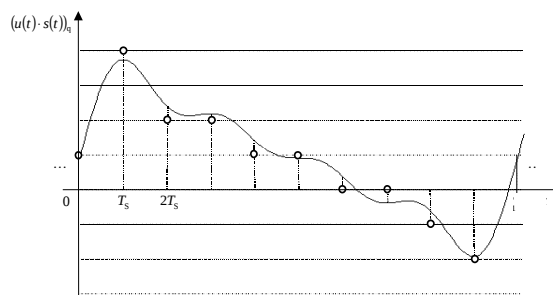
- **navideznost** zaradi prenizke frekvence vzorčenja (pogrešek **prekrivanja**);



- pogrešek **ne-koherentnega** vzorčenja, kadar **čas** merjenja **ni enak mnogokratniku** periode opazovanega signala;

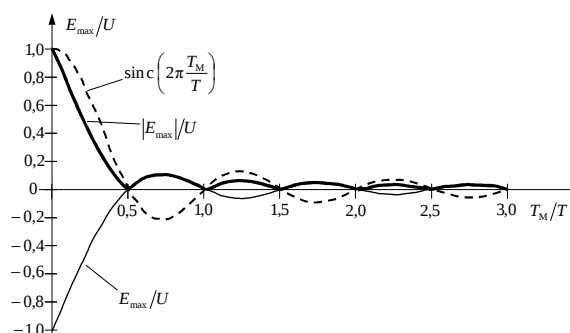


- **kvantizacijska ločljivost**;



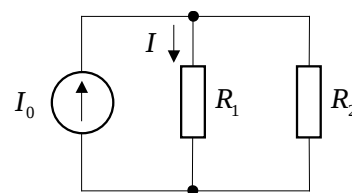
- **ločljivost** v odvisnosti od časa merjenja, itd.

- Efektivna vrednost sinusnega signala $u(t)/V = 1 \sin(50\text{Hz} \cdot 2\pi t)$ je $U = 1/\sqrt{2} \text{ V}$ in perioda $T = 1/f = 1/50\text{Hz} = 20 \text{ ms}$. Pogrešek ne-koherentnega merjenja je odvisen od časa merjenja. Ker je razmerje $T_M/T = 30 \text{ ms} / 20 \text{ ms} = 1,5$, je največji pogrešek pri merjenju efektivne vrednosti sinusne napetosti enak nič.



2. Koliko mora biti upornost ampermetra R_A , da bo sistematični pogrešek vključitve ampermetra pri merjenju toka I skozi upor R_1 zanemarljiv?

- vezje: $I_0 = 1\text{ A}$, $R_1 = 500\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$;
- ampermeter: $I_D = 600,0\text{ mA}$, $M_I = \pm(0,1\% I + 0,1\% I_D)$



Rešitev:

- Tok I , ki teče pred vključitvijo ampermetra v veji upora R_1 , izračunamo iz enačbe za tokovni delilnik:

$$I = I_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 375,0\text{ mA}$$

- Po vključitvi ampermetra z upornostjo R_A , teče v tej veji manjši tok:

$$I^* = I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} < I$$

- in sistematični pogrešek vključitve ampermetra je negativen:

$$E_s = I^* - I = I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} - I$$

- Sistematični pogrešek meritve je zanemarljiv, kadar je manjši kot od desetine standardne negotovosti.

$$|E_s| \leq \frac{u(I)}{10} = \frac{1}{10} \frac{M_I}{\sqrt{3}}$$

- Za podane vrednosti, privzeti pravokotni porazdelitvi pogreška ($u(I) = M_I / \sqrt{3}$) in upoštevanju, da se tokova I^* in I zanemarljivo malo razlikujeta, dobimo:

$$E_s \leq \frac{1}{10\sqrt{3}} (10^{-3} \cdot 375,0\text{ mA} + 10^{-3} \cdot 600,0\text{ mA}) = 0,0563\text{ mA}$$

- Od tod izračunamo iskano upornost R_A :

$$I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} - I = -E_s$$

$$1\text{ A} \frac{300\ \Omega}{R_A + 800\ \Omega} - 375,0\text{ mA} = -0,0563\text{ mA}$$

$$R_A = 0,12\ \Omega$$

- Upornost ampermetra mora biti manjša od vrednosti $R_A \leq 0,12\ \Omega$, da je sistematični pogrešek pri merjenju toka I skozi upor R_1 zanemarljiv.

3. Z digitalnim ohmmetrom želimo izmeriti upornost neznanega upora R_x s pomočjo dvožične metode. Po priključitvi merjenega upora ohmmeter pokaže odčitek $R_1 = 89,35 \text{ m}\Omega$. Priključne vodnike nato kratko sklenemo, nakar ohmmeter pokaže odčitek $R_0 = 84,33 \text{ m}\Omega$. Zapišite popolni merilni rezultat za neznano upornost R_x . Meja pogreška ohmmetra je $M_R = \pm(0,1\% R + 5 \text{ dig})$. Korelacijo med obema merjenjema upornosti zanemarite.

Rešitev:

- Pri dvožičnem merjenju upornosti se k merjeni upornosti prišteje še upornost priključnih vodnikov, ki jo lahko izmerimo tako, da priključne vodnike kratko sklenemo. Neznana upornost R_x je tako

$$R_x = R_1 - R_0 = 89,35 \text{ m}\Omega - 84,33 \text{ m}\Omega = 5,02 \text{ m}\Omega$$

- Meja pogreška za posamezno meritev je:

$$M_{R1} = \pm(0,1\% R_1 + 5 \text{ dig}) = \pm(0,1\% \cdot 89,35 \text{ m}\Omega + 5 \cdot 0,01 \text{ m}\Omega) = \pm 0,139 \text{ m}\Omega$$

$$M_{R0} = \pm(0,1\% R_0 + 5 \text{ dig}) = \pm(0,1\% \cdot 84,33 \text{ m}\Omega + 5 \cdot 0,01 \text{ m}\Omega) = \pm 0,134 \text{ m}\Omega$$

- Skupno standardno negotovost dobimo iz prispevkov negotovosti posameznih meritev:

$$u(R_x) = \sqrt{(c_1 u(R_1))^2 + (c_0 u(R_0))^2}$$

$$u(R_1) = M_{R1} / \sqrt{3}, \quad u(R_0) = M_{R0} / \sqrt{3}; \quad c_1 = 1, \quad c_0 = -1;$$

$$u(R_x) = \sqrt{(M_{R1} / \sqrt{3})^2 + (M_{R0} / \sqrt{3})^2} = 0,112 \text{ m}\Omega$$

- Popolni merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo je:

$$R_x = 5,02 \text{ m}\Omega, \quad u(R_x) = 0,12 \text{ m}\Omega, \quad n = 1$$

4. Koliko je celotna relativna standardna negotovost $w_c(R_x)$ pri posrednem merjenju upornosti z metodo praznjenja kondenzatorja? $R_x = \frac{t}{C \ln(U_1/U_2)}$

$$w(t) = 2 \cdot 10^{-3}, w(C) = 3 \cdot 10^{-3}, w(U_1) = 4 \cdot 10^{-3}, w(U_2) = 5 \cdot 10^{-3}; U_1/U_2 = 1,5$$

- korelacijski koeficienti med neposredno merjenimi veličinami so $r_i = 0$

Rešitev:

- Posredno merjeno upornost lahko poenostavljeno zapišemo s tremi členi:

$$R_x = \frac{t}{C \cdot \ln(U_1/U_2)} = \frac{t}{C \cdot A}$$

- Za izraz, kjer nastopajo vhodne veličine v produktu in kvocientu, zapišemo celotno relativno standardno negotovost z geometrijsko vsoto relativnih standardnih negotovosti vhodnih veličin:

$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(t) + w^2(C) + w^2(A)}$$

- Negotovost logaritma ulomka napetosti $A = \ln(U_1/U_2)$ ovrednotimo ločeno:

$$w(A) = u(A)/A$$

$$u(A) = \sqrt{(c_1 u(U_1))^2 + (c_2 u(U_2))^2}$$

- kjer sta faktorja občutljivosti:

$$c_1 = \frac{\partial A}{\partial U_1} = \frac{\partial \ln(U_1/U_2)}{\partial U_1} = \frac{1}{U_1/U_2} \cdot \frac{1}{U_2} = \frac{1}{U_1}$$

$$c_2 = \frac{\partial \ln(U_1/U_2)}{\partial U_2} = \frac{1}{U_1/U_2} \cdot \left(-\frac{U_1}{U_2^2}\right) = -\frac{1}{U_2}$$

- Absolutno obliko standardne negotovosti, ki je brez dimenzij (logaritem razmerja!), sedaj ovrednotimo:

$$u(A) = \sqrt{\left(\frac{u(U_1)}{U_1}\right)^2 + \left(\frac{u(U_2)}{U_2}\right)^2} = \sqrt{(w(U_1))^2 + (w(U_2))^2} = 6,403 \cdot 10^{-3}$$

- in od tod še relativno obliko standardne negotovosti:

$$w(A) = \frac{u(A)}{A} = \frac{u(\ln(U_1/U_2))}{\ln(U_1/U_2)} = \frac{6,403 \cdot 10^{-3}}{\ln 1,5} = 1,579 \cdot 10^{-2}$$

- Zaokrožena celotna relativna standardna negotovost za posredno merjeno veličino R_x je enaka:

$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(t) + w^2(C) + w^2(A)} = 1,619 \cdot 10^{-2} \rightarrow w_c(R_x) = 1,7 \cdot 10^{-2}$$

5. Izrazite merilni rezultat za impedanco Z za 99% stopnjo zaupanja, če jo izmerimo posredno preko napetosti U in toka I !

- $U = 230,0 \text{ V}$, $M_U = \pm(0,05\% U + 1 \text{ dig})$, $n_1 = 1$;
- $\bar{I} = 121,4 \text{ mA}$, $s(I) = 5,6 \text{ mA}$, $n_2 = 10$

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(\text{V})$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Standardna negotovost merilnega rezultata za impedanco

$$Z = U/I = 230,0 \text{ V} / 121,4 \text{ mA} = 1894,6 \Omega$$

- sestavljata dva prispevka: negotovost merjenja napetosti in negotovost merjenja toka.

$$u(Z) = \sqrt{(c_1 u(U))^2 + (c_2 u(I))^2} \quad \text{oz.} \quad w(Z) = \frac{u(Z)}{Z} = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)}$$

- Negotovost merjenja napetosti je negotovost tipa B kot prispevek lastnega pogreška voltmetra pri eni meritvi. Določimo jo iz mejne vrednosti pri predpostavki pravokotne gostote porazdelitve pogreška.

$$u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (5 \cdot 10^{-4} \cdot 230,0 \text{ V} + 0,1 \text{ V}) = 0,1241 \text{ V}$$

- in v relativni obliki: $w(U) = \frac{u(U)}{U} = \frac{0,1241 \text{ V}}{230,0 \text{ V}} = 5,396 \cdot 10^{-4}$

- Negotovost merjenja toka je negotovost tipa A zaradi ponavljanja meritev. Določimo jo iz podanega eksperimentalnega standardnega odklona $s(I)$ in števila meritev n_2

$$u(I) = \frac{s(I)}{\sqrt{n_2}} = \frac{5,6 \text{ mA}}{\sqrt{10}} = 1,77 \text{ mA} \quad \text{in} \quad w(I) = \frac{u(I)}{\bar{I}} = \frac{1,77 \text{ mA}}{121,4 \text{ mA}} = 1,458 \cdot 10^{-2}$$

- Ker je dominantna negotovost merjenja toka - negotovost tipa A:

$$w(Z) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)} = 1,459 \cdot 10^{-2} \quad \text{in} \quad u(Z) = w(Z) \cdot Z = 27,65 \Omega,$$

- je tudi gostota porazdelitev pogreška posredno merjene veličine Z enaka gostoti porazdelitev pogreška merjenja toka (več meritev) in lahko uporabimo Studentovo t-porazdelitev za vrednotenje razširjene negotovosti ($\nu = n_2 - 1 = 9 \rightarrow t_{99\%} = 3,25$)

$$U(Z) = t_{99\%} \cdot u(Z) = 3,25 \cdot 27,65 \Omega = 89,86 \Omega$$

- Zaokrožen popolni merilni rezultat z razširjeno negotovostjo za impedanco Z zapišemo:

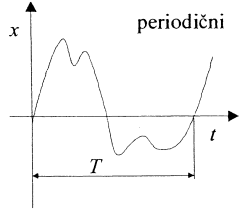
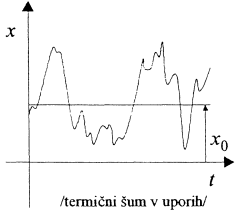
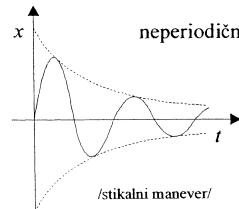
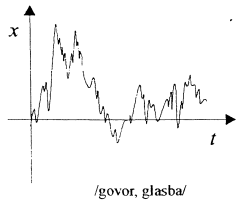
$$Z = 1895 \Omega, \quad U(Z) = 90 \Omega, \quad k = 3,25, \quad \nu_{\text{eff}} = 9, \quad p = 99\%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Kako delimo signale, ki opisujejo časovno spremenljive veličine? Opišite osnovne parametre pulznih neperiodičnih oblik signalov.

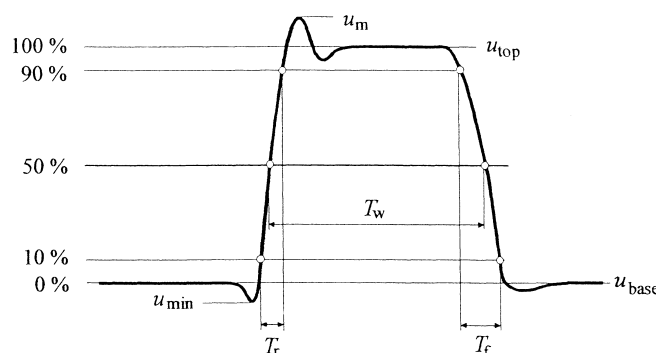
Rešitev:

- Delimo jih na to, ali lahko matematično opišemo trenutne vrednosti veličin ali ne:
 - deterministične,
 - nedeterministične – naključne (stohastične).
- Kadar se pomembni parametri dinamičnih veličin (aritmet. srednja vrednost, efektivna vrednost, itn.) s časom spreminjajo, ločimo signale na:
 - stacionarne,
 - nestacionarne.

	DETERMINISTIČNI	NEDETERMINISTIČNI
	opisujemo jih v časovnem in frekvenčnem prostoru	opisujemo jih v frekvenčnem prostoru; zanimivi za prenos informacij
STACIONARNI	 periodični	 /termični šum v uporih/
NESTACIONARNI	 neperiodični /stikalni maneuver/	 /govor, glasba/

- Nekateri parametri pulzne oblike signala.
- Izhodiščna parametra sta:

- osnovni ali **spodnji** nivo (u_{base} , 0%),
- zgornji** nivo (u_{top} , 100%),
- prevladujoči vrednosti v histogramu.



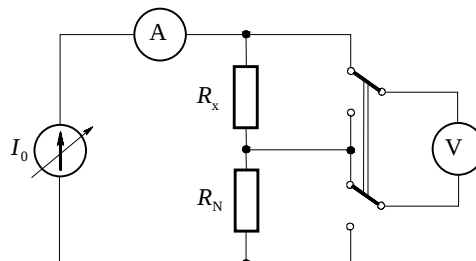
- Z obema izhodiščnima nivojema 0% in 100% sta določena tudi nivoja 10% in 90% za določitev **dviznega časa** T_r in **upadnega časa** T_f .
- Ugotovimo lahko tudi nivo 50%, ki določa **širino impulza** T_w .
 - Pri ponavljajočih pulzih je to nivo za merjenje in določanje periode, frekvence in relativne širine impulza.

2. Katerega izmed uporov $R_1 \approx 100,5 \Omega$ ali $R_2 \approx 95,0 \Omega$ lahko bolj točno zmerimo po napetostni primerjalni metodi z voltmetrom $M_U = \pm(0,1\% U + 0,1\% U_D)$, $U_D = 2 \text{ V}$, ločljivost 1 mV , in uporovnim etalonom $R_N = 100,00(1 \pm 10^{-4}) \text{ k}\Omega$? Vezje napajamo z idealnim tokovnim virom.

Rešitev:

- Standardna merilna negotovost napetostne primerjalne metode $R_x = R_N U_x / U_N$ je splošno ($U_x \neq U_N$) zapisana:

$$w_{R_x} = \sqrt{w_{R_N}^2 + w_{U_N}^2 + w_{U_x}^2}$$



- Kadar sta vrednosti upornosti in s tem obeh napetosti dovolj blizu skupaj $U_x \approx U_N$ (red velikosti 1%), se prispevek pogreška voltmetra v kvocientu izloči in ostane samo prispevek zaradi ločljivosti voltmetra:

$$w_{R_x} = \sqrt{w_{R_N}^2 + 2 \left(\frac{u(U_x)_q}{U_x} \right)^2}$$

- a) Prva upornost $R_x = R_1 \approx 100,5 \Omega$ je dovolj blizu referenčne $(R_x - R_N)/R_N = 0,005$, $U_x \approx U_N \approx 2 \text{ V}$ in lahko zapišemo standardno merilno negotovost:

$$w_{R_x} = \sqrt{w_{R_N}^2 + 2 \left(\frac{u(U_x)_q}{U_x} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{m_{R_N}}{\sqrt{3}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\Delta U}{2\sqrt{3} U_x} \right)^2}$$

$$w_{R_1} = \sqrt{\left(\frac{10^{-4}}{\sqrt{3}} \right)^2 + 2 \left(\frac{1 \text{ mV}}{2\sqrt{3} \cdot 2 \text{ V}} \right)^2} = 2,12 \cdot 10^{-4} \rightarrow w_{R_1} = 2,2 \cdot 10^{-4}$$

- b) Druga upornost $R_x = R_2 \approx 95,0 \Omega$ bolj odstopa od referenčne $(R_x - R_N)/R_N = -0,05$, $U_x = 1,9 \text{ V}$, $U_N = 2 \text{ V}$ in zato je standardna merilna negotovost večja:

$$w_{R_x} = \sqrt{w_{R_N}^2 + w_{U_N}^2 + w_{U_x}^2} = \sqrt{\left(\frac{m_{R_N}}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{M_{U_N}}{\sqrt{3} U_N} \right)^2 + \left(\frac{M_{U_x}}{\sqrt{3} U_x} \right)^2}$$

$$w_{R_2} = \sqrt{\left(\frac{10^{-4}}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{0,001 + 0,001 \cdot U_D / 2 \text{ V}}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{0,001 + 0,001 \cdot U_D / 1,9 \text{ V}}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

$$w_{R_x} = 1,65 \cdot 10^{-3} \rightarrow w_{R_2} = 1,7 \cdot 10^{-3} > w_{R_1} !$$

3. Pri preizkušanju točnosti ampermetra $M_I = \pm(1\% I + 1\% I_D + 2 \text{ dig})$, $I_D = 100 \text{ mA}$, ločljivost $0,1 \text{ mA}$, smo uporabili referenčni ampermeter $M_{I,r} = \pm(0,2\% I + 0,1\% I_{D,r} + 1 \text{ dig})$, $I_{D,r} = 150 \text{ mA}$, ločljivost $0,1 \text{ mA}$. Podajte intervala lastnega pogreška E pri vrednostih $I_1 = I_D$ in $I_2 = I_D/10$, za katera lahko s 100% verjetnostjo potrdite deklarirano točnost. Pri preizkušanju upoštevajte samo prispevek referenčnega ampermetra. Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Deklarirano točnost preskušane instrumenta moremo z gotovostjo potrditi, kadar je lastni pogrešek instrumenta manjši od razlike obeh mejnih pogreškov instrumentov, ker smo s tem zanesljivo izločili pogrešek referenčnega instrumenta:

$$|E| < M_I - M_{I,r}$$

- Pri toku $I_1 = I_D = 100 \text{ mA}$ imamo:

$$|E| < M_I - M_{I,r} = (1\% I + 1\% I_D + 2 \text{ dig}) - (0,2\% I + 0,1\% I_{D,r} + 1 \text{ dig})$$

$$|E| < (1 \text{ mA} + 1 \text{ mA} + 0,2 \text{ mA}) - (0,2 \text{ mA} + 0,15 \text{ mA} + 0,1 \text{ mA})$$

$$|E| < (2,2 \text{ mA}) - (0,45 \text{ mA}) = 1,75 \text{ mA}$$

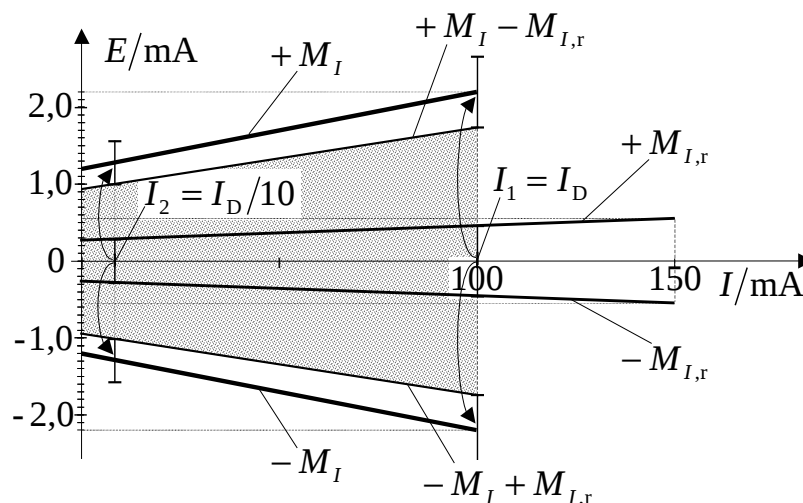
- Lastni pogrešek je lahko v mejah: $-1,75 \text{ mA} < E < 1,75 \text{ mA}$

- Pri toku $I_2 = I_D/10 = 10 \text{ mA}$ imamo:

$$|E| < (0,1 \text{ mA} + 1 \text{ mA} + 0,2 \text{ mA}) - (0,02 \text{ mA} + 0,15 \text{ mA} + 0,1 \text{ mA})$$

$$|E| < (1,3 \text{ mA}) - (0,27 \text{ mA}) = 1,03 \text{ mA}$$

- Lastni pogrešek je lahko v mejah: $-1,03 \text{ mA} < E < 1,03 \text{ mA}$
 - Skica:



4. Ker nimate W-metra, želite vhodno moč proizvoda (npr. sobnega ventilacijskega grelnika) izmeriti posredno. Katere inštrumente potrebujete, če predpostavimo sinusno obliko signalov? Izpeljite izraz za izračun skupne standardne merilne negotovosti. Navedite podatke, ki jih potrebujete za izračun merilne negotovosti vhodne moči! Predpostavimo, da je negotovost zaradi ločljivosti inštrumentov zanemarljiva.

Rešitev:

- Da bi posredno izmerili vhodno moč ventilacijskega grelnika potrebujemo A-meter, V-meter in $\cos \varphi$ -meter.
- Izračun moči: $P = UI \cos \varphi$
- Pri skupni negotovosti upoštevamo prispevke vseh treh inštrumentov:

$$u(P) = \sqrt{(|c_1| \cdot u(U))^2 + (|c_2| \cdot u(I))^2 + (|c_3| \cdot u(\cos \varphi))^2}$$

- Za izračun potrebujemo standardne merilne negotovosti merjenja vhodnih veličin ($u(U)$, $u(I)$, $u(\cos \varphi)$) in občutljivostne koeficiente:

$$|c_1| = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| = |I \cos \varphi|; \quad |c_2| = \left| \frac{\partial P}{\partial I} \right| = |U \cos \varphi|; \quad |c_3| = \left| \frac{\partial P}{\partial \cos \varphi} \right| = UI$$

- Skupna standardna merilna negotovost je enaka

$$\begin{aligned} u(P) &= \sqrt{(I \cos \varphi \cdot u(U))^2 + (U \cos \varphi \cdot u(I))^2 + (UI \cdot u(\cos \varphi))^2} = \\ &= P \cdot \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U} \right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I} \right)^2 + \left(\frac{u(\cos \varphi)}{\cos \varphi} \right)^2} = P \cdot \sqrt{(w(U))^2 + (w(I))^2 + (w(\cos \varphi))^2} \end{aligned}$$

- Potrebni podatki inštrumentov:
 - izmerjena vrednost,
 - mejni pogrešek (absolutni ali relativni).

$$u(P) = P \cdot \sqrt{\left(\frac{m_U}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_I}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_{\cos \varphi}}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

$$\text{ali} \quad = P \cdot \sqrt{\left(\frac{M_U / \sqrt{3}}{U} \right)^2 + \left(\frac{M_I / \sqrt{3}}{I} \right)^2 + \left(\frac{M_{\cos \varphi} / \sqrt{3}}{\cos \varphi} \right)^2}$$

5. Za izraz $y = x_1 + x_2$ ugotovite, kolikokrat manjša mora biti negotovost druge vhodne veličine od prve $u(x_2) \leq u(x_1)/k$ ($k = ?$), da se ne bo poznala v skupni negotovosti $u(y) \cong u(x_1)$? $u(y)$ zaokrožimo ne dve cifri na intervalu $0,10 \div 0,99$.

Rešitev:

- Standardno negotovost izhodne veličine y , ob upoštevanju da sta faktorja občutljivosti $c_1 = \partial y / \partial x_1 = 1$ in $c_2 = \partial y / \partial x_2 = 1$, zapišemo:

$$u(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} u(x_2)\right)^2} = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$$

- Standardna negotovost veličine x_2 mora biti k -krat manjša od negotovosti veličine x_1 , da se njen prispevek ne pozna v skupni negotovosti

$$u(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)} = \sqrt{u^2(x_1) + (u(x_1)/k)^2} = u(x_1) \sqrt{1 + (1/k)^2}$$

- Ker zaokrožujemo merilno negotovost ne dve cifri na intervalu $0,10 \div 0,99$ vedno navzgor razen, kadar je naslednja tretja cifra 0, imamo na obeh mejah naslednje razmere:

- Na vrednost $u = 0,10$ zaokrožimo vse vrednosti od $u \geq 0,0991$ do $u = 0,10099.. < 0,101$, zato za najbolj neugodni primer zapišemo:

$$0,101 > 0,10 \sqrt{1 + (1/k)^2}$$

- in od tod: $k > 1 / \sqrt{\left(\frac{0,101}{0,10}\right)^2 - 1} = 7,053$

- Na vrednost $u = 0,99$ zaokrožimo vse vrednosti od $u \geq 0,981$ do $u = 0,99099.. < 0,991$, zato za najbolj neugodni primer zapišemo:

$$0,991 > 0,99 \sqrt{1 + (1/k)^2}$$

- in od tod: $k > 1 / \sqrt{\left(\frac{0,991}{0,99}\right)^2 - 1} = 22,243$

- Negotovost druge vhodne veličine mora biti $k = 22,25$ - krat manjša od prve vhodne veličine, da se zanesljivo ne bo poznala v skupni standardni negotovosti izhodne veličine na intervalu $0,10 \div 0,99$.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. V katerih mejah lahko pričakujemo rezultate merjenja amplitude sinusnega signala $U = 10\text{ V}$, $f = 1\text{ kHz}$ z merilnim členom prvega reda $T_r = 50\mu\text{s}$, če imamo na vходу prisoten še motilni signal $U_m = 1\text{ V}$, $f_m = 100\text{ kHz}$? Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Merilni člen zaradi svojega dinamičnega odziva različno oslabi napetosti na vходу. Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujanju K lahko zapišemo z uporabo mejne frekvence f_m :

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$

- mejno frekvenco dobimo iz dvižnega časa:

$$f_m = \frac{1}{2\pi(T_r/\ln 9)} \doteq \frac{0,35}{T_r} = 7,0\text{ kHz}$$

- Merjeni signal ($f_1 = 1\text{ kHz}$) je slabljen z:

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} = 0,9899$$

- in amplituda merjenega signala je enaka

$$A = K_1 \sqrt{2} U = 14,0000\text{ V}$$

- Motilni signal ($f_2 = 100\text{ kHz}$) je močnejše slabljen:

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}} = 0,06983$$

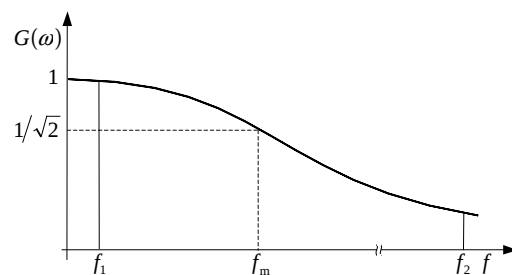
- in tudi amplituda motilnega signala:

$$A_m = K_2 \sqrt{2} U_m = 0,09875\text{ V}$$

- Ker ne poznamo faznega zamika med merjenim in motilnim signalom, lahko pričakujemo rezultate merjenja amplitude signala v mejah:

$$A - A_m \leq A \leq A + A_m$$

$$13,9013\text{ V} \leq A \leq 14,0988\text{ V}$$



2. Po napetostno primerjalni metodi merimo upornost $R_x \approx 1000 \Omega$. Kolikšno ločljivost mora imeti voltmeter ($\Delta U = ?$), da bo standardna negotovost zaradi ločljivosti zanemarljiva? Vezje napajamo s tokovnim virom $I_0 = 1,5 \text{ mA}$.

- voltmeter: $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$, $U_D = 2 \text{ V}$, $R_V = 10 \text{ M}\Omega$
- $R_N = 1 \cdot (1 \pm 10^{-4}) \text{ k}\Omega$

Rešitev:

- Ker sta vrednosti merjenega in referenčnega upora zelo blizu skupaj (red velikosti 1%), nam primerjalna metoda omogoča zmanjšanje standardne merilne negotovosti za lastni pogrešek voltmetra. Ostaneta prispevka referenčnega upora in ločljivosti voltmetra:

$$\frac{u_c(R_x)}{R_x} = \sqrt{\left(\frac{u(R_N)}{R_N}\right)^2 + 2\left(\frac{u(U_x)_q}{U_x}\right)^2}$$

- ki je zanemarljiva, kadar je manjša od petine skupne negotovosti:

$$\sqrt{2} \frac{u(U_x)_q}{U_x} < \frac{1}{5} \frac{u_c(R_x)}{R_x} \doteq \frac{1}{5} \frac{u(R_N)}{R_N} = \frac{1}{5} \frac{m(R_N)}{\sqrt{3}} = 1,155 \cdot 10^{-5}$$

- Napajalni tok $I_0 = 1,5 \text{ mA}$ povzroči padce napetosti:

$$U_x \approx U_N = 1,5 \text{ V}$$

- Pri negotovosti zaradi ločljivosti $u(U_x)_q$ upoštevamo pravokotno porazdelitev:

$$u(U_x)_q = \frac{\Delta U}{2\sqrt{3}}$$

- in od tod določimo ločljivost:

$$\Delta U < 2\sqrt{3} \cdot U_x / \sqrt{2} \cdot 1,155 \cdot 10^{-5} = 4,24 \cdot 10^{-5} \text{ V} \rightarrow \Delta U = 10 \mu\text{V}$$

3. S $5\frac{1}{2}$ -mestnim ohmmetrom $M_R = \pm(0,01\% R + 0,01\% R_D)$ smo merili stalno upornost pod enakimi pogoji ($n = 10$). Koliko je standardna negotovost merilnega rezultata?

R/Ω : 99,123; 99,135; 99,146; 99,079; 99,104; 99,115; 99,098; 99,087; 99,112; 99,061

Rešitev:

- Standardna negotovost merilnega rezultata sestavljata dva prispevka: negotovost tipa A zaradi ponavljanja meritev in negotovost tipa B kot prispevek merilne metode in instrumentacije. V primeru negotovosti tipa B je prevladujoč lastni pogrešek ohmmetra.
- Negotovost tipa A dobimo z določitvijo srednje vrednosti, standardnega odklona meritev in standardne negotovosti:

$$\bar{R} = 99,106\Omega$$

$$s(R) = \sqrt{\frac{\sum_i (R_i - \bar{R})^2}{n-1}} = 0,025884\Omega$$

$$u_A = \frac{s(R)}{\sqrt{n}} = 0,008185\Omega$$

- Negotovost tipa B dobimo iz mejne vrednosti pogreška, kjer predpostavljamo pravokotno porazdelitev pogreška:

$$u_B = \frac{1}{\sqrt{3}} M_R = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-4} \cdot 99,106\Omega + 10^{-4} \cdot 200\Omega) = 0,01727\Omega$$

- $5\frac{1}{2}$ -mestni prikaz nam da $R_D = 200\Omega$ (maksimalni prikaz: 199,999).

- Skupna standardna negotovost je:

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0,01911\Omega \rightarrow u_c = 0,020\Omega$$

4. Merilnik toka ima kalibracijski certifikat z rezultati kalibracije navedenimi v tabeli. S tem inštrumentom ste izmerili tok 1,50 A. Podajte merilni rezultat izmerjene vrednosti, če je imel referenčni instrument $2\frac{3}{4}$ mestni prikazovalnik in mejo pogreška $M_{\text{ref}} = 0,2\% I_i + 0,1\% I_D + 2\text{dig}$. Ostale prispevke k merilni negotovosti uporabljenega inštrumenta zanemarimo. Podajte popoln merilni rezultat!

I_i / A	$I_{\text{ref}} / \text{A}$	E / A
1,00	1,25	-0,25
2,00	2,11	-0,11
3,00	3,13	-0,13
4,00	4,05	-0,05

Rešitev:

- Rezultat izmerjene vrednosti je potrebno korigirati glede na vrednosti v certifikatu. Korekcija se prišteje in ima obraten predznak od pogreška v obravnavani točki. Pogrešek je razlika med izmerjeno in pravo vrednostjo. Ker v certifikatu ni podatka za pogrešek pri kazanju inštrumenta 1,50 A, se ga pridobi z linearno interpolacijo med sosednjima točkama. Tako je

$$E_{1,50} = \frac{E_{1,00} + E_{2,00}}{2} = \frac{-0,25 \text{ A} - 0,11 \text{ A}}{2} = -0,18 \text{ A}$$

- Prava vrednost je tako

$$I = I_i + K = 1,50 \text{ A} + 0,18 \text{ A} = 1,68 \text{ A}$$

- Iz prikazovalnika in podatka proizvajalca o meji pogreška referenčnega inštrumenta določimo njegovo merilno negotovost.

$$2\frac{3}{4}\text{mestni prikazovalnik} \Rightarrow \text{prikaz 399} \Rightarrow I_D = 4,00 \text{ A}$$

$$M = 0,2\% I_i + 0,1\% I_D + 2\text{dig} = 0,2\% \cdot 1,50 \text{ A} + 0,1\% \cdot 4,00 \text{ A} + 2 \cdot 0,01 \text{ A} = 0,027 \text{ A}$$

$$u(I) = \frac{M_i}{\sqrt{3}} = 0,0156 \text{ A}$$

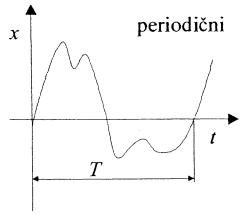
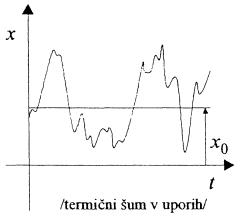
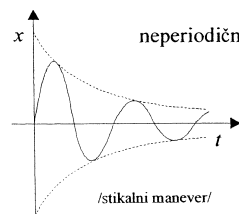
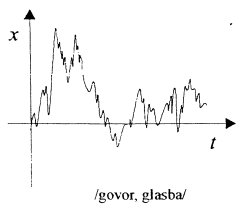
- Popolni merilni rezultat je tako

$$I = 1,68 \text{ A} \quad , \quad u(I) = 0,02 \text{ A} \quad , \quad n = 1$$

5. Kako delimo signale, ki opisujejo časovno spremenljive veličine? Opišite osnovne parametre pulznih neperiodičnih oblik signalov.

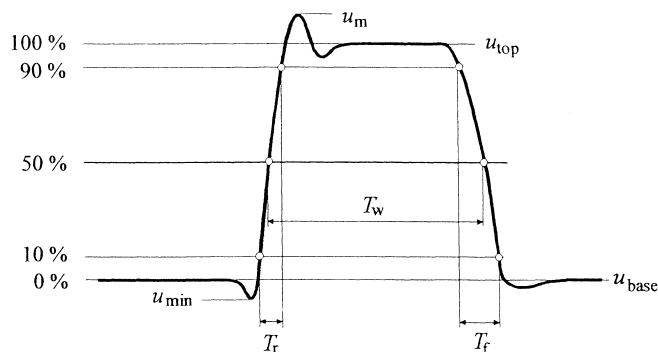
Rešitev:

- Delimo jih na to, ali lahko matematično opišemo trenutne vrednosti veličin ali ne:
 - deterministične,
 - nedeterministične – naključne (stohastične).
- Kadar se pomembni parametri dinamičnih veličin (aritmet. srednja vrednost, efektivna vrednost, itn.) s časom spreminjajo, ločimo signale na:
 - stacionarne,
 - nestacionarne.

	DETERMINISTIČNI	NEDETERMINISTIČNI
	opisujemo jih v časovnem in frekvenčnem prostoru	opisujemo jih v frekvenčnem prostoru; zanimivi za prenos informacij
STACIONARNI	periodični 	 /termični šum v uporih/
NESTACIONARNI	neperiodični  /stikalni maneuver/	 /govor, glasba/

- Nekateri parametri pulzne oblike signala.
- Izhodiščna parametra sta:

- osnovni ali **spodnji** nivo (u_{base} , 0%),
- **zgornji** nivo (u_{top} , 100%),
- prevladujoči vrednosti v histogramu.



- Z obema izhodiščnima nivojema 0% in 100% sta določena tudi nivoja 10% in 90% za določitev **dvižnega časa** T_r in **upadnega časa** T_f .
- Ugotovimo lahko tudi nivo 50%, ki določa **širino impulza** T_w .
 - Pri ponavljajočih pulzih je to nivo za merjenje in določanje periode, frekvence in relativne širine impulza.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

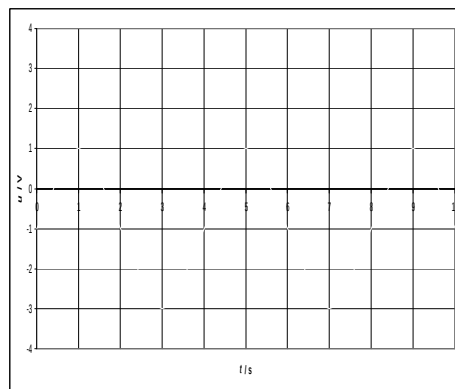
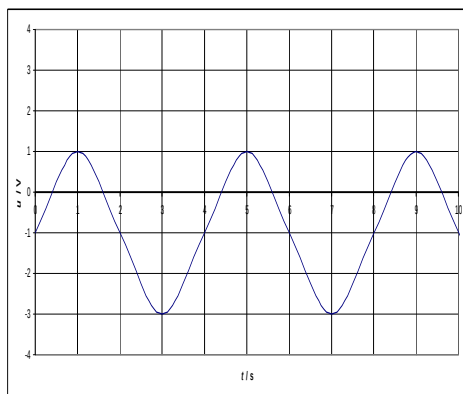
1. Funkcijski generator generira napetostni signal $u(t)/V = 2 \sin(\pi t/2s) - 1$. Določite frekvenco signala, periodo signala, vrednost amplitude od vrha do vrha (peak-to-peak).
- Narišite sliko na osciloskopu, s katerim opazujete ta signal, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = -1V$ in $S > 0$ pri $k_t = 1s/d$ in $k_y = 1V/d$.
 - Narišite sliko na osciloskopu, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = 3V$ in $S > 0$ pri $k_t = 1s/d$ in $k_y = 2V/d$.
 - Narišite sliko na osciloskopu, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = 0V$ in $S < 0$ pri $k_t = 250ms/d$ in $k_y = 500mV/d$.

Rešitev:

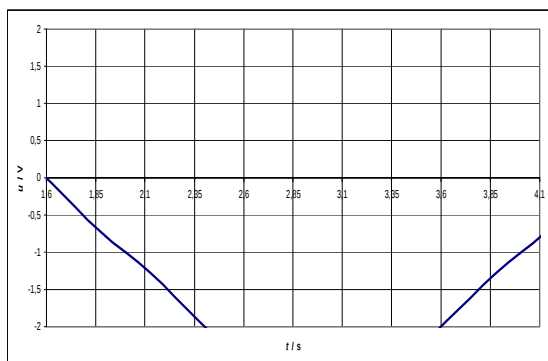
- Če splošni argument sinusa v obliki $2\pi ft$ izenačimo z argumentom napetostnega signala, lahko izračunamo frekvenco:

$$2\pi ft = \pi t/2s \rightarrow f = 1/4s = 0,25Hz \text{ in } T = 1/f = 4s$$

- Vrednost amplitude od vrha do vrha je $U_{pp} = 2\hat{u}_{\sin} = 4V$.
- | | |
|---|--|
| a. $N = -1V$, $S > 0$, $k_t = 1s/d$, | b. $N = 3V$, $S > 0$, $k_t = 1s/d$, |
| $k_y = 1V/d$. | $k_y = 2V/d$. |

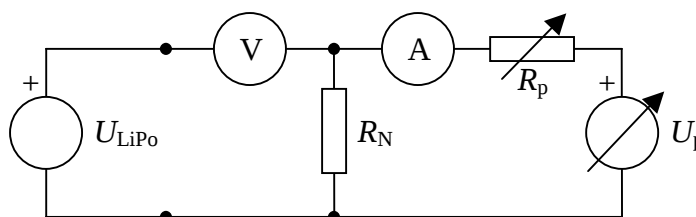


- c. $N = 0V$, $S < 0$, $k_t = 250ms/d$, $k_y = 500mV/d$.



2. Zapišite merilni rezultat za napetost U_{LiPo} litij-polimerne baterije z notranjo upornostjo $60 \text{ m}\Omega$, ki jo izmerite s kompenzacijsko metodo (glej vezje). Merilni podatki so naslednji:

- izmerjeni tok je znašal $4,120 \text{ mA}$; relativna standardna negotovost umerjenega A-metra: $w_I = 0,3\%$;
- vrednost etalonskega upora je znašala $1002,0 \Omega$; $w_R = 0,05\%$;
- voltmeter je imel odklon 0 V in standardni odklon te izmerjene napetosti $s(u) = 152 \mu\text{V}$.



Rešitev:

- Tip baterije (litij-polimerna) nima vpliva na rezultat merjenja. Prav tako pri kompenzacijski metodi nima vpliva notranja upornost baterije ($60 \text{ m}\Omega$), saj s to metodo merimo napetost odprtih sponk oz. napetost neobremenjene baterije. V ravnovesju, ko je vezje kompenzirano, namreč voltmeter kaže v povprečju nič (zanemarljiv ničelni odklon).
- Napetost litij-polimerne U_{LiPo} baterije izmerimo tako, da z delom vezja, ki je desno od voltmetra, kompenziramo U_{LiPo} . Z U_p in R_p nastavimo padec napetosti na etalonskem uporu R_N enak U_{LiPo} , kar ugotovimo z voltmetrom, ki kaže razliko 0 V .
- Napetost baterije U_{LiPo} določimo iz izmerjenega toka $I_A = I_p$, vrednosti etalona R_N in napetosti na voltmetru:

$$U_{\text{LiPo}} = U_V + I_p \cdot R_N = 0 \text{ V} + 4,120 \text{ mA} \cdot 1002,0 \Omega = 4,1283 \text{ V}$$

- Negotovost U_{LiPo} dobimo iz posameznih prispevkov negotovosti po naslednji enačbi:

$$\begin{aligned} u(U_{\text{LiPo}}) &= \sqrt{\left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial U_V} \right| \cdot u(U_V) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial I_p} \right| \cdot u(I_p) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial R_N} \right| \cdot u(R_N) \right]^2} = \\ &= \sqrt{\left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial U_V} \right| \cdot s(u) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial I_p} \right| \cdot w(I_p) \cdot I_p \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial R_N} \right| \cdot w(R_N) \cdot R_N \right]^2} = \\ &= \sqrt{[s(u)]^2 + [R_N \cdot w(I_p) \cdot I_p]^2 + [I_p \cdot w(R_N) \cdot R_N]^2} = \\ &= \sqrt{152 \mu\text{V}^2 + [4,1283 \text{ V} \cdot 3 \cdot 10^{-3}]^2 + [4,1283 \text{ V} \cdot 5 \cdot 10^{-4}]^2} = 12,6 \text{ mV} \end{aligned}$$

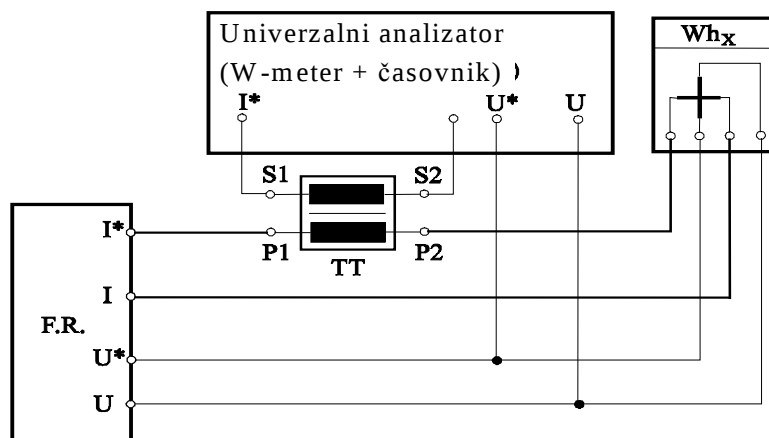
- in zaokrožen merilni rezultat:

$$U_{\text{LiPo}} = 4,128 \text{ V}, \quad u(U_{\text{LiPo}}) = 13 \text{ mV}, \quad n = 1$$

3. Skicirajte vezje za preizkus števca delovne energije po časovni metodi in izpeljite številsko enačbo za lastni pogrešek, če so veličine izražene z naslednjimi enotami:
 $[e] = \%$, $[K] = \text{vrt/kWh}$, $[P] = \text{kW}$, $[t] = \text{s}$, $[N] = \text{vrt}$

Rešitev:

- Za preizkus števca delovne energije po časovni metodi, potrebujemo stabilen vir, vatmeter in časovnik za merjenje časa obratov.



- Ugotavlja se razlika med energijo, ki jo kaže preizkušani števec delovne energije Wh_x , in pravo vrednostjo, ki je enaka produktu moči P in časa t pri časovni metodi. Ta razlika je enaka lastnemu pogrešku števca e .

$$e = \frac{W_s - W}{W}$$

- Energijo števca W_s izračunamo na osnovi števila vrtljajev rotorja števca N in njegove konstante K : $W_s = N/K$
- Prava vrednost energije W je: $W = Pt = P_w t$
- Lastni pogrešek števca e je enak: $e = \frac{W_s - W}{W} = \frac{N}{K P_w t} - 1$

- Za prehod iz veličinske enačbe v številsko izrazimo veličine kot produkt številskih vrednosti in enot:

$$\{e\}[e] = \frac{\{N\}[N]}{\{K\}[K]\{P_w\}[P_w]\{t\}[t]} - 1$$

- in preoblikujemo v $\{e\} = \frac{\{N\}}{\{K\}\{P_w\}\{t\}} \frac{[N]}{[K][P_w][t]} \frac{1}{[e]} - \frac{1}{[e]}$

- Za splošne enote posameznih veličin vstavimo enote, ki jih želimo uporabljati:

$$\frac{[N]}{[K][P_w][t]} \frac{1}{[e]} = \frac{\text{vrt}}{\text{vrt/kWh} \cdot \text{kW} \cdot \text{s}} \cdot \frac{1}{\%} = \frac{3600 \text{ s}}{\text{s}} \frac{1}{\%} = \frac{3600}{\%}$$

- Če upoštevamo, da je $\% = 0,01$, se želena številka enačba zapiše:

$$e = \left(3600 \cdot \frac{N}{K P_w t} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\%} \quad \text{oz.} \quad e = \left(3600 \cdot \frac{N}{K P_w t} - 1 \right) \cdot 100$$

4. Koliko je standardna negotovost aritmetične sredine devetih vrednosti napetosti U_i ($i = 1, \dots, 9$), če so vzete iz populacije z eksperimentalno standardno negotovostjo $s_p = 3,0 \text{ mV}$ ($n_p = 1000$)? Koliko vrednosti moramo uporabiti, da bi bila standardna negotovost aritmetične sredine manjša od $0,2 \text{ mV}$?

Rešitev:

- Standardno negotovost aritmetične sredine $n = 9$ vrednosti $\bar{U} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 U_i = \frac{1}{9} (U_1 + \dots + U_9)$ določajo prispevki negotovosti neposredno merjenih vrednosti napetosti:

$$u_c(\bar{U}) = \sqrt{(c_1 u(U_1))^2 + \dots + (c_9 u(U_9))^2}$$

- Ker so vrednosti vzete iz iste populacije z eksperimentalno ocenjeno standardno negotovostjo $s_p = 4,0 \text{ mV}$ na velikem številu meritev $n_p = 1000$, imajo vse enako standardno negotovost:

$$u(U_1) = \dots = u(U_9) \doteq s_p$$

- Faktorji občutljivosti so enaki delnim odvodom:

$$c_1 = \frac{\partial \bar{U}}{\partial U_1} = c_i = \frac{1}{9} \quad \text{oz. splošno } c_n = \frac{1}{n}$$

- Standardna negotovost aritmetične sredine je enaka:

$$u_c(\bar{U}) = \frac{1}{9} \sqrt{9 s_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{9}} = \frac{s_p}{3} = 1,0 \text{ mV}$$

- oz. splošno: $u_c(\bar{U}) = \frac{1}{n} \sqrt{n s_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{n}} !!$

- Če želimo standardno negotovost aritmetične sredine zmanjšati, moramo pri tvorjenju uporabiti več vrednosti:

$$\sqrt{n} > \frac{s_p}{u_c(\bar{U})} = \frac{3,0 \text{ mV}}{0,2 \text{ mV}} = 15 \quad \Leftrightarrow \quad n > 225$$

5. Ugotovite, kateri izmed uporovnih senzorjev temperature, ki imata karakteristiko oblike $R_t = R_0 e^{b_t}$, ima manjšo nelinearnost v območju $t = 0^\circ\text{C} \div 100^\circ\text{C}$?

• Senzor 1: $R_0 = R_{0^\circ\text{C}} = 1000\ \Omega$, $R_{100^\circ\text{C}} = 1500\ \Omega$

• Senzor 2: $R_0 = R_{0^\circ\text{C}} = 1500\ \Omega$, $R_{100^\circ\text{C}} = 2100\ \Omega$

Rešitev:

- Iz karakteristike uporovnih senzorjev, ki je podana z enačbo $R_t = R_0 e^{b_t}$, pri čemer je R_0 upornost senzorja pri referenčni temperaturi 0°C , izračunamo koeficienta b_i :

$$\text{S. 1: } R_{1,100^\circ\text{C}} = R_{1,0^\circ\text{C}} e^{b_1 \cdot 100^\circ\text{C}} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{100^\circ\text{C}} \cdot \ln\left(\frac{R_{1,100^\circ\text{C}}}{R_{1,0^\circ\text{C}}}\right) = 4,055 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$$

$$\text{S. 2: } R_{2,100^\circ\text{C}} = R_{2,0^\circ\text{C}} e^{b_2 \cdot 100^\circ\text{C}} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{100^\circ\text{C}} \cdot \ln\left(\frac{R_{2,100^\circ\text{C}}}{R_{2,0^\circ\text{C}}}\right) = 3,365 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$$

- Nazivna (idealna) karakteristika $R_n = R_{t,\min} + S(t - t_{\min})$ gre skozi začetno in končno točko dejanske karakteristike. Občutljivosti sta tako:

$$\text{S. 1: } S_1 = \frac{R_{t_{\max}} - R_{t_{\min}}}{t_{\max} - t_{\min}} = \frac{R_{1,100^\circ\text{C}} - R_{1,0^\circ\text{C}}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 5\ \Omega / ^\circ\text{C}$$

$$\text{S. 2: } S_2 = \frac{R_{2,100^\circ\text{C}} - R_{2,0^\circ\text{C}}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 6\ \Omega / ^\circ\text{C}$$

- Iz karakteristike senzorja R_t in nazivne karakteristike R_n lahko ugotovimo nelinearnost senzorja, ki je enaka

$$n = |e_1|_{\max} = \frac{|R_t - R_n|_{\max}}{R_{t,\max} - R_{t,\min}}$$

- Največje odstopanje $\Delta R_{\max} = |R_t - R_n|_{\max} = ?$ moremo iskati z delnim odvajanjem razlike karakteristik in enačenjem z 0:

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial t} = b_i R_{i,0} e^{b_i t} - S_i = 0 \rightarrow t_{\Delta R_{\max,i}} = \frac{1}{b_i} \ln(S_i / b_i R_{i,0})$$

$$\text{S. 1: } t_{\Delta R_{\max,1}} = \frac{1}{b_1} \ln(S_1 / b_1 R_{1,0}) = 51,66^\circ\text{C} \text{ in } \Delta R_{\max,1} = -25,26\ \Omega$$

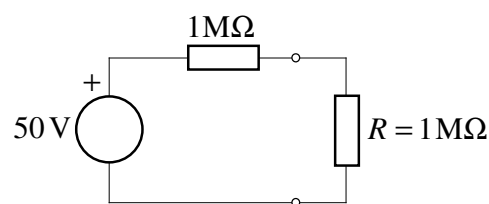
$$\text{S. 2: } t_{\Delta R_{\max,2}} = \frac{1}{b_2} \ln(S_2 / b_2 R_{2,0}) = 51,37^\circ\text{C} \text{ in } \Delta R_{\max,2} = -25,17\ \Omega$$

- Za dano območje $t = 0^\circ\text{C} \div 100^\circ\text{C}$ sta nelinearnosti enaki:

$$n_1 = \frac{25,26\ \Omega}{500\ \Omega} = 5,0\%, \quad n_2 = \frac{25,17\ \Omega}{600\ \Omega} = 4,2\%$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Želimo izmeriti napetost na uporu $R = 1\text{ M}\Omega$ z dvema voltmetroma ($U_D = 50\text{ V}$). Prvi ima notranjo upornost $R_{V_1} = 1\text{ M}\Omega$, drugi pa $R_{V_2} = 10\text{ M}\Omega$. Ugotovite, koliko voltmetra kažeta in kolikšen je sistematični pogrešek pri posamezni meritvi?



Rešitev:

- Pred priključitvijo voltmetrov, je napetost na uporu R enaka:

$$U_R = 50\text{ V} \frac{1\text{ M}\Omega}{1\text{ M}\Omega + 1\text{ M}\Omega} = 25\text{ V}$$

- Po priključitvi prvega voltmetra se skupna upornost vzporedne vezave zmanjša

$$R \parallel R_{V_1} = \frac{R \cdot R_{V_1}}{R + R_{V_1}} = 500\text{ k}\Omega \text{ in voltmeter kaže:}$$

$$U_{V_1} = 50\text{ V} \frac{500\text{ k}\Omega}{1\text{ M}\Omega + 500\text{ k}\Omega} = 16,66\text{ V}$$

- Sistematični pogrešek priključitve je enak:

$$E_1 = 16,66\text{ V} - 25\text{ V} = -8,33\text{ V} \text{ in } e_1 = \frac{-8,33\text{ V}}{25\text{ V}} = -33,3\%$$

- Po priključitvi drugega voltmetra se skupna upornost vzporedne vezave poveča

$$R \parallel R_{V_2} = \frac{R \cdot R_{V_2}}{R + R_{V_2}} = 909,1\text{ k}\Omega \text{ in voltmeter kaže:}$$

$$U_{V_2} = 50\text{ V} \frac{909,1\text{ k}\Omega}{1\text{ M}\Omega + 909,1\text{ k}\Omega} = 23,81\text{ V}$$

- Sistematični pogrešek priključitve je v tem primeru enak:

$$E_1 = 23,81\text{ V} - 25\text{ V} = -1,19\text{ V} \text{ in } e_1 = \frac{-1,19\text{ V}}{25\text{ V}} = -4,8\%$$

2. Ker nimate W-metra, želite vhodno moč naprave (npr. sobnega ventilacijskega grelnika) izmeriti posredno. Katere instrumente potrebujete, če predpostavimo sinusno obliko signalov? Izpeljite izraz za izračun skupne standardne merilne negotovosti. Navedite podatke, ki jih potrebujete za izračun merilne negotovosti vhodne moči! Predpostavimo, da je negotovost zaradi ločljivosti inštrumentov zanemarljiva.

Rešitev:

- Da bi posredno izmerili vhodno moč ventilacijskega grelnika pri sinusnem vzburjanju ($P = UI \cos \varphi$) potrebujemo A-meter, V-meter in $\cos \varphi$ -meter.
- Pri skupni negotovosti upoštevamo prispevke vseh treh inštrumentov:

$$u(P) = \sqrt{(|c_1| \cdot u(U))^2 + (|c_2| \cdot u(I))^2 + (|c_3| \cdot u(\cos \varphi))^2}$$

- Za izračun potrebujemo standardne merilne negotovosti merjenja vhodnih veličin ($u(U)$, $u(I)$, $u(\cos \varphi)$) in občutljivostne koeficiente:

$$|c_1| = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| = |I \cos \varphi|; \quad |c_2| = \left| \frac{\partial P}{\partial I} \right| = |U \cos \varphi|; \quad |c_3| = \left| \frac{\partial P}{\partial \cos \varphi} \right| = UI$$

- Skupna standardna merilna negotovost je enaka:

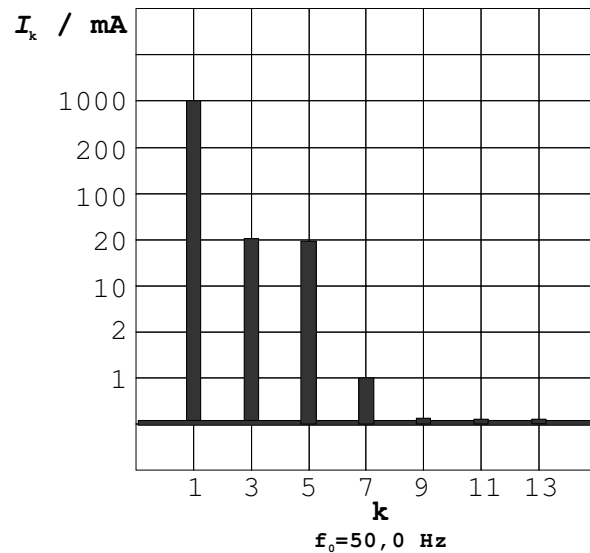
$$\begin{aligned} u(P) &= \sqrt{(I \cos \varphi \cdot u(U))^2 + (U \cos \varphi \cdot u(I))^2 + (UI \cdot u(\cos \varphi))^2} = \\ &= P \cdot \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U} \right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I} \right)^2 + \left(\frac{u(\cos \varphi)}{\cos \varphi} \right)^2} = P \cdot \sqrt{(w(U))^2 + (w(I))^2 + (w(\cos \varphi))^2} \end{aligned}$$

- Potrebni podatki inštrumentov:
 - izmerjena vrednost,
 - mejni pogrešek (absolutni ali relativni).

$$w(P) = \sqrt{\left(\frac{m_U}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_I}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_{\cos \varphi}}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

$$\text{ali} \quad = \sqrt{\left(\frac{M_U / \sqrt{3}}{U} \right)^2 + \left(\frac{M_I / \sqrt{3}}{I} \right)^2 + \left(\frac{M_{\cos \varphi} / \sqrt{3}}{\cos \varphi} \right)^2}$$

3. Z analizatorjem moči merimo THD neznanega bremena. Spodnja slika prikazuje frekvenčno analizo toka nelinearnega bremena. Izračunajte THD_{IEC} in THD_{DIN} za to breme, če predpostavimo, da harmonskih komponent $k > 9$ ni.



Rešitev

- Efektivna vrednost toka bremena je:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2}$$

$$I = \sqrt{(1000 \text{ mA})^2 + (20 \text{ mA})^2 + (20 \text{ mA})^2 + (1 \text{ mA})^2} = 1000,40 \text{ mA}$$

- Izračunani vrednosti THD sta praktično enaki:

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{(1000,40 \text{ mA})^2 - (1000 \text{ mA})^2}}{1000 \text{ mA}} = 0,0283$$

$$THD_{DIN} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I} = \frac{\sqrt{(1000,40 \text{ mA})^2 - (1000 \text{ mA})^2}}{1000,40 \text{ mA}} = 0,0283$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Najmanj koliko vrtljajev mora narediti indukcijski števec delovne energije med preskusom, da bo relativna meja pogreška zaradi merjenja časa znašala največ 0,12 % in bo s tem njen prispevek zanemarljiv? Čas merimo z mejnim pogreškom $M_t = 0,1 \text{ s}$. Fantomska obremenitev znaša 1 kW, števec pa ima konstanto 750 vrt./kWh.

Rešitev:

- Relativno mejo pogreška merjenja časa določimo iz absolutnega mejnega pogreška $M_t = 0,1 \text{ s}$ z enačbo:

$$m_t = \frac{M_t}{t}$$

- Če bi šlo za pogrešek stoparice, bi morali upoštevati dvojno vrednost zaradi pogreška pri začetku in kocu merjenja časa.
- Iz enačbe za izmerjeno energijo števca W , lahko povežemo potrebno število vrtljajev števca N s časom merjenja t preko konstante števca K ter priključene moči P , ki je v tej vrsti preskušanja ponavadi fantomska:

$$W = P \cdot t = \frac{N}{K}$$

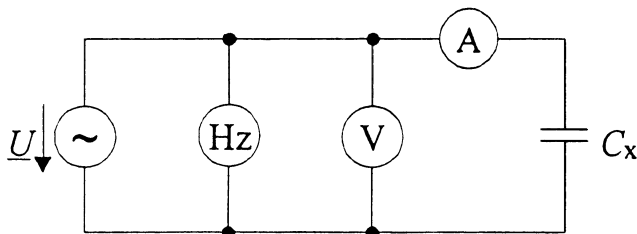
- Po združitvi obeh enačb dobimo potrebno število vrtljajev, ki mora biti za pravilno meritev celo število:

$$N = P \cdot \frac{M_t}{m_t} \cdot K = 1000 \text{ W} \cdot \frac{0,1 \text{ s}}{1,2 \cdot 10^{-3}} \cdot 750 \frac{\text{vrt}}{\text{kWh}} = 17,4 \text{ vrtljajev} \rightarrow 18 \text{ vrtljajev}$$

2. Kolikšen je (relativni) pogrešek pri merjenju kapacitivnosti kondenzatorja po UI metodi, če spregledamo, da ima kondenzator faktor izgub 4 % ? Skicirajte vezje!

Rešitev:

- UI metoda merjenja kapacitivnosti se uporablja v nizkofrekvenčnem območju.



- Razmerje napetosti in toka pri serijski nadomestni vezavi je enako:

$$\frac{U}{I} = Z = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C_x)^2} = \frac{1}{\omega C_x} \sqrt{1 + d^2} \quad \rightarrow \quad C_x = \frac{I}{\omega U} \sqrt{1 + d^2}$$

- Če zanemarimo izgube, dobimo samo jalovo upornost. Iskana kapacitivnost je:

$$\frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C_x} \sqrt{1 + d^2} \approx \frac{1}{\omega C_{x,i}} \quad \rightarrow \quad C_{x,i} = \frac{I}{\omega U}$$

- padec na ampermetru ni tako pomemben (ga zanemarimo), ker imamo zamik za 90° .

- Sistematični pogrešek je:

$$e = \frac{C_{x,i}}{C_x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + d^2}} - 1 = -0,0008$$

3. Določite delovno in navidezno moč na bremenu, če sta napetost in tok:

$$u/\text{V} = 100 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/2)$$

$$i/\text{A} = 5 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/3) + 1 \cdot \sin(10\pi ft + \pi/4)$$

$$P = \sum_i U_i I_i \cos \varphi_i$$

Rešitev:

- Delovna moč je definirana kot vsota prispevkov $P_i = U_i I_i \cos \varphi_i$ komponent napetosti in toka iste frekvence z upoštevanjem razlike kotov med napetostjo in tokom za ustrezno komponento.

$$P = \sum_i U_i I_i \cos \varphi_i; \quad \varphi_i = \varphi_{U,i} - \varphi_{I,i}$$

- V našem primeru imamo samo prispevek osnovne komponente:

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1; \quad \varphi_1 = \varphi_{U,1} - \varphi_{I,1} = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$$

- Efektivne vrednosti komponent napetosti in toka so:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 70,71 \text{ V};$$

$$I_1 = \frac{\hat{i}_1}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 3,536 \text{ A}, \quad I_5 = \frac{\hat{i}_5}{\sqrt{2}} = \frac{1 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 0,707 \text{ A}$$

- Delovna moč je tako:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 216,51 \text{ W}$$

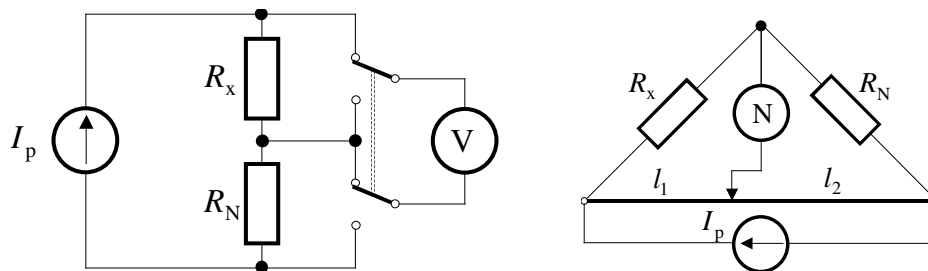
- Navidezna moč je enaka produktu efektivne vrednosti napetosti in toka: $S = U \cdot I$
 - Efektivno vrednost napetosti že poznamo: $U = U_1 = 70,71 \text{ V}$
 - Efektivno vrednost toka dobimo z geometrijskim seštevanjem efektivnih vrednosti komponent: $I = \sqrt{I_1^2 + I_5^2} = 3,606 \text{ A}$
 - Navidezna moč je tako: $S = U \cdot I = 254,98 \text{ VA}$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Naštejte merilne metode in podajte njihovo delitev? Opišite in skicirajte primerjalno in zamenjalno merilno metodo.

Rešitev:

- Poznamo dve bistveno različni metodi:
 - **odklonsko**, pri kateri je odklon (ali kazanje) instrumenta osnova za določitev vrednosti merjene veličine;
 - **ničelno**, ko instrument kaže nič oziroma nima odklona in določimo vrednost merjene veličine na podlagi drugih, znanih pogojev merilnega vezja.
- Obe metodi lahko nadalje delimo še na: **navadne**, **primerjalne**, **zamenjalne**, **diferenčne** in **posebne**.
- **Primerjalna** odklonska in ničelna merilna metoda:

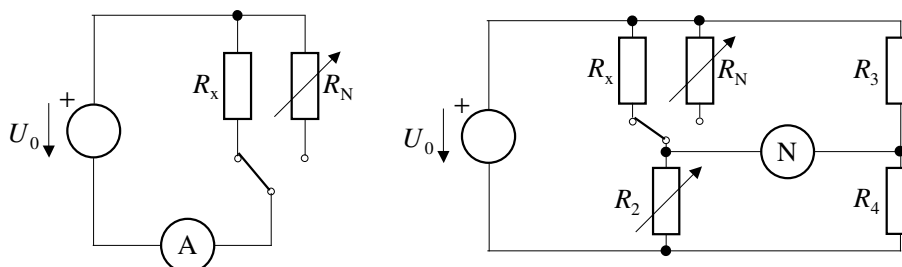


- Pri **primerjalni odklonski** metodi med seboj primerjamo napetost na neznanem upor z napetostjo na znanem (tok mora biti **konstanten**):

$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} \Leftrightarrow I_p = \text{konst.} = \frac{U_x}{R_x} = \frac{U_N}{R_N}$$

- Pri **primerjalni ničelni** metodi moramo mostiček s premikanjem drsnika po uporovni žici najprej uravnovesiti (tok ni nujno, da je stalen!): $R_x = R_N l_1 / l_2$

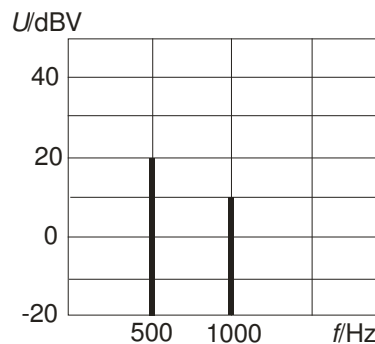
- **Zamenjalna** odklonska in ničelna metoda:



- Pri **zamenjalni** (substitucijski) **odklonski** metodi ugotovimo vrednost iskane veličine tako, da vzpostavimo v merilnem vezju dvakrat enake pogoje:
 - prvič je vključen neznan upor (merjenec);
 - drugič je vključen znani in spremenljivi upor – referenca.
- Točnost instrumenta ni pomembna!

2. Z osciloskopom smo posneli frekvenčni spekter signala, ki je prikazan na sliki. Koliko je efektivna napetost signala? Skicirajte časovni potek napetosti! Fazni zamik med obema komponentama signala je enak nič.

$$U_k / \text{dBV} = 20 \log \frac{U_k / \text{V}}{1 \text{ V}}$$



Rešitev:

- Efektivni napetosti komponent se izračuna s pomočjo podane enačbe in iz vrednosti podani v spektru:

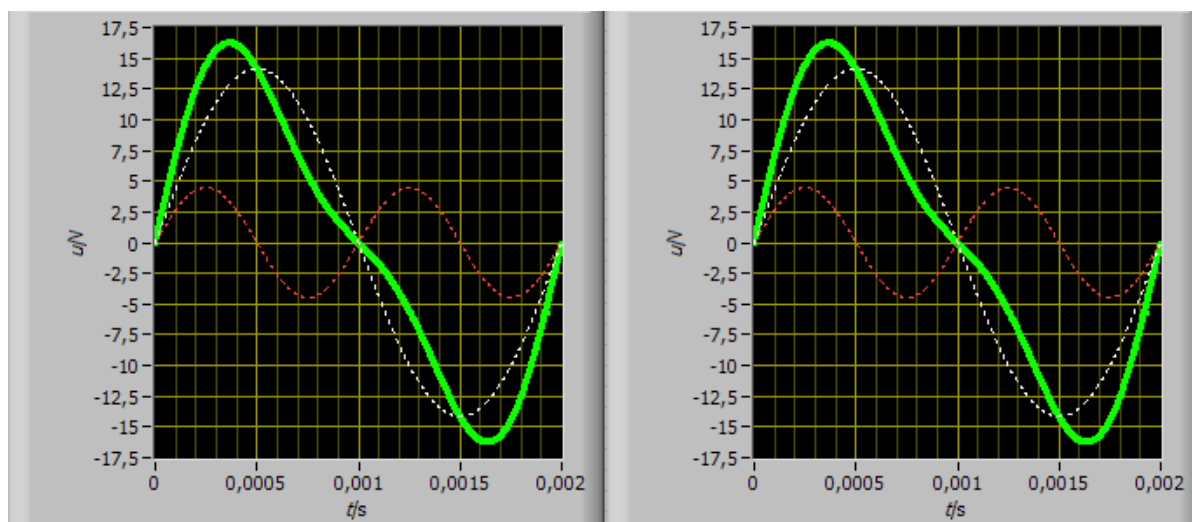
$$U_1 = 1 \text{ V} \cdot 10^{\frac{20 \text{ dBV/dBV}}{20}} = 10 \text{ V}$$

$$U_2 = 1 \text{ V} \cdot 10^{\frac{10 \text{ dBV/dBV}}{20}} = 3,16 \text{ V}$$

- Skupna efektivna vrednost signala je:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = 10,49 \text{ V}$$

- in časovni potek:



3. Želimo preskusiti delovanje števca električne energije (na sliki). Pri tem želimo uporabiti referenčni sistem za merjenje električne energije, za katerega vemo, da je njegov mejni pogrešek $M_N = \pm(0,3\% W_x + 0,07\% W_D + 6 \text{ dig})$, kjer je W_x izmerjena vrednost energije, W_D pa merilni doseg sistema. Izračunajte, ali je referenčni sistem, ki je pri poskusu kazal vrednost $W_N = 062,120 \text{ Wh}$, primeren za preskus števca. Referenčni sistem ima na voljo tri merilna območja (1 Wh, 1000 Wh in 10000 Wh). Za faktor razširitve običajno upoštevamo razširitveni faktor $k = 2$.



Rešitev:

- Velja, da je referenčni sistem zadosti točen in posledično primeren za preskus samo takrat, če je njegova razširjena merilna negotovost enaka ali manjša od tretjine meje pogreška preskušane števca.

$$W_{95} \leq \frac{1}{3}m \quad (1)$$

- Meja pogreška (=največja merilna napaka) preskušane števca je $m = 2\%$, kar razberemo s slike njegove prednje plošče, kjer je označen razred inštrumenta »CLASS = 2.0«
- Relativna standardna negotovost referenčnega sistema je:

$$M_N = \pm(0,3\% W_x + 0,07\% W_D + 6 \text{ dig})$$

$$M_N = (0,3\% \cdot 62,120 \text{ Wh} + 0,07\% 1000 \text{ Wh} + 6 \cdot \text{dig}) = 0,892 \text{ Wh},$$

- kjer ločljivost dobimo iz prikazovalnika referenčnega sistema: 1 dig = 0,001 Wh

- Razširjena merilna negotovost referenčnega sistema znaša:

$$W_{95} = 2w_N = 2 \frac{m_N}{\sqrt{3}} = 2 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_N}{W_N} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{0,889 \text{ Wh}}{62,120 \text{ Wh}} = 1,658\%,$$

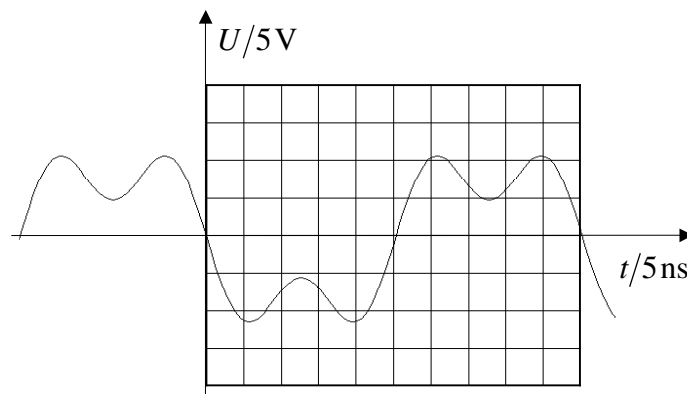
- kar je več od tretjine meje pogreška preskušane števca, ki znaša 0,66%. Torej neenacba (1) ne velja in referenčni sistem ni primeren.

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Na osciloskop priključimo napetost $u/V = 10 \cdot \sin \omega t + 5 \cdot \sin 3\omega t$, $f = 20 \text{ MHz}$. Kakšna je slika na zaslonu, če ima osciloskop pasovno širino $B = 500 \text{ MHz}$ (približek je člen 1. reda); $k_t = 5 \text{ ns/d}$; $k_y = 5 \text{ V/d}$; $N = 0 \text{ V}$; $S < 0$? Kakšna je slika na zaslonu, če ima osciloskop vključen filter s pasovno širino $B = 20 \text{ MHz}$. Skicirajte!

Rešitev:

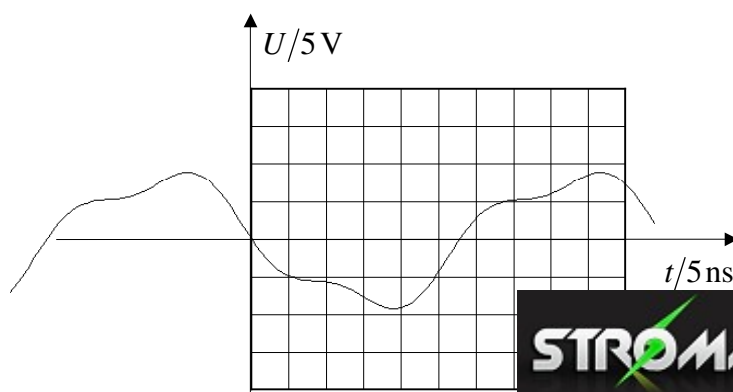
- V primeru nefiltriranega vhoda s pasovno širino $B = 500 \text{ MHz}$ se signal dinamično zanemarljivo popači ($B \doteq f_m \gg f$). Signal se na zaslonu začne izrisovati pri prožilnem nivoju $N = 0 \text{ V}$ z negativno strmino $S < 0$. Pri nastavitvi časovne konstante $k_t = 5 \text{ ns/d}$ se izriše ena perioda signala $T = 1/f = 50 \text{ ns}$ in izkoristi zaslon (raster: $10\text{d} \times 8\text{d}$, $k_y = 0,5 \text{ V/d}$) kot prikazuje slika.



- Vhodni filter dinamično popači sliko. Amplituda se zmanjša $\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$
 - in fazni kot se poveča v odvisnosti od razmerja frekvence komponente in mejne frekvence: $\varphi = -\arctg(\omega\tau) = -\arctg\left(\frac{2\pi f}{2\pi f_m}\right) = -\arctg(f/f_m)$
- Zgornjo mejno frekvenco $f_{m,zg}$ določimo iz pasovne širine, če zanemarimo spodnjo mejno frekvenco $f_{m,sp} < 20 \text{ Hz}$.

$$B = f_{m,zg} - f_{m,sp}; \quad f_{m,sp} < 20 \text{ Hz} \Rightarrow B \doteq f_{m,zg} = f_m$$

- Za vsako od komponent moramo določiti dinamično zmanjšano amplitudo in fazni zamik:
 - $f/f_m = 1: \quad \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071, \quad \varphi = -0,785 \text{ rad} = -45^\circ$
 - $f/f_m = 3: \quad \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,3162, \quad \varphi = -1,249 \text{ rad} = -71,56^\circ$
- Popačeni signal ima obliko: $u/V = 7,07 \cdot \sin(\omega t - 0,785 \text{ rad}) + 5 \cdot 0,3162 \cdot \sin(3\omega t - 1,25 \text{ rad})$
- in slika signala na zaslonu osciloskopa je:



2. Rezultat kalibracije voltmetra v štirih točkah je prikazan v tabeli. Prva kolona predstavlja referenčno vrednost, druga kolona kaže izmerjeno vrednost. Preračunana merilna negotovost voltmetra je $0,2\text{ V}$. Koliko znaša pogrešek kalibriranega inštrumenta (kolona tri) in koliko je korekcija kalibriranega inštrumenta (kolona štiri)? Pri uporabljanju voltmetra ste izmerili 10 V . Zapišite enačbo za pravo vrednost in merilni rezultat!

U_{ref}/V	U_i/V	E/V	K/V
5,0	5,2		
10,0	9,9		
15,0	14,8		
20,0	20,1		

Rešitev:

- Pogrešek kalibriranega inštrumenta je razlika izmerjene vrednosti in referenčne vrednosti. Korekcija pa ima obratni predznak pogreška in se prišteva k rezultatu.

U_{ref}/V	U_i/V	E/V	K/V
5,0	5,2	+0,2	-0,2
10,0	9,9	-0,1	+0,1
15,0	14,8	-0,2	+0,2
20,0	20,1	+0,1	-0,1

- Če pri uporabi inštrumenta izmerimo z voltmetrom 10 V , kar je zelo blizu vrednosti umerjene točke $U_i = 9,9\text{ V}$ in kot zelo dober približek uporabimo kar njeno korekcijo, znaša prava vrednost:

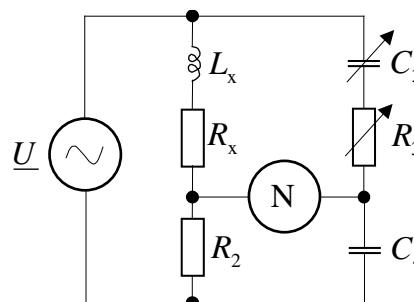
$$U = U_i + K = 10\text{ V} + (+0,1\text{ V}) = 10,1\text{ V}$$

- Merilni rezultat pa je enak:

$$\underline{\underline{U = 10,1\text{ V} \quad , \quad u(U) = 0,2\text{ V} \quad , \quad n = 1}}$$

3. Podajte popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo za induktivnost L_x , če uporabljamo dani mostič:

- $R_2 = 100,0 \Omega$; $M_{R_2} = \pm 0,2 \Omega$
- $R_3 = 8,54 \text{ k}\Omega$; $m_{R_3} = \pm 5 \cdot 10^{-3}$
- $C_3 = 92,5 \text{ nF}$; $m_{C_3} = \pm 4 \cdot 10^{-3}$
- $C_4 = 100,0 \text{ nF}$; $M_{C_4} = \pm 0,5 \text{ nF}$
- $f = 1000,0 \text{ Hz}$; $M_f = \pm 0,1 \text{ Hz}$



Rešitev:

- Za impedance mostiča zapišemo: $\underline{Z}_x = R_x + j\omega L_x$, $\underline{Z}_2 = R_2$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}, \quad \underline{Z}_4^{-1} = j\omega C_4$$

- Iz razmerja $\underline{Z}_x / \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 / \underline{Z}_4$, ko je mostič uravnovešen, zapišemo:

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_2 / \underline{Z}_4 \cdot \underline{Z}_3 \quad \Rightarrow \quad R_x + j\omega L_x = j\omega R_2 C_4 \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right)$$

- Ko izenačimo imaginarna dela leve in desne strani enačbe, dobimo iskano induktivnost:

$$L_x = R_2 R_3 C_4 = 85,40 \text{ mH}$$

- Kadar je posredno merjena veličina enaka produktu neposredno merjenih veličin, se skupna standardna negotovost izrazi z geometrijsko vsoto standardnih negotovosti vhodnih veličin v relativni obliki.

$$w_c(L_x) = \sqrt{w^2(R_2) + w^2(R_3) + w^2(C_4)}$$

- V našem primeru so posamezne standardne negotovosti:

$$w(R_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_{R_2}}{R_2} = 1,155 \cdot 10^{-3}$$

$$w(R_3) = \frac{m_{R_3}}{\sqrt{3}} = 2,887 \cdot 10^{-3}$$

$$w(C_4) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_{C_4}}{C_4} = 2,887 \cdot 10^{-3}$$

$$w_c(L_x) = 4,243 \cdot 10^{-3} \rightarrow u_c(L_x) = w_c(L_x) \cdot L_x = 0,362 \text{ mH} \rightarrow 0,37 \text{ mH}$$

- Merilni rezultat je:

$$L_x = 85,40 \text{ mH}, \quad u_c(L_x) = 0,37 \text{ mH}, \quad n = 1$$

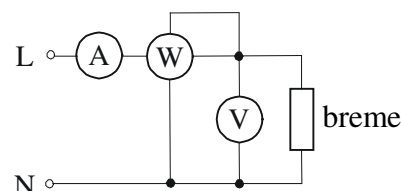
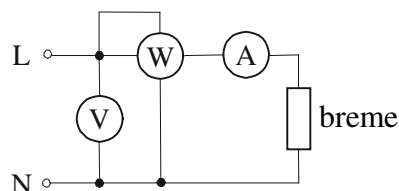
Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Pri merjenju moči na bremenu uporabite vezavo z manjšim sistematičnim pogreškom. Ali ga lahko zanemarimo?

- vatmeter: $U_n = 75 \text{ V}$; $I_n = 2,5 \text{ A}$; $\cos \varphi_n = 0,2$; $R_{W,n} = 1 \text{ M}\Omega$; $R_{W,t} = 0,2 \Omega$; $y_D = 150$; $y = 126,9$; $r = 0,5$;
- voltmeter: $U_D = 100 \text{ V}$; $U_i = 75 \text{ V}$; $R_V = 1 \text{ M}\Omega$;
- ampermeter: $I_D = 3 \text{ A}$; $I_i = 2 \text{ A}$; $U_{A_0} = 300 \text{ mV}$.

Rešitev:

- Obeh veličin bremena (napetost in tok) ne moremo sočasno pravilno meriti.



- Pri prvi varianti vezave instrumentov je sistematični pogrešek enak:

$$P = P_W - I^2(R_{W,t} + R_A) \Rightarrow E_1 = I^2(R_{W,t} + R_A) = (2 \text{ A})^2 \left(0,2 \Omega + \frac{300 \text{ mV}}{3 \text{ A}} \right) =$$

$$E_1 = 1,2 \text{ W}$$

- v drugi varianti vezave instrumentov pa:

$$P = P_W - U^2 \left(\frac{1}{R_{W,n}} + \frac{1}{R_V} \right) \Rightarrow E_2 = U^2 \left(\frac{1}{R_{W,n}} + \frac{1}{R_V} \right) = (75 \text{ V})^2 \left(\frac{1}{1 \text{ M}\Omega} + \frac{1}{1 \text{ M}\Omega} \right) =$$

$$E_2 = 0,01125 \text{ W}$$

- Pri merjenju uporabimo tako drugo vezavo.
- Če želimo zanemariti ta sistematični pogrešek, ga moramo primerjati z merilno negotovostjo merjenja moči z vatmetrom:

$$E_2 \leq \frac{u(P)}{10} = \frac{1}{10} \frac{M_P}{\sqrt{3}} = \frac{1}{10} \frac{r \cdot P_D}{100\sqrt{3}} \quad ?$$

- Merilni doseg vatmetra določa tudi nazivni $\cos \varphi_n$:

$$P_D = U_n I_n \cos \varphi_n = 75 \text{ V} \cdot 2,5 \text{ A} \cdot 0,2 = 37,5 \text{ W}$$

- in primerjamo:

$$E_2 = 0,01125 \text{ W} > \frac{1}{10} \frac{r \cdot P_D}{100\sqrt{3}} = \frac{1}{10} \frac{0,5 \cdot 37,5 \text{ W}}{100\sqrt{3}} = 0,010825 \text{ W}$$

- Tudi sistematičnega pogreška druge variante ne moremo zanemariti.

2. Podajte merilni rezultat s standardno negotovostjo za sedemkrat merjeno napetost U_x ! Standardna negotovost celotne populacije je bila ocenjena z $s_p = 65,4005 \mu\text{V}$. Upoštevajte korekcijo $-15 \mu\text{V}$.

U_x/mV	186,553	186,550	186,548	186,544	186,549	186,549	186,551
-----------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Rešitev:

- Srednja vrednost, kot najboljša ocena napetosti U_x , je:

$$\bar{U}_x = \frac{\sum_{i=1}^n U_{xi}}{n} = 186,54914 \text{ mV}$$

- To vrednost moramo še korigirati s korekcijo:

$$U_x = \bar{U}_x + K = 186,54914 \text{ mV} - 15 \mu\text{V} = 186,53414 \text{ mV}$$

- Standardno negotovost zaupanja aritmetični sredini sedmih vrednosti ocenimo s pomočjo standardne negotovosti celotne populacije:

$$u(U_x) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{65,4005 \mu\text{V}}{\sqrt{7}} = 24,719 \mu\text{V}$$

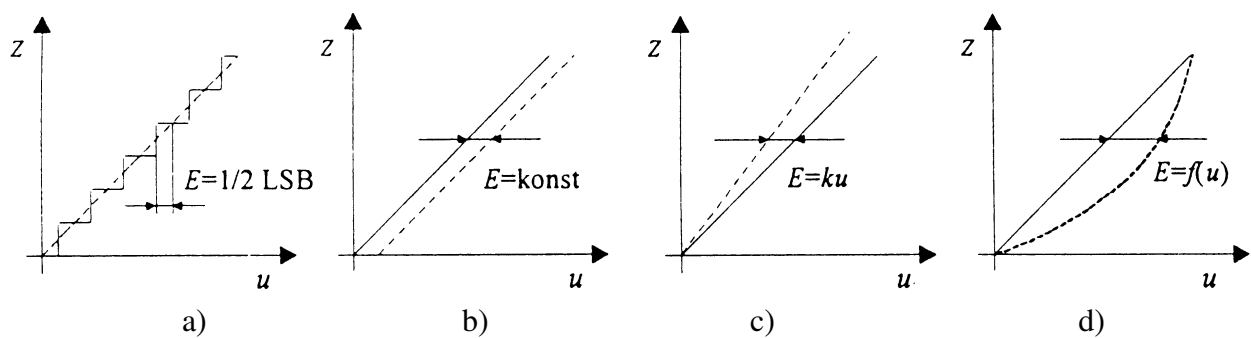
- Merilni rezultat še zaokrožimo:

$$U_x = 186,534 \text{ mV}, \quad u(U_x) = 25 \mu\text{V}, \quad n = 7, \quad k = 1, \quad p = 68,3\%$$

3. Naštejte pogoške analogno-digitalnega pretvornika in nakažite načine, kako jih lahko korigiramo z mikroračunalnikom v digitalnih elektronskih instrumentih. Skicirajte in pokažite z enačbami!

Rešitev:

- Pogoške analogno-digitalnega pretvornika (ADP) razdelimo na:
 - kvantizacijskega - a,
 - ničelnega - b,
 - naklonskega - c,
 - pogrešek nelinearnosti - d.
- Pri ADP ločimo še integralno nelinearnost (INL), ki je vezana na celotno merilno območje $n_{INL} = |E|_{\max} / U_D$, in diferencialno nelinearnost (DNL), ki je vezana na nazivni korak kvantizacije $\Delta_0 = U_D / 2^n$: $n_{DNL} = |\Delta - \Delta_0|_{\max} / \Delta_0$



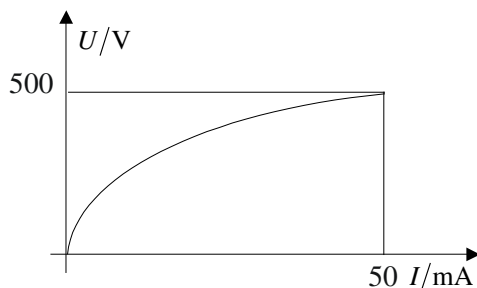
- Enostavno lahko korigiramo ničelni in naklonski pogrešek z dvema referenčnima napetostima, ki ju priklopimo na vhod:
 - $U_0 = 0 \text{ V} \rightarrow Z = Z_0$ - vhod ADP kratko sklenemo
 - $U_{\text{ref}} \rightarrow Z = Z_{\text{ref}}$ - na vhod priključimo znano referenčno napetost
- Vse ostale vrednosti AD pretvorbe korigiramo z linearno karakteristiko, ki jo določata ti referenčni vrednosti.

$$Z_{\text{kor}} = (Z - Z_0) \frac{Z_{\text{ref}}}{Z_{\text{ref}} - Z_0}$$

- Pogrešek nelinearnosti lahko zmanjšamo tako, da zmanjšamo interval, na katerem opazujemo odstopanje od linearne karakteristike.

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Nekatere dele UI karakteristike ne moremo zmeriti tako, da bi bili mejni pogreška napetosti oz. toka manjši od 1%. Ugotovite katere!



- voltmeter:
 $U_D = (2000 - 200 - 20)V$,
 $M_U = \pm(0,2\% U + 0,1\% U_D)$
- ampermeter:
 $I_D = (200 - 20 - 2)mA$,
 $M_I = \pm(0,3\% I + 0,1\% I_D)$

Rešitev:

- Če želimo, da je mejni pogrešek merjenja napetosti manjši od 1%, postavimo pogoj za relativno mejno vrednost pogreška:

$$m_U = \frac{M_U}{U} = 2 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3} \frac{U_D}{U} \leq 10^{-2}$$

- in od tod dobimo, da mora biti napetost vedno večja od osmine območja, če želimo skupni pogrešek pod 1%:

$$1 \cdot 10^{-3} \frac{U_D}{U} \leq 8 \cdot 10^{-3} \rightarrow \frac{U_D}{8} \leq U$$

- Napetostna območja, ki jih z danim voltmetrom ne moremo meriti z mejnim pogreškom pod 1%, so:

$$U_D = 2000V : 2000V/8 = 250V > U > 200V$$

$$U_D = 200V : 200V/8 = 25V > U > 20V$$

$$U_D = 20V : 20V/8 = 2,5V > U$$

- Če želimo, da je mejni pogrešek merjenja toka manjši od 1%, postavimo ponovno pogoj za relativno mejno vrednost pogreška:

$$m_I = \frac{M_I}{I} = 3 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3} \frac{I_D}{I} \leq 10^{-2}$$

- in od tod dobimo, da mora biti tok vedno večji od sedmine območja, če želimo skupni pogrešek pod 1%:

$$1 \cdot 10^{-3} I \leq 7 \cdot 10^{-3} \rightarrow \frac{I_D}{7} \leq I$$

- Tokovna območja, ki jih z danim ampermetrom ne moremo meriti z mejnim pogreškom pod 1%, so:

$$I_D = 200mA : 200mA/7 = 28,57mA > I > 20mA$$

$$I_D = 20mA : 20mA/7 = 2,857mA > I > 2mA$$

$$I_D = 2mA : 2mA/7 = 0,2857mA > I$$

2. Podajte merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo u in razširjeno merilno negotovostjo U_{95} , če je $s_p = 0,333 \text{ V}$ in meja pogreška merilnega instrumenta $M = \pm(0,2\% U_i + 2 \text{ dig})$. Ročno merjeni rezultati so v tabeli 1.

Tabela 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$U(\text{V})$	12,3	11,9	12,0	12,4	12,1	12,4	12,1	12,3	12,2	12,1	11,8	11,9	12,3	12,2	12,0

Tabela 2

$p/\%$	50	68,3	95	95,5	99	99,73	99,99
k	0,675	1	1,96	2,0	2,58	3	3,90

Rešitev:

- Povprečna vrednost izmerjenih vrednosti je enaka:

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j = \frac{1}{15} (12,3 \text{ V} + 11,9 \text{ V} + \dots + 12,0 \text{ V}) = 12,1333 \text{ V}$$

- Negotovost tipa A se izračuna iz standardnega odklona popupacije s_p :

$$u_A(U) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{0,333 \text{ V}}{\sqrt{15}} = 0,08598 \text{ V}$$

- Pri negotovosti tipa B se upošteva meja pogreška merilnega instrumenta, kjer uporabimo za $U_i = \bar{U}$ in ločljivost $1 \text{ dig} = 0,1 \text{ V}$:

$$u_B(U) = \frac{M}{\sqrt{3}} = \frac{\pm(0,2\% U_i + 2 \text{ dig})}{\sqrt{3}} = 0,12948 \text{ V}$$

- Skupna merilna negotovost tako znaša:

$$u(U) = \sqrt{u_A^2(U) + u_B^2(U)} = 0,1554 \text{ V}$$

- Merilni rezultat s standardno negotovostjo je:

$$U = 12,13 \text{ V}, \quad u(U) = 0,16 \text{ V}, \quad n = 15, \quad k = 1, \quad p = 68,3\%$$

- Merilni rezultat z razširjeno merilno negotovostjo (U_{95}) pa je:

$$U = 12,13 \text{ V}, \quad U_{95}(U) = 0,31 \text{ V}, \quad n = 15, \quad k = 1,96, \quad p = 95\%$$

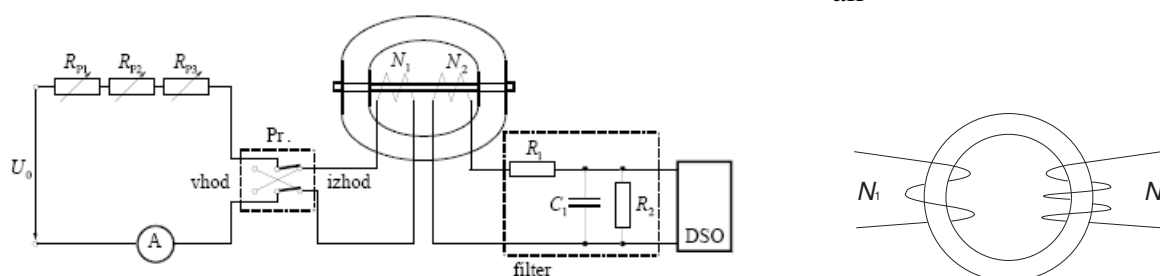
3. Narišite vezje za snemanje statične komutacijske krivulje in razložite:

- kako merimo magnetno indukcijo B (razlaga in enačba),
- kako merimo jakost magnetnega polja H (razlaga in enačba),
- zakaj uporabljamo nizkoprepustni filter pri merjenju B in
- zakaj naredimo za vsako točko po dve meritvi?

Rešitev:

- Vezje za snemanje statične komutacijske krivulje je prikazano na sliki.

ali



- a) Magnetno indukcijo merimo preko inducirane napetosti $u_i = -N_2 \cdot A \cdot \frac{dB}{dt}$:

$$\int_0^{T_M} u_i \cdot dt = -N_2 \cdot A \cdot \int_B^{-B} dB \quad \Rightarrow \quad T_M \cdot \bar{U} = 2 \cdot N_2 \cdot A \cdot B$$

- oziroma:

$$B = \frac{T_M \cdot \bar{U}}{2 \cdot N_2 \cdot A}$$

- b) Jakost magnetnega polja merimo preko magnetilnega toka:

$$H = \frac{I \cdot N_1}{l_{sr}}$$

- c) Nizkonapetostni filter uporabljamo za glajenje inducirane napetosti in poenotenje dolžine časa merjenja T_M .
- d) Za vsako točko naredimo dve meritvi zaradi preostale (offsetne) napetosti DSO.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{U}_1 = \bar{U} + \bar{u}_{\text{off}} \\ \bar{U}_2 = -\bar{U} + \bar{u}_{\text{off}} \end{array} \right\} \bar{U} = \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_2}{2}$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Koliko znaša merilni rezultat za faktor popačenja ($THD_{IEC} = \sqrt{X^2 - X_1^2} / X_1$) napetostnega signala oblike $u = 100(\sin \omega t + 1/5 \sin 5\omega t)$ V, če ima spektralni analizator standardno negotovost določanja amplitude $w(\hat{u}) = 5 \cdot 10^{-3}$?

Rešitev:

- Faktor popačenja je razmerje efektivne vrednosti harmonskih komponent proti efektivni vrednosti osnovne komponente:

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U_1} = \frac{\sqrt{U_5^2}}{U_1} = \frac{U_5}{U_1}$$

- Naš signal ima dve komponenti, katerih efektivni vrednosti sta:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 70,71 \text{ V}; \quad U_5 = \frac{\hat{u}_5}{5\sqrt{2}} = 14,142 \text{ V}$$

- Faktor popačenja je: $THD_{IEC} = \frac{U_5}{U_1} = 0,20000$
- Relativno obliko standardne negotovosti za faktor popačenja $THD_{IEC} = U_5 / U_1$ zapišemo:

$$w(THD) = \sqrt{w^2(U_1) + w^2(U_5)} = 7,071 \cdot 10^{-3}$$

- Pri tem smo upoštevali, da sta relativni negotovosti določanja amplitude in efektivne vrednosti enaki $w(U_1) = w(U_5) = w(U) = w(\hat{u})$.
- V absolutni obliki je standardna negotovost:

$$u(THD) = w(THD) \cdot THD = 1,414 \cdot 10^{-3}$$

- Zaokrožen merilni rezultat je tako:

$$THD_{IEC} = 0,2000, \quad u(THD) = 0,0015, \quad n = 1$$

2. Z ohmmetrom merimo upornost referenčnega upora z nazivno upornostjo 100Ω . Kolikokrat moramo pomeriti, da bo standardni odklon aritmetične sredine izmerjenih vrednosti manjši od $s(\bar{R}) = 1\text{m}\Omega$, če imamo podatek, da standardni odklon celotne populacije meritev znaša $s_p = 14,8\text{m}\Omega$? Kateri podatek bi še potrebovali, da bi lahko ocenili skupno negotovost rezultata in kako jo zapišemo?

Rešitev:

- Kadar določimo rezultat samo z aritmetično sredino iz n ponovljenih meritev, imamo opravka s standardno negotovostjo tipa A. Standardni odklon aritmetične sredine je za koren iz n krat manjši od standardnega odklona populacije.

$$u_A(R) = s(\bar{R}) = \frac{s_p}{\sqrt{n}}$$

- Od tod določimo število potrebnih meritev za zmanjšanje standardne negotovosti aritmetične sredine meritev:

$$\sqrt{n} = \frac{s_p}{s(\bar{R})} \rightarrow n > \left(\frac{s_p}{s(\bar{R})} \right)^2 = (14,8)^2 = 219$$

- Če želimo oceniti skupno negotovost rezultata, potrebujemo še podatek o lastnem pogrešku instrumenta za določitev negotovosti tipa B. Ponavadi je podana mejna vrednost pogreška M_R in jo najdemo v specifikacijah instrumenta. Če predpostavimo enakomerno porazdelitev gostote verjetnosti, velja:

$$u_B(R) = \frac{M_R}{\sqrt{3}}$$

- Skupna negotovost je geometrijska vsota obeh prispevkov:

$$u(R) = \sqrt{u_A^2(R) + u_B^2(R)}$$

3. Kolikšna je standardna negotovost delovne moči $w_c(P)$ pri polindirektnem merjenju, če ima porabnik fazni kot $\varphi = 45^\circ$ in smo uporabili napetostni merilni transformator ($m_K = \pm 0,1\%$, $\delta_{\max} = \pm 5'$) in vatmeter ($M_P = \pm (0,1\% P + 0,1\% P_D)$, $P = 2/3 P_D$, $P_D = 1400 \text{ W}$) pri nazivnih vrednostih in referenčnih pogojih? Za izračun negotovosti upoštevajte, da so dejanske vrednosti pogreškov majhne in izhodiščno enačbo:

$$P_i = P(1 + e_u)(1 + e_i)(1 + e_w)[1 - (\delta_u - \delta_i)\text{tg}\varphi]$$

Rešitev:

- Ker imamo polindirektno merjenje moči, se izhodiščna enačba reducira (nimamo tokovnega merilnega transformatorja):

$$P_i = P(1 + e_u)(1 + e_w)[1 + \delta_u \text{tg}\varphi]$$

- Posamezni prispevki k celotni negotovosti so:

$$u_1(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_u} \right| u(e_u) \approx P \cdot u(e_u)$$

$$u_2(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_w} \right| u(e_w) \approx P \cdot u(e_w)$$

$$u_3(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial \delta_u} \right| u(\delta_u) \approx P \cdot \text{tg}\varphi u(\delta_u)$$

- Celotna standardna negotovost je zato:

$$u_c(P) = P \sqrt{u^2(e_u) + u^2(e_w) + \text{tg}^2\varphi u^2(\delta_u)}$$

- Ker poznamo mejne vrednosti pogreškov, uporabimo enakomerno porazdelitev in od tod dobimo standardne negotovosti posameznih prispevkov $u = m/\sqrt{3}$:

$$u(e_u) = \frac{m_{K,u}}{\sqrt{3}} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{3}} = 5,77 \cdot 10^{-4}$$

$$u(e_w) = \frac{m_P}{\sqrt{3}} = \frac{M_P}{\sqrt{3} P} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{P_D}{P} \right) = 1,44 \cdot 10^{-3}$$

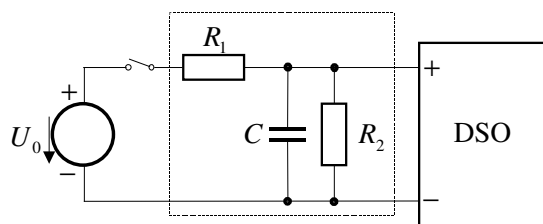
$$u(\delta_u) = \frac{\delta_{u,\max}}{\sqrt{3}} = \frac{5/60 \cdot \pi/180}{\sqrt{3}} = 8,397 \cdot 10^{-4}$$

- Relativna standardna negotovost delovne moči je:

$$w_c(P) = \frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{u^2(e_u) + u^2(e_w) + \text{tg}^2\varphi u^2(\delta_u)} = 1,767 \cdot 10^{-3} \rightarrow w_c(P) = 1,8 \cdot 10^{-3}$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VŠŠ

1. Kolikokrat je odzivni čas narisane člena znotraj meje $m = 1\%$ končnega stacionarnega stanja daljši od dvižnega časa, ki je določen z mejama $10\% \leftrightarrow 90\%$ razlike obeh stacionarnih stanj? Narišite odziv člena, ki ga merimo z osciloskopom, ko vklopimo stikalo.
- $$h(t) = (1 - e^{-t/\tau})$$



Rešitev:

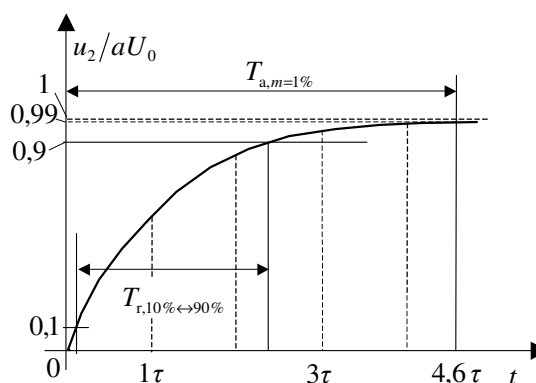
- Opraviti imamo s členom 1. reda, ki ima časovno konstanto τ enako:

$$\tau = a\tau_1 = aR_1C$$

- pri čemer je a delilno razmerje uporov in določa napetost v stacionarnem stanju:

$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} ; \quad U_2 = aU_0$$

- Časovna konstanta je: $\tau = a\tau_1 = aR_1C$



- Odzivni čas T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 1\%$ končne vrednosti, velja za člen 1. reda:

$$\frac{u_2}{aU_0} = 0,99 = (1 - e^{-T_a/\tau}) \Rightarrow T_{a,m=1\%} = \ln 100 \cdot \tau \doteq 4,6\tau$$

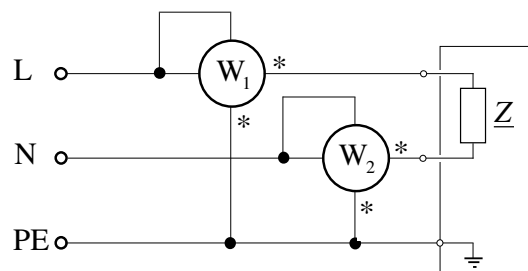
- Dvižni čas T_r je po dogovoru čas, v katerem se izhodna veličina dvigne od spodnje do zgornje meje med začetnim in končnim stacionarnim stanjem. Tipično je spodnji prag enak 10% in zgornji 90% polne razlike obeh stacionarnih stanj. Za člen 1. reda velja:

- spodnji prag: $0,1U_0 = U_0(1 - e^{-t_1/\tau})$,
- zgornji prag: $0,9U_0 = U_0(1 - e^{-(t_1+T_r)/\tau})$
- od tod dobimo: $1/9 = e^{-T_r/\tau} \rightarrow T_{r,10\% \leftrightarrow 90\%} = \ln 9 \cdot \tau \doteq 2,2\tau$

- Razmerje odzivnega in dvižnega časa je tako enako:

$$T_{a,m=1\%} / T_{r,10\% \leftrightarrow 90\%} = \ln 100 / \ln 9 = 2,096 \rightarrow 2.1$$

2. Čemu je enaka vsota odčitkov vatmetrov, ki imata skupno točko napetostnega ter tokovnega vhoda in sta vezana, kot kaže merilna shema?



Rešitev:

- Prvi vatmeter ima skupno točko napetostnega ter tokovnega vhoda. Zaradi vezave kaže moč, ki je enaka produktu napetostne razlike $-(\underline{U}_L - \underline{U}_{PE})$ in toku $-\underline{I}_Z$, če predpostavimo, da teče tok bremena iz faznega vodnika L proti ničelnem vodniku N.

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -(\underline{U}_L - \underline{U}_{PE}) \cdot (-\underline{I}_Z^*) \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{U}_L - \underline{U}_{PE}) \cdot \underline{I}_Z^* \right\}$$

- Drugi vatmeter kaže moč, ki je enaka produktu napetostne razlike $-(\underline{U}_N - \underline{U}_{PE})$ in toku $\underline{I}_Z$:

$$P_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{U}_{PE} - \underline{U}_N) \cdot (\underline{I}_Z^*) \right\}$$

- Vsota odčitkov vatmetrov je enaka delovni moči P kompleksnega porabnika $\underline{Z}$, ker se potencial zaščitnega vodnika PE izloči:

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{U}_L - \underline{U}_{PE}) \cdot \underline{I}_Z^* \right\} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{U}_{PE} - \underline{U}_N) \cdot (\underline{I}_Z^*) \right\}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{U}_L - \underline{U}_N) \cdot \underline{I}_Z^* \right\} = P_Z$$

3. Podajte merilni rezultat s standardno negotovostjo za jalovo moč na tuljavi pri zaporedni nadomestni vezavi $Q = I^2 \omega L_S$.

- A-meter: $I = 23,00\text{mA}$; $I_D = 25\text{mA}$; $M_I = \pm(0,2\% I + 0,3\% I_D)$
- Hz-meter: $f = 50,000\text{Hz}$; $M_f = \pm(0,05\% f + 1\text{dig})$
- H-meter: $L = 23,45\text{mH}$; $M_L = \pm(0,5\% L + 3\text{dig})$

Rešitev:

- Jalovo moč izračunamo iz vrednosti, ki jih kažejo merilni instrumenti:

$$Q = U^2 \omega C = I^2 \omega L = 3,89716\text{mVAr}$$

- Za merilni rezultat potrebujemo še standardno merilno negotovost, ki jo sestavljajo prispevki vhodnih neodvisnih veličin:

$$u(Q) = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial I} \cdot u(I)\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \omega} \cdot u(\omega)\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial L} \cdot u(L)\right)^2}$$

$$u(Q) = \sqrt{(2I\omega L \cdot u(I))^2 + (I^2 L \cdot u(\omega))^2 + (I^2 \omega \cdot u(L))^2}$$

- Standardna merilna negotovost zapisana v relativni obliki se poenostavi v:

$$w(Q) = \frac{u(Q)}{Q} = \sqrt{\left(2 \frac{u(I)}{I}\right)^2 + \left(\frac{u(\omega)}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2} =$$

$$w(Q) = \sqrt{(2w(I))^2 + w^2(f) + w^2(L)}$$

- Negotovosti vhodnih veličin izračunamo iz mejnih vrednosti pogreškov instrumentov in pri predpostavki pravokotne porazdelitve gostote verjetnosti pogreškov, kjer je standardna negotovost za $\sqrt{3}$ manjša od mejne vrednosti:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad w(I) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_I}{I} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3} \frac{I_D}{I} \right) = 3,037 \cdot 10^{-3} \\ \blacksquare \quad w(f) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_f}{f} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(5 \cdot 10^{-4} + \frac{0,001\text{Hz}}{50,000\text{Hz}} \right) = 3,002 \cdot 10^{-4} \\ \blacksquare \quad w(L) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_L}{L} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(5 \cdot 10^{-3} + \frac{30\mu\text{H}}{23,45\text{mF}} \right) = 3,625 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

- in skupna standardna negotovost izhodne veličine Q je tako:

$$w(Q) = 7,081 \cdot 10^{-3} \rightarrow w(Q) = 7,1 \cdot 10^{-3}$$

- Tudi standardno negotovost v absolutni obliki zaokrožimo na dve decimalni mesti

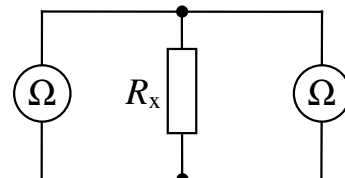
$$u(Q) = w(Q) \cdot Q = 27,67\mu\text{VAr} \rightarrow u(Q) = 28\mu\text{VAr}$$

- Zaokrožen merilni rezultat s standardno negotovostjo zapišemo v obliki:

$$Q = 3898 \mu\text{VAr} \quad u(Q) = 28\mu\text{VAr} \quad n = 1$$

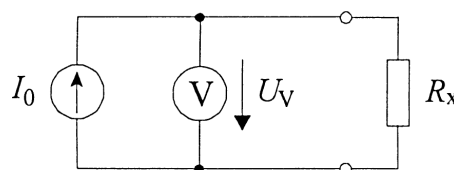
Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Koliko sta lahko največji in najmanjši relativni sistematični pogrešek, če merimo upornost $R_x = 200\Omega$ z dvema enakima idelanimi ommetroma, kot je prikazano na sliki.



Rešitev:

- Oba ommetra s svojima tokovnimi viroma pošiljata enak tok skozi R_x (na sliki je prikazana nadomestna shema ommetra). R_x se izračuna iz izmerjene napetosti in nastavljenega toka.



- Kadar sta pozitivni sponki ommetrov priključeni na isto stran upora, se tokova čez upor seštevata in je na njem dvakrat večja napetost, kot bi bila pri enem ommetru. Ker sta nastavljena toka I_0 enaka, kažeta ommetra 400Ω . V tem primeru je sistematični pogrešek enak:

$$e = \frac{R'_x - R_x}{R_x} = \frac{400\Omega - 200\Omega}{200\Omega} = 1 \rightarrow e = 100\%$$

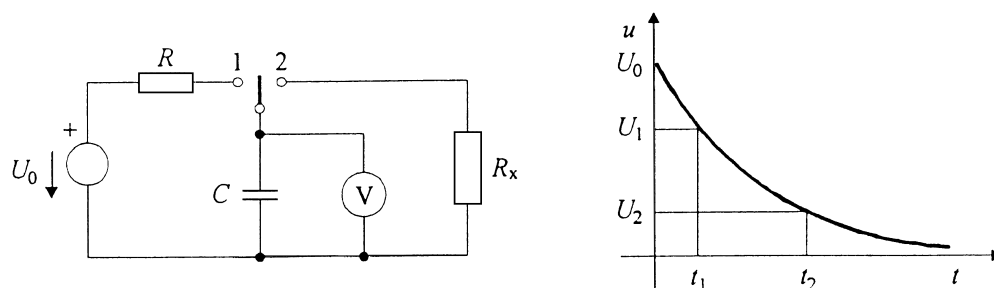
- Kadar sta pozitivni sponki ommetrov priključeni na nasprotni stran upora, se tokova čez upor odštevata in je na njem napetost nič. Zato kažeta ommetra 0Ω , sistematični pogrešek pa je:

$$e = \frac{R'_x - R_x}{R_x} = \frac{0\Omega - 200\Omega}{200\Omega} = -1 \rightarrow e = -100\%$$

2. Skicirajte vezje za merjenje zelo velikih upornosti po metodi praznenja kondenzatorja in jo ugotovite, če se kondenzator s kapacitivnostjo 20nF sprazni na polovično vrednost začetne napetosti v 20s? Kondenzator brez priključenega upora neznane vrednosti se sam sprazni na polovično vrednost v 50s.

Rešitev:

- Vezje za merjenje zelo velikih upornosti po metodi praznenja kondenzatorja



- Ko preklopimo v položaj 1, se kondenzator nabije na napetost U_0 .
- Ko preklopimo v položaj 2, se kondenzator začne prazniti pretežno preko R_x . Kadar izolacijsko upornost R_i in upornost voltmetra R_v lahko zanemarimo, zapišemo:
 - za čas t_1 : $U_1 = U_0 e^{-t_1/R_x C}$;
 - za čas t_2 : $U_2 = U_0 e^{-t_2/R_x C}$
 - neznana upornost je v našem primeru: $R_x = \frac{t_2 - t_1}{C \ln U_1 / U_2} = \frac{\Delta t}{C \ln 2}$
- Kondenzator se prazni tudi sam zaradi izolacijske upornosti R_i in upornosti voltmetra R_v (preklopnik je v vmesnem položaju). V tem primeru merimo skupno paralelno upornost:

$$R_1 = R_i \parallel R_v = \frac{\Delta t_1}{C \ln 2} = \frac{50s}{20nF \ln 2} = 3,607 G\Omega$$

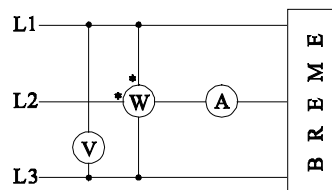
- Ko praznimo kondenzator preko R_x (preklopnik v položaju 2), dejansko praznimo preko skupne paralelne upornosti $R_2 = R_1 \parallel R_x$.

$$R_2 = R_1 \parallel R_x = \frac{\Delta t_2}{C \ln 2} = \frac{20s}{20nF \ln 2} = 1,443 G\Omega$$

- Od tod izračunamo neznano upornost:

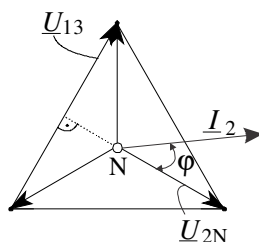
$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} = 2,404 G\Omega$$

3. V trifaznem uravnovešenem sistemu so instrumenti priključeni tako, kot kaže vezje. Narišite fazorski diagram in izračunajte P in Q bremena!
 $P_w = 10 \text{ kW}$, $U_v = 0,4 \text{ kV}$, $I_A = 5 \text{ A}$



Rešitev:

- Fazorski diagram:



- Za izračun najprej določimo kot med napetostjo in tokom.

$$P_w = \underline{U}_{13} \cdot \underline{I}_2 \cdot \cos(\varphi + 90^\circ) = U_v \cdot I_A \cdot (-\sin \varphi) \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{-P_w}{U_v \cdot I_A} = -30^\circ$$

- Delovna moč se izračuna iz

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 0,4 \text{ kV} \cdot 5 \text{ A} \cdot \cos(-30^\circ) = 3000 \text{ W}$$

- Jalova moč pa

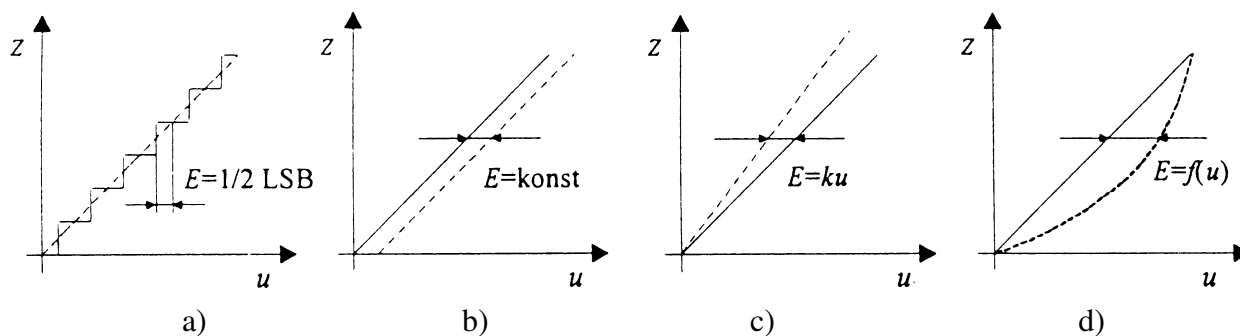
$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 0,4 \text{ kV} \cdot 5 \text{ A} \cdot \sin(-30^\circ) = -1732 \text{ VAr}$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Naštejte pogoške analogno-digitalnega pretvornika in nakažite načine, kako jih lahko korigiramo z mikroračunalikom v digitalnih elektronskih instrumentih. Skicirajte in pokažite z enačbami!

Rešitev:

- Pogreške analogno-digitalnega pretvornika (ADP) razdelimo na:
 - kvantizacijskega - a,
 - ničelnega – b,
 - naklonskega – c,
 - pogrešek nelinearnosti – d.
- Pri ADP ločimo še integralno nelinearnost (INL), ki je vezana na celotno merilno območje $n_{\text{INL}} = |E|_{\text{max}} / U_D$, in diferencialno nelinearnost (DNL), ki je vezana na nazivni korak kvantizacije $\Delta_0 = U_D / 2^n$: $n_{\text{DNL}} = |\Delta - \Delta_0|_{\text{max}} / \Delta_0$



- Enostavno lahko korigiramo ničelni in naklonski pogrešek z dvema referenčnima napetostima, ki ju priklopimo na vhod:
 - $U_0 = 0 \text{ V} \rightarrow Z = Z_0$ - vhod ADP kratko sklenemo
 - $U_{\text{ref}} \rightarrow Z = Z_{\text{ref}}$ - na vhod priključimo znano referenčno napetost
- Vse ostale vrednosti AD pretvorbe korigiramo z linearno karakteristiko, ki jo določata ti referenčni vrednosti.

$$Z_{\text{kor}} = (Z - Z_0) \frac{Z_{\text{ref}}}{Z_{\text{ref}} - Z_0}$$

- Pogrešek nelinearnosti lahko zmanjšamo tako, da zmanjšamo interval, na katerem opazujemo odstopanje od linearne karakteristike.

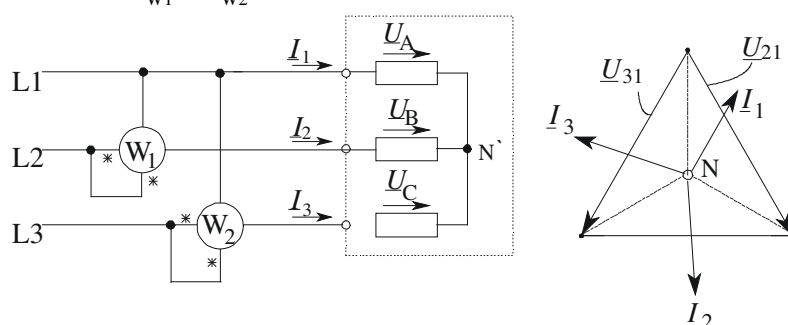
2. Skicirajte vezji za merjenje delovne in jalove moči v trivodnem trifaznem sistemu z uravnovešenim trifaznim virom z dvema vatmetroma, ki imata tokovni veji v vodnikih L2 in L3! Narišite fazorska (kazalčna) diagrama za obe vezji, navedite pogoje za pravilno merjenje moči in enačbi za izračun moči!

Rešitev:

• Delovna moč:

- Aronova vezava: Edini pogoj za merjenje **delovne moči v trifaznem sistemu samo z dvema vatmetroma je trivodnost sistema**, ker je vsota tokov $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ in lahko damo skupno točko sistema vatmetrov v eno izmed faz in tako prihranimo en vatmeter. Za naš primer zapišemo in narišemo:

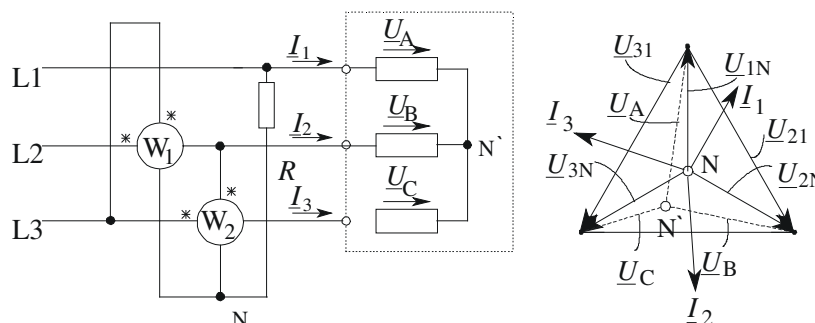
$$P = P_{W1} + P_{W2}$$



• Jalova moč:

- Pri merjenju jalove moči mora biti vir uravnovešen. Ni nujno, da je breme simetrično. Znano mora biti zaporedje faz in enakost uporov za določitev težiščne točke enakostraničnega napetostnega trikotnika N $R_{W1,n} = R_{W3,n} = R$. S tem dobimo 90° zamik faznih napetosti proti medfaznim.

$$Q = \sqrt{3}(P_{W2} - P_{W1})$$



3. Kolikšna je standardna negotovost delovne moči $w_c(P)$ pri polindirektnem merjenju, če ima porabnik fazni kot $\varphi = -30^\circ$ in smo uporabili tokovni merilni transformator ($m_K = \pm 0,1\%$, $\delta_{\max} = \pm 5'$) in vatmeter ($M_P = \pm (0,1\% P + 0,1\% P_D)$, $P = 2/3 P_D$, $P_D = 1400 \text{ W}$) pri nazivnih vrednostih in referenčnih pogojih? Za izračun negotovosti upoštevajte, da so dejanske vrednosti pogreškov majhne in izhodiščno enačbo:

$$P_i = P(1 + e_u)(1 + e_i)(1 + e_w)[1 - (\delta_u - \delta_i)\text{tg}\varphi]$$

Rešitev:

- Ker imamo polindirektno merjenje moči, se izhodiščna enačba reducira (nimamo napetostnega merilnega transformatorja):

$$P_i = P(1 + e_i)(1 + e_w)[1 + \delta_i \text{tg}\varphi]$$

- Posamezni prispevki k celotni negotovosti so:

$$u_1(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_i} \right| u(e_i) \approx P \cdot u(e_i)$$

$$u_2(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_w} \right| u(e_w) \approx P \cdot u(e_w)$$

$$u_3(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} \right| u(\delta_i) \approx P \cdot \text{tg}\varphi u(\delta_i)$$

- Celotna standardna negotovost je zato:

$$u_c(P) = P \sqrt{u^2(e_i) + u^2(e_w) + \text{tg}^2\varphi u^2(\delta_i)}$$

- Ker poznamo mejne vrednosti pogreškov, uporabimo enakomerno porazdelitev in od tod dobimo standardne negotovosti posameznih prispevkov $u = m/\sqrt{3}$:

$$u(e_i) = \frac{m_{K,i}}{\sqrt{3}} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{3}} = 5,77 \cdot 10^{-4}$$

$$u(e_w) = \frac{m_P}{\sqrt{3}} = \frac{M_P}{\sqrt{3} P} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{P_D}{P} \right) = 1,44 \cdot 10^{-3}$$

$$u(\delta_i) = \frac{\delta_{i,\max}}{\sqrt{3}} = \frac{5/60 \cdot \pi/180}{\sqrt{3}} = 8,397 \cdot 10^{-4}$$

- Relativna standardna negotovost delovne moči je:

$$w_c(P) = \frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{u^2(e_i) + u^2(e_w) + \text{tg}^2\varphi u^2(\delta_i)} = 1,628 \cdot 10^{-3} \rightarrow w_c(P) = 1,7 \cdot 10^{-3}$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. S $5\frac{1}{2}$ -mestnim voltmetrom $M_U = \pm(0,02\%U + 0,02\%U_D)$ smo merili stalno napetost pod enakimi pogoji ($n=10$). Koliko je standardna negotovost merilnega rezultata?

U/V : 89,126 ; 89,145 ; 89,123 ; 89,088 ; 89,049 ; 89,135 ; 89,161 ; 89,114 ; 89,122 ; 89,087

Rešitev:

- Standardna negotovost merilnega rezultata sestavljata dva prispevka: negotovost tipa A zaradi ponavljanja meritev in negotovost tipa B kot prispevek merilne metode in instrumentacije. V primeru negotovosti tipa B je prevladujoč lastni pogrešek voltmetra.
- Negotovost tipa A dobimo z določitvijo srednje vrednosti, standardnega odklona meritev in standardne negotovosti:

$$\bar{U} = 89,115 \text{ V}$$

$$s(U) = \sqrt{\frac{\sum_i (U_i - \bar{U})^2}{n-1}} = 0,032523 \text{ V}$$

$$u_A = \frac{s(U)}{\sqrt{n}} = 0,010285 \text{ V}$$

- Negotovost tipa B dobimo iz mejne vrednosti pogreška, kjer predpostavljamo pravokotno porazdelitev pogreška:

$$u_B = \frac{1}{\sqrt{3}} M_U = \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \cdot 10^{-4} \cdot 89,115 \text{ V} + 2 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \text{ V}) = 0,03338 \text{ V}$$

- $5\frac{1}{2}$ -mestni prikaz nam da $U_D = 200 \text{ V}$ (maksimalni prikaz: 199,999).

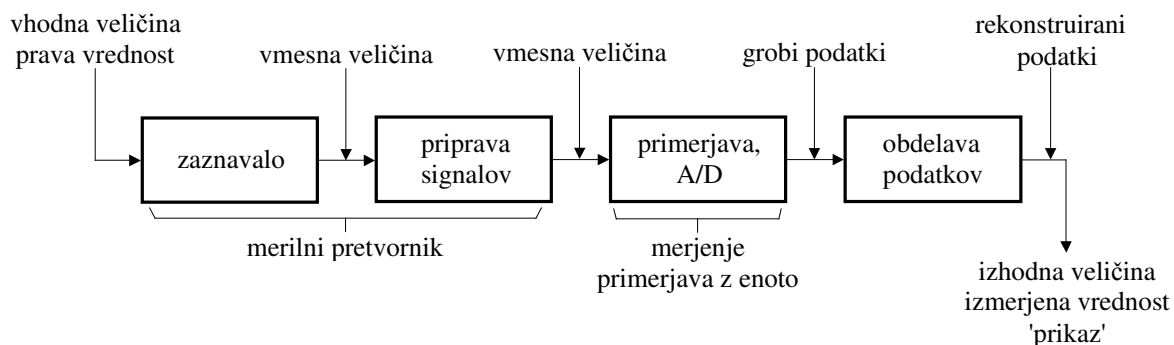
- Skupna standardna negotovost je:

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0,03492 \text{ V} \rightarrow u_c = 0,035 \text{ V}$$

2. Skicirajte zgradbo merilnega sistema in opišite funkcije posameznih blokov v shemi! S katerim elementom se izvrši meritev v ožjem pomenu besede in v kakšni obliki mora biti merjeni signal?

Rešitev:

- Zgradba merilnega sistema:

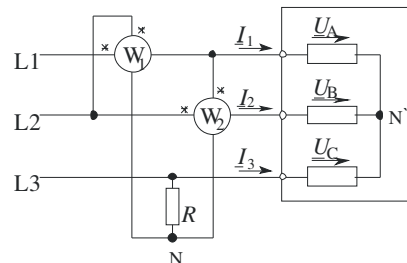


- Vhodni signal vstopa v merilni pretvornik, ki je sestavljen iz zaznavala (tudi tipalo, čutilo ali senzor) in faze priprave signalov na obdelavo (ojačiti, preoblikovati, pretvoriti v veličino, ki je uporabna za neposredno primerjanje).
- Za merilnim pretvornikom je faza primerjanja merjene veličine z enoto:
 - Merjenje v ožjem smislu!
 - Izvrši se z analogno-digitalnim pretvornikom.
 - Signal za primerjavo mora biti v enosmerni obliki.
- Za analogno-digitalnim pretvornikom je faza obdelave signalov za :
 - interpretacija podatkov, prikaz podatkov in prenos podatkov.
 - opravi funkcijo rekonstrukcije in različne matematične obdelave (npr. računanje povprečne vrednosti, integriranje, odvajanje ipd.).

3. V trifaznem sistemu želite meriti jalovo moč nesimetričnega bremena. Kateri pogoji morajo biti izpolnjeni, da jo lahko merite z dvema vatmetroma? Koliko znaša, če kaže prvi vatmeter $P_1 = 25,1 \text{ W}$ in drugi $P_2 = -30,1 \text{ W}$? Tokovni veji vatmetrov sta v fazah L1 in L2.

Rešitev:

- Jalovo moč lahko izmerimo z dvema W-metroma, z vezavo na sliki, če imamo:
 - trifazni **trivodni** sistem,
 - uravnovešen trifazni vir in pravilno fazno zaporedje,
 - ter dodatni upor $R = R_{W1,n} = R_{W2,n}$ za določitev težiščne točke simetričnega trikotnika, da dobimo fazno napetost, ki je za 90° zamaknjena proti medfazni napetosti.
- Ker je v trivodnem sistemu vsota tokov nič, lahko zapišemo $I_3^* = -(I_1^* + I_2^*)$ in jalovo moč izrazimo s: $Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ (\underline{U}_A - \underline{U}_C) I_1^* + (\underline{U}_B - \underline{U}_C) I_2^* \}$
 - Pri simetričnem napajanju zapišemo za napetost med fazama 1 in 3: $\underline{U}_A - \underline{U}_C = \underline{U}_{13} = \sqrt{3} \underline{U}_{2N} e^{j90^\circ}$
 - in za napetost med fazama 2 in 3: $\underline{U}_B - \underline{U}_C = \underline{U}_{23} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{-j90^\circ}$
- Skupno jalovo moč merimo z dvema vatmetroma:



$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \sqrt{3} \underline{U}_{2N} I_1^* e^{j90^\circ} + \sqrt{3} \underline{U}_{1N} I_2^* e^{-j90^\circ} \}$$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{2N} I_1^* e^{j90^\circ} \} + \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N} I_2^* e^{-j90^\circ} \} \right]$$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{2N} I_1^* \} - \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{1N} I_2^* \} \right]$$

$$Q = \sqrt{3} (P_{W1} - P_{W2}) = \sqrt{3} (25,1 \text{ W} + 30,1 \text{ W}) = 95,6 \text{ VAr}$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Koliko je standardna negotovost pri posrednem merjenju dvižnega časa T_r DSO (člen 1. reda), če smo pri vzbujaanju s sinusnim signalom frekvence $f = 37 \text{ MHz}$ in temenske vrednosti $\hat{u} = 5 \text{ V}$ ocenili temensko vrednost na zaslonu DSO na $\hat{y} = 1,75 \text{ d}$ z mejnim pogreškom odčitavanja $\pm 0,02 \text{ d}$; $k_y = 2 \text{ V/d}$? Standardne negotovosti preostalih veličin zanemarite.

Rešitev:

- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda, s katerim aproksimiramo dinamično obnašanje DSO, zapišemo v obliki:

$$\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}} \quad \rightarrow \quad f_m = f \frac{1}{\sqrt{(\hat{u}_1/\hat{u}_2)^2 - 1}}$$

- Dvižni čas DSO je posredno določen z: $T_r = 0,35/f_m$ in od tod:

$$T_r = \frac{0,35}{f_m} = \frac{0,35}{f} \sqrt{(\hat{u}_1/\hat{u}_2)^2 - 1}$$

- Dvižni čas in mejna frekvenca DSO sta:

$$T_r = \frac{0,35}{f_m} = \frac{0,35}{f} \sqrt{(\hat{u}_1/\hat{u}_2)^2 - 1} = 9,65 \text{ ns}; \quad f_m = 36,27 \text{ MHz}$$

- kjer sta obe temenski vrednosti signala na vhodu in signala na zaslonu DSO enaki:

$$\hat{u}_1 = 5 \text{ V}, \quad \hat{u}_2 = \hat{u}_{\text{DSO}} = \hat{y} \cdot k_y = 1,75 \text{ d} \cdot 2 \text{ V/d} = 3,5 \text{ V}$$

- Ker lahko zanemarimo vse prispevke k skupni standardni negotovosti dvižnega časa $u_c(T_r)$ razen prispevka pri določanju amplitude $\hat{u}_2$, zapišemo:

$$u_c(T_r) = c \cdot u(\hat{u}_2)$$

- Faktor občutljivosti c določimo z delnim odvajanjem:

$$c = \frac{\partial T_r}{\partial \hat{u}_2} = \frac{0,35}{f} \frac{1}{2\sqrt{(\hat{u}_1/\hat{u}_2)^2 - 1}} (-2\hat{u}_1^2 \hat{u}_2^{-3}) = -5,407 \cdot 10^{-9} \frac{\text{s}}{\text{V}}$$

- Standardno negotovost amplitude $\hat{u}_2$ določa pogrešek odčitka, za katerega predpostavimo pravokotno porazdelitev:

$$u(\hat{u}_2) = \frac{M}{\sqrt{3}} = \frac{0,02 \text{ d} \cdot 2 \text{ V/d}}{\sqrt{3}} = 0,0231 \text{ V}$$

- Standardna negotovost pri posrednem merjenju dvižnega časa T_r je tako:

$$u_c(T_r) = c \cdot u(\hat{u}_2) = 0,1248 \text{ ns} \rightarrow 0,13 \text{ ns} \quad \text{ali} \quad w_c(T_r) = \frac{u_c(T_r)}{T_r} = 1,29 \cdot 10^{-2} \rightarrow 1,3 \cdot 10^{-2}$$

2. Pred časom ste merili napetost. Odčitali ste izmerjeno vrednost 15,123 V. Takrat si niste zapisali podatkov o uporabljenem instrumentu. Katerega od naslednjih prikazovalnikov je imel inštrument ($1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$ ali $4\frac{1}{2}$ mestni prikaz) in kakšen je merilni rezultat?

$$1\frac{1}{2} - M_U = \pm(3\% U_D + 1\% U_i)$$

$$2\frac{3}{4} - u(U) = 0,12 \text{ V}$$

$$4\frac{1}{2} - M_U = \pm(4\% U_i + 2\% U_D + 1\text{dig})$$

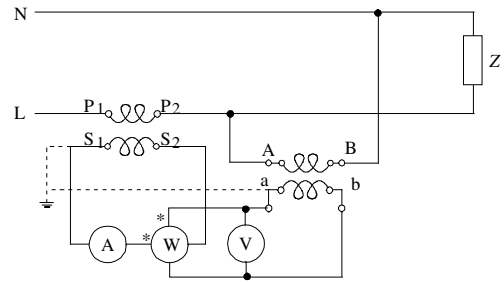
Rešitev:

- Izmerjena vrednost je $U_i = 15,123 \text{ V}$
 - Za tako izmerjeno vrednost potrebujemo instrument, ki ima na voljo 5 mest prikaza, to je s $4\frac{1}{2}$ mestnim prikazovalnikom. Instrument ima pri tej izmerjeni vrednosti merilni doseg 20 V (največja vrednost prikaza je 19,999).
- Mejni pogrešek je: $M_U = \left(\frac{4}{100}\right) \cdot 15,123 \text{ V} + \left(\frac{2}{100}\right) \cdot 20 \text{ V} + 0,001 \text{ V} = 1,00592 \text{ V}$
- in standardna negotovost: $u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = 0,5807 \text{ V}$
- Merilni rezultat je:

$$\underline{U = 15,12 \text{ V} \quad , \quad u(U) = 0,58 \text{ V} \quad , \quad n = 1}$$

3. Kolikšne so delovna, jalova in navidezna moč porabnika?

- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $y_D = 10000 \text{ d}$,
 $y = 8222 \text{ d}$;
- voltmeter: $U = 92 \text{ V}$;
- ampermeter: $I = 4,97 \text{ A}$;
- tokovnik: $I_{pn} = 75 \text{ A}$, $I_{sn} = 5 \text{ A}$;
- napetostnik: $U_{pn} = 50 \text{ kV}$, $U_{sn} = 100 \text{ V}$.



Rešitev:

- Delovna moč se izračuna iz izmerjene vrednosti vatmetra. Potrebno je upoštevati, da je vatmeter priključen na sekundarni strani tokovnega merilnega transformatorja in napetostnega merilnega transformatorja.

$$P = K_{un} \cdot K_{in} \cdot P_W = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} \cdot \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \cdot U_n \cdot I_n \cdot \frac{y}{y_D} =$$

$$= \frac{50 \text{ kV}}{100 \text{ V}} \cdot \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} \cdot 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{8222 \text{ d}}{10000 \text{ d}} = 3,083 \text{ MW}$$

- pri čemer y predstavlja odklon vatmetra v delcih, y_D pa njegov največji odklon.

- Navidezna moč se izračuna iz izmerjenih vrednosti voltmetra in ampermetra. Pozor, tudi ta dva instrumenta sta vezana na sekundarni strani tokovnika in napetostnika.

$$S = K_{un} \cdot K_{in} \cdot U \cdot I = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} \cdot \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \cdot U \cdot I =$$

$$= \frac{50 \text{ kV}}{100 \text{ V}} \cdot \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} \cdot 92 \text{ V} \cdot 4,97 \text{ A} = 3,429 \text{ MVA}$$

- In še izračun jalove moči.

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(3,429 \text{ MVA})^2 - (3,083 \text{ MW})^2} = 1,501 \text{ MVar}$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Ker nimate W-metra, želite vhodno moč proizvoda (npr. sobnega ventilacijskega grelnika) izmeriti posredno. Katere instrumente potrebujete, če predpostavimo sinusno obliko signalov? Izpeljite izraz za izračun skupne standardne merilne negotovosti. Navedite podatke, ki jih potrebujete za izračun merilne negotovosti vhodne moči! Predpostavimo, da ni statistične povezave med vhodnimi veličinami $r_{ij} = 0$.

Rešitev:

- Da bi posredno izmerili vhodno moč ventilacijskega grelnika potrebujemo A-meter, V-meter in $\cos \varphi$ -meter.
- Izračun moči: $P = UI \cos \varphi$
- Pri skupni negotovosti upoštevamo prispevke vseh treh instrumentov:

$$u(P) = \sqrt{(|c_1| \cdot u(U))^2 + (|c_2| \cdot u(I))^2 + (|c_3| \cdot u(\cos \varphi))^2}$$

- Za izračun potrebujemo standardne merilne negotovosti merjenja vhodnih veličin ($u(U)$, $u(I)$, $u(\cos \varphi)$) in občutljivostne koeficiente:

$$|c_1| = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| = |I \cos \varphi|; \quad |c_2| = \left| \frac{\partial P}{\partial I} \right| = |U \cos \varphi|; \quad |c_3| = \left| \frac{\partial P}{\partial \cos \varphi} \right| = UI$$

- Skupna standardna merilna negotovost je enaka:

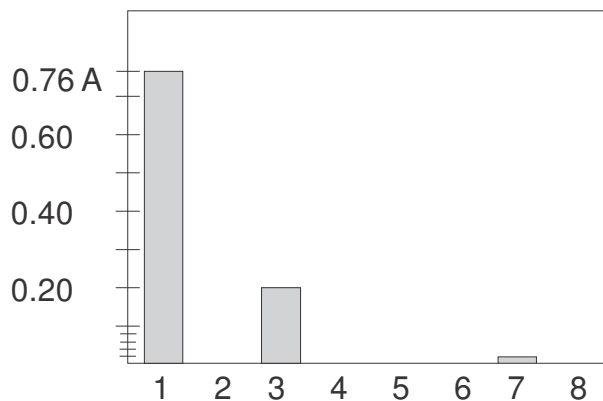
$$\begin{aligned} u(P) &= \sqrt{(I \cos \varphi \cdot u(U))^2 + (U \cos \varphi \cdot u(I))^2 + (UI \cdot u(\cos \varphi))^2} = \\ &= P \cdot \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U} \right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I} \right)^2 + \left(\frac{u(\cos \varphi)}{\cos \varphi} \right)^2} = P \cdot \sqrt{(w(U))^2 + (w(I))^2 + (w(\cos \varphi))^2} \end{aligned}$$

- Potrebni podatki instrumentov:
 - izmerjena vrednost,
 - mejni pogrešek (absolutni ali relativni).

$$u(P) = P \cdot \sqrt{\left(\frac{m_U}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_I}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_{\cos \varphi}}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

$$\text{ali} \quad = P \cdot \sqrt{\left(\frac{M_U / \sqrt{3}}{U} \right)^2 + \left(\frac{M_I / \sqrt{3}}{I} \right)^2 + \left(\frac{M_{\cos \varphi} / \sqrt{3}}{\cos \varphi} \right)^2}$$

2. Faktor popačenja THD_{DIN} bremena znaša 0,27. Kolikšen je efektivni tok tega bremena, če je znana informacija o harmonskih komponentah? Koliko je THD_{IEC} ? Kako bi določili standardno merilno negotovost za faktor popačenja THD_{DIN} , če poznamo osnovno komponento in celotni tok I ? Nakažite v enačbah!



Rešitev:

- Efektivna vrednost toka porabnika se lahko izračuna kot geometrijska vsota posameznih komponent.

$$I = \sqrt{I_{K1}^2 + I_{K2}^2 + I_{K3}^2 + \dots + I_{K8}^2}$$

- Ta rezultat je glede na podane podatke manj točen kot izračun iz podatka o THD_{DIN} (*Total Harmonic Distorsion*) in največje osnovne komponente I_1 . Izračun efektivne vrednosti toka iz THD_{DIN} :

$$THD_{DIN} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I} = \sqrt{1 - \left(\frac{I_1}{I}\right)^2} \Rightarrow I = \frac{I_1}{\sqrt{1 - THD_{DIN}^2}}$$

$$I = \frac{0,76 \text{ A}}{\sqrt{1 - 0,27^2}} = 0,79 \text{ A}$$

- THD_{IEC} faktor po IEC pa se izračuna kot

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^n I_k^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{(0,79 \text{ A})^2 - (0,76 \text{ A})^2}}{0,76 \text{ A}} = 0,28$$

- Standardno merilno negotovost faktorja popačenja $THD_{DIN} = \sqrt{1 - (I_1/I)^2}$ določata deleža negotovosti toka osnovne komponente in celotnega toka:

$$u_1 = |c_1| \cdot u(I_1) = \left| \frac{\partial THD_{DIN}}{\partial I_1} \right| \cdot u(I_1) = \left| \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{I_1}{I} \right)^2 \right)^{-1/2} \right| \cdot 2 \left(\frac{I_1}{I} \right) \cdot \frac{1}{I} \cdot u(I_1)$$

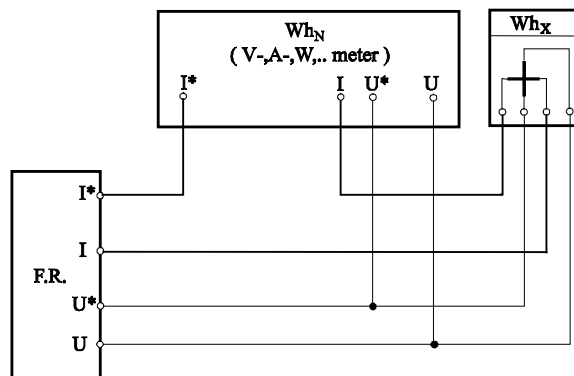
$$u_2 = |c_2| \cdot u(I) = \left| \frac{\partial THD_{DIN}}{\partial I} \right| \cdot u(I) = \left| \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{I_1}{I} \right)^2 \right)^{-1/2} \right| \cdot 2 \left(\frac{I_1}{I} \right) \cdot \frac{I_1}{I^2} \cdot u(I)$$

$$u(THD_{DIN}) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

3. Pri preskušanju enofaznega elektronskega števca delovne energije je bila na referenčnem vatmetru povprečna moč $P_w = 1000 \text{ W}$ in čas merjenja 3 minute. Izhod preskušane elektronskega števca delovne energije je v tem času oddal 29 impulzov. Izračunajte lastni pogrešek preskušane števca, če je konstanta števca $K = 600 \text{ impulzov/kWh}$! Ali preskušanec prestane preskus, če je deklariran razred točnosti enak ②? Skicirajte vezje!

Rešitev:

- Vezalna shema preskušanja razreda točnosti indukcijskega števca električne energije.



- Za izračun lastnega pogreška pri merjenju energije potrebujemo energijo preskušane števca W_s in referenčno energijo W :

$$e = \frac{W_s - W}{W}$$

- Energija preskušane števca se izračuna iz števila vrtljajev in konstante števca:

$$W_s = \frac{N}{K} = \frac{29 \text{ imp}}{600 \text{ imp/kWh}} = 0,0483 \text{ kWh} = 174000 \text{ Ws}$$

- Referenčna energija pa je energija, ki jo dobimo s produktom povprečne moči na referenčnem vatmetru in časa merjenja:

$$W = P_w \cdot t = 1000 \text{ W} \cdot 3 \text{ min} = 180000 \text{ Ws}$$

- Lastni pogrešek je tako:

$$e = \frac{W_s - W}{W} = \frac{174000 \text{ Ws} - 180000 \text{ Ws}}{180000 \text{ Ws}} = -0,0333 \rightarrow e = -3,33\%$$

- Števec ni prestal preskus, saj je lastni pogrešek e večji kot je dopustna maksimalna vrednost lastnega pogreška m , ki jo določena z razredom ② podanim na izmerjeno vrednost kot referenčno vrednostjo:

$$|e| = 0,0333 > m = \frac{r}{100} = 0,02$$

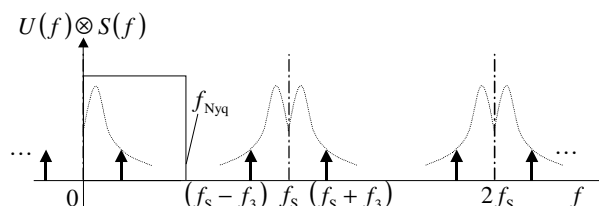
Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Naštejte pogreške, ki nastopijo pri digitalizaciji signala in jih na kratko opišite. Koliko je največji pogrešek ne-koherence pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti $u(t)/V = 1 \sin(100\pi t/s)$, če jo merimo v intervalu dolgem $T_M = 30 \text{ ms}$?

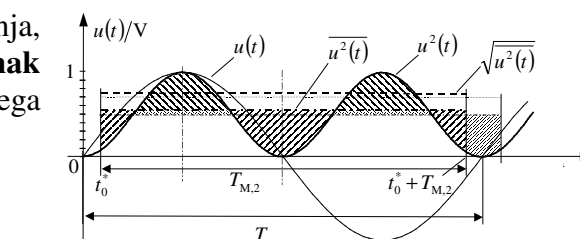
Rešitev:

- Pri digitalizaciji signala nastopi več pogreškov:

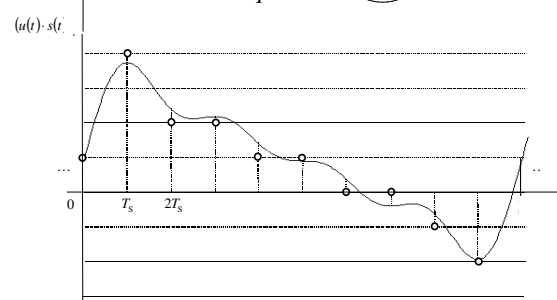
- **navideznost** zaradi prenizke frekvence vzorčenja (pogrešek **prekrivanja**);



- pogrešek **ne-koherentnega** vzorčenja, kadar **čas** merjenja **ni enak mnogokratniku** periode opazovanega signala;

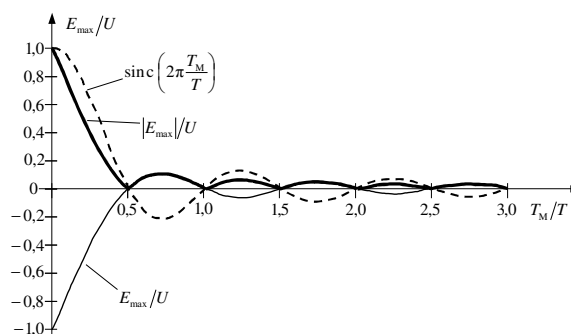


- **kvantizacijska ločljivost**;



- **ločljivost** v odvisnosti od **časa merjenja**, itd.

- Efektivna vrednost sinusnega signala $u(t)/V = 1 \sin(50\text{Hz} \cdot 2\pi t)$ je $U = 1/\sqrt{2} \text{ V}$ in perioda $T = 1/f = 1/50\text{Hz} = 20 \text{ ms}$. Pogrešek ne-koherentnega merjenja je odvisen od časa merjenja. Ker je razmerje $T_M/T = 30 \text{ ms} / 20 \text{ ms} = 1,5$, je največji pogrešek pri merjenju efektivne vrednosti sinusne napetosti enak nič.



2. Koliko znaša merilni rezultat za faktor popačenja ($THD_{IEC} = \sqrt{X^2 - X_1^2} / X_1$) napetostnega signala oblike $u = 100(\sin \omega t + 1/3 \sin 3\omega t)$ V, če ima spektralni analizator standardno negotovost določanja amplitude $w(\hat{u}) = 10^{-2}$?

Rešitev:

- Faktor popačenja je razmerje efektivne vrednosti harmonskih komponent proti efektivni vrednosti osnovne komponente:

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U_1} = \frac{\sqrt{U_3^2}}{U_1} = \frac{U_3}{U_1}$$

- Naš signal ima dve komponenti, katerih efektivne vrednosti sta:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 70,71 \text{ V}; \quad U_3 = \frac{\hat{u}_3}{3\sqrt{2}} = 23,57 \text{ V}$$

- Faktor popačenja je: $THD_{IEC} = \frac{U_3}{U_1} = 0,3333$
- Za relativno obliko standardne negotovosti za faktor popačenja $THD_{IEC} = U_3 / U_1$ lahko zapišemo:

$$w(THD) = \sqrt{w^2(\hat{u}_1) + w^2(\hat{u}_3)} = 1,414 \cdot 10^{-2}$$

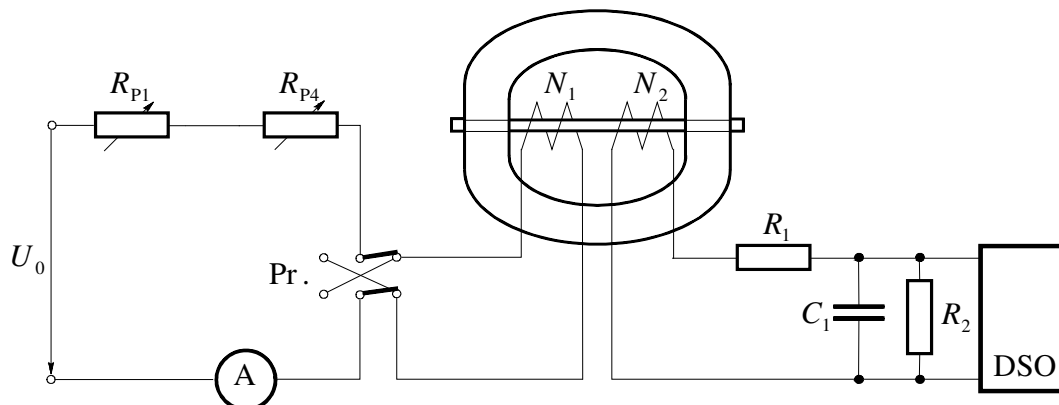
- Pri tem smo upoštevali, da sta relativni negotovosti določanja amplitude in efektivne vrednosti enaki $w(\hat{u}) = w(U)$.
- V absolutni obliki je standardna negotovost: $u(THD) = w(THD) \cdot THD = 4,722 \cdot 10^{-3}$
- Merilni rezultat je tako:

$$THD_{IEC} = 0,3333, \quad u(THD) = 0,0048, \quad n = 1$$

3. Opišite postopek izvedbe vaje, kjer ste ugotavljali statično magnetilno krivuljo feromagnetne palice! Narišite merilno vezje in podajte ključni enačbi za izračun B in H !

Rešitev:

- Merilno vezje:



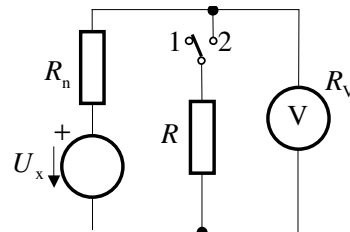
- Postopek ugotavljanja statične magnetilne krivulje feromagnetne palice:
 - Povežemo elemente vezja po zgornji sliki.
 - Nastavimo maksimalni tok in s preklapljanjem stikala za zamenjavo polaritete in hkratnim zmanjševanjem toka proti nič razmagnetimo feromagnetno palico.
 - Nato nastavljamo magnetilni tok in za vsako nastavitev izmerimo inducirano napetost na sekundarju navitja, ki jo opazujemo s pomočjo osciloskopa.
 - Opazujemo pozitivni in negativni impulz inducirane napetosti. Iz povprečne vrednosti obeh napetosti izračunamo gostoto magnetnega pretoka za posamezno nastavljeno točko.
 - Jakost magnetnega polja pa izračunamo iz magnetilnega toka in parametrov navitja.
 - Iz podatkov za B in H narišemo statično magnetilno krivuljo.
- Potrebni enačbi:

$$H_v = \frac{I N_1}{l_v} \qquad B = \frac{T_M \bar{U}}{2 N_2 A a}$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Če je preklopnik v položaju 1, pokaže voltmetr $U_1 = 1\text{ V}$, če je v položaju 2 pa $U_2 = 0,9\text{ V}$. Koliko je neznana napetost U_x ? Koliko je sistematični pogrešek merilne metode, kadar je stikalo v položaju 1?

$$R = 10\text{ M}\Omega, \quad R_V = 10\text{ M}\Omega$$



Rešitev:

- Ko je preklopnik v položaju 1, nam kaže voltmetr padec napetosti U_1 na upor $R_1 = R_V$:

$$R_1 = R_V = 10\text{ M}\Omega, \quad U_1 = U_x \frac{R_1}{R_1 + R_n}$$

- Ko je preklopnik v položaju 2, nam kaže voltmetr padec napetosti U_2 na vzporedni kombinaciji uporov R_V in R :

$$R_2 = \frac{R_V R}{R_V + R} = 5\text{ M}\Omega, \quad U_2 = U_x \frac{R_2}{R_2 + R_n}$$

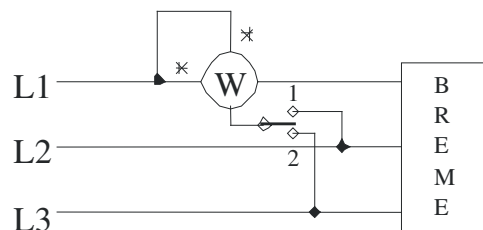
- Iz dveh enačb izračunamo neznano napetost:

$$U_x = U_1 U_2 \frac{R_2 - R_1}{R_2 U_1 - R_1 U_2} = 1,125\text{ V}$$

- Ko je stikalo v položaju 1, odčitamo napetost $U_1 = 1\text{ V}$ in je sistematični pogrešek proti napetosti praznega teka U_x enak:

$$e = \frac{U_1}{U_x} - 1 = -11,1\%$$

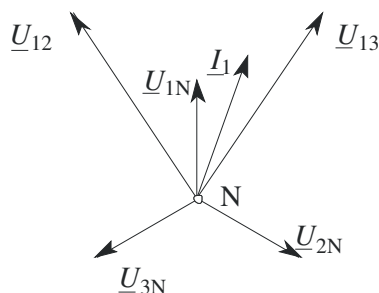
2. Dokažite, kakšno moč dobimo, če z vatmetrom izmerimo moč, ko je stikalo v položaju 1 in pištejemo moč, ki jo izmerimo, ko je stikalo v položaju 2? Narišite fazorski diagram! Kateri pogoji morajo biti izpolnjeni pri tovrstni meritvi?



Rešitev:

- Če seštejemo odčitka, ko je vatmeter v položaju 1 in 2 dobimo moč trifaznega bremena. Toda samo, če je breme simetrično oziroma trifazni vir uravnovešen, torej trifazni sistem uravnovešen.

- Fazorski (kazalčni) diagram



- Ko je preklopnik v položaju 1, je odklon vatmetra enak

$$P_{W1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{2N}) \underline{I}_1^* \},$$

- Ko pa je v položaju 2, pa:

$$P_{W2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{U}_{13} \underline{I}_1^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{3N}) \underline{I}_1^* \}.$$

- Če seštejemo oba odčitka, dobimo

$$P_{W1} + P_{W2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ [(\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{2N}) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{3N}) \underline{I}_1^*] \}$$

- To pa je enako skupni moči sistema

$$P_{W1} + P_{W2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ 3 \underline{U}_{1N} \underline{I}_1^* \} = P,$$

- saj je $-(\underline{U}_{2N} + \underline{U}_{3N}) = \underline{U}_{1N}$.

3. Določite faktor moči na bremenu, če sta napetost in tok:

$$u/\text{V} = 325,3 \cdot \sin(2\pi ft - \pi/2)$$

$$i/\text{A} = 2,828 \cdot \sin(2\pi ft - \pi/3) + 0,5657 \cdot \sin(10\pi ft + \pi/4)$$

$$P = \sum_i U_i I_i \cos \varphi_i$$

Rešitev:

- Faktor moči je razmerje delovne in navidezne moči: $\lambda = P/S$.
- Delovna moč je definirana kot vsota prispevkov $P_i = U_i I_i \cos \varphi_i$ komponent napetosti in toka iste frekvence z upoštevanjem razlike kotov med napetostjo in tokom za ustrezno komponento.

$$P = \sum_i U_i I_i \cos \varphi_i ; \quad \varphi_i = \varphi_{U,i} - \varphi_{I,i}$$

- V našem primeru imamo samo prispevek osnovne komponente:

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 ; \quad \varphi_1 = \varphi_{U,1} - \varphi_{I,1} = -\pi/2 + \pi/3 = -\pi/6$$

- Efektivne vrednosti komponent napetosti in toka so:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{325,3 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 230 \text{ V} ;$$

$$I_1 = \frac{\hat{i}_1}{\sqrt{2}} = \frac{2,828 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 2,00 \text{ A}, \quad I_5 = \frac{\hat{i}_5}{\sqrt{2}} = \frac{0,5657 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 0,40 \text{ A}$$

- Delovna moč je tako:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 398,37 \text{ W}$$

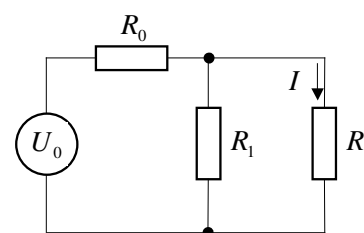
- Navidezna moč je enaka produktu efektivne vrednosti napetosti in toka: $S = U \cdot I$
 - Efektivno vrednost napetosti že poznamo: $U = U_1 = 230 \text{ V}$
 - Efektivno vrednost toka dobimo z geometrijskim seštevanjem efektivnih vrednosti komponent: $I = \sqrt{I_1^2 + I_5^2} = 2,04 \text{ A}$
 - Navidezna moč je tako: $S = 469,2 \text{ VA}$
- Iz delovne in navidezne moči izračunamo še faktor moči:

$$\lambda = \frac{398,37 \text{ W}}{469,2 \text{ VA}} = 0,849$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Koliko mora biti upornost ampermetra R_A , da bo sistematični pogrešek vključitve ampermetra pri merjenju toka I skozi upor R_2 zanemarljiv?

- vezje: $U_0 = 200\text{ V}$, $R_0 = 100\ \Omega$, $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$;
- ampermeter: $I_D = 600,0\text{ mA}$, $M_I = \pm(0,2\% I + 0,2\% I_D)$



Rešitev:

- Tok I , ki teče pred vključitvijo ampermetra v veji upora R_2 , izračunamo iz enačbe za tokovni delilnik, pri čemer predhodno določimo še tok vira:

$$I_0 = U_0 / \left(R_0 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) = 200\text{ V} / (100\ \Omega + 100\ \Omega) = 1\text{ A}$$

$$I = \frac{U_0}{R_0 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{U_0 R_1}{R_0 (R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{U_0 R_1}{R_2 (R_0 + R_1) + R_0 R_1} = 500,0\text{ mA}$$

- Po vključitvi ampermetra z upornostjo R_A , teče v tej veji manjši tok:

$$I^* = \frac{U_0 R_1}{(R_2 + R_A)(R_0 + R_1) + R_0 R_1} < I$$

- in sistematični pogrešek vključitve ampermetra je negativen:

$$E_s = I^* - I = \frac{200\text{ V} \cdot 200\ \Omega}{(200\ \Omega + R_A)(300\ \Omega) + 20000\ \Omega^2} - I$$

- Sistematični pogrešek meritve je zanemarljiv, kadar je manjši od desetine standardne negotovosti.

$$|E_s| \leq \frac{u(I)}{10} = \frac{1}{10} \frac{M_I}{\sqrt{3}}$$

- Za podane vrednosti, privzeti pravokotni porazdelitvi pogreška ($u(I) = M_I / \sqrt{3}$) in upoštevanju, da se tokova I^* in I zanemarljivo malo razlikujeta, dobimo:

$$E_s \leq \frac{1}{10\sqrt{3}} (2 \cdot 10^{-3} \cdot 500,0\text{ mA} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 600,0\text{ mA}) = 0,127\text{ mA}$$

- Od tod izračunamo iskano upornost R_A :

$$I^* - I = -E_s \Rightarrow \frac{200\text{ V} \cdot 200\ \Omega}{(200\ \Omega + R_A)(300\ \Omega) + 20000\ \Omega^2} - 500,0\text{ mA} = -0,127\text{ mA}$$

$$R_A = 0,068\ \Omega$$

- Upornost ampermetra mora biti manjša od vrednosti $R_A \leq 0,068\ \Omega$, da je sistematični pogrešek pri merjenju toka I skozi upor R_2 zanemarljiv.

2. S pomočjo četrtnskega Wheatstonovega mostiča želimo meriti temperaturo z ločljivostjo $0,1^{\circ}\text{C}$. Kakšno ločljivost mora imeti voltmeter, ki meri diagonalno napetost mostiča? Za temperaturno spremenljivi upor velja linearna odvisnost od temperature $T = k \cdot R$, kjer je R upornost upora in $k = 1^{\circ}\text{C}/\Omega$. Vsi štirje upori imajo začetno vrednost 30Ω , napajalna napetost mostiča pa je $U_0 = 3,3\text{V}$.

Rešitev:

- Ločljivost se zaradi linearnosti pokorava istim funkcijskim odvisnostim kot odvisnost temperature od upornosti, torej $T = k R$. Tako mora biti za doseganje ločljivosti $Q(T) = 0,1^{\circ}\text{C}$ ločljivost merjenja upornosti $Q(R)$ enaka:

$$Q(T) = k \cdot Q(R)$$

$$Q(R) = \frac{Q(T)}{k} = \frac{0,1^{\circ}\text{C}}{1^{\circ}\text{C}/\Omega} = 0,1\Omega$$

- Za diagonalno napetost četrtnskega Wheatstonovega mostiča velja enačba:

$$U_s = \frac{U_0 \Delta R}{4R},$$

- iz katere lahko izračunamo potrebno ločljivost voltmetra.

$$\Delta U_s = \frac{U_0 Q(R)}{4R} = \frac{3,3\text{V} \cdot 0,1\Omega}{4 \cdot 30\Omega} = 0,00275\text{V} = 2,75\text{mV} \rightarrow 1\text{mV}$$

3. Ker nimate W-metra, želite vhodno moč proizvoda (npr. paličnega mešalnika) izmeriti posredno. Katere inštrumente potrebujete, če predpostavimo sinusno obliko signalov? Izpeljite izraz za izračun skupne standardne merilne negotovosti. Navedite podatke, ki jih potrebujete za izračun merilne negotovosti vhodne moči! Predpostavimo, da je negotovost zaradi ločljivosti inštrumentov zanemarljiva.

Rešitev:

- Da bi posredno izmerili vhodno moč paličnega mešalnika potrebujemo A-meter, V-meter in $\cos \varphi$ -meter.
- Izračun moči: $P = UI \cos \varphi$
- Pri skupni negotovosti upoštevamo prispevke vseh treh inštrumentov:

$$u(P) = \sqrt{(|c_1| \cdot u(U))^2 + (|c_2| \cdot u(I))^2 + (|c_3| \cdot u(\cos \varphi))^2}$$

- Za izračun potrebujemo standardne merilne negotovosti merjenja vhodnih veličin ($u(U)$, $u(I)$, $u(\cos \varphi)$) in občutljivostne koeficiente:

$$|c_1| = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| = |I \cos \varphi|; \quad |c_2| = \left| \frac{\partial P}{\partial I} \right| = |U \cos \varphi|; \quad |c_3| = \left| \frac{\partial P}{\partial \cos \varphi} \right| = UI$$

- Skupna standardna merilna negotovost je enaka

$$\begin{aligned} u(P) &= \sqrt{(I \cos \varphi \cdot u(U))^2 + (U \cos \varphi \cdot u(I))^2 + (UI \cdot u(\cos \varphi))^2} = \\ &= P \cdot \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U} \right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I} \right)^2 + \left(\frac{u(\cos \varphi)}{\cos \varphi} \right)^2} = P \cdot \sqrt{(w(U))^2 + (w(I))^2 + (w(\cos \varphi))^2} \end{aligned}$$

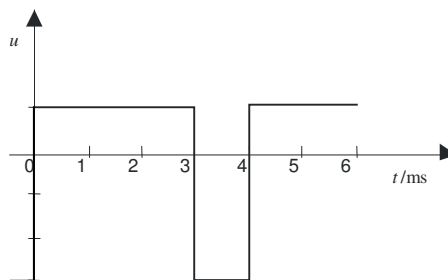
- Potrebni podatki inštrumentov:
 - izmerjena vrednost,
 - mejni pogrešek (absolutni ali relativni).

$$u(P) = P \cdot \sqrt{\left(\frac{m_U}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_I}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_{\cos \varphi}}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

$$\text{ali} \quad = P \cdot \sqrt{\left(\frac{M_U / \sqrt{3}}{U} \right)^2 + \left(\frac{M_I / \sqrt{3}}{I} \right)^2 + \left(\frac{M_{\cos \varphi} / \sqrt{3}}{\cos \varphi} \right)^2}$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Koliko kaže voltmeter, ki se odziva na srednjo vrednost in ima vgrajen usmernik, če nanj priključimo izmenično napetost s temensko vrednostjo $\hat{u} = 25 \text{ V}$? Koliko je prava efektivna vrednost napetosti?



Rešitev:

- Voltmeter se odziva na usmerjeno srednjo vrednost $U_r = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt$. Običajno je instrument narejen za merjenje sinusne veličine, zato je njegova skala pomnožena s faktorjem oblike za sinusni signal $F_0 = \frac{U}{U_r} = \frac{\hat{u}/\sqrt{2}}{2\hat{u}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111$, da nam kaže efektivno vrednost.

$$U^* = F_0 \cdot U_r$$

- Za dano obliko napetosti je usmerjena srednja vrednost enaka:

$$U_r = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt = \frac{1}{T} \left[\left(\hat{u} \cdot \frac{3}{4} T \right) + \left(|-3\hat{u}| \cdot \frac{1}{4} T \right) \right] = \hat{u} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) = 1,5 \cdot \hat{u}$$

- Voltmeter kaže napačno efektivno vrednost napetosti, ki ni sinusne oblike.

$$U^* = F_0 \cdot U_r = 1,11 \cdot 1,5 \cdot 25 \text{ V} = 41,7 \text{ V}$$

- Efektivna vrednost napetosti je definirana na periodo signala $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$. Za dano obliko napetosti je efektivno vrednost enaka:

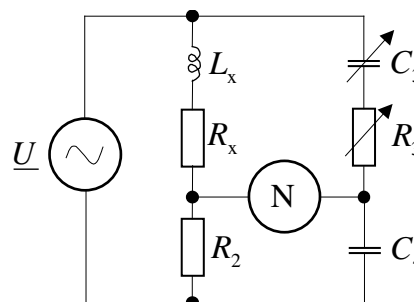
$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{T} \left[\left(\hat{u}^2 \cdot \frac{3}{4} T \right) + \left((-3\hat{u})^2 \cdot \frac{1}{4} T \right) \right] = \hat{u}^2 \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4} \right) = 3 \cdot \hat{u}^2$$

- Prva efektivna vrednost napetosti je:

$$U = \sqrt{3} \cdot \hat{u} = \sqrt{3} \cdot 25 \text{ V} = 43,3 \text{ V}$$

2. Podajte popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo za induktivnost L_x , če uporabljamo dani mostič:

- $R_2 = 100,0 \Omega$; $M_{R_2} = \pm 0,2 \Omega$
- $R_3 = 8,54 \text{ k}\Omega$; $m_{R_3} = \pm 5 \cdot 10^{-3}$
- $C_3 = 92,5 \text{ nF}$; $m_{C_3} = \pm 4 \cdot 10^{-3}$
- $C_4 = 100,0 \text{ nF}$; $M_{C_4} = \pm 0,5 \text{ nF}$
- $f = 1000,0 \text{ Hz}$; $M_f = \pm 0,1 \text{ Hz}$



Rešitev:

- Za impedance mostiča zapišemo: $\underline{Z}_x = R_x + j\omega L_x$, $\underline{Z}_2 = R_2$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}, \quad \underline{Z}_4^{-1} = j\omega C_4$$

- Iz razmerja $\underline{Z}_x / \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 / \underline{Z}_4$, ko je mostič uravnovešen, zapišemo:

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_2 / \underline{Z}_4 \cdot \underline{Z}_3 \quad \Rightarrow \quad R_x + j\omega L_x = j\omega R_2 C_4 \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right)$$

- Ko izenačimo imaginarna dela leve in desne strani enačbe, dobimo iskano induktivnost:

$$L_x = R_2 R_3 C_4 = 85,40 \text{ mH}$$

- Kadar je posredno merjena veličina enaka produktu neposredno merjenih veličin, se skupna standardna negotovost izrazi z geometrijsko vsoto standardnih negotovosti vhodnih veličin v relativni obliki.

$$w_c(L_x) = \sqrt{w^2(R_2) + w^2(R_3) + w^2(C_4)}$$

- V našem primeru so posamezne standardne negotovosti:

$$w(R_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_{R_2}}{R_2} = 1,155 \cdot 10^{-3}$$

$$w(R_3) = \frac{m_{R_3}}{\sqrt{3}} = 2,887 \cdot 10^{-3}$$

$$w(C_4) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_{C_4}}{C_4} = 2,887 \cdot 10^{-3}$$

$$w_c(L_x) = 4,243 \cdot 10^{-3} \rightarrow u_c(L_x) = w_c(L_x) \cdot L_x = 0,362 \text{ mH} \rightarrow 0,37 \text{ mH}$$

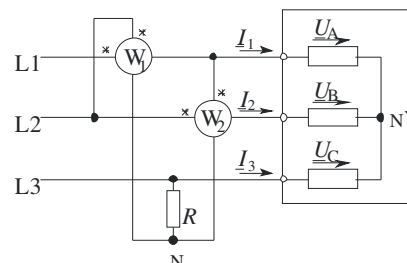
- Merilni rezultat je:

$$L_x = 85,40 \text{ mH}; \quad u_c(L_x) = 0,37 \text{ mH}; \quad n = 1$$

3. V trifaznem sistemu želite meriti jalovo moč nesimetričnega bremena. Kateri pogoji morajo biti izpolnjeni, da jo lahko merite z dvema vatmetroma? Narišite vezavo in fazorski (kazalčni) diagram. Koliko znaša jalova moč, če kaže prvi vatmeter $P_1 = 37,6 \text{ W}$ in drugi $P_2 = 42,5 \text{ W}$? Enačbo izpeljite.

Rešitev:

- Jalovo moč lahko merimo z dvema W-metroma, z vezavo na sliki, če imamo:
 - trifazni **trivodni** sistem;
 - uravnovešen trifazni vir in pravilno fazno zaporedje;
 - ter dodatni upor $R = R_{W1,n} = R_{W2,n}$ za določitev težiščne točke simetričnega trikotnika, da dobimo fazno napetost, ki je za 90° zamaknjena proti medfazni napetosti.
- Ker je v trivodnem sistemu vsota tokov nič, lahko zapišemo $\underline{I}_3^* = -(\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^*)$ in jalovo moč izrazimo s: $Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ (\underline{U}_A - \underline{U}_C) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_B - \underline{U}_C) \underline{I}_2^* \}$
 - Pri simetričnem napajanju zapišemo za napetost med fazama 1 in 3: $\underline{U}_A - \underline{U}_C = \underline{U}_{13} = \sqrt{3} \underline{U}_{2N} e^{j90^\circ}$
 - in za napetost med fazama 2 in 3: $\underline{U}_B - \underline{U}_C = \underline{U}_{23} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{-j90^\circ}$
- Skupno jalovo moč merimo z dvema vatmetroma:

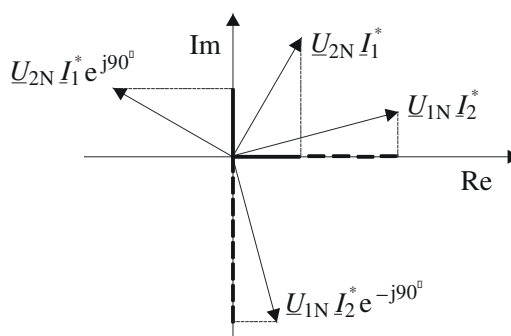


$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \sqrt{3} \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* e^{j90^\circ} + \sqrt{3} \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* e^{-j90^\circ} \}$$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* e^{j90^\circ} \} + \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* e^{-j90^\circ} \} \right]$$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* \} - \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* \} \right]$$

$$Q = \sqrt{3} (P_{W1} - P_{W2}) = \sqrt{3} (37,6 \text{ W} - 42,5 \text{ W}) = -8,49 \text{ VAr}$$



Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Podajte rezultat za $\cos \varphi$ s standardno negotovostjo!

- ampermeter: $I = 4,16 \text{ A}$, $I_D = 6 \text{ A}$, $r = 0,5$
- voltmeter: $U = 100 \text{ V}$, $U_D = 150 \text{ V}$, $r = 0,2$
- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $r = 0,5$, $\alpha_D = 150 \text{ d}$, $\alpha = 85,8 \text{ d}$
(α pomeni odklon vatmetra v delcih d)

Rešitev:

- Najprej se izračuna $\cos \varphi$.

- Delovna moč:

$$P = P_D \frac{\alpha}{\alpha_D} = U_n I_n \frac{\alpha}{\alpha_D} = 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{85,8 \text{ d}}{150 \text{ d}} = 286 \text{ W}$$

$$P = UI \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{286 \text{ W}}{100 \text{ V} \cdot 4,16 \text{ A}} = 0,6875$$

- Nato izračunamo skupno relativno in absolutno merilno negotovost.

- relativno merilno negotovost zaradi produkta in kvocienta vhodnih veličin zapišemo z geometrijsko vsoto:

$$w_c(\cos \varphi) = \sqrt{w^2(P) + w^2(U) + w^2(I)}$$

- posamezne relativne merilne negotovosti izpeljane iz razreda danega na merilni doseg imajo obliko:

$$w(G) = \frac{u(G)}{G} = \frac{M(G)}{G\sqrt{3}} = \frac{r}{100} \frac{G_D}{G} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{100} \frac{\alpha_D}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- (opomba: ker oznaka razreda ni obkrožena, se za referenčno vrednost vzame merilni doseg.)

- zato lahko zapišemo za skupno relativno merilno negotovost:

$$w_c(\cos \varphi) = \sqrt{\left(\frac{0,5}{100} \frac{150}{85,8} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,2}{100} \frac{150}{100} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,5}{100} \frac{6}{4,16} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6,768 \cdot 10^{-3}$$

- Skupna absolutna merilna negotovost je:

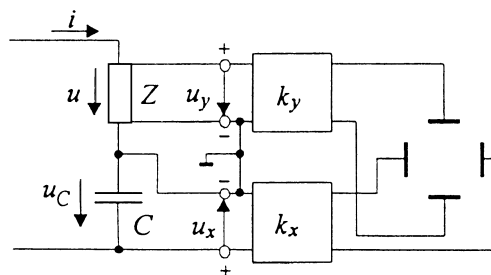
$$u_c(\cos \varphi) = w_c(\cos \varphi) \cdot \cos \varphi = 0,00465$$

- Rezultat za $\cos \varphi$ s standardno negotovostjo:

$$\cos \varphi = 0,6875 \qquad u_c(\cos \varphi) = 0,0047 \qquad n = 1$$

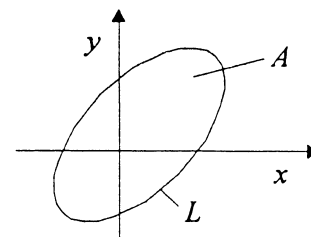
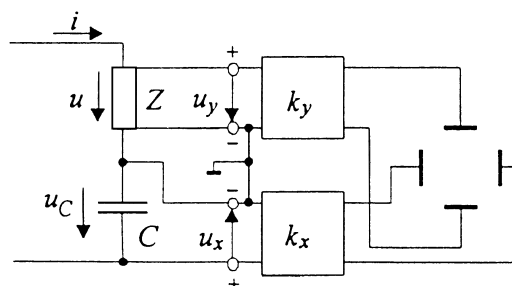
2. Koliko je delovna moč na bremenu Z, če sta konstanti osciloscopa $k_x = k_y = 100 \text{ mV/d}$ in je ploščina lika na zaslonu elektronskega osciloscopa enaka $A = 37,5 \text{ d}^2$? Vezje je napajano s signalom frekvence $f = 5 \text{ kHz}$. $C = 1 \mu\text{F}$

$$\oint_L y dx = - \oint_L x dy$$



Rešitev:

- Pri merjenju delovne moči z elektronskim osciloskopom se lahko uporablja tudi **XY način** prikaza.
 - Y – napetost bremena,
 - X – napetost, ki je sorazmerna integralu toka bremena. Tok čez kondenzator je: $i = C \frac{du_C}{dt}$



- Delovno moč** izrazimo z:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T u \left(C \frac{du_C}{dt} \right) dt = f C \oint u du_C$$

$$u = u_y = k_y y; \quad u_C = -u_x = -k_x x \Rightarrow du_C = -k_x dx$$

- Integral po sklenjeni poti (periodičnost) je enak: $P = -f C k_x k_y \oint_L y dx$
- Ploščina $A = \oint_L y dx$, ki jo omejuje krivulja L, je sorazmerna delovni moči: $P = f C k_x k_y A$.
- V našem primeru je delovna moč enaka:

$$P = 5 \text{ kHz} \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot \frac{0,1 \text{ V}}{\text{d}} \cdot \frac{0,1 \text{ V}}{\text{d}} \cdot 37,5 \text{ d}^2 = 1,875 \text{ mW}$$

3. Feromagnetno toroidno jedro ima presek $A = 1 \text{ cm}^2$. Ko vključimo enosmerni magnetilni tok, se v tuljavici z $N_2 = 100$ ovoji inducira napetostni impulz s ploščino 26 mVs , ko ga izključimo, napetostni impulz s ploščino 4 mVs , ko ga ponovno vključimo, vendar v obratni smeri, pa impulz s ploščino 36 mVs . Skicirajte potek B v odvisnosti od H in izračunajte maksimalno vrednost magnetne indukcije B_m !

Rešitev:

- Upoštevajoč Faradejev zakon zapišemo za inducirano napetost u_i v tuljavici konstantne površine A z N ovoji pri spremembi magnetne indukcije B :

$$u_i = -N A \frac{dB}{dt} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} u_i dt = -N A \int_{B_1}^{B_2} dB = \int_0^{T_M} u_i dt$$

- Integral napetostnega pulza je enak spremembi magnetne indukcije ΔB , ki jo povzroča enosmerni magnetilni tok ob obeh vklopih in izklopu:

$$\int_0^{T_M} u_i dt = N A (B_1 - B_2) = N A \Delta B \rightarrow \Delta B = \frac{\int_0^{T_M} u_i dt}{N A}$$

- Pri posameznih spremembah magnetilnega toka smo dobili naslednje spremembe magnetne indukcije:

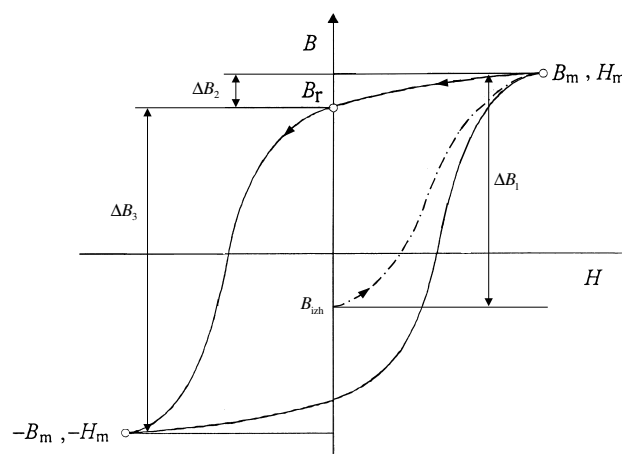
$$\Delta B_1 = \frac{26 \text{ mVs}}{100 \cdot 1 \text{ cm}^2} = \frac{26 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}}{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 2,6 \text{ T}$$

$$\Delta B_2 = \frac{4 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}}{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,4 \text{ T}$$

$$\Delta B_3 = \frac{36 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}}{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 3,6 \text{ T}$$

- Maksimalno vrednost magnetne indukcije nam neglede na izhodiščno točko določata izklop magnetilnega toka in ponovni vklop v nasprotno smer (glej skico):

$$B_m = \frac{\Delta B_2 + \Delta B_3}{2} = 2,0 \text{ T}$$

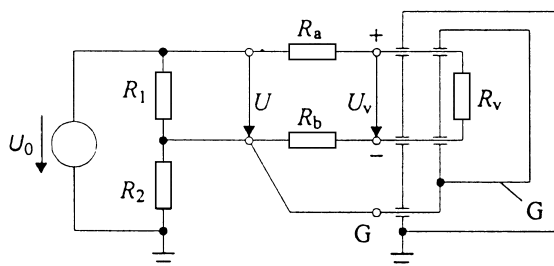


Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Koliko kaže voltmeter z oklopljenim vhodom pri merjenju napetosti na upor R_1 ? Voltmeter ($U_D = 5\text{ V}$, ločljivost: $\Delta U = 10\mu\text{V}$, $R_V = 10\text{ M}\Omega$) ima oklopljeni vhod, priključen kot je narisano na sliki. Narišite nadomestno shemo! Upornost med negativnim vhodom in oklopom je $R_G = 1\text{ G}\Omega$ ter oklopom in ozemlitvijo $R_Z = 1\text{ G}\Omega$. Koliko znaša sistematični pogrešek priključitve?

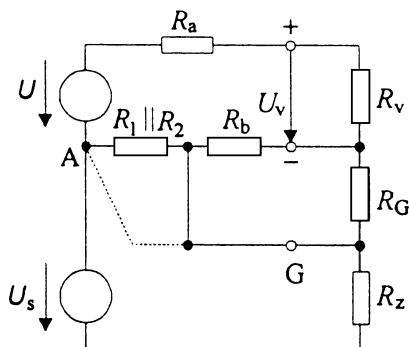
$$R_1 = R_2 = 100\text{ k}\Omega, U_0 = 10\text{ V}$$

$$R_a = R_b = 10\text{ }\Omega$$



Rešitev:

- Nadomestna shema:



- Merjena napetost $U = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 5\text{ V}$ deluje na vhoda voltmetra (+ in -) v nasprotnih smereh.
- Motilna sofazna napetost $U_s = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5\text{ V}$ deluje na vhoda voltmetra v isto smer.

- Ker je $R_G \gg R_b$ in $R_Z \gg R_1 \parallel R_2$, zapišemo za prispevek merjene napetosti na vhodu voltmetra (napetostni delilnik):

$$U_V = U \frac{R_V}{R_1 \parallel R_2 + R_b + R_a + R_V} = 5\text{ V} \cdot 0,995023 = 4,975114\text{ V} \rightarrow U_V = 4,97511\text{ V}$$

- Prispevek motilne sofazne napetosti na vhodu voltmetra je nekaj manjši, kot je padec na nadomestnem upor $R_1 \parallel R_2$:

$$U_{V,m} = U_s \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1 \parallel R_2 + R_Z} \frac{R_V}{R_a + R_b + R_V} \approx U_s \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1 \parallel R_2 + R_Z} = 5\text{ V} \cdot 4,999 \cdot 10^{-5} = 2,4998 \cdot 10^{-4}\text{ V}$$

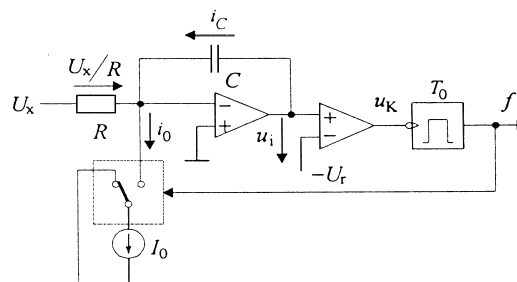
$$\rightarrow U_{V,m} = 0,00025\text{ V}$$

- Skupna napetost je: $U_{\text{skupna}} = U_V + U_{V,m} = 4,97536\text{ V}$

- Ker je prava vrednost merjene napetosti $U = 5\text{ V}$, je sistematični pogrešek zapisan v relativni oblik enak:

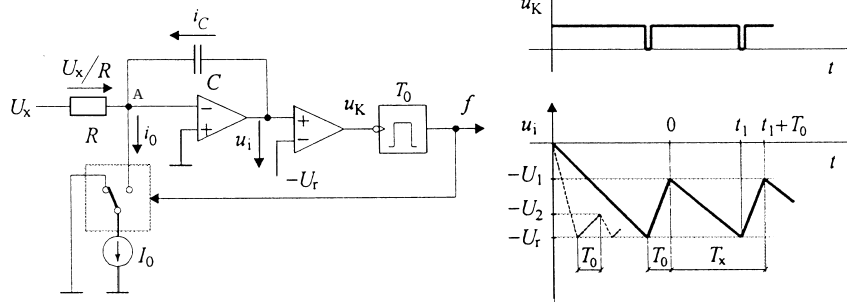
$$e = \frac{U_{\text{skupna}} - U}{U} = -0,0049 = -0,49\%$$

2. Dano vezje je del analogno-digitalnega pretvornika, ki uporablja frekvenco f kot vmesno veličino. Razložite delovanje vezja in izpeljite enačbo za f . Dodajte še manjkajoči del ADP!



Rešitev:

- Vezje:



- Delovanje:

- V času 0 do t_1 pade napetost u_i od $-U_1$ na $-U_r$. Iz vsote tokov na negativnem vходу operacijskega ojačevalnika (vozlišče A) dobimo:

$$\frac{U_x}{R} + C \frac{du_i}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{U_x}{CR}$$

- V času od t_1 do $t_1 + T_0$ naraste napetost u_i od $-U_r$ na $-U_1$, ker dodani tok $I_0 > U_x/R$ v času T_0 spremeni smer integracije:

$$\frac{U_x}{R} - I_0 + C \frac{du_i}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du_i}{dt} = \frac{1}{C} \left(I_0 - \frac{U_x}{R} \right)$$

- Za en cikel izravnave naboja zapišemo:

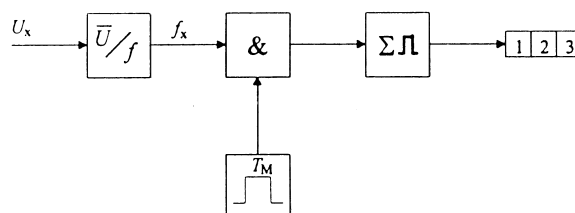
$$\int_{-U_1}^{-U_r} du_i + \int_{-U_r}^{-U_1} du_i = 0 = -\frac{1}{RC} \int_0^{t_1} U_x dt + \frac{1}{C} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \left(I_0 - \frac{U_x}{R} \right) dt$$

in od tod:
$$\frac{I_0 T_0}{C} = \frac{1}{RC} \int_0^{t_1} U_x dt + \frac{1}{RC} \int_{t_1}^{t_1+T_0} U_x dt = \frac{1}{RC} \int_0^{t_1+T_0} U_x dt$$

- Iz $I_0 T_0 = \frac{T_x}{R} \frac{1}{T_x} \int_0^{t_1+T_0} U_x dt = \frac{1}{R f_x} \bar{U}_x$ ($T_x = t_1 + T_0$) izrazimo frekvenco

ponavljanja:
$$f_x = \frac{1}{R I_0 T_0} \bar{U}_x$$

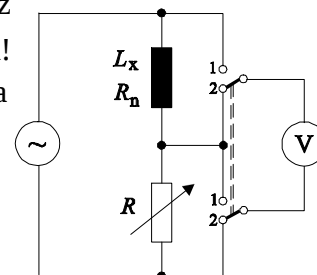
- Digitalizacija se izvrši s štetjem impulzov frekvence, ki je še analogna veličina in nosi informacijo o povprečni napetosti.



- IN vrata se odpro za določen čas T_M . Na števec pride $Z = f_x T_M$ impulzov, ki jih števec prešteje in prikaže na prikazovalniku.

$$Z = f_x T_M = \frac{T_M}{R I_0 T_0} \bar{U}$$

3. Izpeljite enačbo za neznano induktivnost L_x tuljave brez železnega jedra, katere upornost navitja R_n je znana! Spremenljivi upor R toliko časa spreminjamo, da kaže voltmeter v obeh položajih stikala enako.



Rešitev:

- Napetosti v položajih stikala 1 in 2 sta enaki: $U_1 = U_2 \rightarrow I \cdot Z_L = I \cdot R$
- Ker je impedanca tuljave $Z_L = \sqrt{(\omega \cdot L_x)^2 + R_n^2}$, zapišemo: $\sqrt{(\omega \cdot L_x)^2 + R_n^2} = R$
- Induktivnost tuljave je:

$$L_x = \sqrt{\frac{R^2 - R_n^2}{\omega^2}} \rightarrow L_x = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{R^2 - R_n^2}$$

4. Izbrani voltmeter je prilagojen za evropsko tržišče in ima ob merjenju napetosti 5-mestni stabilni prikaz $U_i = 2,3810 \text{ V}$. Integracijski čas ima nastavljen na 1 periodo omrežne napetosti. Kolikšna je lahko amplituda sinusne omrežne motnje, da bi ob uporabi istega voltmetra v državi, kjer imajo omrežno frekvenco 60 Hz, pri merjenju iste napetosti dobili stabilen vsaj 4-mestni prikaz?

$$\overline{U}_{\text{omr}} = \hat{u}_{\text{omr}} \frac{\sin \omega T_i / 2}{\omega T_i / 2}$$

Rešitev:

- Stabilen 4-mestni prikaz pomeni, da se dodana motilna napetost spreminja v mejah zaokrožitve okoli vrednosti $U_i = 2,381 \text{ V}$:

$$U_i \pm \overline{U}_{\text{omr}} = [2,3805, 2,3815] \Rightarrow \overline{U}_{\text{omr,max}} < 0,5 \text{ mV}$$

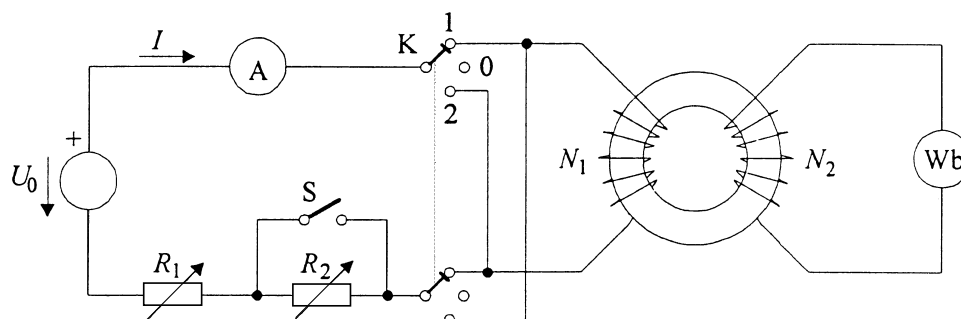
- Omrežna motnja je slabljena z integracijo. Ker integracijski čas ni mnogokratnik motilnega signala, imamo le delno slabljenje. Amplitudo sinusne omrežne motnje dobimo iz največje dopustne tekoče povprečne vrednosti $\overline{U}_{\text{omr}}$ in obratne vrednosti slabljenja:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\text{omr}} &= \overline{U}_{\text{omr,max}} \frac{\omega T_i / 2}{\sin \omega T_i / 2} = 0,5 \text{ mV} \frac{\pi \cdot 60 \text{ Hz} \cdot 20 \text{ ms}}{\sin(\pi \cdot 60 \text{ Hz} \cdot 20 \text{ ms})} \\ &= 0,5 \text{ mV} \cdot 6,413 = 3,2068 \text{ mV} \end{aligned}$$

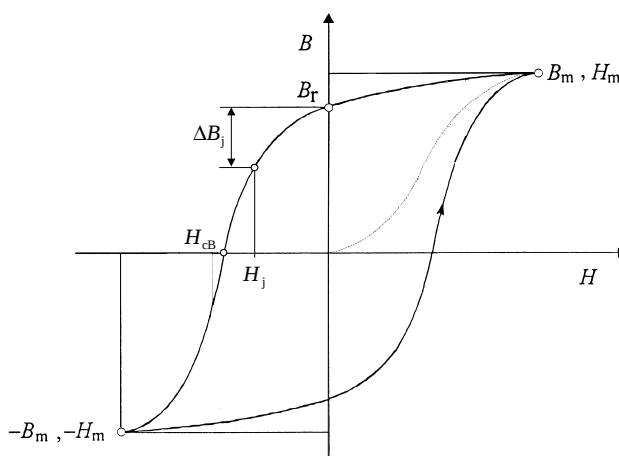
5. Skicirajte vezje za snemanje statične histerezne zanke in razložite:
- postopek nastavitve na zahtevano maksimalno magnetno indukcijo,
 - postopek merjenja razmagnetilne krivulje!

Rešitev:

- Vezje za snemanje statične histerezne zanke:



- Potek snemanja statične histerezne zanke:



- Najprej nastavimo B_m

- K je v polžaju 1. Stikalo S sklenemo, s čimer povečamo tok, ki ga določa upor R_1 . Dosežemo točko (B_m, H_m) .
- Komutiramo stikalo K. Iz dvojne vrednosti B_m zaradi komutiranja dobimo: $y_1 = \frac{2N_2 A}{c_F} B_m$

- Razmagnetilna krivulja:

- Remanentno indukcijo dobimo tako, da pri že nastavljeni vrednosti B_m izklopimo tok ($K \rightarrow 0$):

$$\Delta B = B_m - B_r = \frac{c_F y_r}{N_2 A} \Rightarrow B_r = B_m - \frac{c_F y_r}{N_2 A}$$

- Točke razmagnetilne krivulje med B_r in H_{cb} snemamo z razlikami ΔB_j pri vklapljanju toka v negativno smer (K v polžaj 2):

$$\Delta B_j = \frac{c_F y_j}{N_2 A} \rightarrow B_j = B_r - \Delta B_j; \quad H_j = \frac{I_j N_1}{l_{sr}}$$

- Do naslednjih točk pridemo po obhodu histereze:

$$\rightarrow (-B_m, -H_m) \rightarrow (B_m, H_m) \rightarrow B_r \rightarrow$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

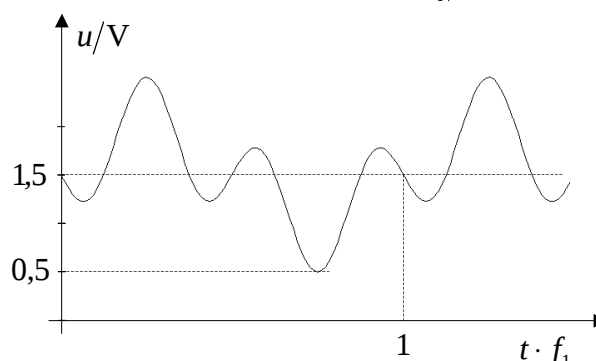
1. Katera je najmanjša vrednost, ki jo dobimo na $4\frac{3}{4}$ -mestnem prikazovalniku voltmetra, ki ima integrirajoči AD pretvornik s $T_i = 10\mu s$, če merimo napetost $u/V = 1,5 + 0,5\sin(20000t) - 0,5\sin(60000t)$? Koliko znaša največji pogrešek zaradi integracije? Napetost merimo na merilnem območju z najboljšo dosegljivo ločljivostjo. Skicirajte razmere!

$$\bar{U} = \hat{u} \frac{\sin \omega T_i / 2}{\omega T_i / 2}$$

Rešitev:

- Skica signala u/V , ki doseže minimalno vrednost $u_{\min} = 0,5V$, ko se od enosmerne vrednosti $U_- = 1,5V$ odštejeta amplitudi obeh komponent:

$$\begin{aligned} u_{\min} &= U_- - \hat{u}_1 - \hat{u}_3 \\ &= 1,5V - 0,5V - 0,5V = 0,5V \end{aligned}$$



- Frekvenci osnovne in tretje harmonske komponente določimo iz izrazov:

$$20000/s = 2\pi f_1 \rightarrow f_1 = \frac{10000}{\pi} \text{ Hz};$$

$$60000/s = 2\pi f_2 \rightarrow f_2 = \frac{30000}{\pi} \text{ Hz}$$

- Integrirajoči AD pretvornik zmanjša amplitudo sinusnega signala po funkciji $\bar{U} = \hat{u} \frac{\sin \pi f T_i}{\pi f T_i}$ v odvisnosti od produkta frekvence sinusnega signala f in integracijskega časa T_i :

- Zmanjšana amplituda osnovne komponente:

$$\bar{U}_1 = 0,5V \frac{\sin\left(\pi \frac{10000}{\pi} T_i\right)}{\pi \frac{10000}{\pi} T_i} = 0,5V \frac{\sin(0,1)}{0,1} = 0,499167V$$

- Zmanjšana amplituda tretje harmonske komponente:

$$\bar{U}_2 = 0,5V \frac{\sin(0,3)}{0,3} = 0,492534V$$

- Ker integrirajoči AD pretvornik enosmerne komponente ne popači, dobimo za najmanjšo vrednost:

$$U_{\min} = 1,5V - 0,499167V - 0,492534V = 1,5V - 0,9917V = 0,5083V$$

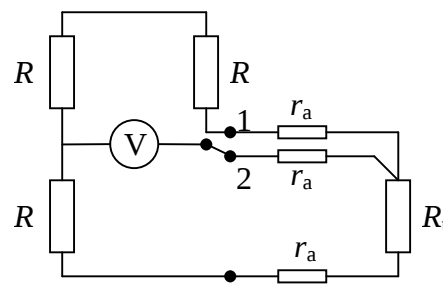
- Napetost je zaokrožena na mestu 0,1mV, ki ga določa $4\frac{3}{4}$ -mestni prikaz (največ kaže 3,9999)

- Največji pogrešek zaradi integracije znaša:

$$e = \frac{U_{\min} - u_{\min}}{u_{\min}} = \frac{U_{\min}}{0,5} - 1 = 0,0166$$

$$\rightarrow e = 0,017\%$$

2. Z uporovnim senzorjem temperature želimo meriti temperaturo s pomočjo Wheatstonovega mostiča. Senzor je preko dolgih vodnikov z upornostjo $r_a = 10\Omega$ tri-vodno priključen na mostič (stikalo v položaju 2). Pri temperaturi 20°C je mostič v ravnovesju. Pri kateri temperaturi je mostič ponovno v ravnovesju, če senzor na mostič priklopimo dvo-vodno (stikalo v položaju 1)?



Temperaturna karakteristika senzorja je $R_t = R_0 \cdot e^{k \cdot t}$, $k = -0,048^\circ\text{C}^{-1}$, $R_0 = 3265\Omega$.

Rešitev:

- Pri **tri-vodni** priključitvi (stikalo v položaju 2) je mostič v ravnovesju, kadar velja: $\frac{R}{R} = \frac{R + r_a}{R_t + r_a} \rightarrow R = R_t$

- Upornost senzorja je pri $t = 20^\circ\text{C}$ enaka:

$$R_{20^\circ\text{C}} = R_0 \cdot e^{k \cdot 20^\circ\text{C}} = 1250,15\Omega$$

- Ker je mostič uravnovešen, velja: $R = R_{20^\circ\text{C}} = 1250,15\Omega$

- Pri **dvo-vodni** priključitvi (stikalo v položaju 1) je mostič v ravnovesju, kadar velja: $\frac{R}{R} = \frac{R}{R_t + 2 \cdot r_a}$

- in od tod: $R = R_t + 2 \cdot r_a$ oz.

$$R_t = R - 2 \cdot r_a = 1250,15\Omega - 2 \cdot 10\Omega = 1230,15\Omega$$

- to pa velja pri temperaturi t_1 , ki jo dobimo iz karakteristike uporovnega senzorja:

$$t_1 = \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{R_t}{R_0} = -\frac{^\circ\text{C}}{0,048} \cdot \ln \frac{1230,15\Omega}{3265\Omega} = 20,34^\circ\text{C}$$

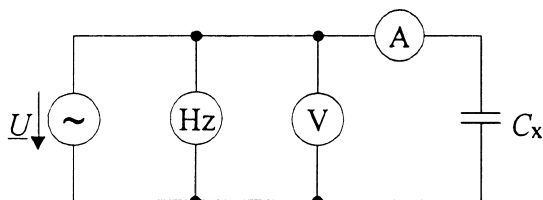
- Razlika v temperaturi $0,34^\circ\text{C}$ pomeni sistematični pogrešek, če senzor priklopimo dvo-vodno in ne tri-vodno.

3. Skicirajte vezje za merjenje kapacitivnosti C_x po UI metodi. Koliko največ je lahko faktor izgub $d = ?$, da ga zanemarimo pri vrednotenju merilnega rezultata?

- frekvenca: $f = 1100 \text{ Hz}$, $u(f) = 1 \text{ Hz}$;
- voltmeter: $U = 100 \text{ V}$, $U_D = 120 \text{ V}$, $r = 0,5$;
- ampermeter: $I = 712 \text{ mA}$, $M_I = \pm(0,5\% I + 2 \text{ dig})$

Rešitev:

- V vezju za merjenje kapacitivnosti C_x po UI metodi potrebujemo poleg voltmetra in ampermetra tudi merilnik frekvence.



- Pri zaporedni nadomestni vezavi izrazimo kompleksno impedanco in faktor izgub:

$$\frac{U}{I} = Z = \sqrt{R_x^2 + \frac{1}{(\omega C_x)^2}} = \frac{1}{\omega C_x} \sqrt{1 + d^2}, \quad d = \omega C_x R_x$$

- Pri realnem kondenzatorju je kapacitivnost, merjena po UI metodi, nekoliko večja kot pri idealnem brezgubnem kondenzatorju ($d \rightarrow 0$, C_x^0)

$$C_x = \frac{I}{U 2\pi f} \sqrt{1 + d^2} = C_x^0 \sqrt{1 + d^2}, \quad C_x^0 = \frac{I}{U 2\pi f} = \frac{712 \text{ mA}}{100 \text{ V} \cdot 2\pi \cdot 1100 \text{ Hz}} = 1,030166 \mu\text{F}$$

- Ker je povečanje kapacitivnosti sistematičnega značaja, je zanemarljivo, kadar je manjše od desetine merilne negotovosti $e = \left(\frac{C_x - C_x^0}{C_x^0} \right) \leq \frac{1}{10} w(C_x^0)$.

- Relativno merilno negotovost zaradi produkta in kvocienta vhodnih veličin zapišemo z geometrijsko vsoto.

$$w(C_x^0) = \sqrt{w^2(I) + w^2(U) + w^2(f)}$$

- Posamezne relativne merilne negotovosti imajo obliko:

$$w(I) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_I}{I} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(0,005 + \frac{2 \text{ mA}}{712 \text{ mA}} \right) = 4,508 \cdot 10^{-3}$$

$$w(U) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_U}{U} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100} \frac{U_D}{U} = \frac{1}{\sqrt{3}} 0,005 \frac{120 \text{ V}}{100 \text{ V}} = 3,464 \cdot 10^{-3}$$

$$w(f) = \frac{u(f)}{f} = \frac{1 \text{ Hz}}{1100 \text{ Hz}} = 9,091 \cdot 10^{-4}$$

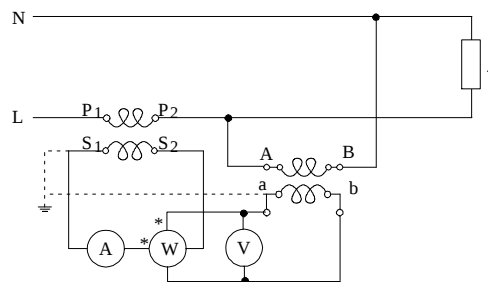
$$w(C_x^0) = \sqrt{(4,508 \cdot 10^{-3})^2 + (3,464 \cdot 10^{-3})^2 + (9,091 \cdot 10^{-4})^2} = 5,7578 \cdot 10^{-3}$$

- Vpliv faktorja izgub zanemarimo, kadar je:

$$e \leq \frac{1}{10} w(C_x^0) = 5,7578 \cdot 10^{-4}; \quad 1 + e = \sqrt{1 + d^2} \rightarrow d = \sqrt{(1 + e)^2 - 1} \leq 3,394 \cdot 10^{-2}$$

4. Kolikšne so delovna, jalova in navidezna moč porabnika?

- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $y_D = 20000 \text{ d}$,
 $y = 12427 \text{ d}$;
- voltmeter: $U = 105 \text{ V}$;
- ampermeter: $I = 4,82 \text{ A}$;
- tokovnik: $I_{pn} = 75 \text{ A}$, $I_{sn} = 5 \text{ A}$;
- napetostnik: $U_{pn} = 50 \text{ kV}$, $U_{sn} = 100 \text{ V}$.



Rešitev:

- Delovna moč se izračuna iz izmerjene vrednosti vatmetra. Potrebno je upoštevati, da je vatmeter priključen na sekundarni strani tokovnega merilnega transformatorja in napetostnega merilnega transformatorja.

$$P = K_{un} \cdot K_{in} \cdot P_W = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} \cdot \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \cdot U_n \cdot I_n \cdot \frac{y}{y_D} =$$

$$= \frac{50 \text{ kV}}{100 \text{ V}} \cdot \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} \cdot 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{12427 \text{ d}}{20000 \text{ d}} = 2,33 \text{ MW}$$

- pri čemer y predstavlja odklon vatmetra v delcih, y_D pa njegov največji odklon.

- Navidezna moč se izračuna iz izmerjenih vrednosti voltmetra in ampermetra. Pozor, tudi ta dva instrumenta sta vezana na sekundarni strani tokovnika in napetostnika.

$$S = K_{un} \cdot K_{in} \cdot U \cdot I = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} \cdot \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \cdot U \cdot I =$$

$$= \frac{50 \text{ kV}}{100 \text{ V}} \cdot \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} \cdot 105 \text{ V} \cdot 4,82 \text{ A} = 3,796 \text{ MVA}$$

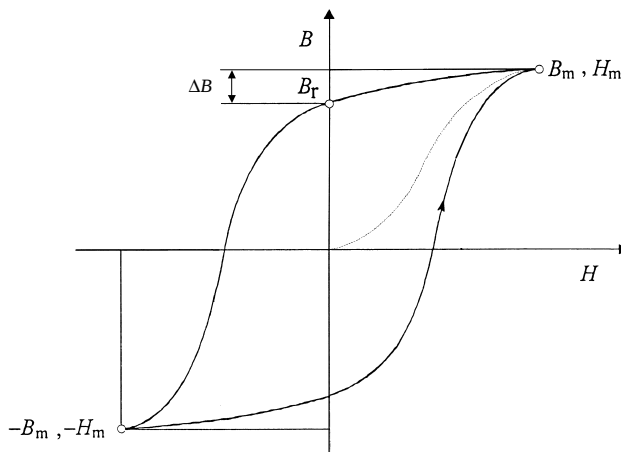
- In še izračun jalove moči.

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(3,796 \text{ MVA})^2 - (2,33 \text{ MW})^2} = 2,996 \text{ MVar}$$

5. Pri komutaciji toka skozi Hopkinsonov jarem smo dobili na zaslonu DSO srednji vrednosti napetosti impulzov: $-B \rightarrow +B$: $\bar{U}_1 = -182 \text{ mV}$; $+B \rightarrow -B$: $\bar{U}_2 = 170 \text{ mV}$. Material je bil v nasičenju pri $B = 1,7 \text{ T}$. Koliko znaša remanenčna vrednost magnetne indukcije, če dobimo ob izklopu vzbujanja $+B \rightarrow B_r$ na osciloskopu $\bar{U}_{B_r} = 26 \text{ mV}$. Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Skica magnetilnice:



- Ob preklopu $-B \rightarrow +B$ se pri dolčanju srednje vrednosti poleg merjene inducirane napetosti u integrira tudi enosmerna preostala napetost u_0 :

$$\frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} -u \, dt + \frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} u_0 \, dt = \bar{U}_1$$

- Ker se polariteta preostale napetosti ne spremeni, dobimo ob preklopu $+B \rightarrow -B$:

$$\frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} u \, dt + \frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} u_0 \, dt = \bar{U}_2$$

- S povprečenjem dobimo prispevek same merjene napetosti:

$$\bar{U} = \frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} u \, dt = \left| \frac{\bar{U}_2 - \bar{U}_1}{2} \right| = 176 \text{ mV};$$

- in vrednost preostale napetosti: $\frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} u_0 \, dt = u_0 = \frac{\bar{U}_2 + \bar{U}_1}{2} = -6 \text{ mV}$

- Iz enačbe za magnetno indukcijo $B = \frac{1}{2 N_2 A} \frac{1}{a} \int_0^{T_M} u \, dt = \frac{T_M \bar{U}}{2 N_2 A a} = \frac{k \bar{U}}{2}$

$$\text{določimo konstanto: } k = \frac{2B}{\bar{U}} = \frac{2 \cdot 1,7 \text{ T}}{176 \text{ mV}} = 19,318 \frac{\text{T}}{\text{V}}$$

- Ob izklopu vzbujanja $+B \rightarrow B_r$ moramo najprej popraviti napetost za prispevek preostale napetosti: $\Delta \bar{U}_{B_r} = \bar{U}_{B_r} - u_0 = 26 \text{ mV} - (-6 \text{ mV}) = 32 \text{ mV}$ in izračunati spremembo magnetne indukcije: $\Delta B = k \Delta \bar{U}_{B_r} = 0,618 \text{ T}$

- Remanenčna vrednost magnetne indukcije znaša:

$$B_r = B_{\max} - \Delta B = 1,7 \text{ T} - 0,618 \text{ T} = 1,082 \text{ T}$$

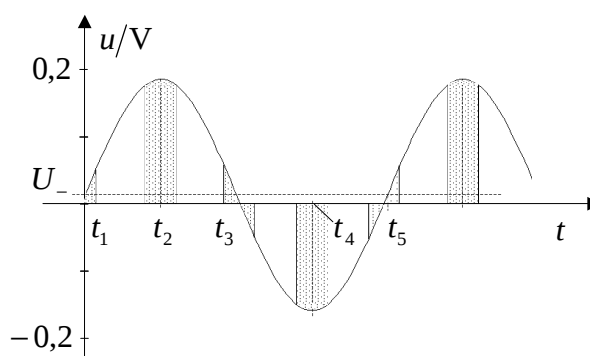
Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Z integrirajočim ADP smo vzorčili sinusni signal $f = 50\text{ Hz}$ s časom integracije $T_{i1} = 2\text{ ms}$ in vzorčno frekvenco $f_s = 200\text{ Hz}$. Dobili smo zaporedje vzorčnih vrednosti napetosti, ki se po štirih začno ponavljati: $\bar{U}(t_1) = 0,014\text{ V}$, $\bar{U}(t_2) = 0,191\text{ V}$, $\bar{U}(t_3) = 0,014\text{ V}$, $\bar{U}(t_4) = -0,163\text{ V}$, $\bar{U}(t_5) = 0,014\text{ V} \dots$ Koliko znaša amplituda vhodnega sinusnega signala? Skicirajte razmere!

$$\bar{U} = \hat{u} \frac{\sin \omega T_i / 2}{\omega T_i / 2}$$

Rešitev:

- Skica vzorčenja:



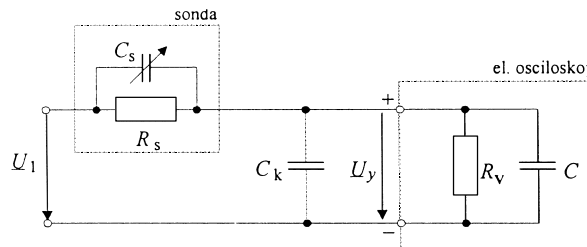
- Ker se vrednosti vzorca ponavljajo pri vsakem drugem vzorcu in je frekvenca vzorčenja $f_s = 200\text{ Hz}$ 4-krat večja od $f = 50\text{ Hz}$, je ta vrednost enaka vrednosti prehoda izmeničnega dela signala mimo enosmernega nivoja $U_- = 0,014\text{ V}$ pri obeh strminah. Povzorčeni signal je sestavljen iz enosmerne komponente (prispevek ADP) in sinusnega signala. Zaradi integracijskega delovanja ADP je zmanjšana amplituda enaka:

$$\bar{U} = \bar{U}(t_2) - U_- = \bar{U}(t_4) + U_- = 0,177\text{ V}$$

- Amplitudo sinusnega signala izračunamo iz:

$$\hat{u} = \bar{U} \frac{\pi f T_i}{|\sin(\pi f T_i)|} = \bar{U} \cdot 1,01669 = 0,180\text{ V}$$

2. Koliko morata biti upornost $R_s = ?$ in kapacitivnost $C_s = ?$ frekvenčno kompenzirane napetostne sonde, da bo zmanjšan nivo vhodnega signala na osciloskopu ($R_V = 1\text{M}\Omega$, $C = 30\text{pF}$) z razmerjem 10:1? Za povezavo je uporabljen koaksialni kabel ($C_k/l = 50\text{pF/m}$) dolžine $l = 1,2\text{m}$.



Rešitev:

- Razmerje sonde 10:1 mora veljati tudi za enosmerne signale, zato napetostni delilnik določata upora sonde R_s in vhodne upornosti R_V :

$$\frac{U_y}{U_1} = \frac{1}{10} = \frac{R_V}{R_V + R_s} \rightarrow \frac{R_V}{R_s} = \frac{1}{9}, \quad R_s = 9R_V = 9\text{M}\Omega$$

- Če želimo, da je napetostna sonda frekvenčno kompenzirana, mora biti izpolnjen pogoj:

$$R_s \cdot C_s = R_V \cdot C_V$$

- Vhodno kapacitivnost delinika C_V sestavljata kapacitivnost povezovalnega kabla C_k in kapacitivnost vhoda osciloskopa C_{osc} :

$$C_V = C_{osc} + C_k = C_{osc} + l \frac{C_k}{l} = 30\text{pF} + 1,2\text{m} \frac{50\text{pF}}{\text{m}} = 90\text{pF}$$

- Sedaj lahko izračunamo potrebno kapacitivnost frekvenčno kompenzirane sonde:

$$C_s = \frac{R_V \cdot C_V}{R_s} = \frac{1}{9} \cdot 90\text{pF} = 10\text{pF}$$

3. Pri Kelvinovem (Thomsonovem) mostiču uporabimo za ničelni indikator voltmetr z veliko upornostjo. Koliko mora biti ločljivost voltmetra, če želimo razločiti spremembo merjene upornosti $1\mu\Omega$? $R_x \approx R_N = 5\text{m}\Omega$; $I_0 = 5\text{A}$

$$\delta_q = \frac{(\Delta R_1)_q}{R_{10}} = \frac{(\Delta I_5)_q}{U_0} [R_{10} + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 (R_{10}/R_2 + 2 + R_2/R_{10})]$$

Rešitev:

- Ob upoštevanju naslednjih dejstev:
 - velika upornost ničelnega indikatorja ($R_5 \gg R_{10}, R_2, R_3, R_4$) nam tokovno občutljivost spremeni v napetostno:

$$(\Delta U_5)_q = R_5 \cdot (\Delta I_5)_q;$$

- in enakost upornosti: $R_x \approx R_N \rightarrow R_{10} \approx R_2$;
- se izhodiščna enačba spremeni v:

$$\delta_q = \frac{(\Delta R)_q}{R_x} = \frac{(\Delta U_5)_q}{U_0} (R_{10}/R_2 + 2 + R_2/R_{10}) \approx 4 \frac{(\Delta U_5)_q}{U_0}$$

- Ker je mostič napajan s tokovnim virom in so vsi štirje upori enaki $R_{10} \approx R_2 \approx R_3 \approx R_4 = R$, zapišemo za U_0 :

$$U_0 = I_0 \frac{R_{10}}{R_3} (R_3 + R_4) \approx I_0 \cdot 2R$$

- in vstavimo v izraz za ločljivost:

$$\frac{(\Delta R)_q}{R} \approx 4 \frac{(\Delta U_5)_q}{U_0} \approx 2 \frac{(\Delta U_5)_q}{I_0 \cdot R}$$

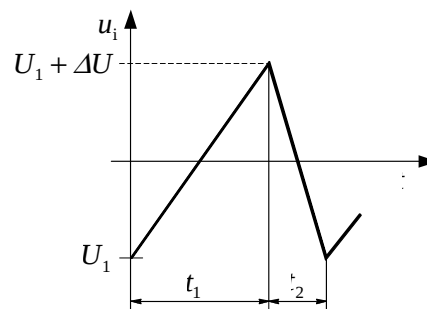
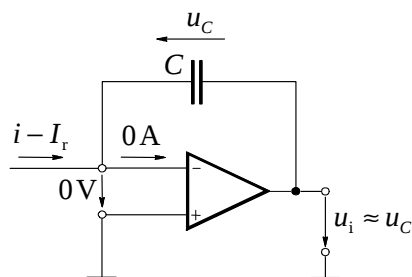
- Če želimo ločiti $(\Delta R)_q = 1\mu\Omega$, mora biti ločljivost voltmetra:

$$(\Delta U_5)_q = \frac{I_0 \cdot (\Delta R)_q}{2} = \frac{5\text{A} \cdot 1\mu\Omega}{2} = 2,5\mu\text{V}$$

4. V katerih mejah lahko pričakujemo razmerja časov $r = t_1/t_2$ pri elektronskem pretvorniku moči ($U_n = 100\text{V}$; $I_n = 1\text{A}$) z amplitudno širinsko modulacijo ($I_R = 10\text{mA}$)? Na tokovnem vходу je tokovni merilni transformator s prestavnim razmerjem 1000:1. Skicirajte razmere.

Rešitev:

- Skica:



- Čas t_1 je določen s kapacitivnostjo C , histerezno napetostjo ΔU , referenčnim tokom I_r in merjenim tokom i : $t_1 = -\frac{C \Delta U}{i - I_r} = \frac{C \Delta U}{I_r - i}$.

- Podobno je določen tudi čas $t_2 = \frac{C \Delta U}{I_r + i}$.

- Razmerja časov je $r = \frac{t_1}{t_2} = \frac{I_r + i}{I_r - i} = \frac{1 + \frac{i}{I_r}}{1 - \frac{i}{I_r}}$

- Temenska vrednost toka, ki določa največjo oz. najmanjšo trenutno vrednost merjenega toka, je enaka: $\hat{i} = \sqrt{2} \frac{1\text{A}}{1000} = 1,4142\text{mA}$.

- Maksimalna vrednost razmerja r je dosežena pri maksimalni vrednosti toka $\hat{i}$:

$$r_{\max} = \frac{1 + \frac{\hat{i}}{I_r}}{1 - \frac{\hat{i}}{I_r}} = 1,329$$

- Minimalna vrednost razmerja r je dosežena pri minimalni vrednosti toka $-\hat{i}$:

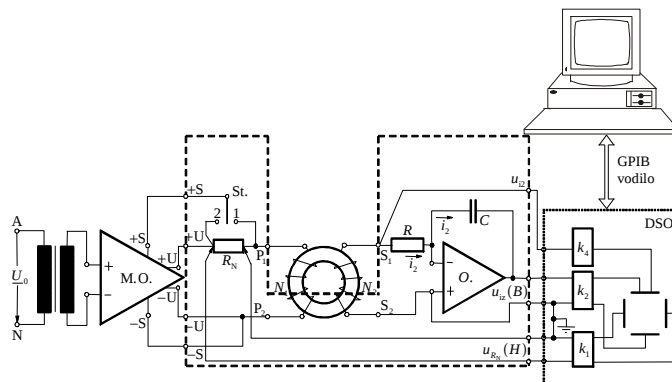
$$r_{\min} = \frac{1 - \frac{\hat{i}}{I_r}}{1 + \frac{\hat{i}}{I_r}} = 0,752$$

5. Pri merjenju dinamične histerezne zanke feromagnetnega jedra, pri sinusni obliki gostote magnetnega pretoka B , ste s primernim vezjem dobili dve izmerjeni vrednosti skupnih izgub v jedru. In sicer $P_{s1} = 1,125 \text{ W/kg}$ pri $F_1/F_0 = 1,211$ in $P_{s2} = 1,266 \text{ W/kg}$ pri $F_2/F_0 = 1,322$. Koliko znašajo skupne, histerezne in vrtilne izgube pri $F_3/F_0 = 1$?

Rešitev:

$$P_s = aB_m^n f + b \frac{d^2 B_m^2 F^2 f^2}{\rho} = P_h + P_e$$

$$P_s = P_h + c \left(\frac{F}{F_0} \right)^2$$

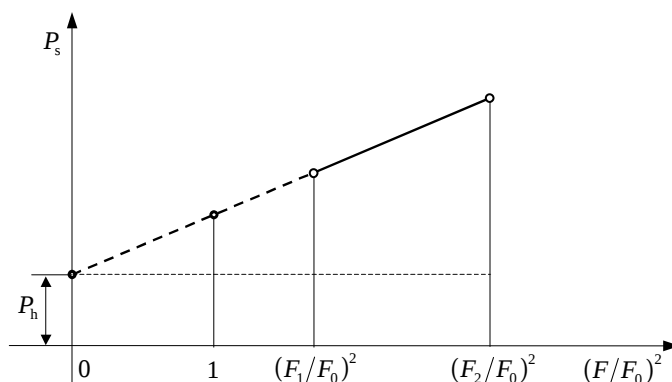


- Iz dveh izmerjenih točk definiramo koeficiente premice, ki gre skozi izmerjeni točki.

$$P_s = P_h + c \left(\frac{F}{F_0} \right)^2$$

$$P_{s1} = P_h + c \left(\frac{F_1}{F_0} \right)^2$$

$$P_{s2} = P_h + c \left(\frac{F_2}{F_0} \right)^2$$



$$1,125 = P_h + c(1,211)^2$$

$$1,266 = P_h + c(1,322)^2$$

$$1,266 - 1,125 = c((1,322)^2 - (1,211)^2) \rightarrow c = 0,502 \text{ W/kg}$$

- Če koeficient c vstavimo v eno od gornjih enačb, dobimo $P_h = 0,390 \text{ W/kg}$.
 - Histerezne izgube so konstantne: $P_{h1} = P_{h2} = P_{h3} = 0,390 \text{ W/kg}$
- Preračun izgub na $F_3/F_0 = 1$ se izvede z vstavitvijo podatkov v osnovno enačbo.

$$P_{s3} = 0,390 \text{ W/kg} + 0,502 \text{ W/kg} \cdot (1)^2 = 0,891 \text{ W/kg}$$

- Vrtilne izgube dobimo, če od skupnih izgub odštejemo histerezne.

$$P_{e3} = P_{s3} - P_{h3} = 0,502 \text{ W/kg}$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Koliko mora biti izolacijska upornost voltmetra $R_Z = ?$, s katerim merimo diagonalno napetost odklonskega četrtinskega mostiča $R_{10} = R_2 = R_3 = R_4 = 1\text{k}\Omega$, $U_0 = 4\text{ V}$, $R_V \gg R_{10}$, da bo vpliv motilne sofazne napetosti manjši od enega odstotka, pri spremembi upora $\Delta R_1 / R_{10} = 0,01$. Upornosti vezi zanemarite.

Rešitev:

- Merjena diagonalna napetost odklonskega četrtinskega mostiča pri pogoju, da je upornost voltmetra zelo velika $R_V \gg R_{10}$, je enaka:

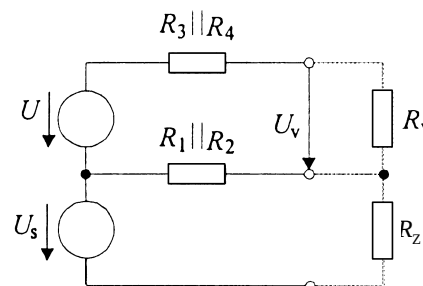
$$U_5 = \frac{U_0}{4} \frac{\Delta R_1}{R_{10}} = 10\text{ mV}$$

- Vpliv motilne sofazne napetosti $U_s \approx U_A \approx U_B \approx U_0/2 = 2\text{ V}$ (velja za mostič z enakimi upornostmi) naj bo pod odstotkom merjene napetosti:

$$U_{m,s} \leq 0,01 \cdot U_5 = 100\text{ }\mu\text{V}$$

- Prispevek sofazne napetosti na vhodu voltmetra $U_{m,s}$ določa napetostni delilnik nadomestne notranje upornosti mostiča $R_1 \parallel R_2$ v spodnji veji in izolacijske upornosti R_Z , ker se ves padec napetosti z upornosti $R_1 \parallel R_2$ prenese neposredno na vhod voltmetra zaradi velike vhodne upornosti voltmetra $R_V \gg R_3 \parallel R_4$:

$$U_{m,s} = U_s \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1 \parallel R_2 + R_Z}$$



- Izolacijsko upornost voltmetra določimo iz enačbe:

$$\frac{U_{m,s}}{U_s} = \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1 \parallel R_2 + R_Z} = \frac{500\text{ }\Omega}{500\text{ }\Omega + R_Z} = \frac{10^{-4}\text{ V}}{2\text{ V}} = 5 \cdot 10^{-5}$$

$$\rightarrow R_Z \geq 9,9995\text{ M}\Omega \approx 10\text{ M}\Omega$$

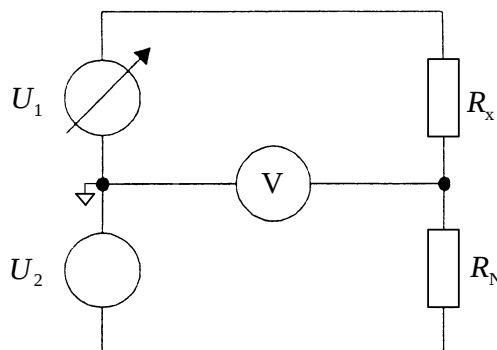
- Pri tem je slabljenje sofaznega signala izraženo v decibelih enako:

$$20\log \frac{U_{m,s}}{U_s} = 20\log(5 \cdot 10^{-5}) \approx -86\text{ dB}$$

2. Z aktivnim mostičem z dvema enosmernima napetostnima viroma merimo upornost R_x . Po končanem uravnovešanju smo odčitali napetosti virov $U_1 = 1,000 \text{ V}$ ter $U_2 = -2,000 \text{ V}$. Za R_2 smo izbrali etalonski upor 1000Ω . Kolikšen je sistematični pogrešek izmerjene R_x , če nismo upoštevali lastnega pogreška voltmetra $E_V = -5 \text{ mV}$? Voltmeter in enosmerna vira imajo isto skupno točko. $R_V \gg R_x, R_2$

Rešitev:

- Vežalna shema:



- Če voltmeter nima lastnega pogreška, je ravnovesna enačba $\frac{U_1}{R_x} + \frac{U_2}{R_N} = 0$ in od

tod dobimo: $R_x^0 = R_N \frac{U_1}{|U_2|} = 500 \Omega$

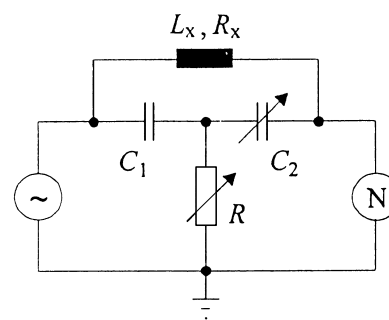
- Lastni pogrešek voltmetra doda sistematični zamik v ravnovesni enačbi:

$$\frac{U_1 - E_V}{R_x} = \frac{|U_2| + E_V}{R_N} \rightarrow R_x = R_N \frac{1,000 \text{ V} + 5 \text{ mV}}{2,000 \text{ V} - 5 \text{ mV}} = 503,76 \Omega$$

- Sistematični pogrešek merjenja R_x zaradi lastnega pogreška voltmetra je:

$$E = R_x - R_x^0 = 3,76 \Omega$$

3. Podajte merilno območje za induktivnost tuljave, ki jo merimo s premoščenim T-vezjem (ravnovesje: $\underline{Y}_A + \underline{Y}_x = 0$) pri frekvenci napetostnega vira $f = 10 \text{ kHz}$, če je kondenzator $C_1 = 150 \text{ nF}$ in lahko spreminjamo kapacitivno dekado $10 \text{ nF} \leq C_2 \leq 200 \text{ nF}$ in uporovno dekado $1 \text{ k}\Omega \leq R \leq 10 \text{ k}\Omega$!



$$\underline{Y}_A = \frac{j\omega C_1 \cdot j\omega C_2}{j\omega C_1 + j\omega C_2 + 1/R}$$

Rešitev:

- Ničelni indikator bo ostal brez odklona, ko bo $\underline{Y}_A + \underline{Y}_x = 0$:

$$\frac{j\omega C_1 \cdot j\omega C_2}{j\omega C_1 + j\omega C_2 + 1/R} + \frac{1}{R_x + j\omega L_x} = 0$$

- Ko izenačimo imaginarni del enačbe z nič, dobimo $\omega L_x = \frac{C_1 + C_2}{\omega C_1 C_2}$ in od tod:

$$L_x = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

- V našem primeru se spreminja samo C_2 :

$$\blacksquare \quad C_2 = 10 \text{ nF}: \quad L_x = \frac{1}{(2\pi \cdot 10000)^2} \left(\frac{1}{150 \text{ nF}} + \frac{1}{10 \text{ nF}} \right) = 27,02 \text{ mH}$$

$$\blacksquare \quad C_2 = 200 \text{ nF}: \quad L_x = \frac{1}{(2\pi \cdot 10000)^2} \left(\frac{1}{150 \text{ nF}} + \frac{1}{200 \text{ nF}} \right) = 2,955 \text{ mH}$$

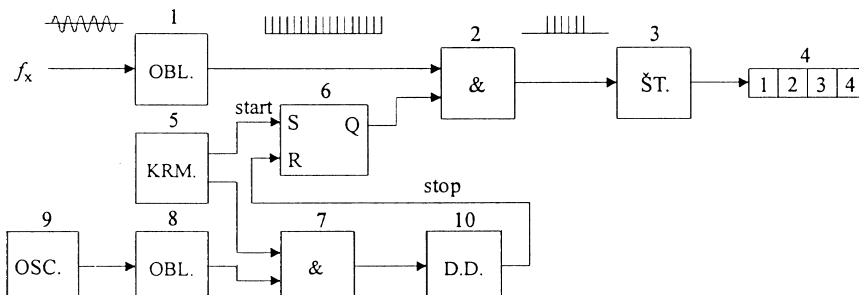
- Pri danih pogojih lahko induktivnost tuljave merimo v območju:

$$2,955 \text{ mH} \leq L_x \leq 27,02 \text{ mH}$$

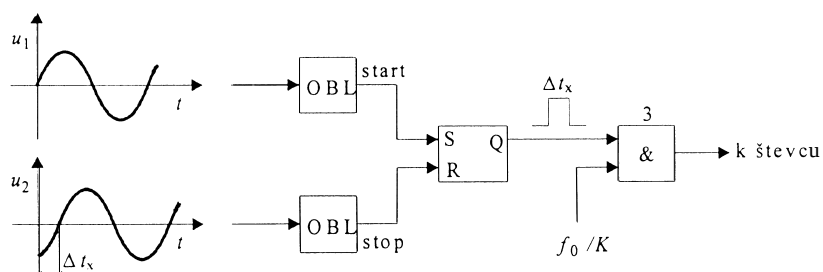
4. Narišite blokovno shemo univerzalnega elektronskega števca pri merjenju frekvence in časovnega zamika. Izračunajte kot φ , če imamo pri merjenju frekvence $Z_1 = 10000$, $K_1 = 10^8$ in pri merjenju časovnega premika $Z_2 = 100$, $K_2 = 10$! Koliko je standardna negotovost zaradi kvantizacijskega pogreška pri merjenju kota?

Rešitev:

- Shema števca pri merjenju frekvence:



- Shema števca pri merjenju časovnega zamika:



- Kot φ določimo z merjenjem frekvence in časovnega zamika (časa):

$$\varphi = 2\pi \cdot f_x \cdot \Delta t_x = 2\pi \cdot \frac{Z_1}{K_1 T_0} \cdot K_2 T_0 Z_2 = 2\pi \cdot \frac{K_2}{K_1} \cdot Z_1 Z_2 = 2\pi \cdot 0,1$$

$$\varphi_x = \frac{Z}{T_M} = \frac{Z_1}{K_1 T_0}$$

$$\Delta t_x = \frac{Z_2}{f_0 / K_2} = K_2 T_0 Z_2$$

$$\text{Kot } \varphi \text{ je: } \varphi = 2\pi \cdot 0,1 = 0,6283 \text{ rad ali } \varphi \approx 360^\circ \cdot 0,1 = 36^\circ$$

- Standardna negotovost zaradi kvantizacijskega pogreška.

- Pri produktu merjenih veličin splošno zapišemo:

$$w(\varphi) = \sqrt{w^2(f) + w^2(\Delta t)}$$

- Kvantizacijska negotovost merjenja časovnega zamika je precej večja kot pri merjenju frekvence zaradi manjšega števila preštetih impulzov:

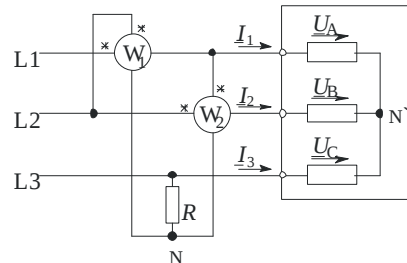
$$w_q(f) = \frac{m_q(f)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{Z_1 \sqrt{6}} \ll w_q(\Delta t) = \frac{m_q(\Delta t)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{Z_2 \sqrt{6}}$$

$$w_q(\varphi) \approx w_q(\Delta t) = 4,08 \cdot 10^{-3}$$

5. V trifaznem sistemu želite meriti jalovo moč nesimetričnega bremena. Kateri pogoji morajo biti izpolnjeni, da jo lahko merite z dvema vatmetroma? Koliko znaša, če kaže prvi vatmeter $P_1 = 30,1\text{W}$ in drugi $P_2 = 25,1\text{W}$?

Rešitev:

- Jalovo moč lahko izmerimo z dvema W-metroma, z vezavo na sliki, če imamo:
 - trifazni **trivodni** sistem,
 - uravnovešen trifazni vir in pravilno fazno zaporedje,
 - ter dodatni upor $R = R_{W1,n} = R_{W2,n}$ za določitev težiščne točke simetričnega trikotnika, da dobimo fazno napetost, ki je za 90° zamaknjena proti medfazni napetosti.
- Ker je v trivodnem sistemu vsota tokov nič, lahko zapišemo $\underline{I}_3^* = -(\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^*)$ in jalovo moč izrazimo s: $Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ (\underline{U}_A - \underline{U}_C) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_B - \underline{U}_C) \underline{I}_2^* \}$
 - Pri simetričnem napajanju zapišemo za napetost med fazama 1 in 3: $\underline{U}_A - \underline{U}_C = \underline{U}_{13} = \sqrt{3} \underline{U}_{2N} e^{j90^\circ}$
 - in za napetost med fazama 2 in 3: $\underline{U}_B - \underline{U}_C = \underline{U}_{23} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{-j90^\circ}$
- Skupno jalovo moč merimo z dvema vatmetroma:

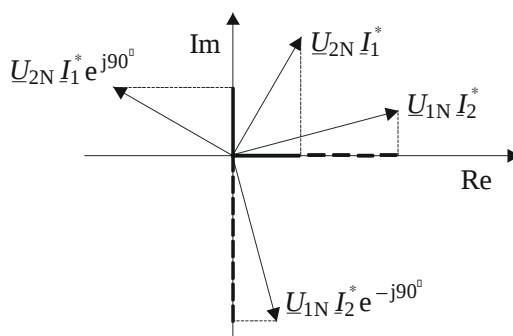


$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \left\{ \sqrt{3} \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* e^{j90^\circ} + \sqrt{3} \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* e^{-j90^\circ} \right\}$$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* e^{j90^\circ} \} + \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* e^{-j90^\circ} \} \right]$$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* \} - \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* \} \right]$$

$$Q = \sqrt{3} (P_{W1} - P_{W2}) = \sqrt{3} (30,1\text{W} - 25,1\text{W}) = 8,7\text{VAr}$$



Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Digitalni spominski osciloskop ima pomnilnik, v katerega lahko shranimo največ $Z_m = 1000$ podatkov, analogno-digitalni pretvornik pa ima največjo frekvenco vzorčenja $f_{s,m} = 10 \text{ MHz}$. Kolikšni sta dejanska frekvenco vzorčenja in ekvivalentna frekvenco vzorčenja, če je širina zaslona $x_m = 10 \text{ d}$, odklonski koeficient k_t pa 5 ms/d , $50 \mu\text{s/d}$ in 50 ns/d ? Skicirajte naključni način zajemanja vzorcev v ekvivalentnem času!

Rešitev:

- O ekvivalentni frekvenci vzorčenja govorimo, kadar je frekvenco vzorcev oziroma prikazanih točk f'_s na zaslonu navidezno večja od dejanske maksimalne vzorčne frekvence $f'_s > f_{s,m}$.

- Frekvenco f'_s določa izbrana časovna konstanta in število točk zaslona Z_m :

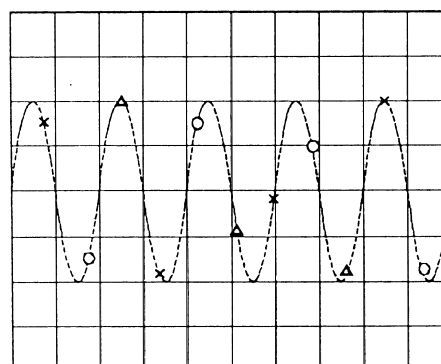
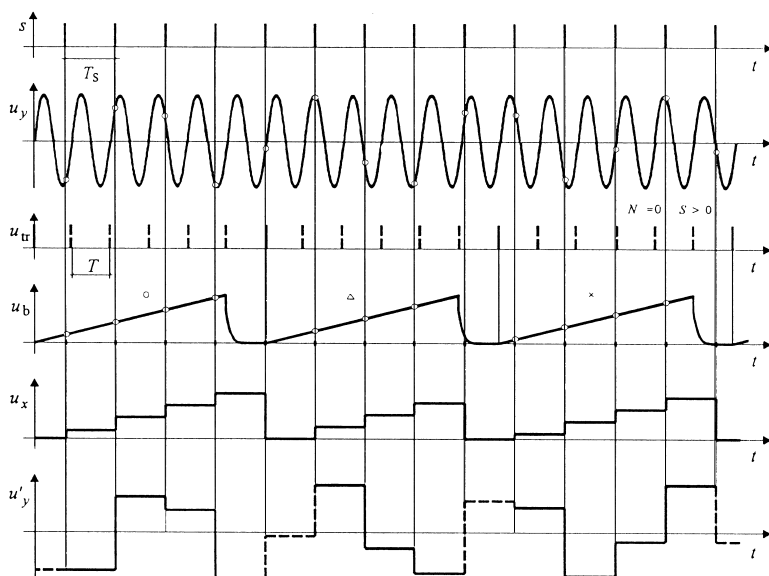
$$f'_s = \frac{Z_m}{k_t \cdot x_m} = \frac{Z_m}{k_t \cdot 10 \text{ d}}$$

- Navidezna frekvenco vzorčenja se spreminja s k_t :

- $k_t = 5 \text{ ms/d}$: $f'_s = 20 \text{ kHz} < f_{s,m}$
- $k_t = 50 \mu\text{s/d}$: $f'_s = 2 \text{ MHz} < f_{s,m}$
- $k_t = 50 \text{ ns/d}$: $f'_s = 2 \text{ GHz} > f_{s,m}$

- ekvivalentna frekvenco vzorčenja $f'_{s,eq} = 2 \text{ GHz}$

- Naključni način zajemanja vzorcev v ekvivalentnem času



- 1. posnetek
- △ 2. posnetek
- × 3. posnetek

Nastajanje slike na zaslonu osciloskopa

2. Pri merjenju upornosti $R_x \approx 2 \text{ m}\Omega$ s Kelvinovim (Thomsonovim) mostičem imamo na razpolago uporovni etalon $R_N = 10^{-2} \Omega$. Določite mesto vključitve v mostič, ki nam da najmanjšo standardno negotovost merjene upornosti! Ali ima voltmeter kot ničelni indikator ustrezno ločljivost?

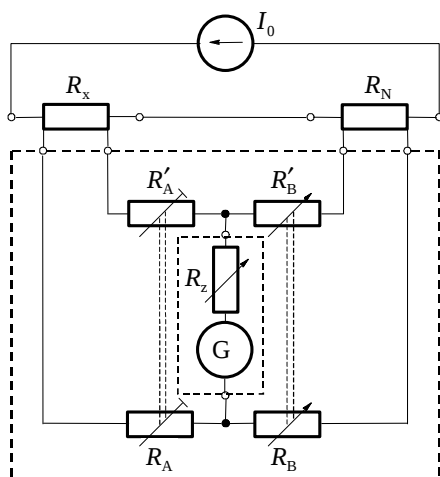
• mostič: $R_A = R'_A = 10 \times (100, 10, 1, 0,1) \Omega$; $m_{R_A} = m_{R_B} = m_{R_N} = 3 \cdot 10^{-4}$
 $R_B = R'_B = (10, 100, 1000) \Omega$; $I_0 = 6 \text{ A}$

• voltmeter: $(\Delta U_5)_q = 1 \mu\text{V}$, $R_V = 10 \text{ M}\Omega$; $\delta_q = \frac{(\Delta I_5)_q}{I_0 R_{10}} \left[2R_3 + R_g \left(1 + \frac{R_3}{R_4} \right) \right]$

Rešitev:

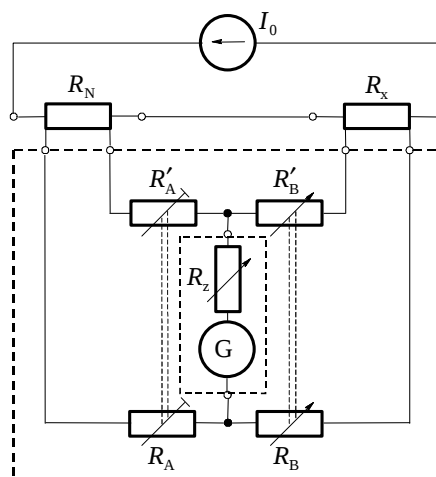
- a) prva priključitev:

$$\frac{R_x}{R_N} = \frac{1}{5} = \frac{R_A}{R_B} \rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{200 \Omega}{1000 \Omega}$$



- b) druga priključitev:

$$\frac{R_x}{R_N} = \frac{1}{5} = \frac{R_B}{R_A} \rightarrow \frac{R_B}{R_A} = \frac{500 \Omega}{10 \Omega}$$



- Relativna ločljivost zadnjega mesta spremenljive dekad R_A pri drugi priključitvi je manjša kot pri prvi:

$$\delta_a = \frac{0,1 \Omega}{200 \Omega} = 0,0005 > \delta_b = \frac{0,1 \Omega}{500 \Omega} = 0,0002 \rightarrow \text{izberemo drugo priključitev}$$

- Ne glede na vključitev uporov je ločljivost mostiča **zaradi ločljivosti ničelnega indikatorja**, ki ima visoko notranjo upornost – voltmeter – enaka:

$$R_3 \ll R_g \rightarrow \delta_q = \frac{(\Delta I_5)_q R_g}{I_0 R_{10}} \left(1 + \frac{R_3}{R_4} \right) = \frac{(\Delta U_5)_q}{I_0 R_x} \left(1 + \frac{R_x}{R_N} \right)$$

$$\delta_q = \frac{(\Delta U_5)_q}{I_0 R_x} \left(1 + \frac{R_x}{R_N} \right) = \frac{1 \mu\text{V}}{6 \text{ A} \cdot 2 \text{ m}\Omega} \left(1 + \frac{1}{5} \right) = 10^{-4} < \delta_b$$

- Ta ločljivost nam omogoča nastavljanje tudi zadnje spremenljive dekad R_A .

- Standardna negotovost mostiča **zaradi ločljivosti ničelnega indikatorja** je enaka:

$$w_q = \frac{\delta_q}{2\sqrt{3}} = 2,88 \cdot 10^{-5} \text{ in je zanemarljiva } (w_q \leq w_0(R_x)/5)$$

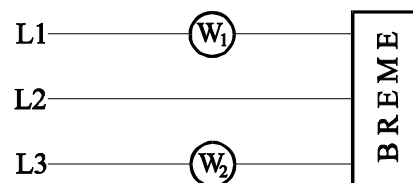
- Standardna negotovost mostiča **zaradi negotovosti upornosti** je enaka:

$$w_0(R_x) = \sqrt{w^2(R_N) + w^2(R_A) + w^2(R_B)} = \sqrt{\frac{m^2(R_N)}{3} + \frac{m^2(R_A)}{3} + \frac{m^2(R_B)}{3}} = 3 \cdot 10^{-4}$$

- V skupni standardni negotovosti upoštevamo ločljivost spremenljive dekad:

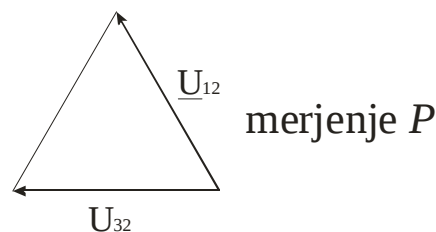
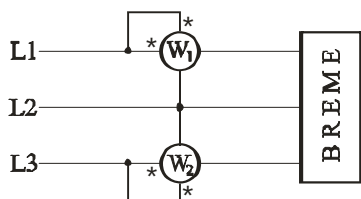
$$w(R_x) = \sqrt{w_0^2(R_x) + \left(\frac{\delta_b}{2\sqrt{3}} \right)^2} = 3,055 \cdot 10^{-4} \rightarrow 3,1 \cdot 10^{-4}$$

3. Dopolnite vezje za merjenje delovne oziroma jalove moči! Narišite pripadajoča fazorska diagrama in izpeljite enačbi za P in Q !



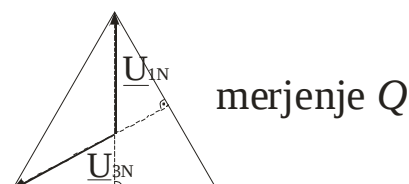
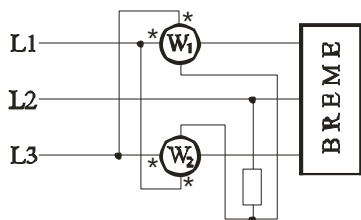
Rešitev:

- Vezje za merjenje delovne moči.



$$\begin{aligned} P &= \overline{u_A i_1} + \overline{u_B i_2} + \overline{u_C i_3} = \overline{u_A i_1} + \overline{u_B (-i_1 - i_3)} + \overline{u_C i_3} = \\ &= \overline{(u_A - u_B) i_1} + \overline{(u_C - u_B) i_3} = \overline{u_{12} i_1} + \overline{u_{32} i_3} = P_{W1} + P_{W2} \end{aligned}$$

- Vezje za merjenje jalove moči.



$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N'} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{2N'} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{3N'} \underline{I}_3^* \}$$

- Ker je v trivodnem sistemu vsota tokov nič, lahko zapišemo $\underline{I}_2^* = -(\underline{I}_1^* + \underline{I}_3^*)$ in jalovo moč izrazimo s: $Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ (\underline{U}_{1N'} - \underline{U}_{2N'}) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_{3N'} - \underline{U}_{2N'}) \underline{I}_3^* \}$

- Pri simetričnem napajanju zapišemo za napetost med fazama 1 in 2:

$$\underline{U}_{1N'} - \underline{U}_{2N'} = \underline{U}_{12} = \sqrt{3} \underline{U}_{3N} e^{-j90^\circ}$$

- in za napetost med fazama 3 in 2: $\underline{U}_{3N'} - \underline{U}_{2N'} = \underline{U}_{32} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{j90^\circ}$

- Skupno jalovo moč merimo z dvema vatmetroma:

$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \sqrt{3} \underline{U}_{3N} e^{-j90^\circ} \underline{I}_1^* + \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{j90^\circ} \underline{I}_3^* \} .$$

$$Q = \sqrt{3} \frac{1}{2} \text{Re} \{ -\underline{U}_{3N} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{1N} \underline{I}_3^* \} = \sqrt{3} (-P_{W1} + P_{W2}) .$$

4. Prikazovalnik univerzalnega elektronskega števca kaže pri merjenju periode signala $24,03\mu\text{s}$. Kaj kaže prikazovalnik, če merimo frekvenco istega signala s časom merjenja $T_M = 100\text{ms}$?

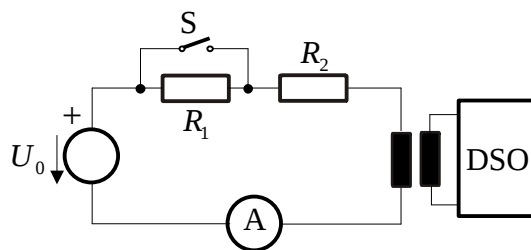
Rešitev:

- Če kaže števec $24,03\mu\text{s}$, potem pomeni, da je perioda signala nekje na intervalu $[24,025\mu\text{s}, 24,035\mu\text{s})$.
- To ustreza frekvencam na intervalu $(41,605\text{kHz}, 41,623\text{kHz}]$.
- Ker je čas merjenja T_M enak 100ms , je kvantizacijski pogrešek oziroma ločljivost pri merjenju frekvence:

$$M_f = \frac{1}{T_M} = 10\text{Hz},$$

- zato kaže števec vrednosti $41,61\text{kHz}$ ter $41,62\text{kHz}$.

5. Z danim vezjem moremo izmeriti medsebojno induktivnost. Razložite metodo in izpeljite enačbo za merjeno veličino! DSO omogoča merjenje temenske, efektivne in srednje vrednosti napetosti.



Rešitev:

- Medsebojna induktivnost med dvema **magnetno sklopljenima** krogoma je **razmerje** med **inducirano napetostjo** v enem krogu in **časovnim odvodom toka** v drugem krogu.

$$u_i = M_x \frac{di}{dt}$$

- Za dano vezje in uporabljeni DSO, kjer smo uporabili funkcijo merjenja srednje vrednosti napetosti, zapišemo:

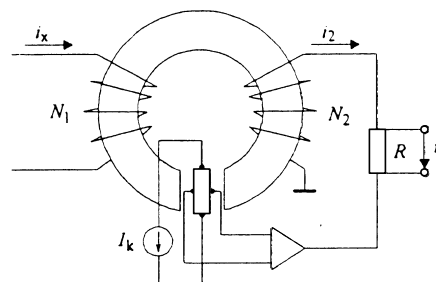
$$\int_{t_1}^{t_2} u_i dt = M_x \int_{I_1}^{I_2} di \Rightarrow M_x \cdot \Delta I = \bar{U} \cdot T_M$$

- Tokova I_1 in I_2 tečeta pred in po sklenitvi stikala S. Bistvena je samo razlika tokov, ki ju merimo z ampermetrom.
 - Integral napetostnega impulza inducirane napetosti določimo preko srednje vrednosti napetost na DSO.
- Medsebojna induktivnost je enaka:

$$M_x = \frac{\bar{U} \cdot T_M}{\Delta I}$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Kolikšna je efektivna vrednost toka I_x , če je $N_1 = 10$, $N_2 = 1000$, $U = 10 \text{ mV}$, $R = 1 \Omega$ $I_k = 10 \text{ mA}$? Razložite princip merjenja! Ali lahko merimo tudi enosmerni tok? Utemeljite! Ali je krmilni tok I_k enosmeren ali izmeničen?



Rešitev:

- Princip merjenja:
 - Vezje kaže primer posrednega merjenja toka z uporabo magnetnega kroga. Okoli toroidnega feromagnetnega jedra je navito N_1 obojev, skozi katere teče neznanin tok i_x . V reži se nahaja Hallova sonda, katere napetost u_H je odvisna tudi od magnetne indukcije B v zračni reži. Če jedro ne pride v nasičenje, je povezava skoraj linearna:

$$u_H = \frac{1}{ned} I_k B \approx \text{konst.} \cdot i_x$$

- Tok i_x je lahko enosmeren, izmeničen ali pulzirajoč, saj je občutljivost Hallove sonde od nič do 10 MHz praktično neodvisna od frekvence!
- Če namestimo na jedro še eno navitje N_2 in ga napajamo s tokom operacijskega ojačevalnika, ki ga krmili napetost u_H tako, da dosežemo, da je magnetna indukcija v reži nič ne glede na velikost toka i_x , lahko izenačimo vzburjanji dveh enakih magnetnih pretokov:

$$\phi_1 - \phi_2 = 0 \Rightarrow B = 0, \quad u_H = 0 \Rightarrow i_x N_1 = i_2 N_2 = \frac{u}{R} N_2$$

- Za iskani tok zapišemo: $i_x = \frac{u}{R} \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow I_x = \frac{U}{R} \frac{N_2}{N_1}$

- in ovrednotimo: $I_x = \frac{10 \text{ mV}}{1 \Omega} \frac{1000}{10} = 1 \text{ A}$

- Krmilni tok I_k mora biti enosmeren in konstanten, da dobimo linearno odvisnost Hallove napetosti od merjenega toka:

$$u_H = \frac{I_k}{ned} a i_x \cong \text{konst.} \cdot i_x$$

2. Kakšno ločljivost mora imeti voltmetr ($R_V \rightarrow \infty \Omega$), ki ga uporabimo kot ničelni indikator pri Kelvinovem (Thomsonovem) mostiču, da je pri merjenju upornosti $R_x \approx 3 \text{ m}\Omega$ standardna negotovost zaradi ločljivosti mostiča zanemarljiva? Uporovna dekada R_B mora imeti izkoriščene vse stopnje!

• mostič: $R_B = R'_B = 10 \times (1000, 100, 10, 1) \Omega$

$$R_A = R'_A = (10, 100, 1000) \Omega; \quad m_{R_A} = m_{R_B} = 1,0 \cdot 10^{-3}$$

• etalon: $R_N = 10^{-4} (1 \pm 10^{-3}) \Omega$, $m_{R_N} = 1,0 \cdot 10^{-3}$

• napajanje: $I_0 = 8 \text{ A}$

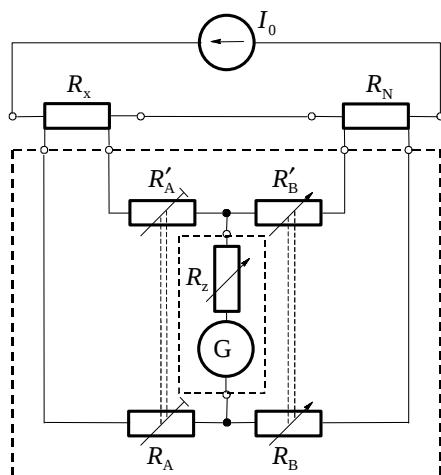
$$\delta_q = \frac{(\Delta I_5)}{I_0 R_{10}} \left[2R_3 + R_g \left(1 + \frac{R_3}{R_4} \right) \right]$$

Rešitev:

- Če hočemo izkoristiti vse stopnje uporovne dekade, mora biti vrednost R_B v mejah $11110 \Omega \geq R_B \geq 1000 \Omega$. To dosežemo samo pri drugi priključitvi in z upornostjo $R_A = 100 \Omega$.

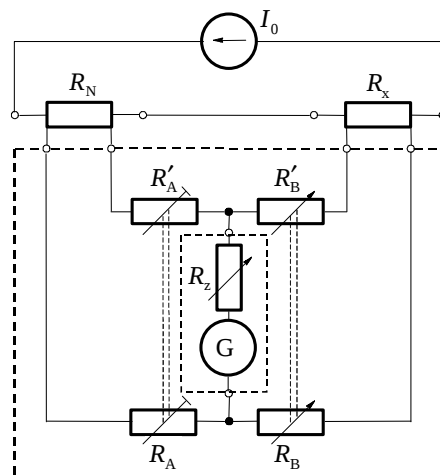
a) prva priključitev:

$$\frac{R_x}{R_N} = \frac{3 \text{ m}\Omega}{0,1 \text{ m}\Omega} = 30 = \frac{R_A}{R_B} \rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{30000 \Omega}{1000 \Omega} ?$$



b) druga priključitev:

$$\frac{R_x}{R_N} = 30 = \frac{R_B}{R_A} \rightarrow \frac{R_B}{R_A} = \frac{3000 \Omega}{100 \Omega}$$



- Standardna negotovost **zaradi ločljivosti mostiča** w_q je zanemarljiva proti **skupni standardni negotovosti** $w_c(R_x)$, kadar velja: $w_q = \frac{\delta_q}{2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{5} w_c(R_x)$
- pri čemer skupno standardno negotovost $w_c(R_x)$ v tem primeru določajo le **negotovosti upornosti**:

$$R_x = R_N \frac{R_B}{R_A} \Rightarrow w_c(R_x) = \sqrt{w^2(R_N) + w^2(R_A) + w^2(R_B)}$$

- Ker imamo podane mejne vrednosti pogreškov, predpostavimo pravokotno porazdelitve pogreška, za katero je standardna negotovost znana $w(*) = m(*)/\sqrt{3}$, in izračunamo:

$$w_c(R_x) = \sqrt{\frac{m^2(R_N)}{3} + \frac{m^2(R_A)}{3} + \frac{m^2(R_B)}{3}} = 10^{-3}$$

- Ločljivost mostiča mora biti torej:

$$\delta_q \leq \frac{2\sqrt{3}}{5} w_c(R_x) = \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot 10^{-3} = 6,93 \cdot 10^{-4}$$

- V enačbi za ločljivost mostiča se upora z indeksoma 3 in 4 zamenjata z ustreznima soležnima uporoma po drugi vezavi $R_3 \rightarrow R_B$ in $R_4 \rightarrow R_A$. Enačba se tudi poenostavi, ker je upornost voltmetra zelo velika ($R_V \gg R_B$) in imamo napetostno občutljiv ničelni indikator $(\Delta I_5)_q \cdot R_V = (\Delta U_5)_q$:

$$\delta_q = \frac{(\Delta I_5)_q}{I_0 R_x} \left[2R_B + R_V \left(1 + \frac{R_B}{R_A} \right) \right] = \frac{(\Delta U_5)_q}{I_0 R_x} \left(1 + \frac{R_B}{R_A} \right) \leq 6,93 \cdot 10^{-4}$$

- Od tod izračunamo potrebno ločljivost voltmetra, da je negotovost zaradi ločljivosti ničelnega indikatorja v mostiču zanemarljiva:

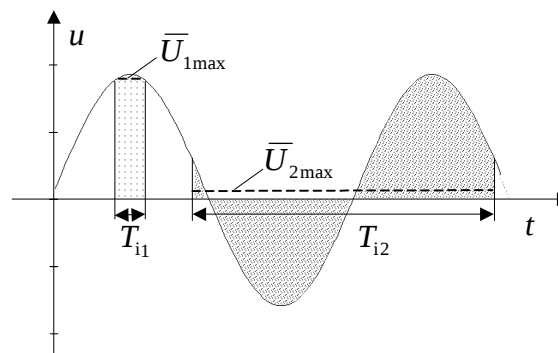
$$(\Delta U_5)_q \leq \frac{6,93 \cdot 10^{-4} \cdot 8A \cdot 3m\Omega}{1 + 30} = 0,54 \mu V$$

3. Z integrirajočim ADP smo merili sinusni signal $f = 50\text{ Hz}$ z dvema časoma integracije $T_{i1} = 2\text{ ms}$ in $T_{i2} = 20\text{ ms}$. Po večkratnih ponovitvah meritev smo dobili pri T_{i1} največjo vrednost napetosti $U_{1\text{max}} = 0,18\text{ V}$ in pri T_{i2} $U_{2\text{max}} = 0,02\text{ V}$. Koliko znaša amplituda vhodnega sinusnega signala?

$$\bar{U} = \hat{u} \frac{\sin \omega T_i / 2}{\omega T_i / 2}$$

Rešitev:

- Skica integracijskega zajemanja vrednosti napetosti:



- Integracijsko zajemanje nam da povprečno vrednost signala v intervalu integracije. Največja tekoča povprečna vrednost je odvisna od amplitude signala in produkta časa integracije T_i ter frekvence tega sinusnega signala $f = \omega / 2\pi$.

$$\bar{U} = \hat{u} \frac{\sin \omega T_i / 2}{\omega T_i / 2}$$

- V primeru integracijskega časa $T_{i1} = 2\text{ ms}$ sta v rezultatu lahko zajeta dva prispevka: izmenični sinusni del in enosmerni prispevek

$$\bar{U}_1 = \hat{u} \frac{\sin(\pi T_{i1} / T)}{\pi T_{i1} / T} + U_0,$$

- katerega prisotnost se pri drugem integracijskem času $T_{i2} = 20\text{ ms}$, kjer popolnoma izločimo izmenični sinusni del ($f T_i = 1 \rightarrow \sin(\pi f T_i) / (\pi f T_i) = 0$), potrdi:

$$\bar{U}_2 = \hat{u} \frac{\sin(\pi T_{i2} / T)}{\pi T_{i2} / T} + U_0 = U_0$$

- Iz obeh enačb izrazimo temensko vrednost sinusnega signala

$$\hat{u} = \frac{(\bar{U}_1 - \bar{U}_2) \pi T_{i1} / T}{\sin(\pi T_{i1} / T)}$$

- in ovrednotimo: $\hat{u} = \frac{(0,18\text{ V} - 0,02\text{ V}) \pi \cdot 2\text{ ms} \cdot 50\text{ Hz}}{\sin(\pi \cdot 2\text{ ms} \cdot 50\text{ Hz})} = 0,163\text{ V}$

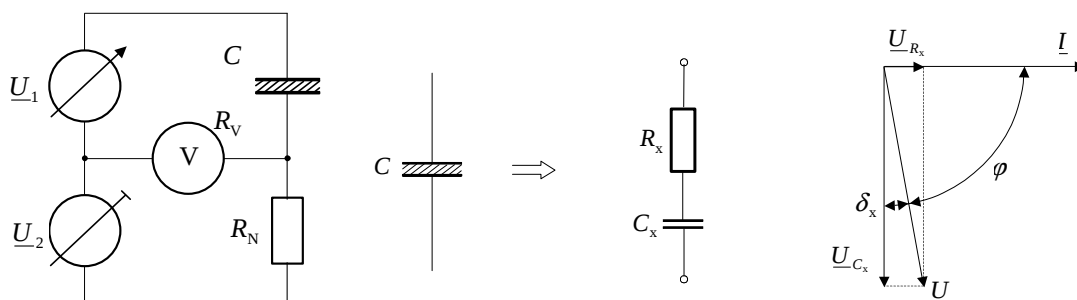
4. Z aktivnim mostičem, z dvema napetostnima viroma $f_1 = f_2 = 1,0000(1 \pm 10^{-4})$ kHz, merimo kapacitivnost $C_x \approx 0,16 \mu\text{F}$. Koliko morata biti napetosti U_1 in U_2 ($m_{U_1} = m_{U_2} = 10^{-3}$; $\varphi = 89,7^\circ \pm 0,1^\circ$), da bo standardna negotovost zaradi ločljivosti zanemarljiva, ko je mostič v ravnovesju?

- Voltmeter: ločljivost $\Delta U = 1 \text{ mV}$, $R_V = 100 \text{ M}\Omega$
- $R_N = 1,0000(1 \pm 10^{-4}) \text{ k}\Omega$

$$\delta_q = \frac{(\Delta U_5)_q}{U_1} \left(1 + \frac{Z_x}{Z_N} \right)$$

Rešitev:

- Skice mostiča in nadomestne zaporedne vezave impedance kondenzatorja s fazorskim diagramom:



- Iz ravnovesne enačbe $R_x + \frac{1}{j\omega C_x} = R_N \frac{U_1}{U_2} \cos \varphi + jR_N \frac{U_1}{U_2} \sin \varphi$ izrazimo kapacitivnost :

$$C_x = -\frac{U_2}{R_N U_1} \frac{1}{\omega \sin \varphi}$$

- Če zanemarimo negotovost zaradi ločljivosti, se skupna standardna negotovost za kapacitivnost izrazi kot geometrijska vsota prispevkov vhodnih veličin:

$$w_c(C_x) = \sqrt{w^2(R_N) + w^2(U_1) + w^2(U_2) + w^2(f) + u^2(\varphi)/\text{tg}^2 \varphi}$$

- V našem primeru se negotovosti prispevkov izračunajo iz mejnih vrednosti in privzete pravokotne porazdelitve pogreška, za katero velja $w(G) = m(G)/\sqrt{3}$. Prispevek negotovosti zaradi kota moramo izraziti v radianih: $M(\varphi)_{\text{rad}} = 0,1^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = 1,745 \cdot 10^{-3}$
- Skupna standardna negotovost je tako:

$$w_c(C_x) = \sqrt{\left(\frac{m(R_N)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{m(U_1)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{m(U_2)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{m(f)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{M(\varphi)}{\sqrt{3}}\right)^2 / \text{tg}^2 \varphi}$$

$$w_c(C_x) = 8,206 \cdot 10^{-4}$$

- Standardna negotovost **zaradi ločljivosti mostiča** $w_q = \delta_q / \sqrt{12}$ je zanemarljiva, kadar velja:

$$w_q = \frac{\delta_q}{2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{5} w_c(C_x) \Rightarrow \delta_q \leq \frac{2\sqrt{3}}{5} w_c(C_x) = 5,685 \cdot 10^{-4}$$

- V enačbi za ločljivost mostiča izrazimo impedanci $\underline{Z}_x$ in $\underline{Z}_N$ z elementi R_x , C_x in R_N :

$$\underline{\delta}_q = \frac{(\Delta U_5)_q}{\underline{U}_1} \left(1 + \frac{\underline{Z}_x}{\underline{Z}_N} \right) \rightarrow \underline{\delta}_q = \frac{(\Delta U_5)_q}{\underline{U}_1} \left(1 + \frac{R_x + \frac{1}{j\omega C_x}}{R_N} \right)$$

- Ker je $1/\omega C_x \gg R_x$ ($U_{R_x}/U_{C_x} = 1/\tan(89,7^\circ) = 5,24 \cdot 10^{-3}$), zapišemo:

$$\underline{\delta}_q = \frac{(\Delta U_5)_q}{\underline{U}_1} \left(1 + \frac{1}{j\omega C_x R_N} \right) = \frac{(\Delta U_5)_q}{\underline{U}_1} (1 - j0,9947)$$

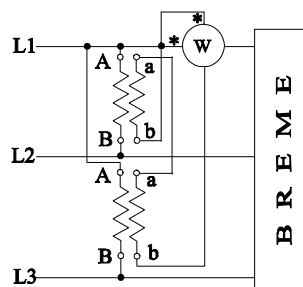
- Efektivno vrednost napetosti U_1 zapišemo tako, da upoštevamo efektivne vrednosti veličin:

$$U_1 = \frac{(\Delta U_5)_q}{\delta_q} \sqrt{1^2 + 0,9947^2} \approx \frac{1\text{mV}}{5,685 \cdot 10^{-4}} \sqrt{2} = 2,488\text{ V}$$

- Razmerje impedanc nam določa tudi razmerje napetosti in od tod dobimo še vrednost napetosti U_2 :

$$\frac{Z_x}{Z_N} \approx \frac{1}{\omega C_x R_N} = 0,9947 = \frac{U_1}{U_2} \rightarrow U_2 = 2,501\text{ V}$$

5. Dokažite kaj kaže vatmeter, če je trifazni sistem uravnovešen? ($K_u = 1$)



Rešitev:

- Tok tokovne veje vatmetra je enak toku prve faze:

$$i_w = i_1$$

- Napetost napetostne veje vatmetra je enaka vsoti medfaznih napetosti u_{21} in u_{13} . Prvi transformator je priključen med fazi L1(A) in L2(B), drugi pa med fazi L1(A) in L3(B). Ker je sponka **b** sekundarne strani prvega transformatorja priključena na vhodno sponko napetostne veje vatmetra in je sponka **a** povezana s sponko **a** drugega transformatorja, imamo na napetostni veji vatmetra vsoto invertirane napetosti $-u_{12} = u_{21}$ in u_{13} . Skupna napetost je enaka:

$$u_w = u_{21} + u_{13} = u_2 - u_1 + u_1 - u_3 = u_2 - u_3 = u_{23}$$

- Vatmeter kaže:

$$\underline{\underline{P_w}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{U_w \cdot I_w^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{u_{23} \cdot i_1^*\}$$

- Ker je sistem uravnovešen (uravnovešen vir z enakimi napetostmi ter 120° faznim zamikom med njimi in simetrično breme), fazna napetost zaostaja za medfazno za 90° in je za $\sqrt{3}$ manjša:

$$\underline{u}_{23} = \sqrt{3} \underline{u}_1 \cdot e^{-j90^\circ}$$

- Odklon vatmetra je proporcionalen jalovi moči ene faze:

$$P_w = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\sqrt{3} \underline{u}_1 \cdot i_1^* \cdot e^{-j90^\circ}\} = \sqrt{3} \frac{1}{2} \operatorname{Im}\{\underline{u}_1 \cdot i_1^*\} = \underline{\underline{\sqrt{3} Q_1}}$$

- Zaradi simetričnosti bremena velja $Q = 3 \cdot Q_1$ in nam vatmeter kaže jalovo moč bremena:

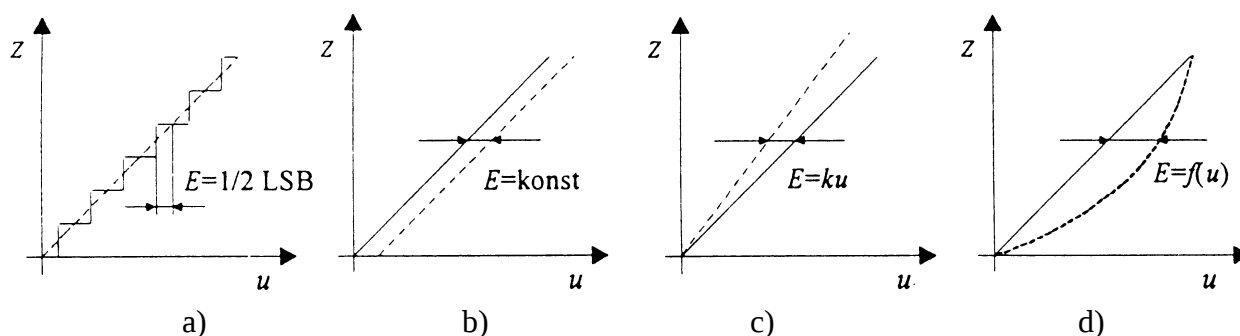
$$P_w = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Naštejte pogreške analogno-digitalnega pretvornika in nakažite načine, kako jih lahko korigiramo z mikroračunalikom v digitalnih elektronskih instrumentih. Skicirajte in pokažite z enačbami!

Rešitev:

- Pogreške analogno-digitalnega pretvornika (ADP) razdelimo na:
 - kvantizacijskega - a,
 - ničelnega – b,
 - naklonskega – c,
 - pogrešek nelinearnosti – d.
- Pri ADP ločimo še integralno nelinearnost (INL), ki je vezana na celotno merilno območje $n_{INL} = |E|_{\max} / U_D$, in diferencialno nelinearnost (DNL), ki je vezana na nazivni korak kvantizacije $\Delta_0 = U_D / 2^n$: $n_{DNL} = |\Delta - \Delta_0|_{\max} / \Delta_0$

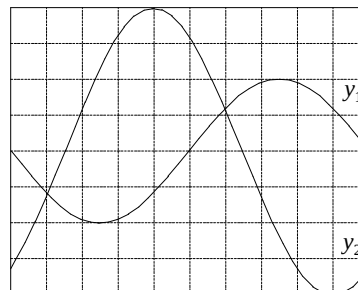
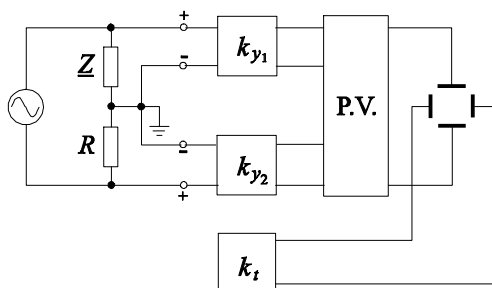


- Enostavno lahko korigiramo ničelni in naklonski pogrešek z dvema referenčnima napetostima, ki ju priklopimo na vhod:
 - $U_0 = 0V \rightarrow Z = Z_0$ - vhod ADP kratko sklenemo
 - $U_{ref} \rightarrow Z = Z_{ref}$ - na vhod priključimo znano referenčno napetost
- Vse ostale vrednosti AD pretvorbe korigiramo z linearno karakteristiko, ki jo določata ti referenčni vrednosti.

$$Z_{kor} = (Z - Z_0) \frac{Z_{ref}}{Z_{ref} - Z_0}$$

- Pogrešek nelinearnosti lahko zmanjšamo tako, da zmanjšamo interval, na katerem opazujemo odstopanje od linearne karakteristike.

2. Prikazana je slika na zaslonu dvokanalnega osciloskopa. Časovno bazo proži kanal-1. Frekvenca je 1000 Hz in $k_{y1} = k_{y2}$. Kolikšen je nivo proženja N ? Kakšna je strmina proženja S ? Koliko je odklonski koeficient časovne baze k_t ? Kakšna je funkcijska povezava med $\underline{Z}$ in R ?



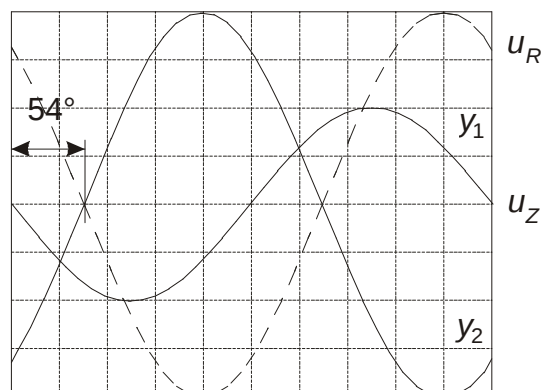
Rešitev:

- Proži kanal 1. Slika na zaslonu osciloskopa prikazuje, da se y_1 začne pri 0 in pada. Torej je nivo proženja $\underline{N} = 0 \text{ V}$ in strmina proženja $\underline{S} < 0$.
- Odklonski koeficient časovne baze k_t se izračuna iz frekvence signala in števila delcev ene periode. Ena perioda je prikazana na desetih delcih, frekvenca signala je 1000 Hz, zato velja:

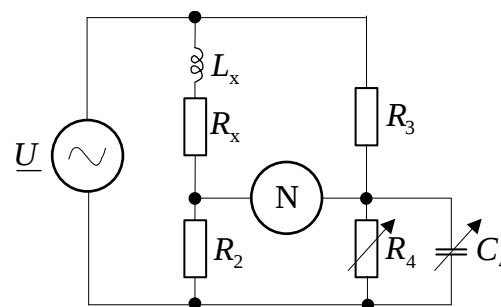
$$k_t \cdot x_T = T = \frac{1}{f} \Rightarrow \underline{k_t} = \frac{1}{10 \text{ d} \cdot 1000 \text{ Hz}} = \underline{0,1 \text{ ms}}$$

- Ker ima osciloskop skupno negativno sponko, je slika signala na drugem vhodu invertirana. Dejanski signal je na spodnji sliki prikazan črtkano. Hkrati je označen kot zamika signalov, iz česar se lahko zapiše funkcijsko povezavo med $\underline{Z}$ in R . Upoštevati je še potrebno, da je amplituda u_R enkrat večja od u_Z .

$$\underline{U_Z} = \frac{1}{2} \underline{U_R} \cdot e^{j54^\circ} \Rightarrow \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{\frac{1}{2} R \cdot e^{j54^\circ}}}$$



3. Izpeljite izraz za induktivnost L_x , upornost R_x in faktor kvalitete tuljave Q_x , če uporabljamo dani mostič! Na kaj moramo biti še posebej pozorni, kadar merimo tuljavo z železnim jedrom?



Rešitev:

- Za impedance mostiča zapišemo: $\underline{Z}_x = R_x + j\omega L_x$

$$\underline{Z}_2 = R_2; \quad \underline{Z}_3 = R_3$$

$$\underline{Z}_4^{-1} = \frac{1}{R_4} + j\omega C_4$$

- Iz razmerja $\underline{Z}_x / \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 / \underline{Z}_4$, ko je mostič uravnovešen, zapišemo:

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_4^{-1} \quad \Rightarrow \quad R_x + j\omega L_x = R_2 R_3 \cdot \left(\frac{1}{R_4} + j\omega C_4 \right)$$

- Ko izenačimo realna dela leve in desne strani enačbe, dobimo iskano upornost

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}$$

- in ko izenačimo imaginarna dela še induktivnost

$$L_x = R_2 R_3 C_4$$

- Faktor kvalitete Q tuljave je razmerje jalove moči z delovno. Pri serijskem nadomestnem vezju, ki prevladuje pri analizi realnih tuljav, je:

$$Q_x = \frac{I^2 \omega L_x}{I^2 R_x} = \frac{\omega L_x}{R_x} = \omega R_4 C_4$$

- Pri merjenju induktivnosti s feromagnetnim jedrom moramo biti pozorni na obliko in velikost toka, ker je odnos med magnetno indukcijo B in jakostjo magnetnega polja H za feromagnetni material nelinearen. Ker permeabilnost ni stalna, je tudi induktivnost močno odvisna od toka, pri katerem merimo.

- Meriti moramo v skladu s karakteristiko jedra.

4. Kolikšen je absolutni pogrešek zaradi lezenja frekvence oscilatorja v univerzalnem digitalnem števcu, če ta pri merjenju referenčnega signala s periodo 2,5000ms pokaže 2,4862ms? Števec je nastavljen tako, da omogoča merjenje periode z najmanjšo ločljivostjo.

Rešitev:

- Za ločljivost pri merjenju periode velja $Q_T = K \cdot T_0$. Najmanjšo vrednost dosežemo takrat, ko je delilnik nastavljen na $K = 1$.
- Ker kaže števec $T_i = 2,4862\text{ms}$, pomeni, da je znotraj ene periode T_x merjenjega (točnega) signala našteje $Z = 24862$ pulzov, ki jih je zgeneriral oscilator s periodo T_0 .

- Za merjeni T_x torej velja:

$$T_x = Z \cdot K \cdot T_0 = Z \cdot T_0$$

- zato sledi $T_0 = \frac{T_x}{Z} = \frac{2,5\text{ ms}}{24862} = 100,55\text{ ns}$

- ter $f_0 = T_0^{-1} = 9,9448\text{MHz}$

- Če hočemo, da števec pravilno kaže, mora biti frekvenca oscilatorja okrogla vrednost, v tem primeru 10MHz. Ker se ta frekvenca lahko v daljšem obdobju spreminja oz. leze, je absolutni pogrešek frekvence oscilatorja zaradi lezenja tako

$$E_{f_0} = 9,9448\text{MHz} - 10\text{MHz} = -55,2\text{kHz}$$

5. S pomočjo dvokanalnega digitalnega spominskega osciloskopa želimo meriti maksimalno magnetno indukcijo $B_{\max}$ in remanenčno magnetno indukcijo B_{rem} feromagnetnega toroidnega jedra pri frekvenci $f = 50 \text{ Hz}$ brez dodatnega merilnega pribora. DSO omogoča merjenje srednje, efektivne in maksimalne vrednosti signala. Izberite ustrezno funkcijo, proženje in časovni odklonski koeficient (zaslon: $10 \text{ d} \times 8 \text{ d}$) ter izpeljite enačbi za iskani veličini!

Rešitev:

- Maksimalna magnetna indukcija $B_{\max}$
 - Z osciloskopom merimo srednjo vrednost inducirane napetosti polovico periode, da dobimo od nič različno vrednost.

$$u_i = k_1 \frac{dB}{dt} \Rightarrow B = k_2 \int_0^T u_i dt = k_3 \frac{T}{2} \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u_i dt = k_3 \frac{T}{2} \cdot \bar{U}_{T/2}$$

- Da dobimo maksimalno vrednost napetosti ($\propto B_{\max}$), moramo dobiti na zaslon osciloskopa samo pozitivni val napetosti u_i . To dosežemo z nastavitvami proženja:
 - nivo proženja: $N = 0$
 - strmina proženja: $S > 0$
- in časovne baze, ki omogoča prikaz polovice periode $T_{\text{prikaz}} = T/2 = 10 \text{ ms}$:

$$k_t = \frac{T_{\text{prikaz}}}{10 \text{ d}} = 1 \text{ ms/d}$$

- Remanenčna magnetna indukcija B_{rem} :
 - Na **drugi** kanal pripeljemo napetost, ki je proporcionalna jakosti magnetnega pretoka H (padec na souporu, ki ga povzroča vzbujalni tok na primarnem navitju $\oint H ds = I N_1 \Rightarrow H = k_4 \cdot iR = k_4 \cdot u_H$). Nastavitev časovne baze osciloskopa ohranimo $k_t = 1 \text{ ms/d}$ in nastavimo prožilni nivo tako, da dobimo za srednjo vrednost drugega kanala nič.

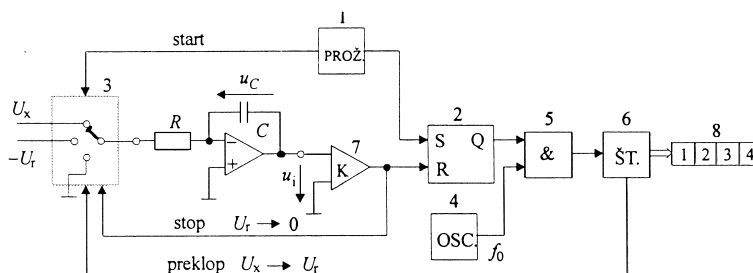
$$\bar{U}_{T/2}(H) = 0 \text{ V}$$

- Srednja vrednost napetosti na **prvem** kanalu je v tem trenutku sorazmerna remanenčni magnetni indukciji B_{rem} :

$$H = 0 \rightarrow B_{\text{rem}} = k_3 \frac{T}{2} \cdot \bar{U}_{T/2}$$

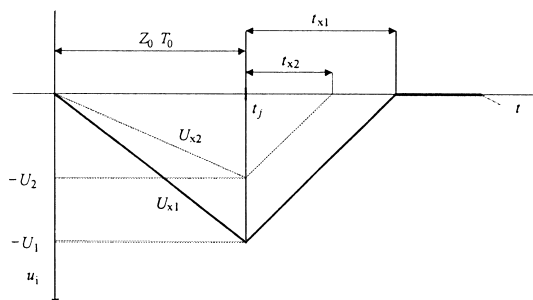
Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Dano je vezje integracijskega analogno-digitalnega pretvornika z dvojnim naklonom. Razložite delovanje vezja in izpeljite enačbo za vrednost na prikazovalniku 8. V katerem delu pretvorbe se zmanjša vpliv izmeničnega motilnega signala?



Rešitev:

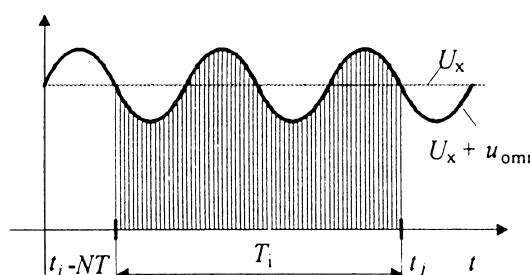
- Imamo dva takta integriranja, ki se izvaja s pomočjo kondenzatorja C v negativni povratni zanki ojačevalnika. Napetost integracije je enaka napetosti na kondenzatorju: $u_i \approx u_C$
- Za prvi takt velja:



- vsota tokov na vhodu integratorja nam da povezavo veličin: $\frac{U_x}{R} + C \frac{du_i}{dt} = 0$
 - in po integraciji dobimo: $\int_0^{-U_1} du_i = -\frac{1}{RC} \int_{t_j - Z_0 T_0}^{t_j} U_{x1} dt \Rightarrow U_1 = \frac{Z_0 T_0}{RC} \bar{U}_{x1}$
- Za drugi takt, kjer se integrira referenčna napetost $-U_r$, velja:
 - za vsoto tokov na vhodu integratorja zapišemo: $-\frac{U_r}{R} + C \frac{du_i}{dt} = 0$
 - in po integraciji dobimo: $\int_{-U_1}^0 du_i = \frac{1}{RC} \int_{t_j}^{t_j + t_{x1}} U_r dt \Rightarrow U_1 = \frac{t_{x1}}{RC} U_r$
- Izenačenje napetosti obeh integracij U_1 nam da: $t_{x1} = \frac{Z_0 T_0}{U_r} \bar{U}_{x1}$
 - ker je $Z = \frac{t_{x1}}{T_0}$, dobimo: $Z = \frac{Z_0}{U_r} \bar{U}_{x1}$
 - točnost pretvornika ni odvisna od R in C pa tudi f_0 ne!

- Vpliv izmeničnega motilnega signala se zmanjša v prvem taktu pretvorbe, če je čas integracije enak mnogokratniku periode motilnega signala $T_i = Z_0 T_0 \approx N \cdot T$

$$\bar{U}_j = \frac{1}{NT} \int_{t_j - NT}^{t_j} (U_x + u_{omr}) dt = U_x + \frac{1}{NT} \int_{t_j - NT}^{t_j} u_{omr} dt \approx U_x$$



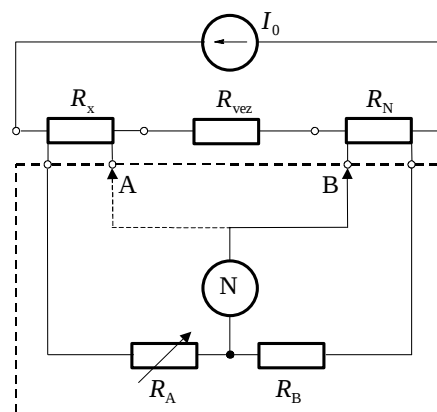
2. Za koliko se relativno spremeni vrednost uporovne deкаде R_A na preciznem mostiču, ki ga uporabimo kot Wheatstonov in nato kot Kelvinov (Thomsonov) mostič - $R_B = 1000\Omega$, $R_N = 10,000(1 \pm 10^{-4})m\Omega$ - za merjenje neznane upornosti $R_x \approx 0,02\Omega$? Upornost uporabljenih vezi je $R_{vez} = 1m\Omega$. Uporabite in skicirajte vezji z najmanjšim pogreškom vezave uporov! Pri obeh mostičih morajo biti uporabljene vse deкаде upora $R_A = 10 \times (1000_100_10_1_0,1)\Omega$.

Rešitev:

- Če hočemo izkoristiti vse deкаде upora R_A , mora biti vrednost v mejah $11111\Omega \geq R_A \geq 1000\Omega$. To dosežemo s priključitvijo, kjer imamo razmerje uporov:

$$\frac{R_x}{R_N} = \frac{20m\Omega}{10m\Omega} = 2 = \frac{R_A}{R_B} \rightarrow \frac{R_A^\circ}{R_B} = \frac{2000\Omega}{1000\Omega}$$

- Wheatstonov** mostič ne odpravlja vpliva upornosti vezi R_{vez} med R_x in R_N , ki predstavlja bistveni sistematični pogrešek pri merjenju majhnih upornosti. Ker jo moramo priključiti k enemu uporov, je bolje, da jo priključimo k R_x , ki je v našem primeru večji kot R_N in je pogrešek priključitve manjši. Ničelni indikator tako priključimo na napetostno sponko R_N (vezava B) in v ravnovesju dobimo:

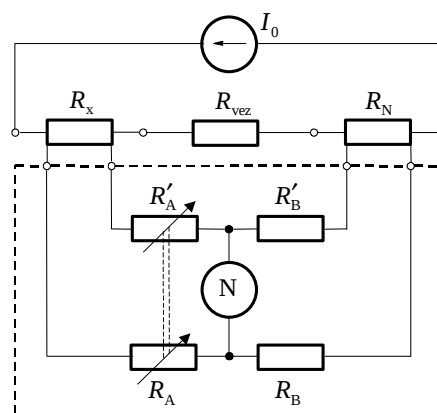


$$\frac{R_x + R_{vez}}{R_N} = \frac{21m\Omega}{10m\Omega} = 2,1 = \frac{R_A^*}{R_B} = \frac{2100\Omega}{1000\Omega} \text{ in pogrešek } \Delta R_A^* = R_A^* - R_A^\circ = 100\Omega$$

▪ pri vezavi A bi dobili: $\frac{R_x}{R_N + R_{vez}} = \frac{20m\Omega}{11m\Omega} = 1,81818 = \frac{R_A^{**}}{R_B} = \frac{1818,2\Omega}{1000\Omega}$
in pogrešek $\Delta R_A^{**} = R_A^{**} - R_A^\circ = -181,8\Omega$

- Kelvinov** (Thomsonov) mostič, ki je namenjen za merjenje majhnih upornosti, močno zmanjša vpliv upornosti vezi. Ničelni indikator se s pomočjo dodatnih dveh uporov R'_A in R'_B navidezno priključi med R_x in R_N tako, da se R_{vez} razdeli v enakem razmerju, kot je razmerje R_x/R_N .

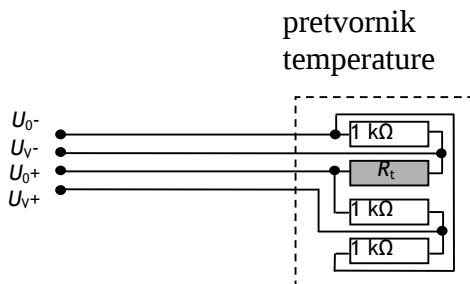
$$\frac{R_x}{R_N} = 2 = \frac{R_A}{R_B} \rightarrow \frac{R_A^\circ}{R_B} = \frac{2000\Omega}{1000\Omega}$$



- Pri prehodu iz vezave Wheatstonovega mostič v vezavo Kelvinovega mostič se vrednost upornosti R_A zmanjša in relativno spremeni za:

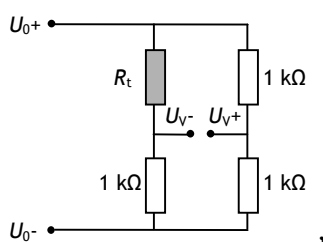
$$\delta = \frac{R_A^\circ}{R_A^*} - 1 = \frac{2000\Omega}{2100\Omega} - 1 = -0,048 \rightarrow -4,8\%$$

3. Uporovni senzor temperature R_t vežemo skupaj s tremi temperaturno neodvisnimi upori $1\text{ k}\Omega$ v pretvornik temperature kot na sliki. Po priključitvi napajanja U_0 kaže voltmetr na izhodu pretvornika $U_V = 5\text{ mV}$. Koliko kaže voltmetr, če priključitev voltmetra in napajanja medsebojno zamenjamo ($U_{0^-} \leftrightarrow U_{V^-}$; $U_{0^+} \leftrightarrow U_{V^+}$)? Dokažite!

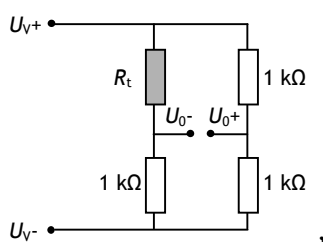


Rešitev:

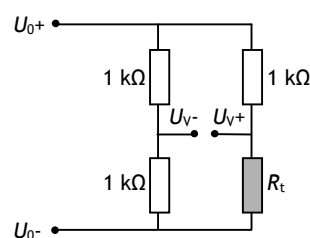
- Pretvornik na sliki lahko preoblikujemo v naslednje vezje:



- kar glede na tri temperaturno nespremenljive upore predstavlja **četrtnski** mostič.
- Če medsebojno zamenjamo priključke U_{0^-} in U_{V^-} ter U_{0^+} in U_{V^+} , dobimo naslednje vezje:



- ki ga ponovno lahko preoblikujemo v četrtnski mostič, ki ima enako karakteristiko, samo pozicija spremenljivega upora se spremeni.

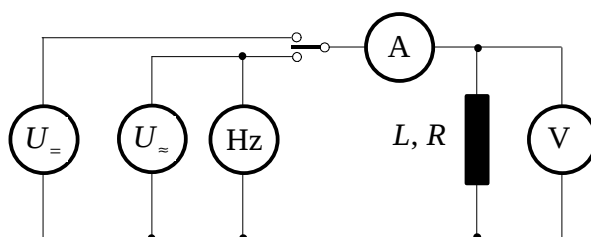


- Tudi ob zamenjavi priključkov bo voltmetr kazal enako napetost $U_V = 5\text{ mV}$.

4. Induktivnost tuljave brez feromagnetnega jedra merimo po U-I metodi. Pri merjenju z enosmernim virom nam kaže voltmeter $U_1 = 196,5\text{mV}$ in ampermeter $I_1 = 102,4\text{mA}$, z izmeničnim virom ($f = 50\text{Hz}$) pa dobimo $U_2 = 187,5\text{mV}$ in $I_2 = 89,5\text{mA}$. Koliko sta induktivnost in faktor kvalitete Q tuljave, če smo uporabili voltmeter z veliko upornostjo in smo lahko sistematični pogrešek zanemarili? Skicirajte vezje!

Rešitev:

- Narisano je merilno vezje, kjer smo vezali voltmeter neposredno na impedanco, saj lahko sistematični pogrešek priključitve zanemarimo $R_V \gg 1$:



- Skupno impedanco tuljave sestavljata upornost navitja (realna komponenta) in induktivnost tuljave (imaginarna komponenta). Za serijsko nadomestno vezavo, ki prevladuje pri analizi realnih tuljav, zapišemo skupno impedanco v obliki $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

- Od tod izrazimo induktivnost: $L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2}$
- Pri merjenju v enosmernih razmerah dobimo z U-I metodo omsko upornost navitja: $R = U_1 / I_1 = 1,9189\Omega$
- Pri merjenju v izmeničnih razmerah dobimo z U-I metodo skupno impedanco: $Z = U_2 / I_2$
- Sedaj lahko ovrednotimo induktivnost

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{U_2}{I_2}\right)^2 - \left(\frac{U_1}{I_1}\right)^2}$$

$$L = \frac{1}{2\pi 50\text{Hz}} \sqrt{\left(\frac{187,5\text{mV}}{89,5\text{mA}}\right)^2 - \left(\frac{196,5\text{mV}}{102,4\text{mA}}\right)^2} = 2,6756\text{mH}$$

- Faktor kvalitete Q tuljave je razmerje jalove moči z delovno. Pri serijskem nadomestnem vezju je:

$$Q = \frac{I^2 \omega L_s}{I^2 R_s} = \frac{\omega L_s}{R_s}$$

- Po vstavitvi vrednosti za L , R in f dobimo:

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi f L}{R} = \frac{0,8406}{1,9189} = 0,438$$

5. Radi bi merili frekvenco $f_x = 5 \text{ kHz}$ z univerzalnim elektronskim števcem tako, da bi bil mejni kvantizacijski pogrešek pod $0,01\%$.

- a) Kolikšen naj bo čas merjenja T_M ?
- b) Kaj kaže (številsko vrednost in enota)?
- c) Koliko mest N mora imeti prikazovalnik?
- d) Koliko impulzov Z prešteje števec v T_M ?

Rešitev:

- a) Mejni kvantizacijski pogrešek je razmerje izmerjene vrednosti in časa merjenja. Upoštevati moramo, da naj bi bil kvantizacijski pogrešek manjši od navedenega. Ker smo merili frekvenco, torej velja:

$$m_f = \frac{T_x}{T_M} = \frac{1}{T_M f_x}$$

- Čas merjenja bi moral biti: $T_M = \frac{1}{m \cdot f_x} = \frac{1}{10^{-4} \cdot 5 \text{ kHz}} = 2 \text{ s}$
- Ker lahko na univerzalnem elektronskem števcu nastavimo samo okrogle desetiške vrednosti časa merjenja, in ker je mejni kvantizacijski pogrešek čim manjši, tem večji je čas merjenja (glej prvo enačbo), moramo zato čas merjenja nastaviti na: $T'_M = 10 \text{ s}$
- b) Da bi ugotovili, kaj števec prikazuje na zaslonu, moramo najprej izračunati absolutni kvantizacijski pogrešek.

$$M_f = m_f f_x = \frac{T_x}{T'_M} \frac{1}{T_x} = \frac{1}{T'_M} = 0,1 \text{ Hz}$$

- Ker je absolutni kvantizacijski pogrešek $0,1 \text{ Hz}$, pomeni, da inštrument prikazuje desetine Hz izmerjene frekvence. Prikazana vrednost je:
- c) Število mest, ki jih mora imeti prikazovalnik, je razvidno iz prikazane vrednosti, torej

$$N = 5$$

- d) Število impulzov Z , ki jih števec prešteje v času merjenja, je enako produktu merjene frekvence in časa merjenja.

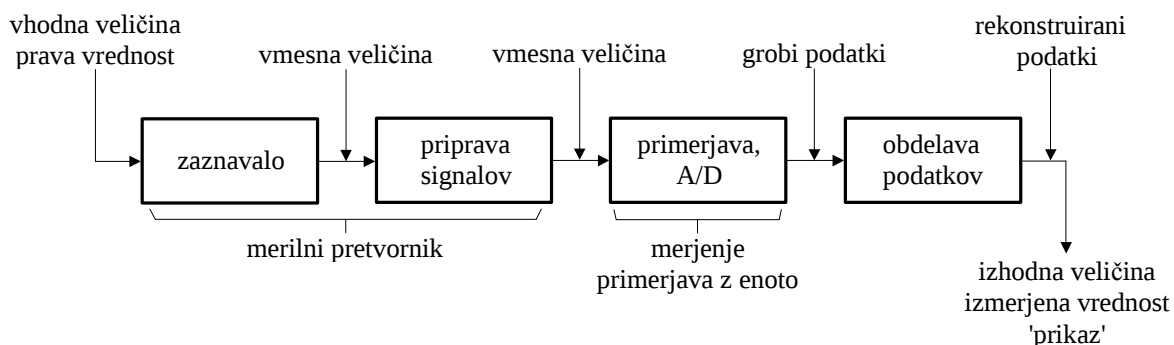
$$Z = f \cdot T'_M = 5 \text{ kHz} \cdot 10 \text{ s} = 50\,000$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Skicirajte zgradbo merilnega sistema in opišite funkcije posameznih blokov v shemi! S katerim elementom se izvrši meritev v ožjem pomenu besede in v kakšni obliki mora biti merjeni signal?

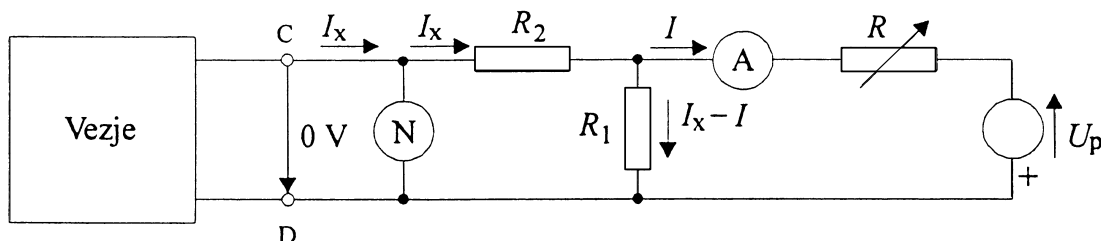
Rešitev:

- Zgradba merilnega sistema:



- Vhodni signal vstopa v merilni pretvornik, ki je sestavljen iz zaznavala (tudi tipalo, čutilo ali senzor) in faze priprave signalov na obdelavo (ojačiti, preoblikovati, pretvoriti v veličino, ki je uporabna za neposredno primerjanje).
- Za merilnim pretvornikom je faza primerjanja merjene veličine z enoto:
 - Merjenje v ožjem smislu!
 - Izvrši se z analogno-digitalnim pretvornikom.
 - Signal za primerjavo mora biti v enosmerni obliki.
- Za analogno-digitalnim pretvornikom je faza obdelave signalov za :
 - interpretacija podatkov, prikaz podatkov in prenos podatkov.
 - opravi funkcijo rekonstrukcije in različne matematične obdelave (npr. računanje povprečne vrednosti, integriranje, odvajanje ipd.).

2. Opišite delovanje merilnega vezja in v enačbah pokažite kaj meri! Po katerem principu deluje, kakšne so prednosti in slabosti?

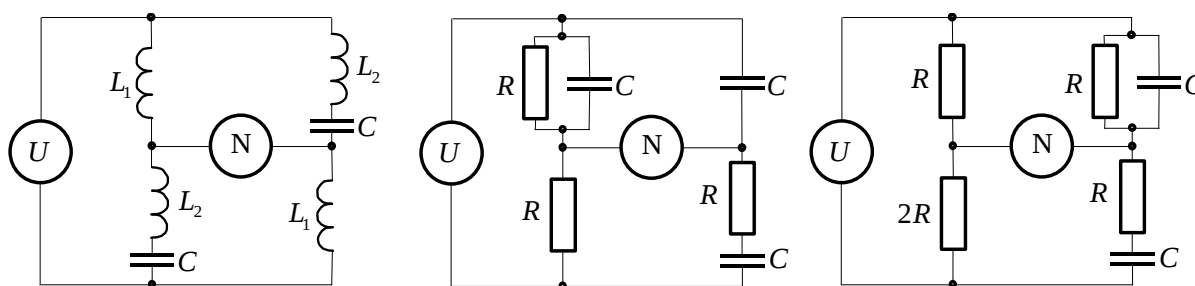


Rešitev:

- Merilno vezje kaže kompenzacijski način merjenja toka s sesalnim vezjem, ki nam ustvari navidezno $R_A \rightarrow 0$.
 - To dosežemo z nastavljanjem upora R in s tem toka I , tako da nam kaže ničelni indikator N odklon nič.
 - Tedaj velja za padca napetosti na uporih R_1 in R_2 v zanki:

$$I_x R_2 + (I_x - I) R_1 = 0$$
 - Od tod dobimo merjeni 'sesani' tok: $I_x = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$
- Kompenzacijsko merjenje temelji na Lindeck-Rothejevem principu, kjer se spreminja tok I in je upor (v tem primeru R_1) stalen.
- Velika prednost je, da med točkama C, D ni padca napetosti! $\Rightarrow R_A = 0 \Omega$
- Slabost je v povečani porabi instrumentov in merilnega pribora.

3. Pri katerih frekvencah so dani mostiči v ravnovesju?



Rešitev:

- Za prvi mostič zapišemo impedance diametralno ležečih vej:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_4 = j\omega L_1, \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}$$

- Ravnovesna enačba $\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$ nam da naslednjo povezavo:

$$(j\omega L_1)^2 = \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)^2 \rightarrow j\omega(L_1 - L_2) = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow \omega^2(L_2 - L_1)C = 1$$

- od koder dobimo za frekvenco ravnovesja: $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_2 - L_1)C}}$

- Za drugi mostič zapišemo impedance in admitanco posameznih vej:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R} + j\omega C, \quad \underline{Z}_2 = R, \quad \underline{Z}_3 = \frac{1}{j\omega C}, \quad \underline{Z}_4 = R + \frac{1}{j\omega C}$$

- Ravnovesna enačba $\underline{Z}_1/\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3/\underline{Z}_4$ nam da naslednje povezave:

$$\underline{Y}_1 = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\underline{Z}_3} \rightarrow \frac{1}{R} + j\omega C = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \frac{j\omega C}{R}$$

$$1 + j\omega RC = 1 + j\omega RC \rightarrow \omega RC = \omega RC$$

- Ravnovesje je neodvisno od frekvence, saj je imaginarni del enačbe enak na desni in levi strani.

- Tudi za tretji mostič zapišemo impedance in admitanco posameznih vej:

$$\underline{Z}_1 = R, \quad \underline{Z}_2 = 2R, \quad \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{R} + j\omega C, \quad \underline{Z}_4 = R + \frac{1}{j\omega C}$$

- Ravnovesna enačba nam da naslednje povezave:

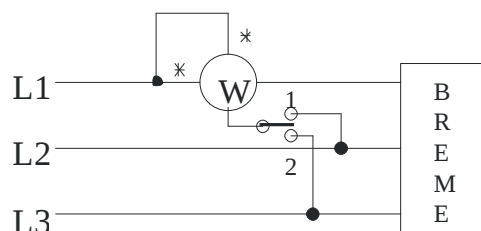
$$\underline{Y}_3 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4} \frac{1}{\underline{Z}_1} \rightarrow \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{2R}{R + 1/j\omega C} \frac{1}{R} \rightarrow \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right) \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) = 2$$

$$1 + j\omega RC + \frac{1}{j\omega RC} + 1 = 2 \rightarrow \omega RC = \frac{1}{\omega RC}$$

- Pri tem mostiču je ravnovesje odvisno od frekvence, saj nam izenačitev imaginarnih delov enačbe da $\omega RC = \sqrt{1} = 1$ in od tod:

$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$

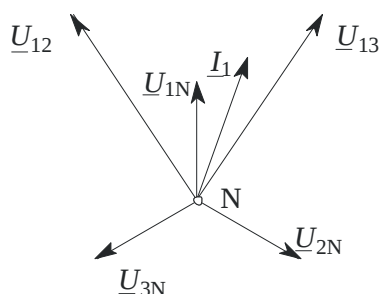
4. Dokažite, kakšno moč dobimo, če z vatmetrom izmerimo moč, ko je stikalo v položaju 1 in pištejemo moč, ki jo izmerimo, ko je stikalo v položaju 2? Narišite fazorski (kazalčni) diagram! Ali mora biti pri tovrstni meritvi breme simetrično? Kaj pa trifazni vir, ali mora biti uravnotežen?



Rešitev:

- Če seštejemo odčitka, ko je vatmeter v položaju 1 in 2 dobimo moč trifaznega bremena. Toda samo, če je breme simetrično oziroma trifazni vir uravnotežen, torej trifazni sistem uravnotežen.

- Fazorski (kazalčni) diagram



- Ko je preklopnik v položaju 1, je odklon vatmetra enak

$$P_{W1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{2N}) \underline{I}_1^* \},$$

- Ko pa je v položaju 2, pa

$$P_{W2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{U}_{13} \underline{I}_1^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{3N}) \underline{I}_1^* \}.$$

- Če seštejemo oba odčitka, dobimo

$$P_{W1} + P_{W2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left[(\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{2N}) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{3N}) \underline{I}_1^* \right] \right\}$$

- To pa je enako skupni moči sistema

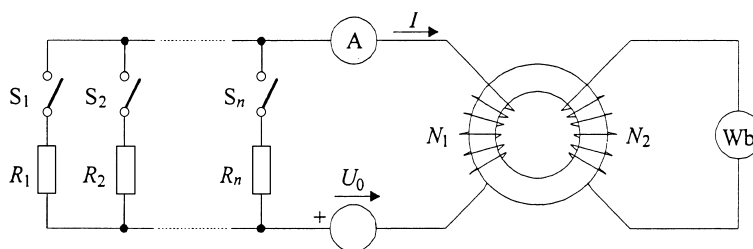
$$P_{W1} + P_{W2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ 3 \underline{U}_{1N} \underline{I}_1^* \} = P,$$

- saj je $-(\underline{U}_{2N} + \underline{U}_{3N}) = \underline{U}_{1N}$.

5. Opišite načina snemanja statične krivulje prvega magnetenja feromagnetika! Kateri pogoj mora biti izpolnjen? Določite potrebno merilno opremo!

Rešitev:

- Za snemanje deviške magnetilnice poznamo dva osnovna načina: odsekovni in komutacijski. Material najprej **nevtraliziramo** (razmagnetimo)!
- Pri **odsekovnem** načinu snemanje deviške magnetilnice potrebujemo:
 - enosmerni napajalni vir, možnost postopnega koračnega povečevanja vzbujanja (preko stikal: $S_1, S_2, \dots, S_n$) in meriti moramo ploščine napetostnih impulzov (npr. s fluksmetrom).

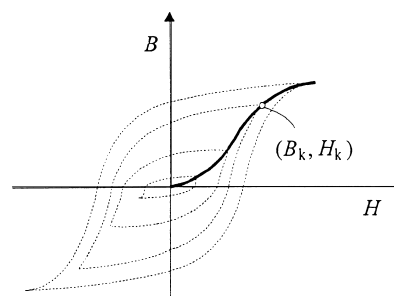


- Če povečujemo tokove od nič na $I_1, I_2, \dots, I_n$ se povečuje tudi jakost magnetnega polja: $H_1, H_2, \dots, H_n$: $H_k = \frac{I_k N_1}{l_{sr}}$
- Ob vklopu stikal se inducira napetostni impulz: $u_i = -N_2 A \frac{dB}{dt}$. Pri k -tem vklopu je ploščina enaka:

$$\int_{t(B_{k-1})}^{t(B_k)} u_i dt = -N_2 A \int_{B_{k-1}}^{B_k} dB = -N_2 A \Delta B_k \Rightarrow \Delta B_k = \frac{k_F y_k}{N_2 A}$$

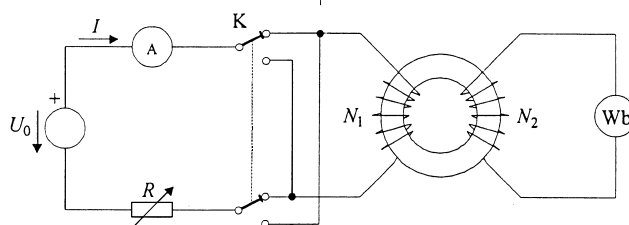
- Namesto odsekovnega merjenja celotne krivulje (pogreški se seštevajo) se pogosto uporablja **komutacijska** magnetilnica:

- povezuje vrhove histereznih zank za različne stopnje magnetenja.
- Za menjavo smeri magnetenja potrebujemo komutator.



- Postopek snemanja statične komutacijske magnetilnice:

- Pri toku I_1 dobimo točko na magnetilnici B_1, H_1 . Nato komutiramo smer toka $\rightarrow (-B_1, -H_1)$ in nazaj $\rightarrow (B_1, H_1)$.



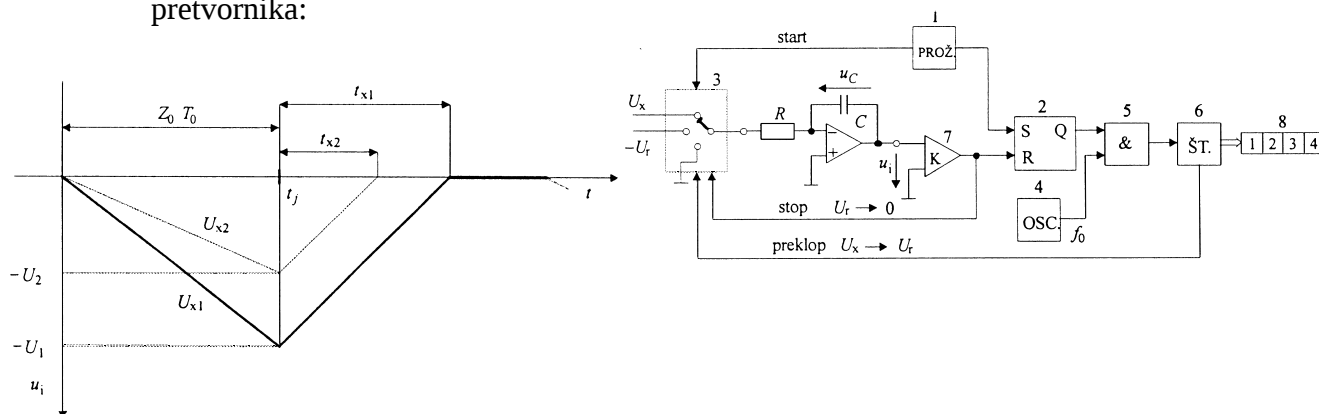
- Ob k -tem koraku imamo jakost m. polja: $H_k = \frac{I_k N_1}{l_{sr}}$, in magnetna indukcija: $\int_{t(-B_k)}^{t(+B_k)} u_i dt = -N_2 A \int_{-B_k}^{B_k} dB \Rightarrow B_k = \frac{k_F y_k}{2 N_2 A}$
- tok mora med meritvijo samo naraščati.

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Kako so slabljene komponente motilnega signala žagaste oblike $u = \hat{u}_0 (\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \dots)$, $f = 50 \text{ Hz}$, ki je dodan merjenemu enosmernemu signalu, če uporabljamo voltmetr z integracijskim dvonaklonskim analogno-digitalnim pretvornikom, ki ima čas integracije enak periodi motilne napajalne frekvence ameriškega energetskega omrežja $f_{\text{om}} = 60 \text{ Hz}$? Skicirajte časovni diagram delovanja integracijskega analogno-digitalnega pretvornika in določite slabljenje za prve tri komponente!

Rešitev:

- Časovni diagram delovanja integracijskega dvonaklonskega analogno-digitalnega pretvornika:



- Za navajanje slabljenja motnje uporabljamo razmerje največje tekoče povprečne vrednosti motnje $\bar{U}_{\text{om}}$ proti temenski vrednosti $\hat{u}_{\text{om}}$:

$$\frac{\bar{U}_{\text{om}}}{\hat{u}_{\text{om}}} = \frac{|\sin \omega T_i / 2|}{\omega T_i / 2} = \frac{|\sin \pi f T_i|}{\pi f T_i} = \frac{|\sin \pi f / f_{\text{om}}|}{\pi f / f_{\text{om}}}$$

- Čas integracije je enak periodi motilne napajalne frekvence ameriškega energetskega omrežja $f_{\text{om}} = 60 \text{ Hz}$: $T_i = \frac{1}{f_{\text{om}}} = 16,66 \text{ ms}$

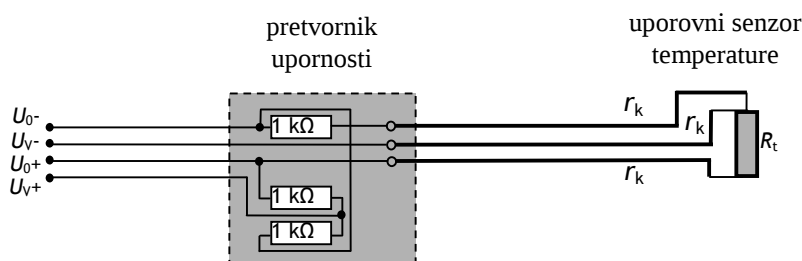
- Slabljenje izrazimo z inverzno vrednostjo razmerja: $A = \frac{\hat{u}_{\text{om}}}{\bar{U}_{\text{om}}}$

- in izraženo v decibelih: $A/\text{dB} = 20 \lg A$

- Slabljenje za prve tri komponente je enako:

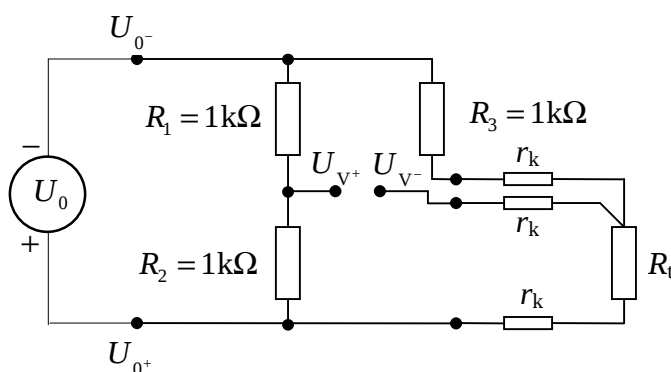
f / Hz	f / f_{om}	$\bar{U}_{\text{om}} / \hat{u}_{\text{om}}$	A	A / dB
50	0,833	0,1910	5,236	14,38
100	1,666	0,1654	6,046	15,63
150	2,5	0,1273	7,854	17,90

2. Merilnik temperature na sliki je sestavljen iz pretvornika upornosti ter uporovnega senzorja temperature R_t , ki je na pretvornik priključen tri-vodno. Po priključitvi napajanja U_0 znaša napetost na izhodu merilnika $U_V = 0\text{ V}$. Koliko bi znašala napetost U_V , če bi podaljšali (tri) priključne vodnike senzorja in bi njihove upornosti znašale $r_k = 100\Omega$?



Rešitev:

- Shemo merilnega pretvornika z uporovnim senzorjem na sliki lahko razvijemo v navaden Wheatstonov mostič:

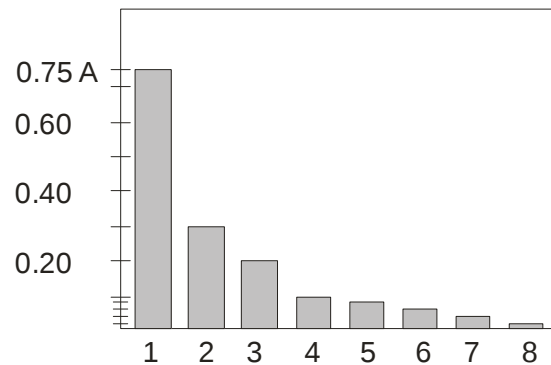


- Ker je na začetku izhodna napetost U_V , ki predstavlja mostično napetost, enaka 0 V , pomeni, da je mostič v ravnovesju. Za ravnovesje velja naslednja enačba

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3 + r_k}{R_t + r_k}$$

- Ker so upori R_1 , R_2 in R_3 vsi enaki $1\text{ k}\Omega$, velja, da je tudi R_t enak $1\text{ k}\Omega$. To zaradi ravnovesja mostiča velja ne glede na to, koliko znaša upornost priključnih vodnikov r_k , kar pomeni, da je tudi ob podaljšanju vodnikov mostič še vedno v ravnovesju in vrednost U_V ostaja 0 V .

3. Analizator moči kaže rezultate na sliki. Efektivna vrednost toka porabnika je 0,90 A . Koliko sta THD_{IEC} in THD_{DIN} ?



Rešitev:

- Efektivna vrednost toka porabnika je 0,90 A . Podatek je podan, lahko pa se izračuna kot geometrijska vsota posameznih komponent.

$$I = \sqrt{I_{K1}^2 + I_{K2}^2 + I_{K3}^2 + \dots + I_{K8}^2}$$

- THD faktor po IEC standardu se izračuna kot

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^n I_k^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{(0,90 \text{ A})^2 - (0,75 \text{ A})^2}}{0,75 \text{ A}} = 0,66$$

- THD faktor po DIN standardu pa se izračuna kot

$$THD_{DIN} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I} = \frac{\sqrt{(0,90 \text{ A})^2 - (0,75 \text{ A})^2}}{0,90 \text{ A}} = 0,55$$

4. Kako poteka krivulja minimalnega potrebnega merilnega časa $T_M(f_x)$ pri merjenju frekvence oziroma periode signala z elektronskim števcem ($f_0 = 10\text{ MHz}$; $K = 1, \dots, 10^8$) v območju $100\text{ Hz} < f_x < 100\text{ kHz}$, da je mejna vrednost relativnega kvantizacijskega pogreška vedno pod $m_q = 10^{-4}$? Kako se pri tem spreminja časovna oziroma frekvenčna ločljivost? Skicirajte!

Rešitev:

- Mejna vrednost kvantizacijskega pogreška pri merjenju frekvence je enaka:

$$m_{f,q} = \frac{T_x}{T_M} = \frac{1}{T_M f_x} = \frac{1}{K T_0 f_x}$$

- in je najmanjša, kadar je vrednost delilnika števca največja $K_f = 10^8$ oz. čas merjenja, ki ga omogoča števec, najdaljši $T_M = 10^8 T_0 = 10\text{ s}$:

$$m_{f,q,\min} = \frac{1}{K_f T_0 f_x} = \frac{1}{10^8 T_0 f_x}$$

- Mejna vrednost kvantizacijskega pogreška pri merjenju periode je enaka:

$$m_{T,q} = \frac{K T_0}{T_x} = K T_0 f_x$$

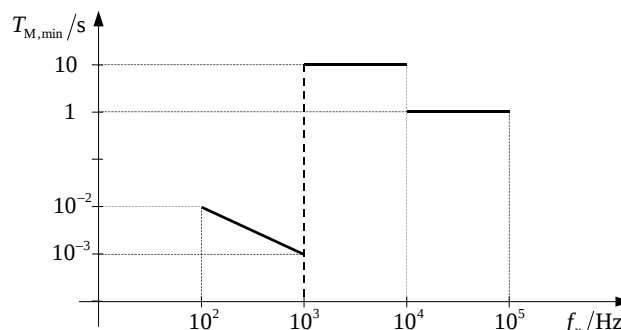
- in je najmanjša, kadar je vrednost delilnika števca najmanjša $K_T = 1$ oz. časovna ločljivost, ki jo omogoča števec, najmanjša $T_0 = 1/f_0 = 0,1\mu\text{s}$:

$$m_{T,q,\min} = \frac{T_0}{T_x} = T_0 f_x$$

- Izenačitev obeh mejnih minimalnih vrednosti kvantizacijskih pogreškov dobimo pri frekvenci:

$$m_{f,q,\min} = m_{T,q,\min} \rightarrow \frac{1}{10^8 T_0 f_x} = T_0 f_x \rightarrow f_x = \frac{f_0}{\sqrt{10^8}} = 10^3\text{ Hz}$$

- Do te frekvence merimo periodo signala in nad njo frekvenco, če želimo, da bo mejna vrednost relativnega kvantizacijskega pogreška vedno pod $m_q = 10^{-4}$.



- Ker merimo pri nižjih frekvencah periodo signala, nam ta določa najkrajši čas merjenja

$$T_M = T_x = 1/f_x.$$

- Pri višjih frekvencah merimo frekvenco signala. V frekvenčnem intervalu med 10^3 Hz in 10^4 Hz dosežemo željeni mejni pogrešek $m_q = 10^{-4}$ s časom merjenja $T_M = 10\text{ s}$ in v frekvenčnem intervalu med 10^4 Hz in 10^5 Hz s časom merjenja $T_M = 1\text{ s}$, ker je frekvenca že višja in lahko skrajšamo čas merjenja.

5. Določite delovno moč in faktor moči na bremenu, če sta napetost in tok:

$$u/\text{V} = 100 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/3) + 10 \cdot \sin(6\pi ft + \pi/4)$$

$$i/\text{A} = 5 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/2) + 1 \cdot \sin(6\pi ft + \pi/6)$$

Rešitev:

- Delovna moč je definirana kot vsota prispevkov $P_i = U_i I_i \cos \varphi_i$ komponent napetosti in toka iste frekvence z upoštevanjem razlike kotov med napetostjo in tokom za ustrezno komponento.

$$P = \sum_i U_i I_i \cos \varphi_i; \quad \varphi_i = \varphi_{U,i} - \varphi_{I,i}$$

- V našem primeru imamo prispevek osnovne in tretje harmonske komponente:

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1; \quad \varphi_1 = \varphi_{U,1} - \varphi_{I,1} = \pi/3 - \pi/2 = -\pi/6$$

$$P_3 = U_3 I_3 \cos \varphi_3; \quad \varphi_3 = \varphi_{U,3} - \varphi_{I,3} = \pi/4 - \pi/6 = \pi/12$$

- Efektivne vrednosti komponent napetosti in toka so:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 70,71 \text{ V}, \quad U_3 = \frac{\hat{u}_3}{\sqrt{2}} = \frac{10 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 7,071 \text{ V};$$

$$I_1 = \frac{\hat{i}_1}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 3,536 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{\hat{i}_3}{\sqrt{2}} = \frac{1 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 0,707 \text{ A}$$

- Delovna moč je tako:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 216,51 \text{ W} + 4,83 \text{ W} = 221,34 \text{ W}$$

- Navidezna moč je enaka produktu efektivne vrednosti napetosti in toka: $S = U \cdot I$
 - Efektivno vrednost napetosti dobimo z geometrijskim seštevanjem efektivnih vrednosti komponent: $U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = 71,064 \text{ V}$
 - Enako velja tudi za efektivno vrednost toka: $I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 3,606 \text{ A}$
 - Navidezna moč je: $S = 256,22 \text{ VA}$

- Faktor moči je razmerje delovne in navidezne moči: $\lambda = \frac{P}{S}$

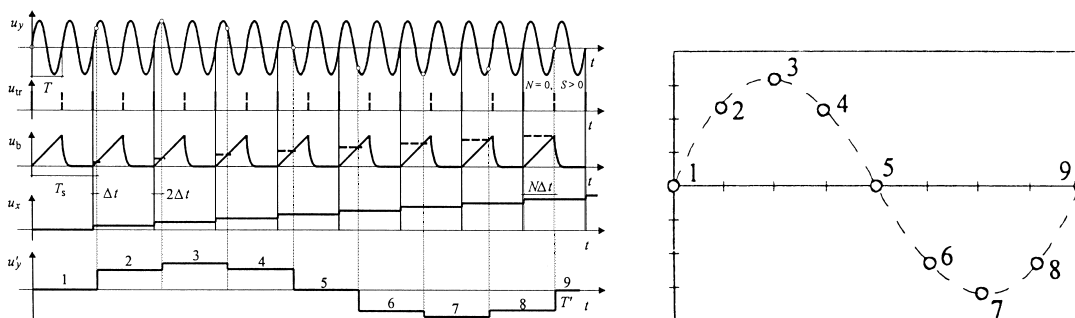
- in znaša v našem primeru: $\lambda = \frac{221,34 \text{ W}}{256,22 \text{ VA}} = 0,864$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

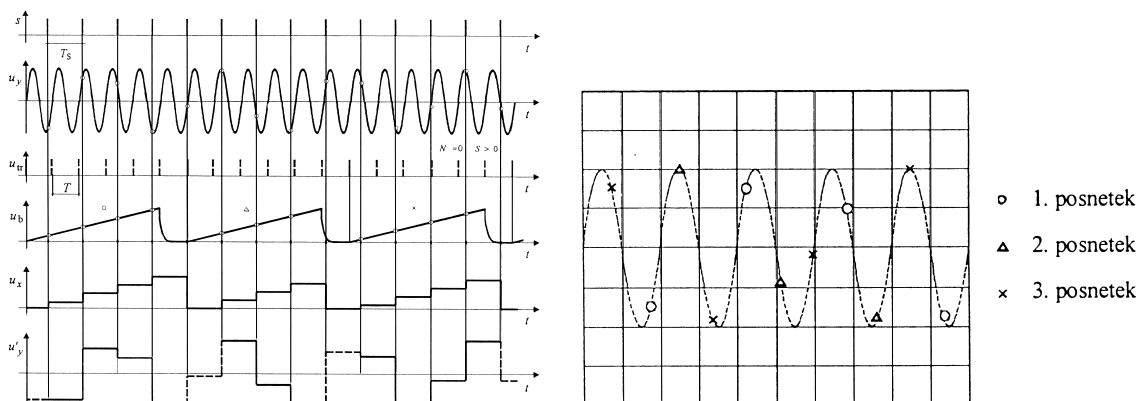
1. Opišite tehnike vzorčenja pri digitalnih spominskih osciloskopih! Skicirajte nastajanje slike na zaslonu! Kdaj govorimo o vzorčenju v ekvivalentnem času in kdaj v realnem času?

Rešitev:

- Ločimo dva načina pridobivanja podatkov in shranjevanja:
 - vzorčenje v **realnem času**, kjer jemanje vzorcev in shranjevanje **teče hkrati** z dogodkom. Upoštevati moramo vzorčni teorem.
 - vzorčenje v **ekvivalentnem času**, kjer jemanje vzorcev in shranjevanje **teče v podaljšanem času**. Uporablja se večkratno proženje. Signal mora biti periodičen.
- Pri vzorčenju v ekvivalentnem času poznamo:
- Za višje frekvence se uporablja tehnika jemanja vzorcev z zamikom – **postopkovno (sekvenčno) vzorčenje**:

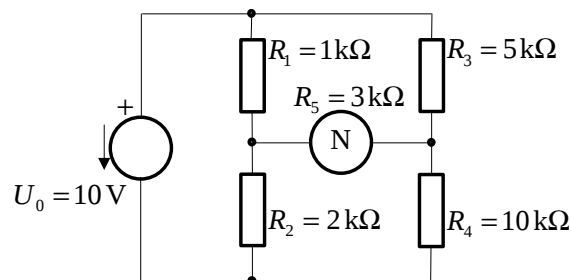


- Jemanje vzorcev se enakomerno zakasni po naslednjih M periodah za Δt , tako da je perioda jemanja vzorcev: $T_s = MT + \Delta t$. Krajši kot je čas Δt , bolj fino imamo podan signal $N = T/\Delta t \gg 1$ in daljši je čas rekonstrukcije: $T' = NT_s = N(MT + \Delta t)$. Frekvenca rekonstruiranega signala je $f' = f/(MN + 1)$.
- Jemanje vzorcev je lahko tudi **naključno** proti prožilnemu dogodku (**random sampling**). Vzorčevalni signal ni sinhroniziran z merjenim signalom.



- Končna slika nastane **po etapah**. V vsaki etapi se vzame nekaj vzorcev (ni nujno konstantno). Prvi vzorec v etapi je različno zamaknjen proti začetku etape.
- Širina zaslona $T(\text{zaslona}) = k_t x_m$ vsebuje Z_m intervalov dolgih $T'_s = k_t x_m / Z_m$, kar ustreza ekvivalentnemu vzorčnemu času. Od tod dobimo ekvivalentno frekvenco vzorčenja: $f'_s = Z_m / (k_t x_m)$.

2. Kolikšne spremembe upornosti R_3 razločimo z danim Wheatstonovim mostičem v okolici ravnovesne lege, če je ločljivost ničelnega indikatorja $(\Delta I_5)_q = 0,1 \mu\text{A}$? Kolikšna je ločljivost mostiča δ_q ?



$$I_5 = U_0 \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2) (R_3 + R_4)}$$

Rešitev:

- Ker nas zanima, kako se spreminja tok ničelnega indikatorja I_5 v okolici ravnovesja $R_{30} = R_1 R_4 / R_2$, izračunajmo odvod v tej točki:

$$\left(\frac{dI_5}{dR_3} \right)_{R_3=R_{30}} = ? \Rightarrow \frac{dI_5}{dR_3} = U_0 \frac{-R_2}{R_1 R_2 (R_{30} + R_4) + R_{30} R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2) (R_{30} + R_4)}$$

- pri majhnih spremembah upora R_3 , se v točki ravnovesja to bistveno pozna samo v števcu, ki je tedaj nič, števec pa praktično ostane nespremenjen.
 - Pri ovrednotenju občutljivosti nas v tem primeru zanima absolutna vrednost odvoda $|dI_5/dR_3|$.
- Če v dobljenem izrazu infinitezimalne spremembe zamenjamo s končnimi in izračunamo ΔR_3 , dobimo

$$\Delta R_3 = \frac{\Delta I_5}{U_0 R_2} [R_1 R_2 (R_{30} + R_4) + R_{30} R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2) (R_{30} + R_4)]$$

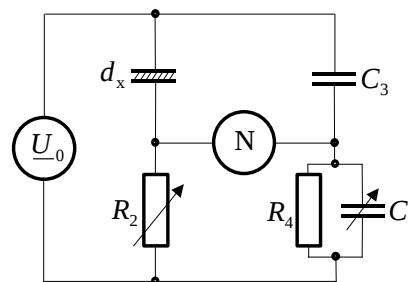
$$\Delta R_3 = \frac{0,1 \mu\text{A}}{10 \text{ V} \cdot 2 \text{ k}\Omega} [1 \text{ k}\Omega \cdot 2 \text{ k}\Omega \cdot (15 \text{ k}\Omega) + 5 \text{ k}\Omega \cdot 10 \text{ k}\Omega \cdot (3 \text{ k}\Omega) + 3 \text{ k}\Omega \cdot 3 (1 \text{ k}\Omega) (15 \text{ k}\Omega)]$$

$$\Delta R_3 = 1,575 \Omega$$

- Ker smo za ΔI_5 uporabili najmanjšo spremembo toka ničelnega indikatorja, ki jo še opazimo $(\Delta I_5)_q$, dobimo za iskano ločljivost mostiča:

$$\Delta I_5 = (\Delta I_5)_q \Rightarrow \delta_q = \frac{(\Delta R_3)_q}{R_{30}} = \frac{1,575 \Omega}{5 \text{ k}\Omega} = 3,15 \cdot 10^{-4}$$

3. Pri normalni izvedbi Scheringovega mostiča sta spremenljiva elementa R_4 in C_4 (zakaj?). Obstaja pa različica (glej vezje), ki je prilagojena za merjenje faktorja izgub d_x . Napišite ravnovesne pogoje in ugotovite njeno prednost!



Rešitev:

- Scheringov mostič je uporaben za merjenje dielektričnih izgub pri **visokih napetostih**, ker lahko izberemo elemente tako, da so na elementih R_2 in Z_4 manjše napetosti $R_2 \ll Z_1$, $Z_4 \ll 1/\omega C_3$. Na ta način postane **rokovanje** z njim **varno**.
 - Mostič je neodvisen od frekvence in spada med mostiče produkta $Z_2 \cdot Z_3 = \text{konst.}$
- Iz ravnovesne enačbe $R_x + \frac{1}{j\omega C_x} = \frac{R_2}{j\omega C_3} \left(\frac{1}{R_4} + j\omega C_4 \right)$, kjer uporabimo serijsko nadomestno vezavo za realni kondenzator, dobimo:

$$C_x = C_3 \frac{R_4}{R_2}, \quad R_x = R_2 \frac{C_4}{C_3},$$

- S spremenljivima elementoma R_4 in C_4 neodvisno nastavljamo ravnovesji za imaginarni in realni del impedance (C_x in R_x).
- Faktor izgub d (faktor disipacije) splošno izmerimo posredno prek delovne in navidezne (oz. jalove) moči:

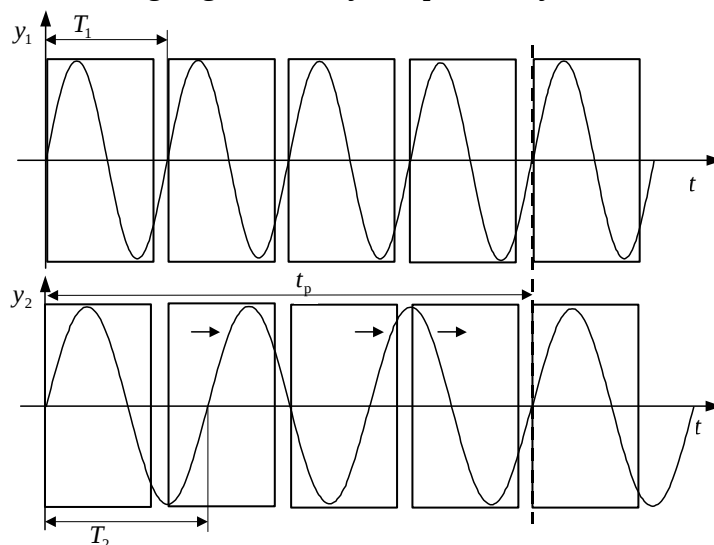
$$d_x = \frac{P}{\sqrt{S^2 - P^2}} = \frac{P}{Q} = \frac{I^2 R_{x,s}}{I^2 (1/\omega C_{x,s})} = \omega R_x C_x = \omega R_4 C_4$$

- Če ga uporabljamo samo za ugotavljanje faktorja izgub, ima R_4 stalno vrednost, mostič pa uravnesimo s spreminjanjem R_2 in C_4 . S tem uravnotežanje ni več medsebojno neodvisno, vendar pa lahko kondenzator C_4 umerimo za neposredno odčitavanje faktorja izgub.

4. Na dvokanalni osciloskop sta priključena sinusna signala s frekvencama f_1 (kanal-1) in $f_2 \approx f_1$. Vir proženja časovne baze je kanal-1. Slika drugega signala potuje od leve proti desni strani zaslona. V času $t_p = 2,5\text{s}$ se slika na zaslonu prvič ponovi. Skicirajte signala in ugotovite neznano frekvenco f_2 , če je $f_1 = 1\text{kHz}$!

Rešitev:

- Če se frekvenci malo razlikujeta, se slika tistega signala, na katerem ni proženja, počasi premika glede na prvega.
- Ker je vir proženja časovne baze kanal-1 in potuje drugi signal od leve proti desni strani zaslona, drugi signal 'zaostaja' za prvim in je frekvenca manjša $f_2 < f_1$.



- Ker je $T_2 > T_1$ imamo v času ponovitve slike $Z - 1$ nihajev drugega signala T_2 in Z nihajev prvega signala T_1 (na skici je $Z = 4$; v našem primeru je $Z = t_p f_1 = 2500$):

$$t = (Z - 1) \cdot T_2 = Z \cdot T_1$$

$$\blacksquare \text{ Od tod dobimo } Z = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = \frac{t}{T_1} \Rightarrow t = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_2 - T_1} \text{ in } f_2 = f_1 - 1/t$$

- Iz časa, ko se slika natančno ponovi, dobimo splošno $f_2 = f_1 \pm 1/t$ in v našem primeru:

$$f_2 = f_1 - 1/t = 1\text{kHz} - 1/2,5\text{s} = 999,6\text{Hz}$$

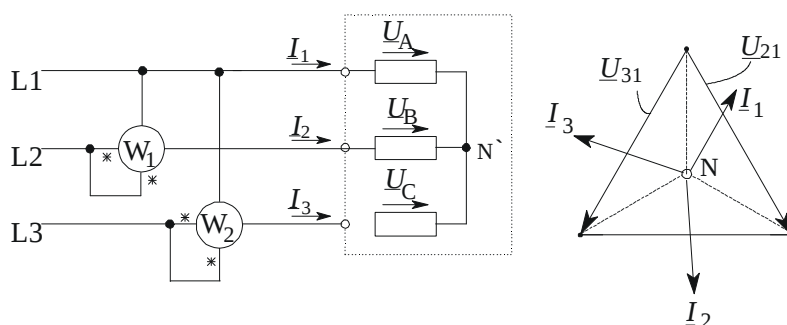
5. Skicirajte vezji za merjenje delovne in jalove moči v trivodnem trifaznem sistemu z uravnovešenim trifaznim virom z dvema vatmetroma, ki imata tokovni veji v vodnikih L2 in L3! Narišite fazorska (kazalčna) diagrama za obe vezji, navedite pogoje za pravilno merjenje moči in enačbi za izračun moči!

Rešitev:

- **Delovna moč:**

- Aronova vezava: Edini pogoj za merjenje **delovne moči v trifaznem sistemu samo z dvema vatmetroma je trivodnost sistema**, ker je vsota tokov $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ in lahko damo skupno točko sistema vatmetrov v eno izmed faz in tako prihranimo en vatmeter. Za naš primer zapišemo in narišemo:

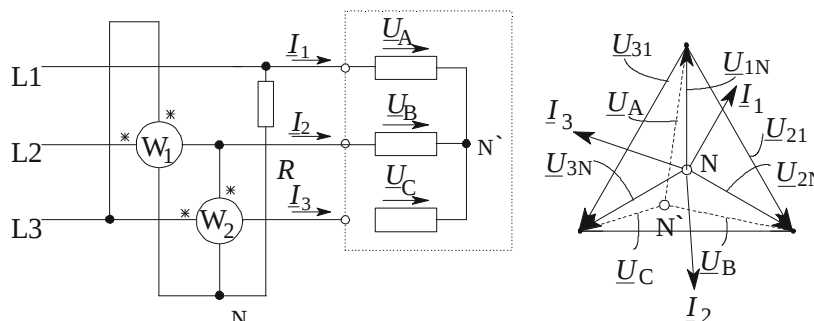
$$P = P_{W1} + P_{W2}$$



- **Jalova moč:**

- Pri merjenju jalove moči mora biti vir uravnovešen. Ni nujno, da je breme simetrično. Znano mora biti zaporedje faz in enakost uporov za določitev težiščne točke enakostraničnega napetostnega trikotnika N $R_{W1,n} = R_{W3,n} = R$. S tem dobimo 90° zamik faznih napetosti proti medfaznim.

$$Q = \sqrt{3}(P_{W2} - P_{W1})$$

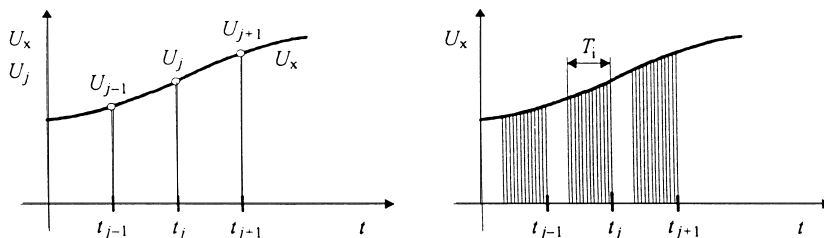


Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Naštejte in opišite načine zajemanja (vzročanja) signalov z analogno-digitalnimi pretvorniki! Kateri člen omogoča trenutnost zajemanja? Kateri parametri delovanja so pri tem pomembni?

Rešitev:

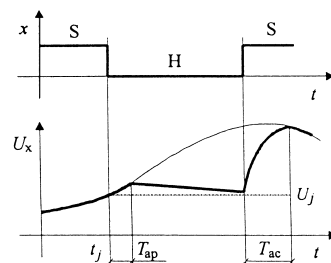
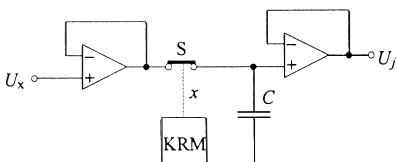
- **Postopeke vzorčenja** delimo na:



- trenutni – izhod ustreza trenutni vrednosti: $U_j(t_j)$,
- integrirajoči – izhod ustreza tekoči povprečni vrednosti: $\bar{U}_j = \frac{1}{T_i} \int_{t_j - T_i}^{t_j} U_x dt$
- Lastnost integrirajočega ADP da filtrira (odziva se na povprečno vrednost) izkoriščamo za izločanje motnje. Integracijski čas T_i mora biti enak periodi ali večkratniku periode motnje (omrežna frekvenca).

$$\bar{U}_j = \frac{1}{NT} \int_{t_j - NT}^{t_j} (U_x + u_{omr}) dt = U_x + \frac{1}{NT} \int_{t_j - NT}^{t_j} u_{omr} dt \cong U_x$$

- Trenutnost zajemanja omogoča **člen za vzorčenje in zadržanje**:



- V trenutku t_j nastopi ukaz zadrži (H - hold),
 - stikalo S se odpre in kondenzator C bi naj zadržal vrednost trenutne napetosti U_j !
 - stikalo potrebuje **aperturni čas** T_{ap} (lat. aperire - odpreti), da se odpre - imamo časovni zamik.
- Napetost na kondenzatorju zaradi končnih upornosti upada – imamo **upad napetosti** (drop rate).
- Ko nastopi ukaz vzorči (S - sample) začne V/Z člen slediti signalu,
 - stikalo se sklone in napetost na kondenzatorju sledi signalu preko prvega ojačevalnika,
 - V/Z člen potrebuje **akvizicijski čas** T_{ac} (lat. acquirere - pridobiti), da doseže signal v mejah toleranc. $T_{ac} \approx 50T_{ap}$
- **Mejna vzorčna frekvenca:** $f_s \leq 1/(T_{ac} + T_{ap})$!

2. Določite meje relativne spremembe upornosti pri četrtnskem, dvočetrtnskem, polovičnem in polnem mostiču, da ostanejo nelinearnosti karakteristik pod enim odstotkom! ($R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, $R_v \gg R$). Pokažite z enačbami. Vezje napajamo z idealnim tokovnim virom.

$$U_5 = I_0 \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

Rešitev:

- Pri **četrtnskem** mostiču se spreminja samo en upor (npr: R_1): $U_5 = I_0 \frac{R \cdot \Delta R}{4R + \Delta R}$
 - idealna linearna karakteristika četrtnskega mostiča: $U_5' = I_0 \frac{\Delta R}{4}$
 - nelinearnost: $e = \frac{U_5}{U_5'} - 1 = \frac{4R}{4R + \Delta R} - 1 = \frac{4}{4 + \Delta R/R} - 1 \leq -0,01$
 - od tod sledi mejna vrednost relativne spremembe upornosti: $\frac{\Delta R}{R} \doteq 0,04$
- Pri **polovičnem** mostiču se spreminjata upora v sosednjih vejah (npr: R_1 in R_3) v nasprotno smer:

$$U_5 = I_0 \frac{(R + \Delta R)R - R(R - \Delta R)}{4R} = I_0 \frac{2\Delta R \cdot R}{4R} = I_0 \frac{\Delta R}{2} \rightarrow \text{linearna karakteristika}$$
- Pri **dvočetrtnskem** mostiču se spreminjata upora v diametralno ležečih vejah (npr: R_1 in R_4) v isto smer:

$$U_5 = I_0 \frac{(R + \Delta R)(R + \Delta R) - R^2}{4R + 2\Delta R} = I_0 \frac{\Delta R(2R + \Delta R)}{2(2R + \Delta R)} = I_0 \frac{\Delta R}{2} \rightarrow \text{linearna karakteristika}$$
- Pri **polnem** mostiču se spreminjata prva dva diametralno ležeča upora (npr: R_1 in R_4) v eno smer in druga dva diametralno ležeča upora (npr: R_2 in R_3) v drugo smer:

$$U_5 = I_0 \frac{(R + \Delta R)^2 - (R - \Delta R)^2}{4R} = I_0 \frac{4R\Delta R}{4R} = I_0 \Delta R \rightarrow \text{linearna karakteristika}$$

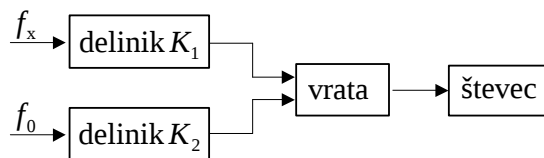
3. Koliko morata biti delilni razmerji K_1 in K_2

(sta pozitivni celi števili), če želimo z digitalnim števcem zmeriti f_x oz. T_x pri

frekvencah $f_{x1} = 10 \text{ kHz}$ in $f_{x2} = 700 \text{ Hz}$?

Doseči želimo minimalni mejni kvantizacijski

pogrešek in čas merjenja $T_M \leq 2 \text{ ms}$. Koliko sta kvantizacijska pogreška? $f_0 = 10 \text{ MHz}$



Rešitev:

- Frekvenca $f_{x1} = 10 \text{ kHz}$:

- Če merimo frekvenco signala, nam daljši čas merjenja zmanjšuje mejni kvantizacijski pogrešek. Ker je čas merjenja omejen na $T_M \leq 2 \text{ ms}$, mora biti:

$$T_M = K_2 / f_0 = 2 \text{ ms} \rightarrow K_2 = T_M f_0 = 2 \cdot 10^4$$

- Neznana frekvenca ne sme biti zmanjšana, če želimo čim več prešteti impulzov in s tem najmanjši mejni kvantizacijski pogrešek: $K_1 = 1$

- Mejni kvantizacijski pogrešek je tako:

$$m_f = \frac{1}{T_M \cdot f_x} = \frac{f_0}{K_2 K_1 f_x} = 0,05$$

- Če merimo periodo signala, nastavimo delilnik K_1 tako, da je čas števila K_1 period merjenega signala enak ali manjši $T_M \leq 2 \text{ ms}$:

$$K_1 T_x = T_M \leq 2 \text{ ms} \rightarrow K_1 = T_M f_x = 20$$

- Referenčna frekvenca ne sme biti zmanjšana, če želimo čim več prešteti impulzov in s tem najmanjši mejni kvantizacijski pogrešek: $K_2 = 1$

- Mejni kvantizacijski pogrešek je tako:

$$m_T = \frac{f_x}{K_2 K_1 f_0} = 5 \cdot 10^{-5} \rightarrow \text{merimo periodo signala!}$$

- Frekvenca $f_{x2} = 700 \text{ Hz}$:

- Če merimo frekvenco signala, izberemo $K_2 = T_M f_0 = 2 \cdot 10^4$ in $K_1 = 1$ podobno kot v prejšnjem primeru.

- Mejni kvantizacijski pogrešek je tako:

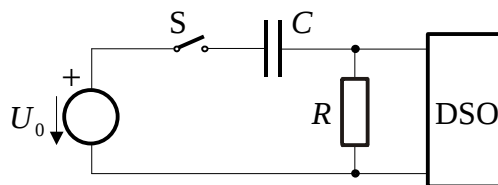
$$m_f = \frac{1}{T_M \cdot f_x} = \frac{f_0}{K_2 K_1 f_x} = 0,714$$

- Če merimo periodo signala, ki je v našem primeru $T_x = 1,428 \text{ ms}$, moramo izbrati $K_1 = 1$. $K_2 = 1$ mora biti izbran enako kot v prejšnjem primeru.

- Mejni kvantizacijski pogrešek je tako:

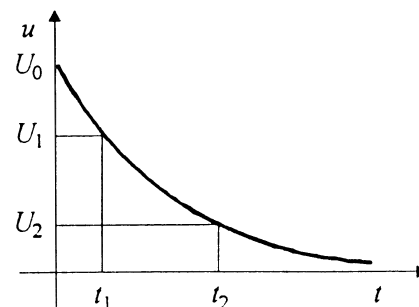
$$m_T = \frac{f_x}{K_2 K_1 f_0} = 7 \cdot 10^{-5} \rightarrow \text{merimo periodo signala!}$$

4. Z danim vezjem moremo izmeriti kapacitivnost. Razložite metodo in izpeljite enačbo za merjeno veličino!



Rešitev:

- Ko vklopimo stikalo S, steče tok skozi zaporedno vezavo kondenzatorja in upora. Tok upada po eksponentni funkciji $u = U_0 e^{-t/RC_x}$, ki jo določa časovna konstanta $\tau = RC_x$ (člen 1. reda).
 - Na začetku je vsa napetost na uporu. Za trenutni skok napetosti predstavlja kondenzator kratek stik.
 - Na koncu prehodnega pojava je vsa napetost na kondenzatorju.
- Iz hitrosti upada toka in s tem napetosti na uporu iz vrednotimo iskano kapacitivnost tako, da z osciloskopom pomerimo napetost v dveh časovnih točkah:
 - v času t_1 : $U_1 = U_0 e^{-t_1/RC_x}$;
 - v času t_2 : $U_2 = U_0 e^{-t_2/RC_x}$
- Neznana kapacitivnost je:
$$C_x = \frac{t_2 - t_1}{R \ln U_1 / U_2}$$



5. Pri merjenju dinamične histerezne zanke feromagnetnega jedra, pri sinusni obliki gostote magnetnega pretoka B , ste s primernim vezjem dobili dve izmerjeni vrednosti skupnih izgub v jedru. In sicer $P_{s1} = 1,127 \text{ W/kg}$ pri $F_1/F_0 = 1,213$ in $P_{s2} = 1,288 \text{ W/kg}$ pri $F_2/F_0 = 1,344$. Koliko znašajo skupne, histerezne in vrtilne izgube pri $F_3/F_0 = 1$?

$$P_s = aB_m^n f + b \frac{d^2 B_m^2 F^2 f^2}{\rho} = P_h + P_e$$

Rešitev:

- Za ločitev izgub uporabimo metodo ločevanja histereznih in vrtilnih izgub s faktorjem oblike signala. Izhodiščno enačbo poenostavimo:

$$P_s = P_h + c \left(\frac{F}{F_0} \right)^2$$

- Iz dveh izmerjenih točk določimo koeficiente premice, ki gre skozi izmerjeni točki.

$$P_{s1} = P_h + c \left(\frac{F_1}{F_0} \right)^2$$

$$P_{s2} = P_h + c \left(\frac{F_2}{F_0} \right)^2$$

$$1,127 = P_h + c(1,213)^2$$

$$1,288 = P_h + c(1,344)^2$$

$$1,288 - 1,127 = c((1,344)^2 - (1,213)^2)$$

$$c = 0,481 \text{ W/kg}$$

- Če koeficient c vstavimo v eno od gornjih enačb, dobimo $P_h = 0,419 \text{ W/kg}$.
- Preračun izgub na $F_3/F_0 = 1$ se izvede z vstavitvijo podatkov v osnovno enačbo.

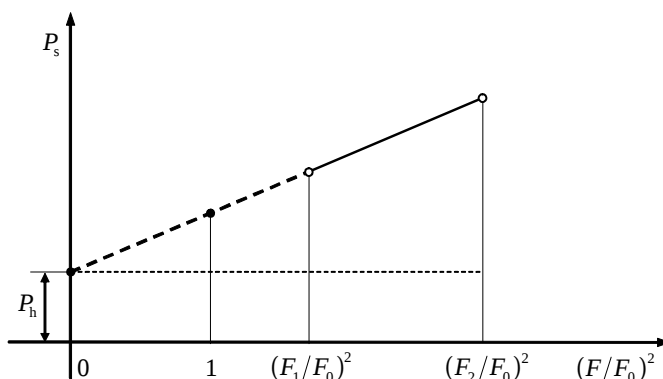
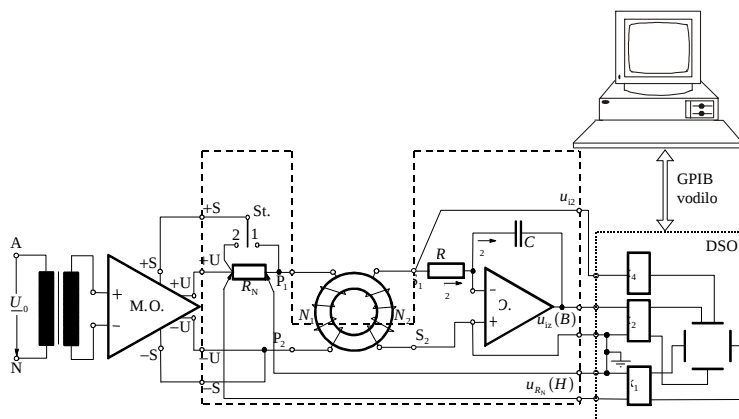
$$P_{s3} = 0,419 \text{ W/kg} + 0,481 \text{ W/kg} \cdot (1)^2 = 0,900 \text{ W/kg}$$

- Histerezne izgube so konstantne.

$$P_{h1} = P_{h2} = P_{h3} = 0,419 \text{ W/kg}$$

- Vrtilne izgube dobimo, če od skupnih izgub odštejemo histerezne.

$$P_{e3} = P_{s3} - P_{h3} = 0,481 \text{ W/kg}$$

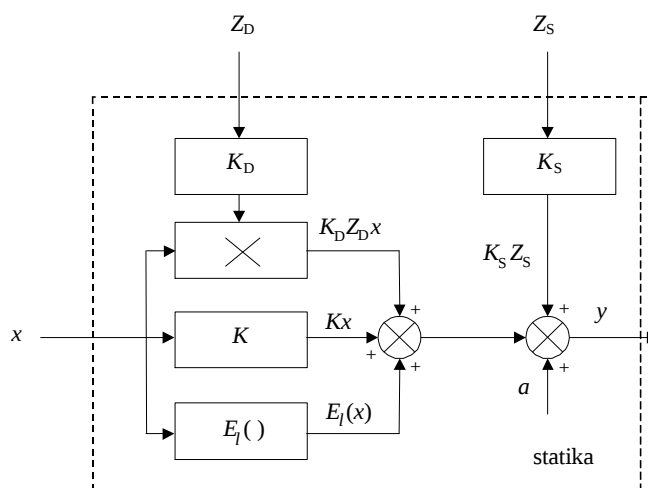


Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Narišite posplošen model merilnega pretvornika in ga opišite! Katere vplivne veličine nastopajo in kakšen značaj imajo?

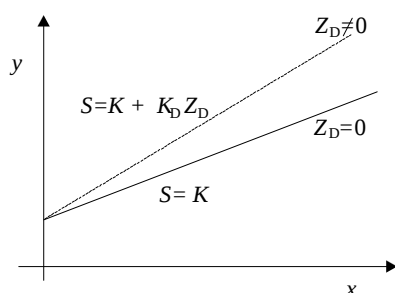
Rešitev:

- Posplošen model merilnega pretvornika:

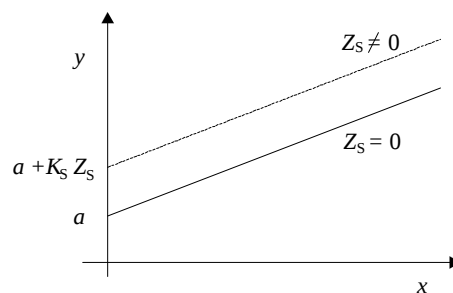


- Če pretvornik ni v referenčnih pogojih, je njegova karakteristika

$$y = Kx + a + E_l(x) + K_D Z_D x + K_S Z_S,$$
 - Imamo enosmerni zamik a , smerni koeficient K in nelinearnost $E_l(x)$.
- Z_D in Z_S sta odstopanji vplivnih veličin od referenčnih pogojev.
 - Znotraj okvirja so referenčni pogoji, zunaj pa vplivne veličine.
- Opravka imamo z dvema skupinama vplivnih veličin:
 - **deformirajoče** vplivne veličine Z_D
 - deformirajo karakteristiko (v najbolj preprostem primeru spremenijo naklon).
 - **superponirajoče** vplivne veličine Z_S .
 - dodajo, prištejejo neko vrednost h karakteristiki.



vplivna veličina učinkuje
na naklon karakteristike
-deformirajoča vpliv. vel.

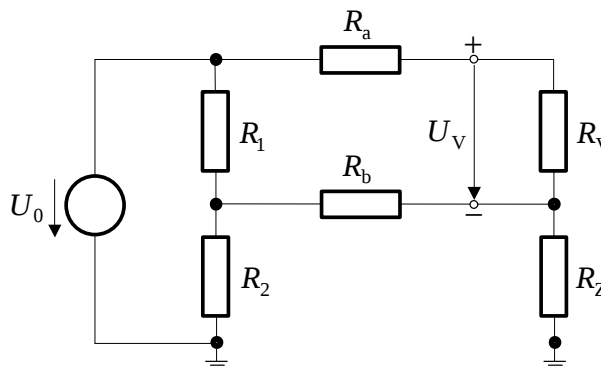


vplivna veličina učinkuje
na premaknitev ničlišča
-superponirajoča vpliv. vel.

2. Koliko kaže voltmeter ($U_V = ?$) pri merjenju napetosti na upor R_1 . Voltmeter ima neozemljeni vhod ($U_D = 5\text{ V}$, ločljivost: $\Delta U = 10\mu\text{V}$, $R_V = 10\text{ M}\Omega$)? Narišite nadomestno shemo!

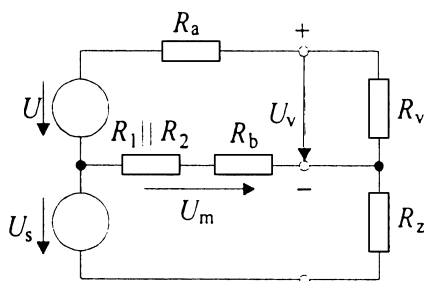
$$R_1 = R_2 = 10\text{ k}\Omega, U_0 = 10\text{ V}$$

$$R_a = R_b = 10\Omega, R_z = 100\text{ M}\Omega$$



Rešitev:

- Nadomestna shema:



- Merjena napetost $U = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 5\text{ V}$ deluje na vhoda voltmetra (+ in -) v nasprotnih smereh.
- Motilna sofazna napetost $U_s = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5\text{ V}$ deluje na vhoda voltmetra v isto smer.

- Ker je $R_z \gg (R_1 \parallel R_2 + R_b)$, zapišemo za prispevek merjene napetosti na vhodu voltmetra (napetostni delilnik):

$$U_V = U \frac{R_V}{R_1 \parallel R_2 + R_b + R_a + R_V} = 5\text{ V} \cdot 0,9994982 = 4,997491\text{ V} \rightarrow U_V = 4,99749\text{ V}$$

- Prispevek motilne sofazne napetosti na vhodu voltmetra je nekaj manjši, kot je padec na nadomestnem uporu ($R_1 \parallel R_2 + R_b$):

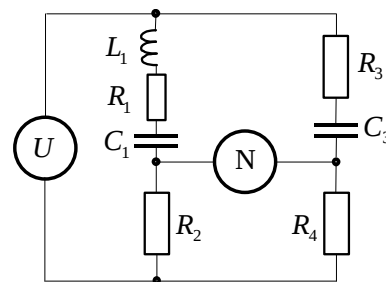
$$U_{V,m} = U_s \cdot \frac{R_1 \parallel R_2 + R_b}{R_1 \parallel R_2 + R_b + R_z} \cdot \frac{R_V}{R_1 \parallel R_2 + R_a + R_b + R_V} = U_s \cdot 5,0099 \cdot 10^{-5} \cdot 0,999498 = 2,504 \cdot 10^{-4}\text{ V}$$

$$\rightarrow U_{V,m} = 0,00025\text{ V}$$

- Skupna napetost, ki jo kaže voltmeter, je:

$$U_{\text{skupna}} = U_V + U_{V,m} = 4,9977416\text{ V} \rightarrow U_{\text{skupna}} = 4,99774\text{ V}$$

3. Pri katerih frekvencah mostiča ne moremo uravnovesiti, če spreminjamo R_2 , R_3 , R_4 ali C_3 ? Ali mostič lahko uravnovesimo pri $R_2C_1 > R_4C_3$?



Rešitev:

- Za mostič zapišemo impedance posameznih vej:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1, \quad \underline{Z}_2 = R_2, \quad \underline{Z}_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}, \quad \underline{Z}_4 = R_4$$

- Ravnovena enačba $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3$ nam da naslednjo povezavo,

$$\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 \right) \cdot R_4 = R_2 \cdot \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right)$$

- ki jo uredimo v obliko:

$$R_1 R_4 + \frac{R_4}{j\omega C_1} (1 - \omega^2 L_1 C_1) = R_2 R_3 + \frac{R_2}{j\omega C_3}$$

- Mostič ne moremo uravnovesiti, kadar je izraz $(1 - \omega^2 L_1 C_1)$ negativen in ne moremo izravnati imaginarni del leve in desne strani ravnovesne enačbe.

$$1 - \omega^2 L_1 C_1 < 0 \quad \rightarrow \quad 1 < \omega^2 L_1 C_1 \quad \rightarrow \quad f > \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}$$

- Ob izravnavi imaginarnega dela leve in desne strani ravnovesne enačbe dobimo:

$$\frac{R_4}{C_1} (1 - \omega^2 L_1 C_1) = \frac{R_2}{C_3} \Rightarrow (1 - \omega^2 L_1 C_1) = \frac{R_2}{C_3} \frac{C_1}{R_4}$$

- Neenačba $R_2 C_1 > R_4 C_3$ nam da $R_2 C_1 / R_4 C_3 > 1$, kar pomeni, da bi moral biti zraz $(1 - \omega^2 L_1 C_1)$ tudi večji od 1:

$$1 - \omega^2 L_1 C_1 > 1 \Rightarrow \omega^2 L_1 C_1 < 0$$

- Ker so vrednosti za kotno frekvenco ω , induktivnost L_1 in kapacitivnost C_1 realne in pozitivne, pri danem pogoju ne moremo uravnovesiti mostiča.

4. Z univerzalnim digitalnim števcem ($K = 1, 10, \dots, 10^8$, $f_0 = 10 \text{ MHz}$) merimo fazno karakteristiko merilnega člena 1. reda z dvižnim časom $T_r = 1 \text{ ms}$. Koliko je minimalna standardna negotovost zaradi kvantizacijskega pogreška pri merjenju faznega kota φ pri $f = 800 \text{ Hz}$!

Rešitev:

- Kot φ določimo iz izraza $\varphi = -\arctg \omega \tau = -\arctg 2\pi f \tau$ in znane povezave za člen 1. reda $\tau = T_r / \ln 9 = 4,5512 \cdot 10^{-4} \text{ s}$:

$$|\varphi| = \arctg 2\pi f \tau = 1,1587 \text{ rad}$$

- Od tod dobimo vrednost časovnega zamika pri periodi $T = 1/f = 1,25 \text{ ms}$:

$$\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \Delta t = \varphi \frac{T}{2\pi} = 2,30516 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

- Pri dani frekvenci in elektronskem števcu je minimalna standardna negotovost merjenja frekvence, če izberemo najdaljši čas merjenja $T_M = 10 \text{ s}$ oziroma $K = 10^8$:

$$u_q(f) = \frac{1}{T_M} \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{f_0}{K} \frac{1}{\sqrt{6}} = 4,082 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}$$

$$w_q(f) = \frac{u(f)}{f} = 5,103 \cdot 10^{-5}$$

- in minimalna standardna negotovost merjenja periode, če izberemo najmanjšo vrednost delinika $K = 1$:

$$u_q(T) = \frac{K}{f_0 \sqrt{6}} = 4,082 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$w_q(T) = \frac{u(T)}{T} = 3,266 \cdot 10^{-5}$$

- Na podlagi izračunov izberemo merjenje periode, ki ima majšo standardno negotovost zaradi kvantizacijskega pogreška.
- Pri kvocientu neposredno merjenih veličin $\Delta t/T$ zapišemo skupno standardno negotovost posredno merjene veličine φ v obliki:

$$w_q(\varphi) = \sqrt{w_q^2(T) + w_q^2(\Delta t)}$$

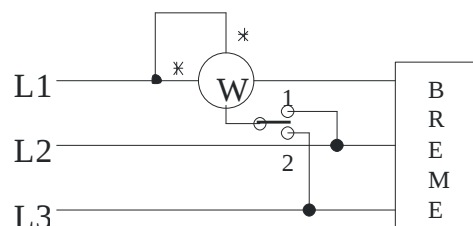
- Kvantizacijska negotovost merjenja časovnega zamika je večja kot pri merjenju periode zaradi manjšega števila preštetihih impulzov:

$$w_q(T) = 3,266 \cdot 10^{-5} < w_q(\Delta t) = \frac{u_q(T)}{\Delta t} = \frac{1}{f_0 \sqrt{6} \Delta t} = \frac{4,082 \cdot 10^{-8} \text{ s}}{2,30516 \cdot 10^{-4} \text{ s}} = 1,771 \cdot 10^{-4}$$

- Minimalna standardna negotovost zaradi kvantizacijskega pogreška pri merjenju faznega kota φ je tako:

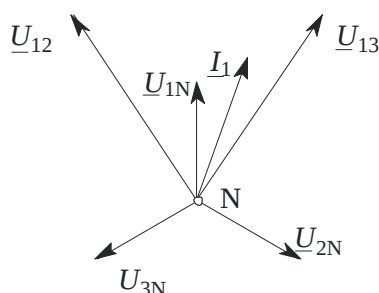
$$w_q(\varphi) = \sqrt{w_q^2(T) + w_q^2(\Delta t)} = 1,801 \cdot 10^{-4} \rightarrow w_q(\varphi) = 1,8 \cdot 10^{-4}$$

5. Dokažite, kakšno moč dobimo, če z vatmetrom izmerimo moč, ko je stikalo v položaju 1 in prištejemo moč, ki jo izmerimo, ko je stikalo v položaju 2? Narišite fazorski (kazalčni) diagram! Ali mora biti pri tovrstni meritvi breme simetrično? Kaj pa trifazni vir, ali mora biti uravnovešen?



Rešitev:

- Če seštejemo odčitka, ko je vatmeter v položajih 1 in 2, dobimo moč trifaznega bremena. Toda samo, če je breme simetrično oziroma trifazni vir uravnovešen, torej trifazni sistem uravnovešen.
- Fazorski (kazalčni) diagram



- Ko je preklopnik v položaju 1, je odklon vatmetra enak

$$P_{W1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{2N}) \underline{I}_1^* \},$$

- Ko pa je v položaju 2, pa

$$P_{W2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{U}_{13} \underline{I}_1^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{3N}) \underline{I}_1^* \}.$$

- Če seštejemo oba odčitka, dobimo

$$P_{W1} + P_{W2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ [(\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{2N}) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{3N}) \underline{I}_1^*] \}$$

- To pa je enako skupni moči sistema

$$P_{W1} + P_{W2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ 3 \underline{U}_{1N} \underline{I}_1^* \} = P,$$

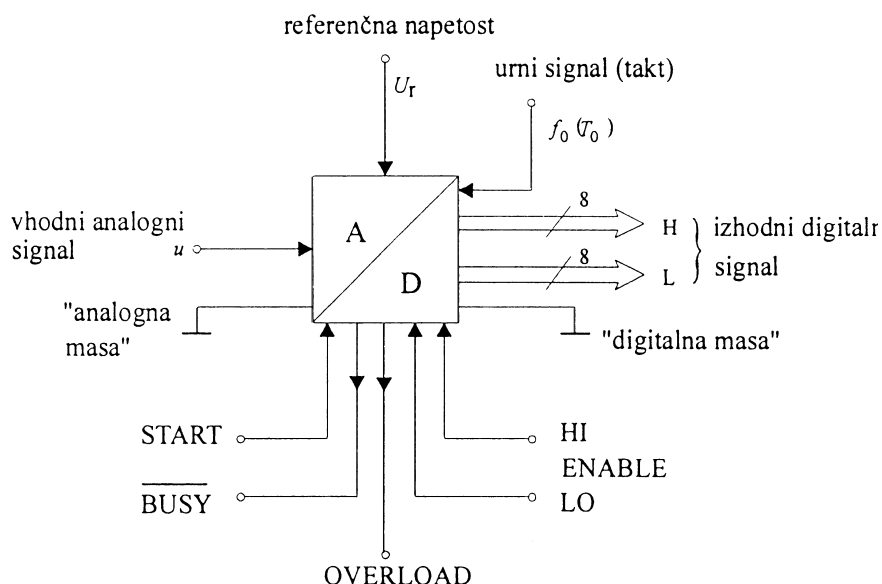
- saj je $-(\underline{U}_{2N} + \underline{U}_{3N}) = \underline{U}_{1N}$.

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

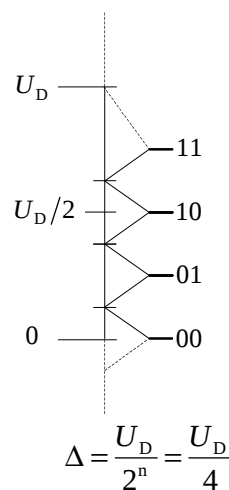
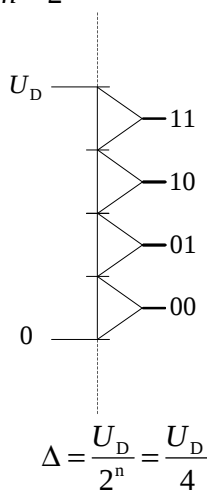
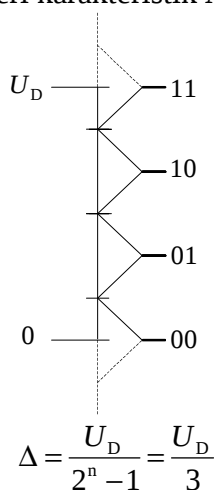
1. Narišite tipično blokovno shemo analogno-digitalnega pretvornika in opišite vhodne in izhodne priključke. Skicirajte primere kvantizacijskih karakteristik, če je korak kvantizacije $\Delta = U_D/2^n$ oziroma $\Delta = U_D/(2^n - 1)$ za $n = 2$.

Rešitev:

- Tipična blokovna shema analogno-digitalnega pretvornika ima naslednje priključke:



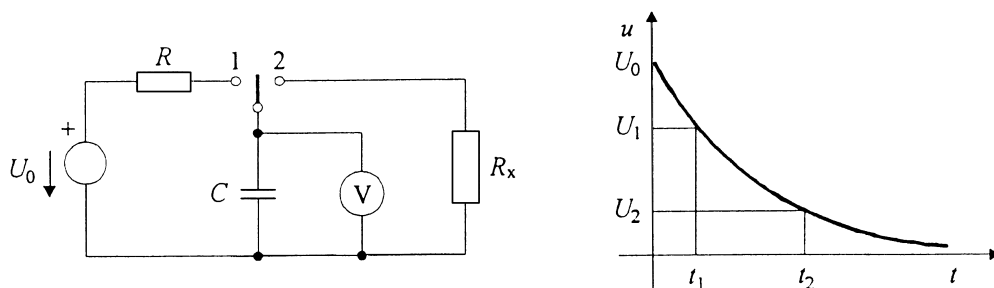
- **referenčni potencial** 'analogna masa' (Agnd);
 - **skupni potencial** izhoda 'digitalna masa' (Dgnd);
 - **referenčna napetost** U_r za primerjavo z merjeno napetostjo;
 - **urni signal**, ki daje takt korakov pri pretvarjanju;
 - **prožilni signal** za začetek pretvorbe (START);
 - **signal zasedenosti** z delom (BUSY). Ko preide v stanje 1, lahko sprožimo novo pretvarjanje z $1 \rightarrow 0$;
 - če je **ADP izkrmljen** (prevelika napetost na vhodu), nam ADP to sporoči na priključku OVERLOAD;
 - prisotnost 8-bitnih **podatkov na vodilu** (HI ali LO ENABLE) s pomočjo 'tristate' gonilnikov.
- Primeri karakteristik ADP: $n = 2$



2. Skicirajte vezje za merjenje zelo velikih upornosti po metodi praznjenja kondenzatorja in jo ugotovite, če se kondenzator s kapacitivnostjo 10 nF sprazni na polovično vrednost začetne napetosti v 10 s? Kondenzator brez priključenega upora neznane vrednosti se sam sprazni na polovično vrednost v 50 s.

Rešitev:

- Vezje za merjenje zelo velikih upornosti po metodi praznjenja kondenzatorja



- Ko preklopimo v položaj 1, se kondenzator nabije na napetost U_0 .
- Ko preklopimo v položaj 2, se kondenzator začne prazniti pretežno preko R_x . Kadar izolacijsko upornost R_i in upornost voltmetra R_v lahko zanemarimo, zapišemo:
 - za čas t_1 : $U_1 = U_0 e^{-t_1/R_x C}$;
 - za čas t_2 : $U_2 = U_0 e^{-t_2/R_x C}$
 - neznana upornost je v našem primeru: $R_x = \frac{t_2 - t_1}{C \ln U_1 / U_2} = \frac{\Delta t}{C \ln 2}$
- Kondenzator se prazni tudi sam zaradi izolacijske upornosti R_i in upornosti voltmetra R_v (preklopnik je v vmesnem položaju). V tem primeru merimo skupno paralelno upornost:

$$R_1 = R_i \parallel R_v = \frac{\Delta t_1}{C \ln 2} = \frac{50 \text{ s}}{10 \text{ nF} \ln 2} = 7,213 \text{ G}\Omega$$

- Ko praznimo kondenzator preko R_x (preklopnik v položaju 2), dejansko praznimo preko skupne paralelne upornosti $R_2 = R_1 \parallel R_x$.

$$R_2 = R_1 \parallel R_x = \frac{\Delta t_2}{C \ln 2} = \frac{10 \text{ s}}{10 \text{ nF} \ln 2} = 1,443 \text{ G}\Omega$$

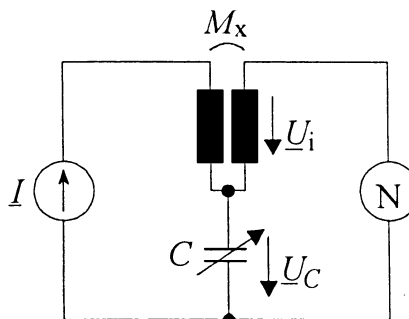
- Od tod izračunamo **neznano upornost**:

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} = 1,803 \text{ G}\Omega$$

3. Skicirajte Campbellovo vezje za merjenje medsebojne induktivnosti in dokažite, da je ločljivost vezja $\delta_q = \omega C (\Delta U)_q / I$, če je ničelni indikator voltmeter z zelo visoko upornostjo $R \rightarrow \infty \Omega$ in ločljivostjo $(\Delta U)_q$!

Rešitev:

- Campbellovo vezje za merjenje medsebojne induktivnosti:



- Tok skozi primarno navitje in kondenzator mora biti sinusne oblike.
 - Inducirana napetost na sekundarju M_x je: $\underline{U}_i = j\omega M_x \underline{I}$,
 - napetost na kondenzatorju pa: $\underline{U}_C = \underline{I} \frac{1}{j\omega C}$.
- Če se napetosti odštejeta in je ničelni indikator brez odklona, imamo:

$$j\omega M_x \underline{I} + \underline{I} \frac{1}{j\omega C} = 0 \rightarrow \omega M_x - \frac{1}{\omega C} = 0$$

- Od tod izračunamo medsebojno induktivnost: $M_x = \frac{1}{\omega^2 C}$

- V okolici ravnovesne lege lahko za napetost ničelnega indikatorja zapišemo

$$U_N = \omega M_x I - \frac{1}{\omega C} I$$

- Občutljivost napetosti ničelnega indikatorja na spremembo medsebojne induktivnosti izračunamo z delnim odvodom:

$$\frac{\partial U_N}{\partial M_x} = \omega I$$

- Če infinitezimalne spremembe veličin zamenjamo s končnimi, dobimo:

$$\Delta M_x = \frac{\Delta U_N}{\omega I}$$

- in v relativni obliki: $\frac{\Delta M_x}{M_x} = \frac{\Delta U_N}{\omega I} \omega^2 C = \omega C \frac{\Delta U_N}{I}$

- Ločljivost vezja dobimo, če v enačbi ločljivostjo ničelnega indikatorja zamenjamo z ločljivostjo voltmetra $(\Delta U)_q$.

$$\delta_q = \frac{(\Delta M_x)_q}{M_x} = \omega C \frac{(\Delta U)_q}{I}$$

4. Znana je karakteristika elektronskega pretvornika delovne moči (glej tabelo). Podajte merilni rezultat opazovane veličine, če prikazovalnik na izhodu pretvornika kaže $6,0\text{ A}$. Napetostni vhod je konstantno 100 V . Merilna negotovost sistema je 2% .

I/A	I_{izh}/A
1,0	2,1
2,0	3,9
3,0	6,0
4,0	8,1
5,0	9,8
6,0	11,9

Rešitev:

- Opazovana veličina je moč. Napetost na vhodu je 100 V . Izmerjeni tok na izhodu je bil $6,0\text{ A}$. Iz tabele se razbere tok na vhodu $3,0\text{ A}$. Moč ki jo opazujemo je tako:

$$P = 3\text{ A} \cdot 100\text{ V} = 300\text{ W}$$

- Merilni rezultat je:

$$P = 300\text{ W}, u(P) = 0,02 P = 6\text{ W}, n = 1$$

5. Feromagnetno toroidno jedro ima presek $A = 1 \text{ cm}^2$. Ko vključimo enosmerni magnetilni tok, se v tuljavici z $N_2 = 100$ ovoji inducira napetostni impulz s ploščino 26 mVs , ko ga izključimo, napetostni impulz s ploščino 4 mVs , ko ga ponovno vključimo, vendar v obratni smeri, pa impulz s ploščino 36 mVs . Skicirajte potek B v odvisnosti od H in izračunajte B_r in B_m ! Kje je bila izhodiščna točka?

Rešitev:

- Upoštevajoč Faradeyev zakon zapišemo za inducirano napetost u_i v tuljavici konstantne površine A z N ovoji pri spremembi magnetne indukcije B :

$$u_i = -N A \frac{dB}{dt} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} u_i dt = -N A \int_{B_1}^{B_2} dB = \int_0^{T_M} u_i dt$$

- Integral napetostnega pulza je enak spremembi magnetne indukcije ΔB , ki jo povzroča enosmerni magnetilni tok ob obeh vklopih in izklopu:

$$\int_0^{T_M} u_i dt = N A (B_1 - B_2) = N A \Delta B \rightarrow \Delta B = \frac{\int_0^{T_M} u_i dt}{NA}$$

- Pri posameznih spremembah magnetilnega toka smo dobili naslednje spremembe magnetne indukcije:

$$\Delta B_1 = \frac{26 \text{ mVs}}{100 \cdot 1 \text{ cm}^2} = \frac{26 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}}{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 2,6 \text{ T}$$

$$\Delta B_2 = \frac{4 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}}{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,4 \text{ T}$$

$$\Delta B_3 = \frac{36 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}}{100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 3,6 \text{ T}$$

- Maksimalno vrednost magnetne indukcije nam neglede na izhodiščno točko določata izklop magnetilnega toka in ponovni vklop v nasprotno smer (glej skico):

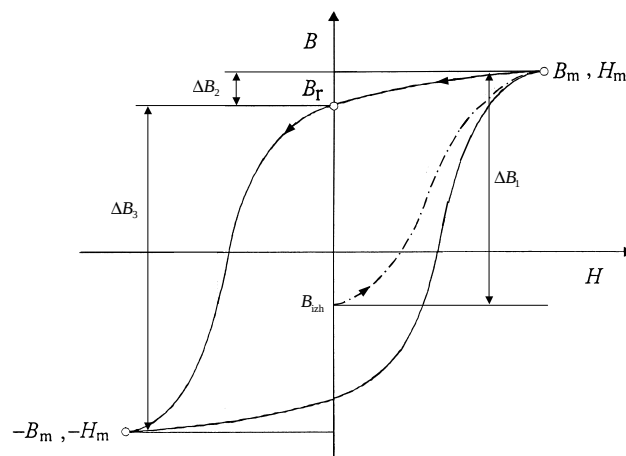
$$B_m = \frac{\Delta B_2 + \Delta B_3}{2} = 2,0 \text{ T}$$

- Remanenčno vrednost magnetne indukcije določimo pri izklopu vzbujanja in prehodu iz maksimalne točke v remanenčno:

$$B_r = B_m - \Delta B_2 = 2,0 \text{ T} - 0,4 \text{ T} = 1,6 \text{ T}$$

- Izhodiščna točka je bila pri vrednosti:

$$B_{izh} = B_m - \Delta B_1 = 2,0 \text{ T} - 2,6 \text{ T} = -0,6 \text{ T}$$

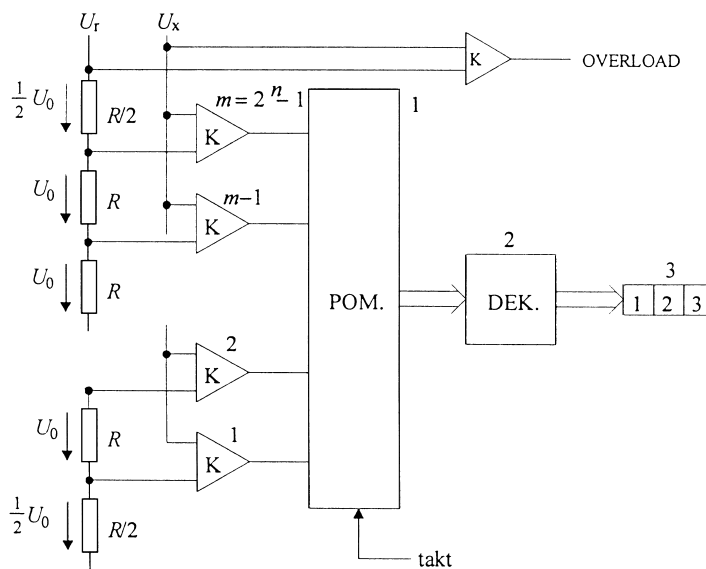


Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Skicirajte vezje paralelnega A/D pretvornika in razložite princip delovanja. Koliko je potrebnih referenc in koliko korakov pretvorbe 8-bitnega A/D pretvornika? Kolikšna je lahko frekvenca sinusne vhodne napetosti, da bodo vsi biti verodostojni, če je čas enega takta $t = 1\text{ns}$?

Rešitev:

- Paralelni trenutni pretvornik (flash converter):



- Postopek kvantizacije je pred vzorčenjem!
- Referenčne napetosti so realizirane z uporavnim delilnikom
 - Komparatorji pod nivojem napetosti U_x imajo vrednost 1 in nad 0 - termometerska koda.
 - Eksponentno se poveča poraba pri realizaciji. Število potrebnih referenc in komparatorjev je $r = 2^n - 1$
- Uporablja se za zelo velike hitrosti pretvarjanja, ker se pretvoba izvrši v enem koraku ($k = 1$), zato je čas pretvorbe v našem primeru enak času takta $t_c = 1\text{ns}$.
- Največja dopustna sprememba vhodne napetosti v času pretvorbe t_c naj bo manjša od ločljivosti ADP (Δ), da bodo vsi biti verodostojni:

$$\left| \frac{dU_x}{dt} \right|_{\max} = \frac{\Delta}{t_c} = \frac{U_D}{2^n t_c}; \quad U_D - \text{doseg ADP}$$

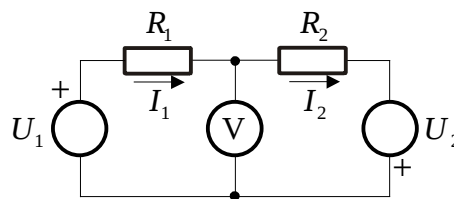
- Če je na vhodu sinusna napetost, imamo: $u_x = \hat{u} \sin \omega t \Rightarrow \left| \frac{du_x}{dt} \right|_{\max} = \omega \hat{u}$

- Kadar je ADP polno izkoriščen $\hat{u} = U_D / 2$, je največja frekvenca signala:

$$2\pi f \hat{u} = 2\pi f \frac{U_D}{2} = \frac{U_D}{2^n t_c} \Rightarrow f = \frac{1}{2^n \pi t_c}$$

- in v našem primeru: $f = \frac{1}{2^8 \pi 1\text{ns}} = 1,24\text{MHz}$

2. Koliko bitov še lahko imata idealna D/A pretvornika napetostnih generatorjev ($U_D = 2,5 \text{ V}$) v narisanim vezju za merjenje upornosti R_1 ($R_1 \doteq 1 \text{ k}\Omega$; $U_1 = 1 \text{ V}$; $U_2 = 2 \text{ V}$ - v ravnovesju), da zazna voltmetr ($U_D = 10,000 \text{ V}$; $R_V = 10 \text{ M}\Omega$) spremembo amplitude napetosti zadnjega bita D/A pretvornika? Pokažite v enačbah!



Rešitev:

- Za obe napetostni zanki vezja velja:

$$U_1 = I_1 R_1 + U_V \quad \text{in} \quad U_2 = I_2 R_2 - U_V$$

- V ravnovesju $U_V = 0 \text{ V}$ velja: $\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \rightarrow R_2 = \frac{U_2}{U_1} R_1 = 2 \text{ k}\Omega$
- Če mostiček ni v ravnovesju imamo $U_V \neq 0 \text{ V}$. Ker je upornost voltmetra precej večja od obeh upornosti $R_V \gg R_1, R_2$, sta toka praktično enaka $I_1 \doteq I_2$ in zapišemo:

$$\frac{U_1 - U_V}{R_1} = \frac{U_2 + U_V}{R_2}$$

- in od tod izrazimo napetost voltmetra kot ničelnega indikatorja:

$$U_V = \frac{R_2 U_1 - R_1 U_2}{R_1 + R_2}$$

- Občutljivost dobimo z delnim odvajanjem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_V}{\partial U_1} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow \Delta U_1 = \Delta U_V \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \\ \frac{\partial U_V}{\partial U_2} &= -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \rightarrow |\Delta U_2| = \Delta U_V \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \end{aligned}$$

- Iskani ločljivosti D/A pretvornikov sta:

$$\Delta U_1 = \frac{U_D}{2^{n_1}} = \Delta U_V \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = 1 \text{ mV} \cdot 1,5$$

$$2^{n_1} = \frac{U_D}{1,5 \text{ mV}} = 1666,6. \rightarrow n_1 = 10,7 \rightarrow 10$$

$$\Delta U_2 = \frac{U_D}{2^{n_2}} = \Delta U_V \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = 1 \text{ mV} \cdot 3$$

$$2^{n_2} = \frac{U_D}{3 \text{ mV}} = 833,3. \rightarrow n_2 = 9,7 \rightarrow 9$$

3. Kako se spremeni nelinearnost četrtinskega mostiča ($R_{1,0} = R_2 = R_3 = R_4 = R; R_5 \rightarrow \infty$), če namesto idealne karakteristike $U_5 = U_0 \delta R/4$ uporabimo premico, ki povezuje obe meji območja spreminjanja upora $0 \leq \delta R \leq 0,1$ pri realnem mostiču. Skicirajte razmere! Vezje napajamo z idealnim napetostnim generatorjem.

$$U_5 = U_0 \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

(pri izračunu nelinearnosti upoštevajte $\frac{1}{1+x} \approx 1-x \iff x \ll 1$)

Rešitev:

- Realna karakteristika: $U_5 = U_0 \frac{\delta R}{4(1+\delta R/2)}$

- Idealna karakteristika, kadar je sprememba upornosti zanemarljiva $\delta R \ll 1$ in jo v imenovalcu zanemarimo:

$$U'_5 \doteq U_0 \delta R/4 = 0,25 U_0 \delta R$$

- Nelinearnost je največja na zgornji meji območja $\delta R = 0,1$, kjer je odstopanje od idealne karakteristike največje:

$$n' = \frac{E'_{n,\max}}{U_D} = \frac{U_5 - U'_5}{U'_5} \Big|_{\delta R=0,1} = \frac{U_5}{U'_5} - 1 = \frac{1}{(1+\delta R/2)} - 1 = \frac{1}{(1+0,1/2)} - 1 = -0,048$$

- Idealna karakteristika, ki povezuje obe meji območja spreminjanja upora $0 \leq \delta R \leq 0,1$ pri realnem mostiču:

$$U''_5 = U_0 \left(\frac{1}{4(1+\delta R/2)} \right)_{\delta R=0,1} \cdot \delta R = 0,238 U_0 \delta R$$

- Mesto največjega odstopanja od idealne karakteristike dobimo z odvajanjem razlike karakteristik:

$$E''_n = U_5 - U''_5 = U_0 \frac{\delta R}{4(1+\delta R/2)} - 0,238 U_0 \delta R = U_0 \frac{\delta R}{4} (1 - \delta R/2) - 0,238 U_0 \delta R$$

$$\frac{\partial E''_n}{\partial \delta R} = \frac{U_0}{4} - \frac{U_0}{4} \frac{2\delta R}{2} - 0,238 U_0 = 0$$

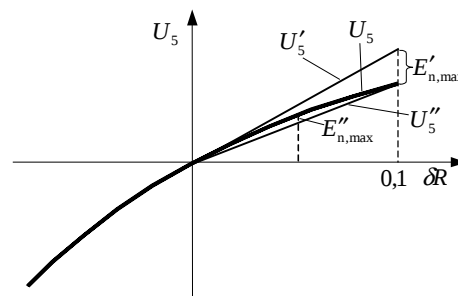
$$\delta R = 1 - 4 \cdot 0,238 = 0,048$$

- Največje odstopanje je tako:

$$E''_{n,\max}(\delta R = 0,048) = U_0 \frac{\delta R}{4} (1 - \delta R/2) - 0,238 U_0 \delta R = 2,88 \cdot 10^{-4} U_0$$

- in nelinearnost: $n'' = \frac{E''_{n,\max}}{U_D} = \frac{2,88 \cdot 10^{-4} U_0}{0,238 U_0 \cdot 0,1} = 0,0121$

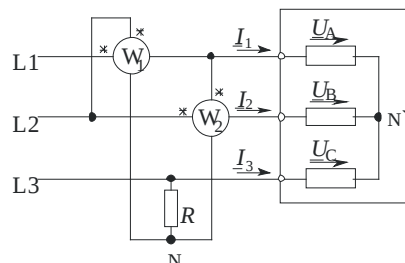
- V drugem primeru se nelinearnost zmanjša za štirikrat in postane pozitivna.



4. Trifaznemu nesimetričnemu bremenu želite izmeriti jalovo moč. Ali lahko izmerite jalovo moč, če imate na razpolago en VAR-meter in dva W-metra? Določite in narišite vezalno shemo ter opišite potrebne pogoje! Izračunajte jalovo moč, če bi VAR-meter kazal 30,1 VAR, prvi W-meter 30,0 W in drugi W-meter 25,1 W!

Rešitev:

- Zaradi nesimetričnosti bremena ne moremo zmeriti jalovo moč z enim VAR-metrom. Izmerimo jo lahko z dvema W-metroma in vezavo na sliki, če imamo:
 - trifazni **trivodni** sistem,
 - uravnovešen trifazni vir in pravilno fazno zaporedje,
 - ter dodatni upor $R = R_{W1,n} = R_{W2,n}$ za določitev težiščne točke simetričnega trikotnika, da dobimo fazno napetost, ki je za 90° zamaknjena proti medfazni napetosti.
- Ker je v trivodnem sistemu vsota tokov nič, lahko zapišemo $\underline{I}_3^* = -(\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^*)$ in jalovo moč izrazimo kot: $Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ (\underline{U}_A - \underline{U}_C) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_B - \underline{U}_C) \underline{I}_2^* \}$
 - Pri simetričnem napajanju zapišemo za napetost med fazama 1 in 3: $\underline{U}_A - \underline{U}_C = \underline{U}_{13} = \sqrt{3} \underline{U}_{2N} e^{j90^\circ}$
 - in za napetost med fazama 2 in 3: $\underline{U}_B - \underline{U}_C = \underline{U}_{23} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{-j90^\circ}$
- Skupno jalovo moč merimo z dvema vatmetroma:

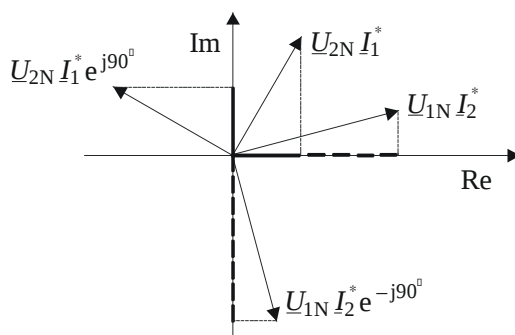


$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \left\{ \sqrt{3} \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* e^{j90^\circ} + \sqrt{3} \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* e^{-j90^\circ} \right\}$$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Im} \left\{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* e^{j90^\circ} \right\} + \frac{1}{2} \text{Im} \left\{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* e^{-j90^\circ} \right\} \right]$$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* \right\} - \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* \right\} \right]$$

$$Q = \sqrt{3} (P_{W1} - P_{W2}) = \sqrt{3} (30,0 \text{ W} - 25,1 \text{ W}) = 8,49 \text{ VAR}$$



5. S senzorjem merimo gostoto magnetnega pretoka $B = 2 \text{ mT}$. S pretvornikom nato pretvorimo B v frekvenco in sicer $B = 2 \text{ mT}$ v $f = 50 \text{ kHz}$. To frekvenco merimo z univerzalnim digitalnim števcem, ki ima frekvenco notranjega oscilatorja $f_0 = 10 \text{ MHz}$ in delilnik z največjo vrednostjo $K = 10^4$. Kolikšna je najmanjša ločljivost Q_B merjenja gostote magnetnega pretoka zaradi uporabe tega števca?

Rešitev:

- Merjenje f_x s števcem:
 - Najboljšo oz. najmanjšo ločljivost dobimo, kadar imamo najdaljši čas merjenja. V našem primeru ga dosežemo z izborom $K = 10^4$:

$$Q_f = \frac{1}{T_M} = \frac{1}{KT_0} = \frac{f_0}{K} = 1 \text{ kHz}$$

- Relativno ločljivost gostote magnetnega pretoka dobimo iz enačbe

$$\frac{Q_B}{B} = \frac{Q_f}{f}$$

- in od tod ločljivost gostote magnetnega pretoka:

$$Q_B = B \frac{Q_f}{f} = 2 \text{ mT} \cdot \frac{1 \text{ kHz}}{50 \text{ kHz}} = 40 \text{ } \mu\text{T}$$

- Merjenje T_x s števcem:
 - Najmanjšo ločljivost dobimo, kadar imamo najkrajši korak časovne kvantizacije. V našem primeru ga dosežemo z izborom $K = 1$:

$$Q_T = KT_0 = 0,1 \text{ } \mu\text{s}$$

- Ločljivost gostote magnetnega pretoka dobimo iz enačbe:

$$\frac{Q_B}{B} = \frac{Q_T}{T} \rightarrow Q_B = B \cdot Q_T \cdot f = 2 \text{ mT} \cdot 0,1 \text{ } \mu\text{s} \cdot 50 \text{ kHz} = 10 \text{ } \mu\text{T}$$

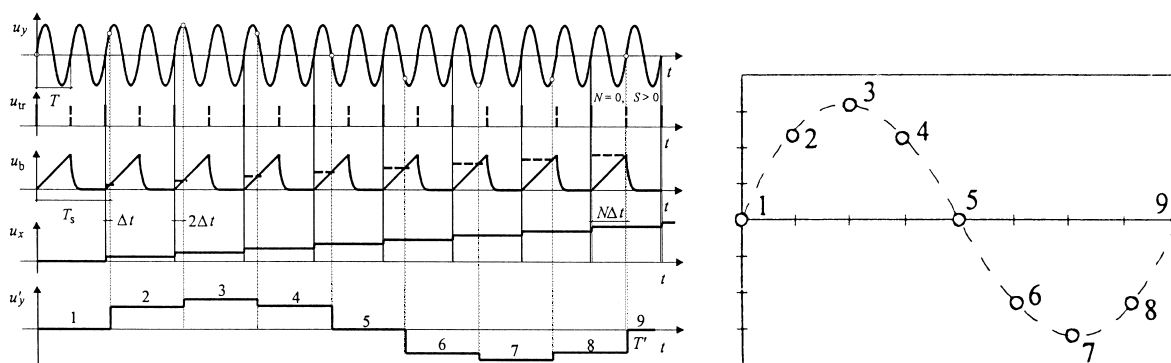
- Najmanjša ločljivost merjenja gostote magnetnega pretoka B zaradi uporabe univerzalnega števca je v načinu merjenja periode in znaša $10 \text{ } \mu\text{T}$.

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Opišite in skicirajte način zajemanja vzorcev v ekvivalentnem času s postopkovnim (sekvenčnim) vzorčenje pri digitalnih spominskih osciloskopih (DSO). Kolikšni sta dejanska frekvenca vzorčenja in ekvivalentna frekvenca vzorčenja, če je širina zaslona $x_m = 10d$, odklonski koeficient k_t pa 50 ns/d ? DSO ima pomnilnik, v katerega lahko shranimo največ $Z_m = 1000$ podatkov, analogno-digitalni pretvornik, ki ima čas pretvorbe $t_{ADP} = 100 \text{ ns}$, in predležni vzorčno-zadržni člen z aperturnim časom $t_{ap} = 10 \text{ ns}$ ter akvizicijskim časom $t_{ac} = 90 \text{ ns}$.

Rešitev:

- Pri **postopkovnem** (sekvenčnem) vzorčenju v ekvivalentnem času se uporablja večkratno proženje, ko podatke zbiramo postopoma.
 - Jemanje vzorcev se enakomerno zakasni po naslednjih M periodah za Δt , tako da je perioda jemanja vzorcev: $T_s = MT + \Delta t$. Krajši kot je čas Δt , bolj fino imamo podan signal $N = T/\Delta t \gg 1$ in daljši je čas rekonstrukcije: $T' = NT_s = N(MT + \Delta t)$.



- Dejansko frekvenco vzorčenja določata vzorčno-zadržni člen in analogno-digitalni pretvornik. Minimalni skupni čas pretvorbe t_p oziroma vzorčenja T_s je enak vsoti časov, ki jih omogoča vzorčno-zadržni člen $t_{vz} = t_{ap} + t_{ac}$ in AD pretvornik.

$$t_{p, \min} = t_{ap} + t_{ac} + t_{ADP} = 10 \text{ ns} + 90 \text{ ns} + 100 \text{ ns} = 200 \text{ ns} \rightarrow f_{s, m} = 1/t_p = 5 \text{ MHz}$$

- O ekvivalentni frekvenci vzorčenja govorimo, kadar je frekvenca vzorcev oziroma prikazanih točk f'_s na zaslonu navidezno večja od dejanske maksimalne vzorčne frekvence $f'_s > f_{s, m}$. Frekvenco f'_s določa izbrana časovna konstanta in število točk zaslona Z_m :

$$f'_s = \frac{Z_m}{k_t \cdot x_m} = \frac{Z_m}{k_t \cdot 10d}$$

- Navidezna ekvivalentna frekvenca vzorčenja je:

$$k_t = 50 \text{ ns/d} : f'_s = 2 \text{ GHz} > f_{s, m}$$

2. Skicirajte merilno vezje Kelvinovega (Thomsonovega) mostiča. Določite mesto priključitve R_x oziroma R_N v mostič in izberite vrednosti R_B in R_A tako, da bodo vključene vse stopnje uporovne dekad R_B !

- mostič: $R_A = R'_A = (1, 10, 100) \Omega$
 $R_B = R'_B = 9 \times (100, 10, 1, 0,1) \Omega$;
- etalon: $R_N = 10 \text{ m}\Omega$,
- merjenec R_x je žica okroglega preseka: $d = 3 \text{ mm}$, $l = 1 \text{ m}$, $\lambda = 57 \text{ MS/m}$

Rešitev:

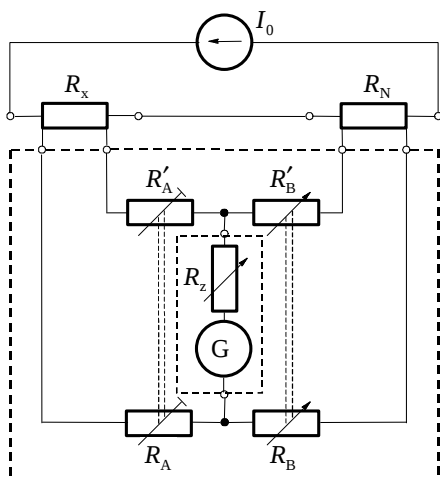
- Za določitev mesta priključitve moramo najprej izračunati približno vrednost upornosti R_x žice okroglega preseka $A = \pi d^2/4$, dolžine $l = 1 \text{ m}$ in s specifično prevodnostjo $\lambda = 57 \text{ MS/m}$:

$$R_x = \frac{l}{A\lambda} = \frac{4l}{\pi d^2 \lambda} = \frac{4 \cdot 1 \text{ m}}{\pi (3 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2 57 \cdot 10^6 \text{ S}} = 0,0024819 \Omega = 2,4819 \text{ m}\Omega$$

- Če hočemo izkoristiti vse stopnje uporovne dekad R_B , mora biti vrednost večja kot $R_B \geq 100 \Omega$, pri čemer upoštevamo, da je dekada R_A lahko nastavljena le na 1Ω , 10Ω ali 100Ω .
- Ko je mostič v ravnovesju določimo iz mostičnega razmerja vrednosti dekad R_A in R_B za obe priključitvi R_x in R_N .

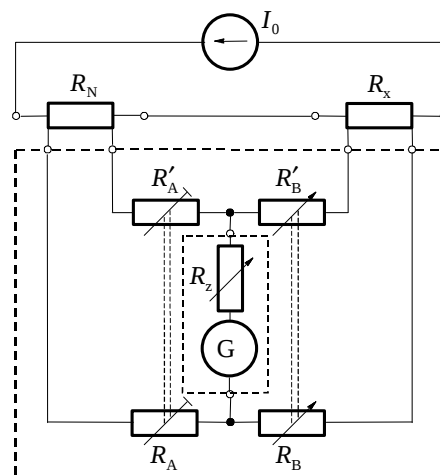
a) prva priključitev:

$$\frac{R_x}{R_N} = \frac{2,48 \text{ m}\Omega}{10 \text{ m}\Omega} = 0,248 = \frac{R_A}{R_B} \rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{100 \Omega}{402,9 \Omega}$$



b) druga priključitev:

$$\frac{R_x}{R_N} = 0,248 = \frac{R_B}{R_A} \rightarrow \frac{R_B}{R_A} = \frac{24,8 \Omega}{100 \Omega}$$



- Vse stopnje uporovne dekad R_B lahko izkoristimo samo pri prvi priključitvi $R_B = 402,9 \Omega$. V drugem primeru tudi najboljši približek $R_A = 100 \Omega$ in $R_B = 24,8 \Omega$ ne omogoča uporabe vseh dekad R_B .

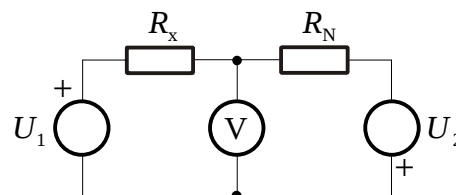
3. Zapišite merilni rezultat za upornost R_x , ki jo merimo z aktivnim mostičem z dvema napetostnima viroma, ob upoštevanju spodaj navedenih podatkov. Skicirajte merilno vezje.

$$\delta_q = (\Delta U_v)_q (U_1^{-1} + U_2^{-1})$$

- $U_1 = 5,261 \text{ V}$; razširjena relativna mer. negotovost ($k = 2$): $W(U_1) = 0,2\%$
- $U_2 = 1,722 \text{ V}$; $m_U = \pm 0,15\%$
- mejni pogrešek ničelnega indiktorja-voltmetra:
 $M_N = \pm(0,1\% \cdot U + 0,1\% \cdot U_D + 5 \text{ dig})$, $1 \text{ dig} = 1 \text{ mV}$
- $R_N = 1000,0 (1 \pm 5 \cdot 10^{-4}) \Omega$

Rešitev:

- Merilno vezje za merjenje upornosti R_x z aktivnim mostičem je prikazano na sliki.
- Upornost izmerimo tako, da uravnesimo mostič s spreminjanjem napetosti dveh virov U_1 in U_2 , dokler ničelni indikator – voltmeter – ne kaže 0 V .



- V ravnovesju velja enačba: $R_x = R_N \frac{U_1}{U_2} = 1000,0 \Omega \cdot \frac{5,261 \text{ V}}{1,722 \text{ V}} = 3055,17 \Omega$
- Ker je R_x posredno določimo iz R_N , U_1 in U_2 , bo njena skupna negotovost sestavljena iz prispevkov teh neposredno merjenih veličin. Dodati je potrebno še prispevek negotovosti zaradi ločljivosti mostiča, ki znaša:

$$w(R_x) = \frac{\delta_q}{2\sqrt{3}}$$

- pri čemer $(\Delta U_v)_q$ pomeni ločljivost ničelnega indikatorja, ki znaša $1 \text{ dig} = 1 \text{ mV}$.

- Negotovost R_x tako znaša:

$$\begin{aligned} \frac{u(R_x)}{R_x} &= \sqrt{\left[\frac{u(R_N)}{R_N} \right]^2 + \left[\frac{u(U_1)}{U_1} \right]^2 + \left[\frac{u(U_2)}{U_2} \right]^2 + \left[\frac{\delta_q}{2\sqrt{3}} \right]^2} = \\ &= \sqrt{\left[\frac{m_{R_N} \cdot R_N}{R_N \sqrt{3}} \right]^2 + \left[\frac{W(U_1)}{k} \right]^2 + \left[\frac{m_U}{\sqrt{3}} \right]^2 + \left[\frac{(\Delta U_v)_q (U_1^{-1} + U_2^{-1})}{2\sqrt{3}} \right]^2} = \\ &= \sqrt{\left[\frac{5 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{3}} \right]^2 + \left[\frac{2 \cdot 10^{-3}}{2} \right]^2 + \left[\frac{15 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{3}} \right]^2 + \left[\frac{1 \text{ mV} \cdot (1/5,261 \text{ V} + 1/1,722 \text{ V})}{2\sqrt{3}} \right]^2} = 1,372 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

- Zapišimo še absolutno negotovost R_x : $u(R_x) = R_x \cdot 1,372 \cdot 10^{-3} = 4,19 \Omega$

- ter zaokrožen merilni rezultat:

$$R_x = 3055,2 \Omega, \quad u(R_x) = 4,2 \Omega, \quad n = 1$$

4. Prikazovalnik univerzalnega elektronskega števca kaže pri merjenju periode signala $223,6\mu\text{s}$. Kaj kaže prikazovalnik, če merimo frekvenco istega signala in je relativni kvantizacijski pogrešek pri merjenju frekvence petkrat večji kot pri merjenju periode?

Rešitev:

- Relativni kvantizacijski pogrešek pri merjenju frekvence je $5\times$ večji kot pri merjenju periode, zato velja:

$$m_f = 5m_T \quad \rightarrow \quad \frac{M_f}{f} = 5 \frac{M_T}{T}$$

- Zanima nas absolutni kvantizacijski pogrešek pri merjenju frekvence, da ugotovimo koliko bo kazal instrument.

$$M_f = \frac{5 \cdot M_T}{T^2} = \frac{5 \cdot 0,1\mu\text{s}}{(223,6\mu\text{s})^2} = 10 \text{ Hz}$$

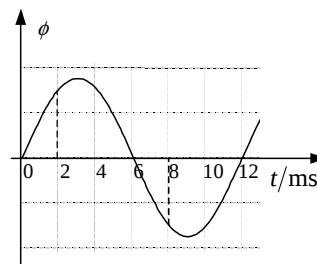
- Po izračunu izmerjene vrednosti lahko zapišemo, kaj kaže prikazovalnik.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{223,6\mu\text{s}} = 4472 \text{ Hz}$$

- Ker je absolutni pogrešek 10 Hz, na tem mestu prikazovalnik utripa med številko sedem in osem.

- prikaz : $f_i = 4,47 \text{ kHz}$ ali $4,48 \text{ kHz}$

5. Sinusni magnetni pretok inducira v tuljavici z $NA = 100 \text{ cm}^2$ napetost, katere tekoča povprečna vrednost v času od $t_1 = 2 \text{ ms}$ do $t_2 = 8 \text{ ms}$ je $1,2 \text{ V}$. Koliko je maksimalna vrednost magnetne indukcije B_m ?



Rešitev:

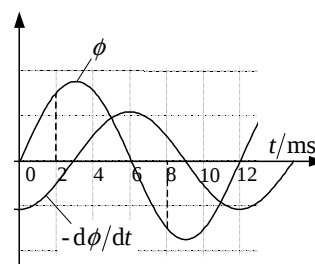
- Tekočo povprečno vrednost napetosti izrazimo z:

$$\bar{U} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u_i dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} u_i dt$$

- Upoštevajoč Faradejev zakon $u_i = -N d\phi/dt = -NA dB/dt$ zapišemo:

$$\bar{U} = -\frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} NA \frac{dB}{dt} dt = -\frac{1}{\Delta t} \int_{B_{t_1}}^{B_{t_2}} NA dB = -\frac{NA}{\Delta t} \int_{B_{t_1}}^{B_{t_2}} dB = -\frac{NA}{\Delta t} (B_{t_2} - B_{t_1})$$

- Odvod sinusne oblike magnetnega pretoka in s tem inducirana napetost je kosinusne oblike (glej skico). Ker imamo pri sinusnem (kosinusnem) signalu opraviti s simetrijo III. vrste in je po polovici periode $B_{t_2} = -B_{t_1}$, zapišemo za magnetno indukcijo v času $t_1 = 2 \text{ ms}$:



$$\bar{U} = \frac{NA}{\Delta t} 2B_{t_1} \quad \rightarrow \quad B_{t_1} = \frac{\bar{U} \Delta t}{2NA}$$

- Kot lahko razberemo iz slike, predstavlja trenutek $t_1 = 2 \text{ ms}$ šestino periode $\pi/3$ in je vrednost indukcije (magnetnega pretoka) v tej točki proti maksimalni indukciji (oz. magnetnemu pretoku) v razmerju:

$$B_{t_1} = B_m \sin \frac{\pi}{3}$$

- Sedaj lahko izračunamo maksimalna vrednost magnetne indukcije:

$$B_m = \frac{1}{\sin \pi/3} \frac{\bar{U} \Delta t}{2NA} = \frac{1}{0,866} \frac{1,2 \text{ V} \cdot 6 \text{ ms}}{2 \cdot 100 (10^{-2} \text{ m})^2} = 0,416 \text{ T}$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Katere komponente ima rekonstruirani signal, če merimo napetost oblike $u = u_0 (\sin \omega t + 1/3 \sin 3\omega t + 1/5 \sin 5\omega t + 1/7 \sin 7\omega t + 1/9 \sin 9\omega t)$, $f = 3,6 \text{ MHz}$? Frekvenca vzorčenja je $f_s = 10 \text{ MHz}$.

Rešitev:

- Frekvence rekonstruiranih komponent $f' = |n \cdot f - k \cdot f_s|$ opazujemo v intervalu med 0 Hz in Najkvistovo frekvenco $f_s/2 = 5 \text{ MHz}$. Prispevki harmonskih komponent $n = 1, 3, 5, 7$ in 9 prihajajo od opletov spektra signala okoli mnogokratnikov vzorčne frekvence $k = 0, 1, 2 \dots$

n	1	3	5	7	9		9
nf/MHz	3,6	10,8	18	25,2	32,4		32,4
↓							
f'/MHz	3,6	0,8	2,0	4,8	2,4		7,6
↑							
kf_s/MHz	0	10	20	30	30		40
k	0	1	2	3	3		4

- Nad tretjim mnogokratnikom vzorčne frekvence $k > 3$ nam tudi najvišja komponenta signala $n = 9$ ne da razliko frekvenc, ki bi bila pod Najkvistovo frekvenco $f' \leq 5 \text{ MHz}$.
- Rekonstruirani signal ima tako komponente:
 - pravilno razpoznano komponento s frekvenco $3,6 \text{ MHz}$
 - in navidezne komponente zaradi prenizke vzorčne frekvence s frekvencami:

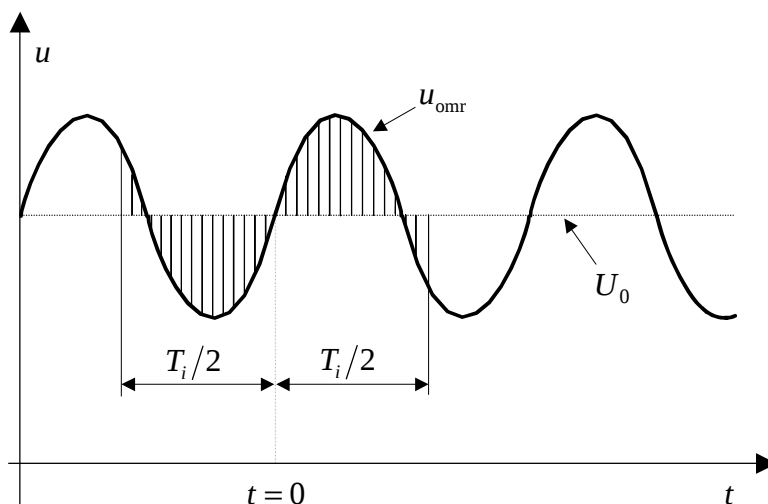
$$f'/\text{MHz} = 0,8; \quad 2,0; \quad 2,4; \quad 4,8$$

2. Kolikšno je slabljenje omrežne motnje z voltmetrom, ki ima integracijski čas nastavljen na $T_i = 4\text{ms}$, sredino integracijskega intervala pa na prehod motnje skozi njen ničelni nivo? Pokažite grafično in analitično. V katerih mejah se nahaja slabljenje omrežne motnje pri danem integracijskem času?

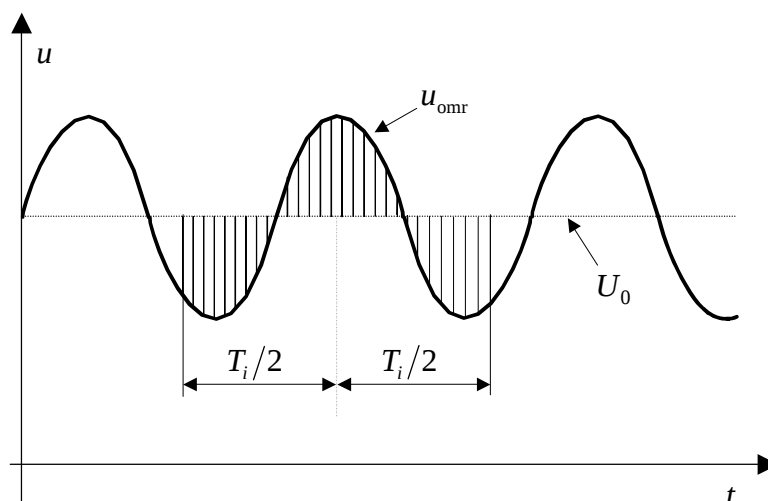
$$A/\text{dB} = 20 \cdot \lg \frac{\pi T_i / T}{|\sin(\pi T_i / T)|}$$

Rešitev:

- Ker sredina integracijskega intervala leži na prehodu motnje skozi nič in ker je omrežna motnja tipično liha funkcija, bo povprečna vrednost motnje na takem intervalu, ne glede kako dolg je, enaka 0. To pomeni, da je slabljenje A neskončno.



- Opomba: h nalogi priložena enačba velja za največje slabljenje za določen integracijski interval, kadar sredina integracijskega intervala nastopi hkrati z največjo vrednostjo (amplitudo) motnje.

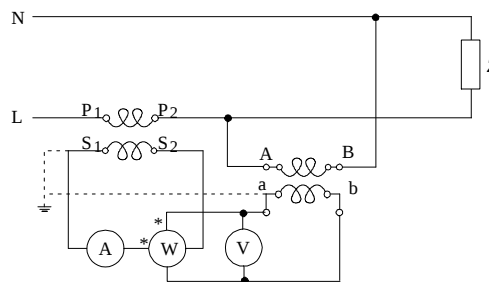


- Slabljenje se nahaja v mejah:

$$\text{od } A/\text{dB} = 20 \cdot \lg \frac{\pi T_i / T}{|\sin(\pi T_i / T)|} = 20 \cdot \lg \frac{\pi 0,2}{|\sin(\pi 0,2)|} = 0,579 \text{ do neskončno.}$$

3. Kolikšne so delovna, jalova in navidezna moč porabnika?

- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$,
 $y_D = 20000$, $y = 19111$;
- voltmeter: $U = 105 \text{ V}$;
- ampermeter: $I = 4,82 \text{ A}$;
- tokovnik: $I_{pn} = 75 \text{ A}$, $I_{sn} = 5 \text{ A}$;
- napetostnik: $U_{pn} = 50 \text{ kV}$, $U_{sn} = 100 \text{ V}$;

**Rešitev:**

- Delovna moč se izračuna iz izmerjene vrednosti vatmetra. Potrebno je upoštevati, da je vatmeter priključen na sekundarni strani tokovnika in napetostnika.

- Prestavi transformatorjev sta:

$$K_{un} = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} = \frac{50 \text{ kV}}{100 \text{ V}} = 500 \quad \text{in} \quad K_{in} = \frac{I_{pn}}{I_{sn}} = \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} = 15$$

- Delovna moč je za prestavi večja vrednost, kot jo kaže vatmeter:

$$P_W = U_n \cdot I_n \cdot \frac{y}{y_D} = 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{19111}{20000} = 477,775 \text{ W}$$

$$P = K_{un} \cdot K_{in} \cdot P_W = 500 \cdot 15 \cdot 477,775 \text{ W} = 3,583 \text{ MW}$$

- Navidezna moč se izračuna iz izmerjenih vrednosti voltmetra in ampermetra. Pozor, tudi ta dva instrumenta sta vezana na sekundarni strani tokovnika in napetostnika.

$$S = K_{un} \cdot K_{in} \cdot U \cdot I = 500 \cdot 15 \cdot 105 \text{ V} \cdot 4,82 \text{ A} = 3,796 \text{ MVA}$$

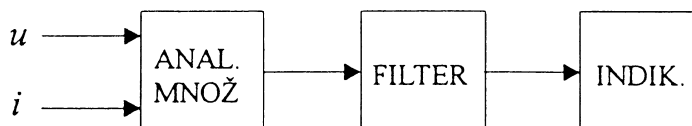
- In še izračun jalove moči.

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(3,796 \text{ MVA})^2 - (3,583 \text{ MW})^2} = 1,253 \text{ MVAr}$$

4. Opišite zgradbo elektronskega vatmetra ter naštejte načine tvorjenja produkta? Skicirajte princip amplitudno-širinske modulacije množilnika in naštejte prednosti ter slabosti!

Rešitev:

- Elektronski vatmetri so sestavljeni iz množilnika in pretvornika-filtra, ki povpreči produkt trenutnih vrtdnosti.



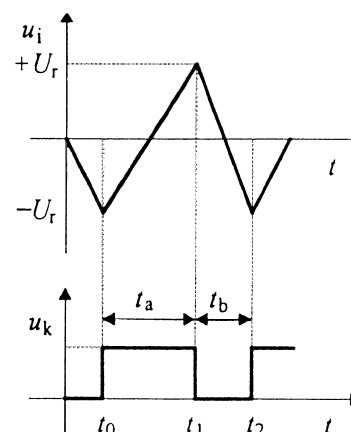
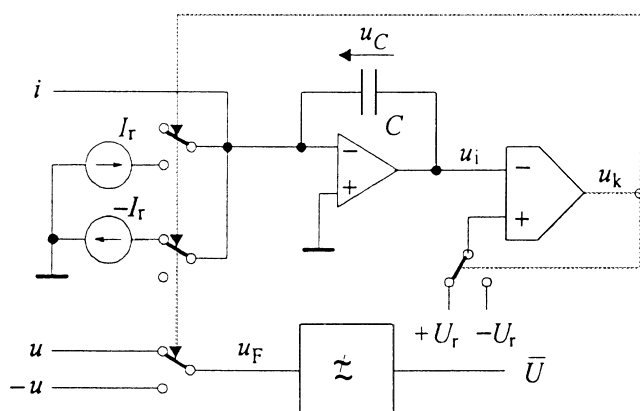
- Pri elektronskih vatmetrih ločimo **analogni postopek**, kjer je množenje in povprečenje kontinuirano, in **digitalni postopek**, kjer je množenje in povprečenje diskontinuirano.
- Osrednji del analognega postopka je analogni množilnik.
 - varianata z amplitudno-širinsko modulacijo,
 - varianata s Hallovim množilnikom,
 - elektronsko množenje s pomočjo logaritmiranja, seštevanja in antilogaritmiranja s pn-spojem ...

- Množilnik z **amplitudno-širinsko modulacijo**

- Širina impulza se modulira s tokom.
- Amplitudo impulza moduliramo z napetostjo:

$$t_a \Rightarrow u$$

$$t_b \Rightarrow -u$$



- V širini pulza se skriva informacija o toku: $t_a = \frac{2U_r C}{I_r - i}$ in $t_b = \frac{2U_r C}{I_r + i}$
- Na izhodu filtra dobimo enosmerno komponento – povprečno vrednost: $\bar{U} = \frac{t_a u + t_b (-u)}{t_a + t_b}$
 - Če vstavimo t_a in t_b , dobimo: $\bar{U} = \frac{1}{I_r} \bar{u} i = \frac{1}{I_r} P$
- Rezultat je neodvisen od C . Napetost U_r določa samo frekvenco ponavljanja cikla.

5. Skozi primarno (magnetilno) navitje feromagnetnega toroidnega jedra s presekom 4cm^2 stečejo trije tokovni impulzi (povzročajo nasičenje). Prva dva sta pozitivna, tretji pa je negativen. Le eden je zanesljivo uporaben za ugotavljanje značilne veličine. Katera in kolikšna je iskana veličina, če se je zaradi odločilnega impulza inducirala v sekundarnem navitju z $N_2 = 20$ ovojev napetost, katere integral znaša 18mVs ? Skicirajte potek B v odvisnosti od H za dani potek magnetenja!

Rešitev:

- Upoštevajoč Faradeyev zakon zapišemo za inducirano napetost u_i v sekundarnem navitju toroidnega jedra s presekom A in z N_2 ovoji pri spremembi magnetne indukcije B :

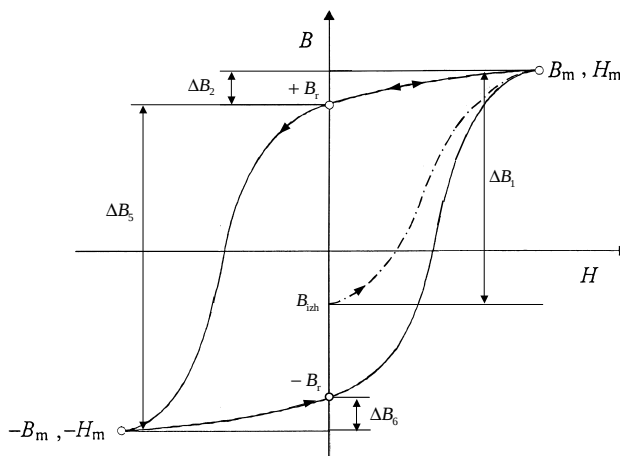
$$u_i = -N_2 A \frac{dB}{dt} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} u_i dt = -N_2 A \int_{B_i}^{B_f} dB = -N_2 A \Delta B \rightarrow \Delta B = \frac{\int_0^{T_M} u_i dt}{N_2 A}$$

- Pri prvem vzbujačnem impulzu preidemo iz nekega splošnega magnetnega stanja v nasičenje in se vrnemo po histerezi v remanenčno stanje $+B_r$:

$$\Delta B_1 = B_{\text{izh}} \rightarrow +B_m \text{ in}$$

$$\Delta B_2 = +B_m \rightarrow +B_r$$

- Ker izhodiščne točke ne poznamo, je rezultat po prvem vzbujačnem impulzu neuporaben.



- Pri drugem impulzu se zaradi pozitivnega impulza, ki povzroča nasičenje, ponovno vzpnemo v $+B_m$ (ΔB_3) in vrnemo nazaj v $+B_r$ (ΔB_4). Inducirana napetost je v obeh primerih enaka in nasprotnega predznaka ($\Delta B_3 = -\Delta B_4 = -\Delta B_2$). Integral je enak nič. Tudi v tem primeru ne moremo ničesar ugotoviti.
- Pri tretjem negativnem vzbujačnem impulzu se iz pozitivnega remanenčnega stanja premaknemo v negativno nasičenje $-B_m$ in se po histerezi zanki pomaknemo v negativno remanenčno stanje $-B_r$:

$$\Delta B_5 = +B_r \rightarrow -B_m \text{ in } \Delta B_6 = -B_m \rightarrow -B_r$$

- Skupna sprememba je enaka dvojni vrednosti remanenčne indukcije: $\Delta B = \Delta B_5 - \Delta B_6 = 2B_r$

- Remanenčno vrednost magnetne indukcije še ovrednotimo:

$$B_r = \frac{\int_0^{T_M} u_i dt}{2N_2 A} = \frac{18 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}}{2 \cdot 20 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 1,125 \text{ T}$$

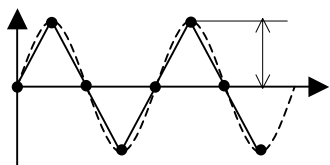
Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Kolikšen je največji relativni pogrešek merjenja amplitude sinusnega signala s frekvenco 50 MHz, če jo merimo z enkratnim proženjem in linearno interpolacijo na digitalnem osciloskopu, ki ima frekvenco vzorčenja 200 MHz? Amplituda se določa z najvišjo vrednostjo med povzorčenimi točkami. Pasovna širina analognega dela osciloskopa je veliko večja od frekvence vzorčenja.

Rešitev:

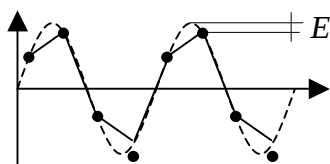
- Ker je pasovna širina analognega dela osciloskopa precej večja od frekvence vzorčenja, pomeni, da je signal popačen samo zaradi digitalnega dela oz. zaradi vzorčenja pri enkratnem proženju.
- Osciloskop vzorči s frekvenco vzorčenja f_s , ki je štiri krat večja od frekvence signala f . To pomeni, da povzorči na eno periodo točno 4 vzorce.
- Ker signal in proces vzorčenja med seboj nista sinhronizirana, bo osciloskop pri enkratnem prehodu (proženju, vzorčenju) lahko pomeril različne vrednosti, s tem pa tudi različne največje vrednosti oz. amplitude.

1. primer – brez faznega zamika med signalom in procesom vzorčenja.



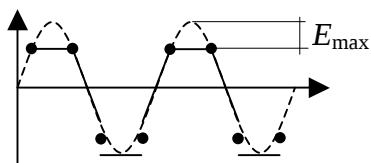
Najvišja vzorčena vrednost je enaka dejanski amplitudi, kar pomeni, da je pogrešek merjenja amplitude enak 0.

2. primer – s faznim zamikom med signalom in procesom vzorčenja.



Najvišja vzorčena vrednost ni enaka dejanski amplitudi, kar pomeni, da imamo opravka s pogreškom merjenja amplitude, ki ni enak 0.

3. primer – s faznim zamikom, kjer sta po dve vzorčeni vrednosti enaki.

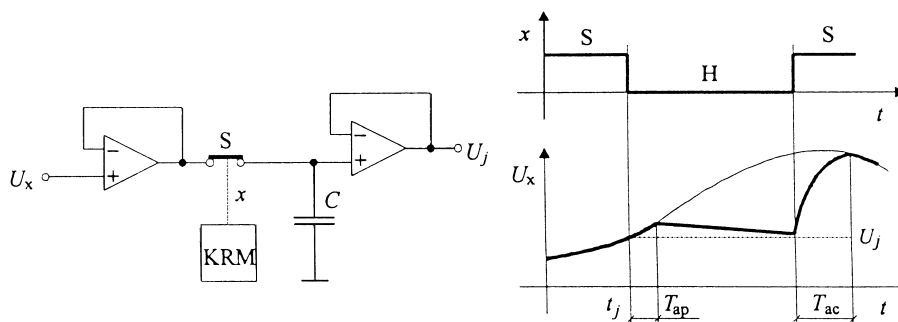


Najvišja vzorčena vrednost najbolj odstopa od amplitude, kar pomeni, da je pogrešek merjenja amplitude največji.

- Najnižje izmerjena amplituda torej nastopi pri faznem zamiku $360^\circ/4/2 = 45^\circ$, kjer ima sinusni signal vrednost, ki je za faktor $\sqrt{2}$ ($= \sin 45^\circ$) manjši kot pri 90° . Relativni pogrešek izmerjene amplitude tako znaša:

$$e_{\max} = \frac{\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} - \hat{u}}{\hat{u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = -29\%$$

2. Kolikšen aperturni čas T_{ap} mora imeti člen za vzorčenje in zadržanje, če želimo, da bodo vsi biti 12-bitnega AD pretvornika verodostojni? Vhodna napetost je sinusna z $f = 20\text{ kHz}$ in $\hat{u} = 2,5\text{ V}$, ki polno izkoristi merilno območje pretvornika.



Rešitev:

- Stikalo potrebuje aperturni čas T_{ap} (lat. aperire - odpreti), da se odpre (nekaj nanosekund) in v tem času se signal ne sme spremeniti za več, kot je ločljivost AD pretvornika, ki mu sledi, če želimo, da so vsi biti verodostojni. Največja dopustna sprememba vhodne napetosti v času pretvorbe T_{ap} naj bo manjša od ločljivosti ADP:

$$\left| \frac{dU_x}{dt} \right|_{\max} = \frac{U_D}{2^n T_{ap}} \quad U_D - \text{doseg ADP}$$

- Če je na vhodu sinusna napetost, je največja sprememba signala:

$$u_x = \hat{u} \sin \omega t \Rightarrow \left| \frac{du_x}{dt} \right|_{\max} = \omega \hat{u}$$

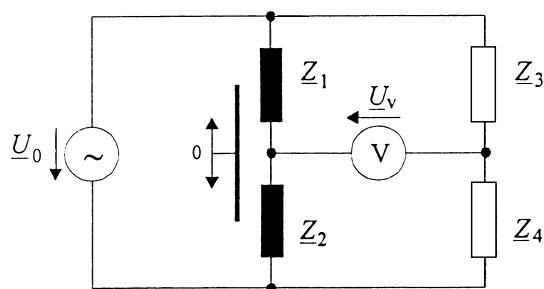
- kadar je AD pretvornik polno izkoriščen $\hat{u} = \frac{U_D}{2}$, imamo največji odvod. Aperturni čas izrazimo z:

$$2\pi f \hat{u} = 2\pi f \frac{U_D}{2} = \frac{U_D}{2^n T_{ap}} \Rightarrow T_{ap} = \frac{1}{2^n \pi f}$$

- Člen za vzorčenje in zadržanje mora imeti krajši aperturni čas T_{ap} kot:

$$T_{ap} = \frac{1}{2^{12} \pi 20\text{ kHz}} = 3,89\text{ ns}$$

3. Izpeljite enačbo za diagonalo polovičnega odklonskega Wheatstonovega mostiča, ki ga uporabimo za merjenje pomika z diferencialno dušilko, če je $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_4$ in je realna komponenta dušilke mnogo manjša kot imaginarna. Upoštevamo tudi, da je $\underline{Z}_5 \gg (\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4)$. Koliko je napetost voltmetra, če je napajalna napetost $U_0 = 6 \text{ V}$ in se induktivnost enega kraka zaradi pomika iz nevtralne lege spremeni za odstotek?



Rešitev:

- Kadar je impedanca voltmetra precej večja kot so impedance mostiča ($\underline{Z}_5 \gg \underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$), je napetost voltmetra je enaka:

$$\underline{U}_v = \underline{U}_0 \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 - \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}$$

- Pri premiku feromagnetnega jedra dušilke iz ravnovesne lege $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ se induktivnost prve dušilke poveča in druge zmanjša:

$$\underline{Z}_1 = R + j\omega(L + \Delta L) \quad , \quad \underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = Z$$

$$\underline{Z}_2 = R + j\omega(L - \Delta L) \quad ,$$

- Izhodiščno enačbo preoblikujemo v:

$$\underline{U}_v = \underline{U}_0 \frac{j\omega Z \Delta L}{2(R + j\omega L)Z} = \underline{U}_0 \frac{j\omega \Delta L}{2(R + j\omega L)}$$

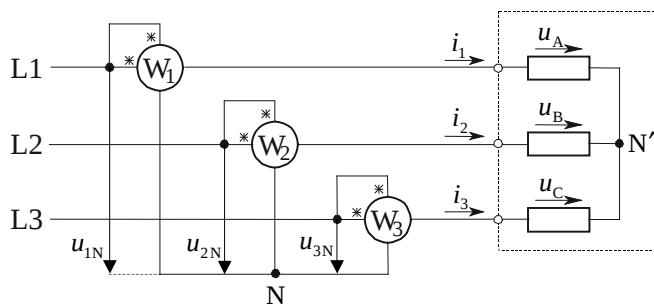
- Ker je realna komponenta dušilke mnogo manjša kot imaginarna $R \ll \omega L$, zapišemo za diagonalno napetost:

$$U_v = \frac{1}{2} U_0 \frac{\Delta L}{L}$$

- in ovrednotimo:

$$U_v = \frac{1}{2} 6 \text{ V} \cdot 0,01 = 0,03 \text{ V}$$

4. Trifazni vir ni uravnovešen, breme ni simetrično. Ali je vsota odčitkov vatmetrov enaka delovni moči bremena, tudi če upornosti njihovih napetostnih vej niso enake? Utemeljite!



Rešitev:

- Delovna moč bremena je $P = \overline{u_A i_1} + \overline{u_B i_2} + \overline{u_C i_3}$. Če zanemarimo sistematčne pogoške priključitve tokovnih vej vatmetrov, lahko moči izrazimo z napetostmi proti skupni točki bremena N' :

$$P = \overline{u_{1N'} i_1} + \overline{u_{2N'} i_2} + \overline{u_{3N'} i_3}.$$

- Neenake upornosti napetostnih vej vatmetrov povzročijo **premaknitev skupne točke vatmetrov** N , ki je tako v splošnem potencialno različna od točke N' . Zapišemo lahko:

$$u_{1N'} = u_{1N} + u_{NN'},$$

$$u_{2N'} = u_{2N} + u_{NN'},$$

$$u_{3N'} = u_{3N} + u_{NN'}.$$

- Delovne moči posameznih vej bremena so: $P_1 = \overline{u_{1N'} i_1}$, ..., $P_3 = \overline{u_{3N'} i_3}$
- Moči posameznih vatmetrov so: $P_{W1} = \overline{u_{1N} i_1}$, ..., $P_{W3} = \overline{u_{3N} i_3}$
- Celotna delovna moč bremena je enaka vsoti moči vatmetrov:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \overline{u_{1N} i_1} + \overline{u_{2N} i_2} + \overline{u_{3N} i_3} + \overline{u_{NN'} (i_1 + i_2 + i_3)} = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3},$$

- saj je $\overline{u_{NN'} (i_1 + i_2 + i_3)} = 0$, ker je vsota tokov od i_1 do i_3 nič. Merjenje delovne moči v trifaznem trivodnem sistemu je torej neodvisno od potenciala nevtralne točke N – skupne točke napetostnih vej vatmetrov.

- Vsota moči vatmetrov je neodvisna od potenciala skupne točke napetostnih vej vatmetrov N .**

5. Prikazovalnik univerzalnega elektronskega števca kaže pri merjenju periode signala $29,25\mu\text{s}$. Kaj kaže prikazovalnik, če merimo frekvenco istega signala s časom merjenja $T_M = 100\text{ ms}$? Pri izračunu upoštevajte mejni kvantizacijski pogrešek merjenja. Skicirajte porazdelitev možnih vrednosti!

Rešitev:

- Če kaže števec $29,25\mu\text{s}$ in upoštevamo mejni kvantizacijski pogrešek, ki je v našem primeru enak ločljivosti zadnjega digita $M_T = \pm T_0^* = 0,01\mu\text{s}$, potem pomeni, da je perioda signala nekje na intervalu

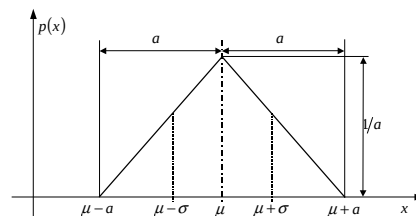
$$[29,24\mu\text{s}, 29,26\mu\text{s}).$$

- To ustreza frekvencam na intervalu $(34,176\text{ kHz}, 34,199\text{ kHz}]$.
- Ker je čas merjenja T_M enak 100 ms , je kvantizacijski pogrešek oziroma ločljivost pri merjenju frekvence:

$$M_f = \frac{1}{T_M} = 10\text{ Hz},$$

- zato kaže števec vrednosti med mejnima vrednostima $34,18\text{ kHz}$ in $34,20\text{ kHz}$.

- Porazdelitev je trikotne oblike s srednjo vrednostjo $\mu = \bar{f} \approx 34,19\text{ kHz}$ in mejnim kvantizacijskim pogreškom $a = M_f = 0,01\text{ kHz}$

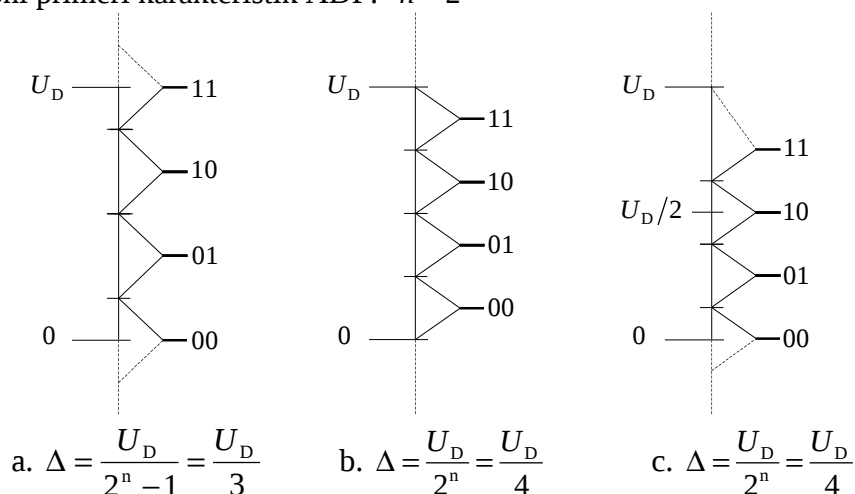


Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Skicirajte tipične primere kvantizacijskih karakteristik, če je korak kvantizacije $\Delta = U_D/2^n$ oziroma $\Delta = U_D/(2^n - 1)$ za $n = 2$. Koliko je ločljivost in koliko mejni kvantizacijski pogrešek merjenja pri posamezni karakteristiki?

Rešitev:

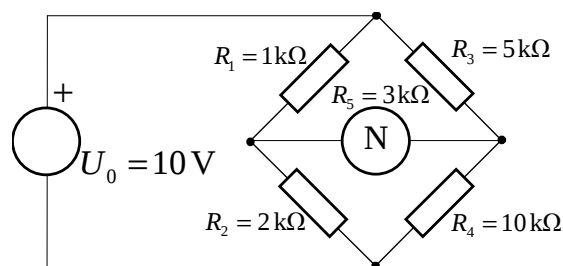
- Tipični primeri karakteristik ADP: $n = 2$



- V primeru karakteristike a. je ločljivost enaka $\Delta_a = U_D/(2^n - 1)$ in mejni kvantizacijski pogrešek, ki je sestavljen iz dveh delov (glej kvantizacijski pogrešek pri merjenju frekvence oz. periode), enak $M_q = \pm \Delta_a/2 \pm \Delta_a/2 = \pm \Delta_a$.
- V primeru karakteristike b. je ločljivost enaka $\Delta_b = U_D/2^n$ in mejni kvantizacijski pogrešek $M_q = \pm \Delta_b$.
- V primeru karakteristike c. je ločljivost v skoraj vseh primerih enaka $\Delta_c = U_D/2^n$ in mejni kvantizacijski pogrešek $M_q = \pm \Delta_c$.
 - Ločljivost se spremeni, če se merjena veličina konča v zadnjem zgornjem kvantizacijskem intervalu. Ločljivost tega intervala je $\Delta_c^* = \frac{3}{2} \Delta_c$.
 - Mejni kvantizacijski pogrešek je v tem primeru enak

$$M_q = \begin{matrix} +\frac{2}{2}\Delta_c & +\frac{1}{2}\Delta_c \\ -\frac{1}{2}\Delta_c & -\frac{1}{2}\Delta_c \end{matrix} = +\frac{3}{2}\Delta_c$$

2. Kolikšne spremembe upornosti R_3 razložimo z danim Wheatstonovim mostičem, če je ločljivost ničelnega indikatorja $(\Delta I_5)_q = 0,1 \mu A$? Kolikšna je ločljivost mostiča δ_q ?



$$I_5 = U_0 \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2) (R_3 + R_4)}$$

Rešitev:

- Če je tok $I_5 = 0$, je ravnovesje: $R_3 = R_{30} = \frac{R_1 R_4}{R_2}$
- Spremembo toka v ravnovesni legi poiščemo z odvodom izhodiščne enačbe, kjer upoštevamo, da se bistveno spremeni samo števec ulomka, če spremenimo upornost $R_3 = R_{30} + \Delta R_3$:

$$\left(\frac{dI_5}{dR_3} \right)_{R_{30}} = U_0 \frac{-R_2}{R_1 R_2 (R_{30} + R_4) + R_{30} R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2) (R_{30} + R_4)}$$

- in izraženo s končnimi spremembami:

$$\frac{\Delta I_5}{\Delta R_3} = U_0 \frac{-R_2}{R_1 R_2 (R_{30} + R_4) + R_{30} R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2) (R_{30} + R_4)} = \left| -\frac{U_0 R_2}{R} \right|$$

- kjer je vrednost imenovalca enaka:

$$R = R_1 R_2 (R_{30} + R_4) + R_{30} R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2) (R_{30} + R_4) = 315 \cdot 10^9 \Omega$$

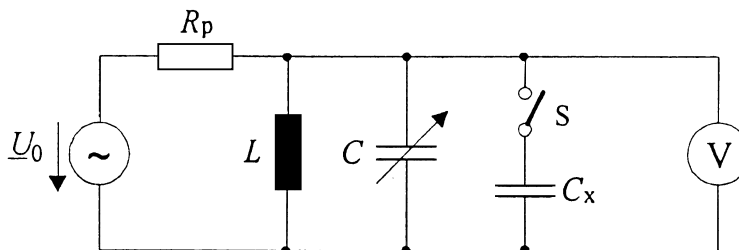
- Z danim Wheatstonovim mostičem razložimo:

$$(\Delta R_3)_q = \frac{(\Delta I_5)_q R}{U_0 R_2} = \frac{10^{-7} A \cdot 315 \cdot 10^9 \Omega}{10 V \cdot 2 \cdot 10^3 \Omega} = 1,575 \Omega$$

- Ločljivost mostiča je enaka:

$$\delta_q = \frac{(\Delta R_3)_q}{R_3} = \frac{1,575 \Omega}{5 \cdot 10^3 \Omega} = 3,15 \cdot 10^{-4}$$

3. Z danim vezjem moremo izmeriti neznano kapacitivnost C_x . Razložite metodo in izpeljite enačbo za merjeno veličino! Naštejte prednosti in slabosti metode!



Rešitev:

- Resonančna metoda je primerna za področje visokih frekvenc.
 - Vpliv parazitnih kapacitivnosti je mnogo manjši.
 - Za izrazito resonanco mora imeti voltmeter visoko upornost $R_v \gg 1$.
- Pri odprtem stikalu poiščemo resonanco s spreminjanjem C :

$$\rightarrow C = C_1,$$
- Pri zaprtem stikalu poiščemo resonanco z zmanjšanjem C :

$$\rightarrow C = C_2,$$
- Razlika je enaka neznani kapacitivnosti: $C_x = C_1 - C_2$
- Negotovost zmanjšamo z zamenjalno metodo!

4. Skicirajte vezje za merjenje jalove moči v trifaznem trivodnem sistemu, ki je uporabno tudi pri neuravnovešenem napetostnem viru in nesimetrični obremenitvi! Utemeljite!

Rešitev:

- Jalova moč bremena je

$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_A \underline{I}_1^* + \underline{U}_B \underline{I}_2^* + \underline{U}_C \underline{I}_3^* \}. \quad \text{Če}$$

zanemarimo sistematične pogreške priključitve tokovnih vej varmetrov, lahko jalove moči izrazimo z napetostmi proti skupni točki bremena N' :

$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N'} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{2N'} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{3N'} \underline{I}_3^* \}.$$

- Zaradi neuravnovešenega vira in nesimetrične obremenitve je skupna točka varmetrov N v splošnem potencialno različna od točke N' . Zapišemo lahko:

$$\underline{U}_{1N'} = \underline{U}_{1N} + \underline{U}_{NN'},$$

$$\underline{U}_{2N'} = \underline{U}_{2N} + \underline{U}_{NN'},$$

$$\underline{U}_{3N'} = \underline{U}_{3N} + \underline{U}_{NN'},$$

- Jalove moči posameznih vej bremena so:

$$Q_1 = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N'} \underline{I}_1^* \}, \dots, Q_3 = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{3N'} \underline{I}_3^* \}$$

- Jalove moči posameznih varmetrov so:

$$Q_{\text{VAr}_1} = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_1^* \}, \dots, Q_{\text{VAr}_3} = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{3N} \underline{I}_3^* \}$$

- Celotna jalova moč bremena je enaka vsoti moči varmetrov:

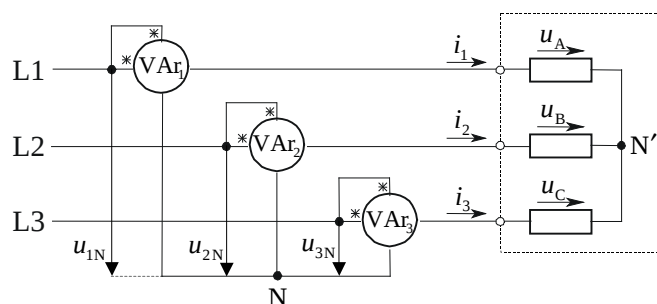
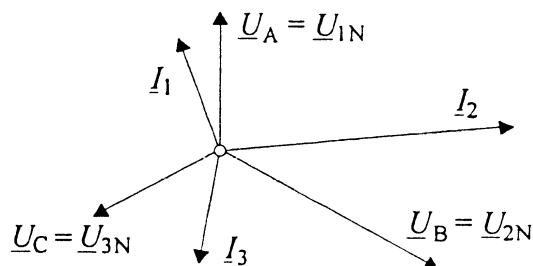
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 =$$

$$= \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N'} \underline{I}_1^* \} + \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{2N'} \underline{I}_2^* \} + \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{3N'} \underline{I}_3^* \} + \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{NN'} (\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^*) \} =$$

$$= Q_{\text{VAr}_1} + Q_{\text{VAr}_2} + Q_{\text{VAr}_3}$$

- saj je $\underline{U}_{NN'} (\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^*) = 0$, ker je vsota tokov od i_1 do i_3 nič. Merjenje jalove moči v trifaznem trivodnem sistemu je torej neodvisno od potenciala nevtralne točke N – skupne točke napetostnih vej varmetrov.

- Jalovo moč neuravnovešenega trifaznega trivodnega sistema bi lahko mmerili samo z dvema varmetroma, če bi priklopili skupno točko varmetrov na eno izmed faznih napetosti. Analogno Aronovi vezavi za delovno moč!



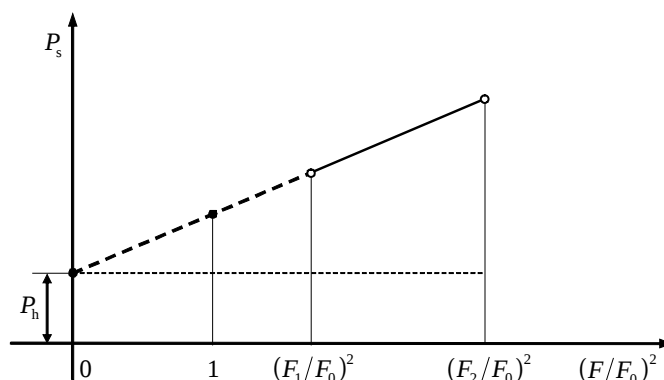
5. Pri merjenju dinamične histerezne zanke feromagnetnega jedra smo določili odvisnost specifičnih izgub P_s od kvocienta oblikovnih faktorjev F/F_0 in jo zapisali v obliki spodnje enačbe za P_s . Pri položaju stikala 1 (skoraj nepopačena inducirana napetost) je znašal izmerjeni kvocient oblikovnih faktorjev 1,05, medtem ko je pri položaju stikala 2 (popačena inducirana napetost) znašal izmerjeni kvocient oblikovnih faktorjev 1,2. Izračunajte specifične, vrtilne in histerezne izgube pri položaju stikala 1 in pri položaju stikala 2!

$$P_s = 0,300 \text{ W/kg} + 0,829 \text{ W/kg} \left(\frac{F}{F_0} \right)^2$$

Rešitev:

- Za ločitev izgub uporabimo metodo ločevanja histereznih in vrtilnih izgub s faktorjem oblike signala.

$$P_s = P_h + P_e = P_h + c \left(\frac{F}{F_0} \right)^2$$



- Ko je stikalo v **položaju 1**, poznamo $F_1/F_0 = 1,05$ in lahko določimo specifične, vrtilne in histerezne izgube:

$$P_s = 0,300 \text{ W/kg} + 0,829 \text{ W/kg} \left(\frac{F_1}{F_0} \right)^2 = 0,300 \text{ W/kg} + 0,829 \text{ W/kg} (1,05)^2 = 1,214 \text{ W/kg}$$

- Histerezne izgube dobimo, ko je faktor oblike 0

$$P_h = 0,300 \text{ W/kg},$$

- vrtilne izgube pa predstavljajo razliko med specifičnimi in histereznimi izgubami:

$$P_e = P_s - P_h = 0,914 \text{ W/kg}$$

- Podobno lahko izračunamo tudi, ko je stikalo v **položaju 2**:

$$P_s = 0,300 \text{ W/kg} + 0,829 \text{ W/kg} \left(\frac{F_2}{F_0} \right)^2 = 0,300 \text{ W/kg} + 0,829 \text{ W/kg} (1,2)^2 = 1,494 \text{ W/kg}$$

$$P_h = 0,300 \text{ W/kg}$$

$$P_e = P_s - P_h = 1,194 \text{ W/kg}$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Koliko sme biti frekvenca sinusne vhodne napetosti, ki polno izkoristi 12-bitni analogno-digitalni pretvornik brez vzorčno-zadržnega člena, da bodo vsi biti verodostojni neodvisno od trenutka začetka pretvorbe. Čas enega koraka pretvorbe je $T_{1.korak} = 100 \text{ ns}$. Določite frekvence, če je ADP:

- s postopnim približevanjem,
- paralelni pretvornik,
- z dvojn timer naklonom, nastavljen na izločanje ene periode omrežne motnje.

Rešitev:

- Največja dopustna sprememba vhodne napetosti v času pretvorbe t_c naj bo manjša od ločljivosti ADP (Δ), da bodo vsi biti verodostojni:

$$\left| \frac{dU_x}{dt} \right|_{\max} = \frac{\Delta}{t_c} = \frac{U_D}{2^n t_c}; \quad U_D - \text{doseg ADP}$$

$$\blacksquare \text{ Če je na vhodu sinusna napetost, imamo: } u_x = \hat{u} \sin \omega t \Rightarrow \left| \frac{du_x}{dt} \right|_{\max} = \omega \hat{u}$$

- Kadar je ADP polno izkoriščen $\hat{u} = U_D/2$, je največja frekvenca signala:

$$2\pi f \hat{u} = 2\pi f \frac{U_D}{2} = \frac{U_D}{2^n t_c} \Rightarrow f = \frac{1}{2^n \pi t_c}$$

- Pri 12-bitnem ADP s postopnim približevanjem imamo v času pretvorbe 12 korakov dolgih $T_{1.korak} = 100 \text{ ns}$ in je čas pretvorbe $t_c = 1,2 \mu\text{s}$. Frekvenca vhodnega signala je lahko največ:

$$f = \frac{1}{2^{12} \pi 1,2 \mu\text{s}} = 64,76 \text{ Hz}$$

- V primeru paralelnega ADP je pretvorba končana v enem koraku $t_c = T_{1.korak} = 100 \text{ ns}$ in je mejna frekvenca največ

$$f = \frac{1}{2^{12} \pi 100 \text{ ns}} = 777,12 \text{ Hz}$$

- ADP z dvojn timer naklonom ima čas zajemanja-integracije nastavljen na izločanje ene periode omrežne motnje $t_c = 20 \text{ ms}$ neodvisno od signala, zato je lahko največja frekvenca:

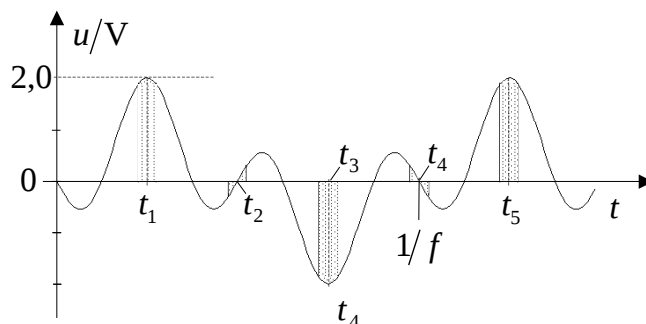
$$f = \frac{1}{2^{12} \pi 20 \text{ ms}} = 0,0039 \text{ Hz}$$

2. Katere vrednosti si sledijo pri vzorčenju napetosti $u/V = 1\sin(\omega t) - 1\sin(3\omega t)$ z integrirajočim AD pretvornikom s $T_i = 100\mu s$, vzorčno frekvenco $f_s = 4f = 2\text{ kHz}$ in ločljivostjo 1 mV , če je med njimi največja možna? Najprej skicirajte razmere!

$$\bar{U} = \hat{u} \frac{\sin \omega T_i / 2}{\omega T_i / 2}$$

Rešitev:

- Skica vzorčenja signala u/V , ki doseže maksimalno vrednost $u_{\max} = 2,0\text{ V}$, ko se seštejeta amplitudi obeh komponent:



- Frekvenci osnovne in tretje harmonske komponente sta $f_1 = 500\text{ Hz}$ in $f_3 = 1500\text{ Hz}$.
- Ker je frekvenca vzorčenja štirikrat večja od osnovne komponente signala in imamo simetrijo tretje vrste, si sledijo naslednje vrednosti:

$$\bar{U}(t_1) = U_{\max}, \bar{U}(t_2) = 0\text{ V}, \bar{U}(t_3) = -U_{\max}, \bar{U}(t_4) = 0\text{ V}, \bar{U}(t_5) = U_{\max}, \dots$$

- Integrirajoči AD pretvornik zmanjša amplitudo sinusnega signala po funkciji $\bar{U} = \hat{u} \frac{\sin \pi f T_i}{\pi f T_i}$ v odvisnosti od produkta frekvence sinusnega signala f in integracijskega časa T_i :

- Zmanjšana amplituda osnovne komponente:

$$\bar{U}_{f_1} = 1,0\text{ V} \frac{\sin(\pi 500\text{ Hz } T_i)}{\pi 500\text{ Hz } T_i} = 1,0\text{ V} \cdot 0,99589 = 0,9959\text{ V}$$

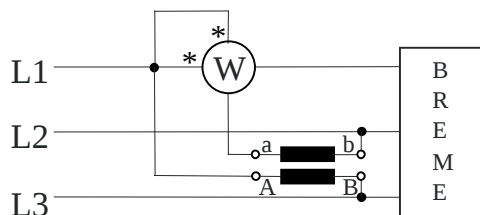
- Zmanjšana amplituda tretje harmonske komponente:

$$\bar{U}_{f_3} = 1,0\text{ V} \frac{\sin(\pi 1500\text{ Hz } T_i)}{\pi 1500\text{ Hz } T_i} = 1,0\text{ V} \cdot 0,96340 = 0,9634\text{ V}$$

- Največja vrednost vzorčenja je vsota obeh prispevkov komponent:

$$U_{\max} = \bar{U}(t_1) = 0,9959\text{ V} + 0,9634\text{ V} = 1,9593\text{ V} \rightarrow 1,959\text{ V}$$

3. Kaj kaže vatmeter, če je trifazni sistem uravnovešen? Skicirajte fazorski diagram. ($K_u = 1$)



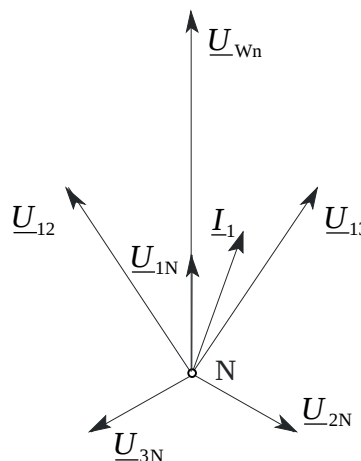
Rešitev:

- Skozi tokovno vejo vatmetra teče tok prve faze bremena $\underline{I}_1$, na napetostni veji vatmetra pa imamo vsoto dveh medfaznih napetosti:

$$\underline{U}_{Wn} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{13}$$

- Drugo medfazno napetost $\underline{U}_{13}$ nam vsili napetostnik s prestavo $K_u = 1$.

- Fazorski (kazalčni) diagram:



- Vsota napetosti na napetostni veji vatmetra $\underline{U}_{Wn}$ je zaradi uravnovešenega sistema in s tem enakostraničnega napetostnega trikotnika enaka:

$$\underline{U}_{Wn} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{13} = 3\underline{U}_{1N}$$

- Moč, ki jo kaže vatmeter, je enaka moči simetričnega bremena:

$$P_W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{U}_{Wn} \underline{I}_1^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (\underline{U}_{12} + \underline{U}_{13}) \underline{I}_1^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ 3\underline{U}_{1N} \underline{I}_1^* \} = 3P_1 = P_{\text{brema}}$$

4. Digitalni elektronski števec ima oscilator frekvence $f_0 = 10 \text{ MHz}$ in frekvenčni delilnik $K = 1, 10^1, \dots, 10^7$. Katero veličino (f_x ali T_x) moramo meriti, da dobimo manjši kvantizacijski pogrešek, če je neznana frekvenca 4 kHz ? Pogrešek izračunajte v absolutni in relativni obliki. Kaj v boljšem primeru kaže prikazovalnik?

Rešitev:

- Mejni relativni pogrešek pri merjenju frekvence znaša

$$m_f = \frac{1}{k_f \cdot T_0 \cdot f_x} = \frac{10 \text{ MHz}}{10^7 \cdot 4 \text{ kHz}} = 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

- Mejni relativni pogrešek pri merjenju periode pa znaša

$$m_T = k_T \cdot T_0 \cdot f_x = 1 \cdot \frac{4 \text{ kHz}}{10 \text{ MHz}} = 4 \cdot 10^{-4}.$$

- Iz tega sledi, da je manjši kvantizacijski pogrešek pri merjenju frekvence.

- Absolutna vrednost pogreška pri merjenju frekvence znaša

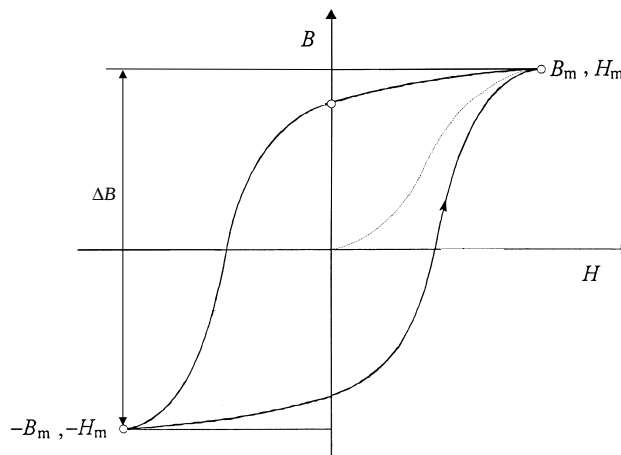
$$M_f = e_f \cdot f_x = 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \text{ kHz} = 1 \text{ Hz}.$$

- Prikazovalnik pa kaže 4000 Hz .

5. Pri komutaciji toka vzbujalne tuljave magnetnega jarma se je v B -tuljavici, ki ima sto ovojev in presek A_t 20 % večji od preseka merjenca $A = 2 \text{ cm}^2$, inducirani napetostni impulz s ploščino 25 mVs . Kolikšna je magnetna indukcija (gostota magnetnega pretoka) B v merjencu, če je v njem jakost magnetnega polja $H = 200 \text{ kA/m}$?

Rešitev:

- Upoštevajoč Faradeyev zakon zapišemo za inducirano napetost u_i v indukcijski B -tuljavici s presekom A_t in z N ovoji pri komutaciji in zato spremembi magnetne indukcije od B_m do $-B_m$:



$$u_i = -N A_t \frac{dB}{dt} \rightarrow \int_0^{T_M} u_i dt = -N A_t \int_{B_m}^{-B_m} dB = N A_t 2B_m \rightarrow B_m = \frac{\int_0^{T_M} u_i dt}{2 N A_t}$$

$$B_m = \frac{25 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}}{2 \cdot 100 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,521 \text{ T}$$

- Zaradi velikih jakosti (nekaj 100 kA/m), pretok v zraku ϕ_0 med merjencem in tuljavo ni zanemarljiv. Popravljeno (korigirano) vrednost B_{kor} dobimo:

$$u_i = -N \frac{d}{dt} [A 2B_{\text{kor}} + (A_t - A) \mu_0 H]$$

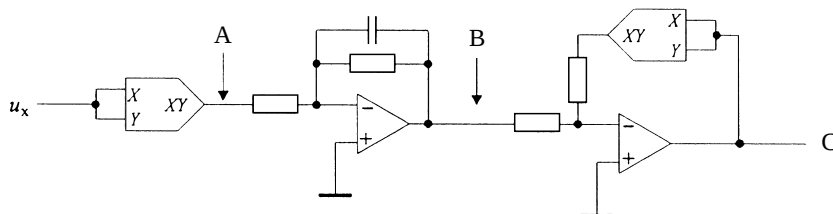
$$A 2B_m = A 2B_{\text{kor}} + (A_t - A) \mu_0 H$$

$$B_{\text{kor}} = B_m - \mu_0 H \frac{A_t - A}{2A} = 0,521 \text{ T} - 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 2 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \frac{0,2}{2} =$$

$$B_{\text{kor}} = 0,521 \text{ T} - 0,025 \text{ T} = 0,496 \text{ T}$$

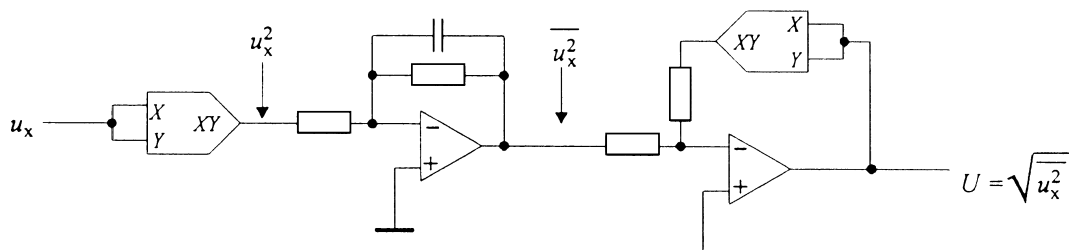
Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Razložite dano merilno vezje in skicirajte poteke signalov v točkah A, B in C, če je merjena napetost u_x sinusna!



Rešitev:

- Pretvornik za merjenje efektivne vrednosti napetosti z analognim postopkom:

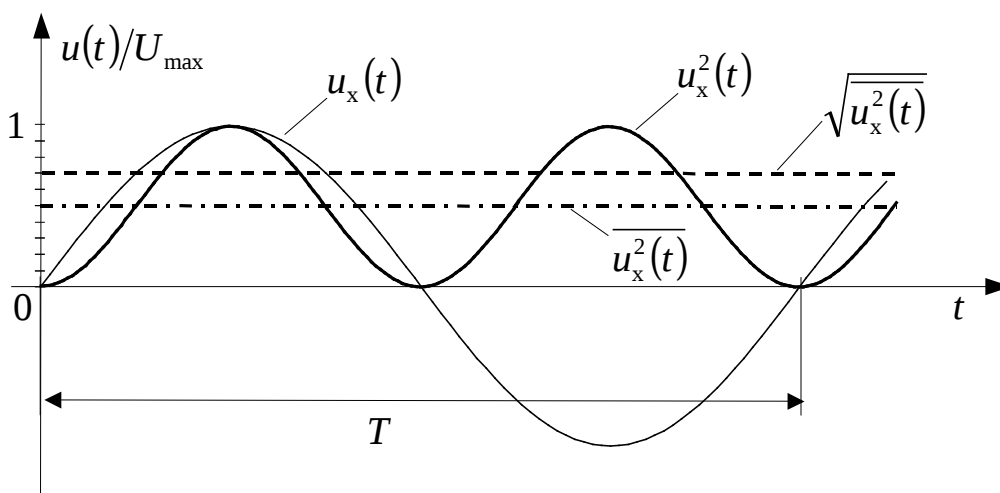


- Uporablja se popolna elektronska realizacija definicije:

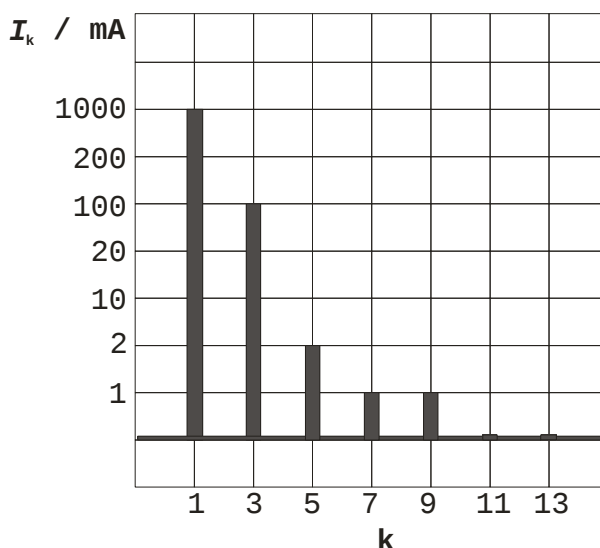
$$U = \sqrt{\overline{u_x^2}} \quad \text{- koren povprečja kvadratov (rms)}$$

- napetost **kvadriramo**, **povprečimo** s filtrom in **korenimo** (kvadratna funkcija v povratni zanki ojačevalnika).

- Skice signalov:



2. Z analizatorjem moči želimo izmeriti harmonsko popačenje THD neznanega bremena. Na prikazovalniku analizatorja moči dobimo spodnjo sliko. Izračunajte THD_{IEC} in THD_{DIN} za to breme, če predpostavimo, da višjiharmonskih komponent ($k > 9$) ni.



Rešitev:

- Efektivna vrednost toka bremena je

$$I = \sqrt{\sum_{k=1}^n I_k^2} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_9^2}$$

$$I = \sqrt{(1000 \text{ mA})^2 + (100 \text{ mA})^2 + (2 \text{ mA})^2 + (1 \text{ mA})^2 + (1 \text{ mA})^2} = 1004,99 \text{ mA}$$

- in efektivna vrednost harmonskih komponent, ki pačijo sinusno podobo osnovne komponente:

$$I_h = \sqrt{\sum_{k=2}^n I_k^2} = \sqrt{I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_9^2}$$

$$I_h = \sqrt{(100 \text{ mA})^2 + (2 \text{ mA})^2 + (1 \text{ mA})^2 + (1 \text{ mA})^2} = 100,03 \text{ mA}$$

- Izračunani vrednosti THD pa sta

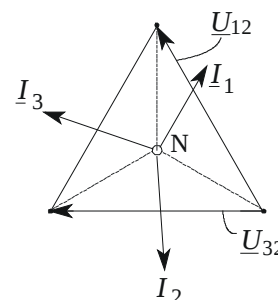
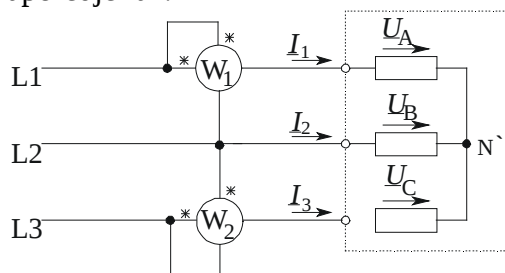
$$THD_{IEC} = \frac{I_h}{I_1} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{(1004,99 \text{ mA})^2 - (1000 \text{ mA})^2}}{1000 \text{ mA}} = 0,1000$$

$$THD_{DIN} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I} = \frac{\sqrt{(1004,99 \text{ mA})^2 - (1000 \text{ mA})^2}}{1004,99 \text{ mA}} = 0,0995$$

3. Skicirate vezji za merjenje delovne in jalove moči z dvema vatmetroma v trifaznem trivodnem sistemu z uravnovešenim trifazni virom, ki imata tokovni veji v vodnikih L1 in L3! Zapišite enačbi za delovno in jalovo moč. Narišite fazorska (kazalna) diagrama za obe vezji in navedite pogoje za pravilno merjenje moči!

Rešitev:

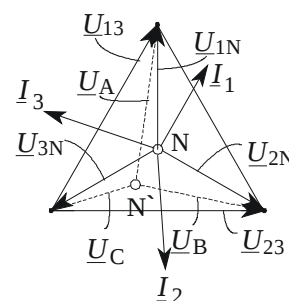
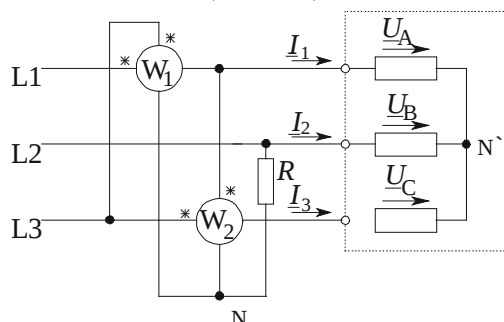
- Vezje za merjenje **delovne moči** z dvema vatmetroma.
 - Pogoj: Biti mora trivodni sistem, ni nujno, da je breme simetrično in znano zaporedje faz.



$$P = \overline{u_A i_1} + \overline{u_B i_2} + \overline{u_C i_3} = \overline{u_A i_1} + \overline{u_B (-i_1 - i_3)} + \overline{u_C i_3} =$$

$$= (\overline{u_A - u_B} i_1) + (\overline{u_C - u_B} i_3) = \overline{u_{12} i_1} + \overline{u_{32} i_3} = P_{W1} + P_{W2}$$

- Vezje za merjenje **jalove moči**.
 - Pogoj: Biti mora trivodni sistem, uravnovešen vir in znano zaporedje faz, ni nujno, da je breme simetrično. Upornosti v napetostnih vejah morajo biti enake: $R_{W1,n} = R_{W3,n} = R$



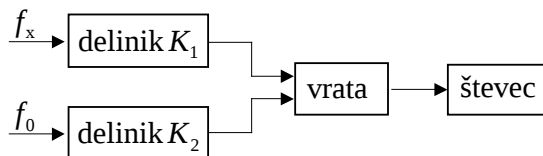
$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N'} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{2N'} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{3N'} \underline{I}_3^* \}$$

- Ker je v trivodnem sistemu vsota tokov nič, lahko zapišemo $\underline{I}_2^* = -(\underline{I}_1^* + \underline{I}_3^*)$ in jalovo moč izrazimo s: $Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ (\underline{U}_{1N'} - \underline{U}_{2N'}) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_{3N'} - \underline{U}_{2N'}) \underline{I}_3^* \}$
 - Pri uravnovešen napajanju zapišemo za napetost med fazama 1 in 2: $\underline{U}_{1N'} - \underline{U}_{2N'} = \underline{U}_{12} = \sqrt{3} \underline{U}_{3N} e^{-j90^\circ}$
 - in za napetost med fazama 3 in 2: $\underline{U}_{3N'} - \underline{U}_{2N'} = \underline{U}_{32} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{j90^\circ}$
- Skupno jalovo moč merimo z dvema vatmetroma:

$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \sqrt{3} \underline{U}_{3N} e^{-j90^\circ} \underline{I}_1^* + \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{j90^\circ} \underline{I}_3^* \} .$$

$$Q = \sqrt{3} \frac{1}{2} \text{Re} \{ -\underline{U}_{3N} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{1N} \underline{I}_3^* \} = \sqrt{3} (-P_{W1} + P_{W2}) .$$

4. Koliko morata biti delilni razmerji K_1 in K_2 (sta pozitivni celi števili), če želimo z digitalnim števcem zmeriti f_x oz. T_x pri frekvenci $f_x = 20 \text{ kHz}$? Doseči želimo minimalni mejni kvantizacijski pogrešek in čas merjenja $T_M \leq 1 \text{ ms}$. Koliko je tedaj standardna negotovost zaradi kvantizacijskega pogreška? $f_0 = 10 \text{ MHz}$



Rešitev:

- Če merimo frekvenco signala, nam daljši čas merjenja zmanjšuje mejni kvantizacijski pogrešek. Ker je čas merjenja omejen na $T_M \leq 1 \text{ ms}$, mora biti:

$$T_M = K_2 / f_0 = 1 \text{ ms} \rightarrow K_2 = T_M f_0 = 1 \cdot 10^4$$

- Neznana frekvenca ne sme biti zmanjšana, če želimo čim več prešteti impulzov in s tem najmanjši mejni kvantizacijski pogrešek: $K_1 = 1$
- Mejni kvantizacijski pogrešek je tako:

$$m_f = \frac{1}{T_M \cdot f_x} = \frac{f_0}{K_2 K_1 f_x} = 0,05$$

- Če merimo periodo signala, nastavimo delilnik K_1 tako, da je čas števila K_1 period merjenega signala enak ali manjši $T_M \leq 1 \text{ ms}$:

$$K_1 T_x = T_M \leq 1 \text{ ms} \rightarrow K_1 = T_M f_x = 20$$

- Referenčna frekvenca ne sme biti zmanjšana, če želimo čim več prešteti impulzov in s tem najmanjši mejni kvantizacijski pogrešek: $K_2 = 1$
- Mejni kvantizacijski pogrešek je tako:

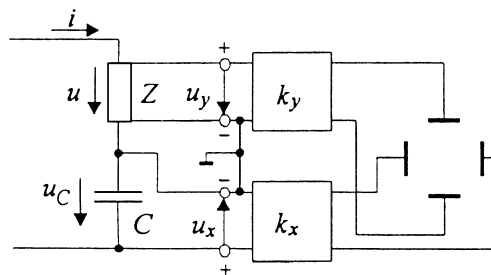
$$m_T = \frac{f_x}{K_2 K_1 f_0} = 1 \cdot 10^{-4} \rightarrow \text{merimo periodo signala!}$$

- Standardna negotovost zaradi kvantizacijskega pogreška s trikotno gostoto porazdelitve je enaka:

$$u_q = \frac{m_q}{\sqrt{6}} = \frac{m_T}{\sqrt{6}} = 4,083 \cdot 10^{-5}$$

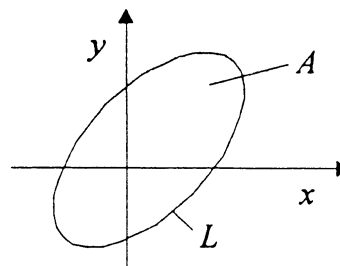
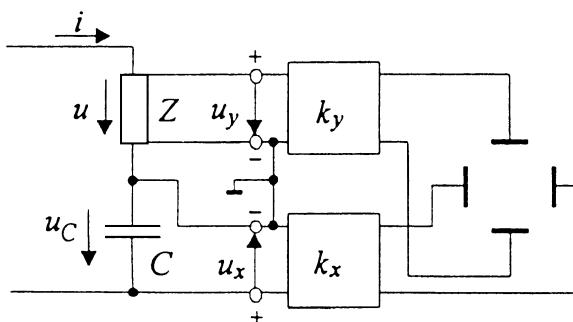
5. Čemu je sorazmerna ploščina lika A na zaslonu elektronskega osciloscopa? Utemeljite!

$$\oint_L y dx = -\oint_L x dy$$



Rešitev:

- Merjenje delovne moči z elektronskim osciloskopom. Uporablja se **XY način** prikaza.
 - Y – napetost bremena,
 - X – napetost, ki je sorazmerna integralu toka bremena.
 - Tok čez kondenzator je: $i = C \frac{du_C}{dt}$



- Delovno moč** izrazimo z:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T u \left(C \frac{du_C}{dt} \right) dt = f C \oint u du_C$$

$$u = u_y = k_y y$$

$$u_C = -u_x = -k_x x \Rightarrow du_C = -k_x dx$$

- Integral po sklenjeni poti (periodičnost) je enak:

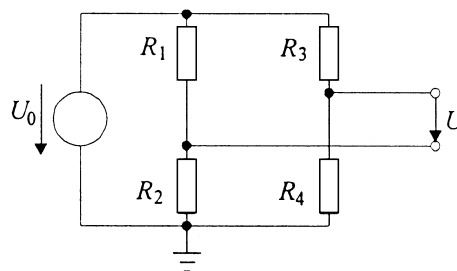
$$P = -f C k_x k_y \oint_L y dx$$

- Ploščina A , ki jo omejuje krivulja L , je sorazmerna delovni moči:

$$P = f C k_x k_y A$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

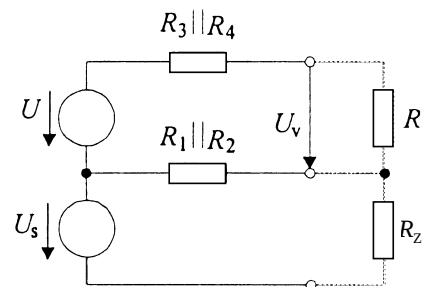
1. Koliko kaže voltmeter z neozemljenim vhomom ($R_V = 10\text{ M}\Omega$, $R_Z = 1\text{ M}\Omega$), ki ga vključimo v diagonalo odklonskega četrtinskega mostiča $R_{10} = R_2 = R_3 = R_4 = 1\text{ k}\Omega$, $U_0 = 4\text{ V}$ in merimo napetost pri spremembi upora za $\Delta R_1/R_{10} = 0,01$. Upornosti vezi zanemarite.



$$U_5 = U_0 \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

Rešitev:

- Voltmeter kaže vsoto dveh prispevkov: merjene napetosti mostiča U in vpliv sofazne napetosti U_s .



- Merjena diagonalna napetost odklonskega četrtinskega mostiča $U = U_5$ pri pogoju, da je upornost voltmetra zelo velika $R_V \gg R_{10}$, je enaka:

$$U_5 \doteq \frac{U_0}{4} \frac{\Delta R_1}{R_{10}} = 10\text{ mV}$$

- Vpliv motilne sofazne napetosti $U_s \approx U_A \approx U_B \approx U_0/2 = 2\text{ V}$ (velja za mostič z enakimi upornostmi) je enak:

$$U_{m,s} = U_s \frac{R_1 || R_2}{R_1 || R_2 + R_Z} = 2\text{ V} \frac{500\text{ }\Omega}{500\text{ }\Omega + 1\text{ M}\Omega} = 1\text{ mV}$$

- Prispevek sofazne napetosti na vходу voltmetra $U_{m,s}$ določa napetostni delilnik nadomestne notranje upornosti mostiča $R_1 || R_2$ v spodnji veji in izolacijske upornosti R_Z , ker se ves padec napetosti z upornosti $R_1 || R_2$ prenese neposredno na vhom voltmetra zaradi velike vhomne upornosti voltmetra $R_V \gg R_3 || R_4$:

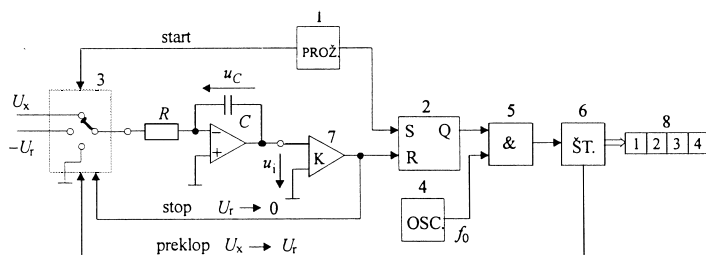
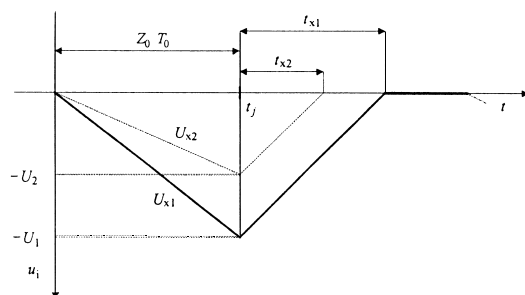
- Voltmeter kaže vsoto obeh prispevkov:

$$U_V = U_5 + U_{m,s} = 11\text{ mV}$$

2. Opišite osnovna načina integracijskega merjenja v analogno-digitalnih pretvornikih. V kakšnem razmerju morata biti čas integracije in motilni signal, da dobimo popolno izločitev motnje? Skicirajte!

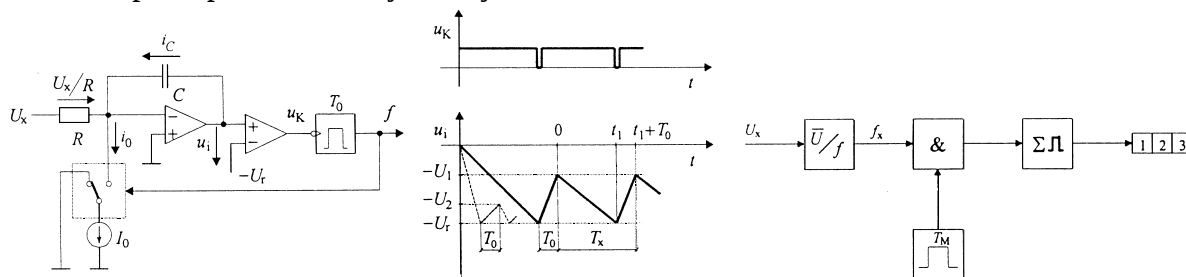
Rešitev:

- Osnovna načina integracijskega merjenja v A/D pretvornikih delujeta s **časom** kot vmesno veličino (npr.: dvonaklonski princip) oziroma s **frekvenco** kot vmesno veličino (npr.: z izenačevanjem naboja).
- Časovni diagram delovanja integracijskega **dvonaklonskega** A/D pretvornika:



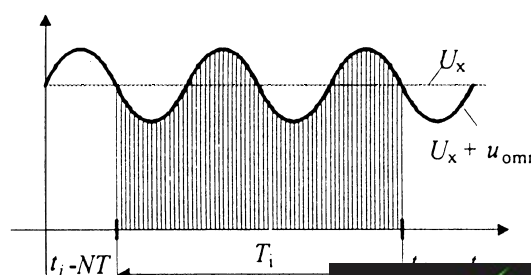
- Imamo dva takta integriranja, ki se izvaja s pomočjo kondenzatorja C v negativni povratni zanki ojačevalnika. Napetost integracije je enaka napetosti na kondenzatorju: $u_i \approx u_C$
- Motilni signal se izloči v prvem taktu** $T_i = Z_0 T_0$, ko se integrira merjena napetost U_x : $U_1 = \frac{Z_0 T_0}{RC} \bar{U}_{x1}$
- Izenačenje napetosti obeh integracij U_1 nam da: $Z = \frac{Z_0}{U_r} \bar{U}_{x1}$

- ADP s frekvenco** kot analogno vmesno veličino. U/f pretvornik deluje na principu izenačevanja naboja.

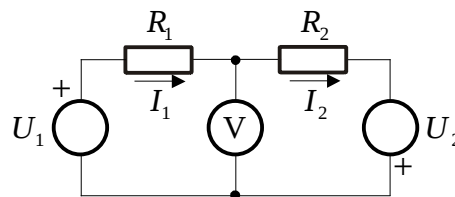


- Frekvenca ponavljanja impulzov je $f_x = \frac{1}{RI_0 T_0} \bar{U}_x$.
- Digitalizacija se izvrši s štetjem impulzov frekvence $Z = f_x T_M$ v času $T_M = T_i$, v katerem **se izloči motilni signal**.
- Vpliv izmeničnega motilnega signala se zmanjša v času integracije, ki mora biti enak mnogokratniku periode motilnega signala $T_i \approx N \cdot T$

$$\bar{U}_j = \frac{1}{NT} \int_{t_j - NT}^{t_j} (U_x + u_{omr}) dt = U_x + \frac{1}{NT} \int_{t_j - NT}^{t_j} u_{omr} dt \approx U_x$$



3. Kolikšno ločljivost mora imeti voltmetr ($U_D = 10 \text{ V}$; $R_V = 10 \text{ M}\Omega$) v narisanim vezju za merjenje upornosti R_1 ($R_1 \approx 1 \text{ k}\Omega$; $U_1 = 1 \text{ V}$; $U_2 = 2 \text{ V}$ - v ravnovesju), da zazna spremembo zadnjega bita 10-bitnih D/A pretvornikov napetostnih generatorjev U_1 in U_2 ($U_D = 2,5 \text{ V}$)? Pokažite v enačbah!



$$U_V = \frac{R_2 U_1 - R_1 U_2}{R_1 + R_2}$$

Rešitev:

- Za obe napetostni zanki vezja velja:

$$U_1 = I_1 R_1 + U_V \quad \text{in} \quad U_2 = I_2 R_2 - U_V$$

- V ravnovesju $U_V = 0 \text{ V}$ velja: $\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \rightarrow R_2 = \frac{U_2}{U_1} R_1 = 2 \text{ k}\Omega$
- Če mostiček ni v ravnovesju, imamo $U_V \neq 0 \text{ V}$. Ker je upornost voltmetra precej večja od obeh upornosti $R_V \gg R_1, R_2$, sta toka praktično enaka $I_1 \approx I_2$ in zapišemo:

$$\frac{U_1 - U_V}{R_1} = \frac{U_2 + U_V}{R_2}$$

- in od tod izrazimo napetost voltmetra kot ničelnega indikatorja:

$$U_V = \frac{R_2 U_1 - R_1 U_2}{R_1 + R_2}$$

- Občutljivost dobimo z delnim odvajanjem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_V}{\partial U_1} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow \Delta U_V = \Delta U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{\partial U_V}{\partial U_2} &= -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \rightarrow \Delta U_V = |\Delta U_2| \frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

- Ločljivost D/A pretvornikov je enaka:

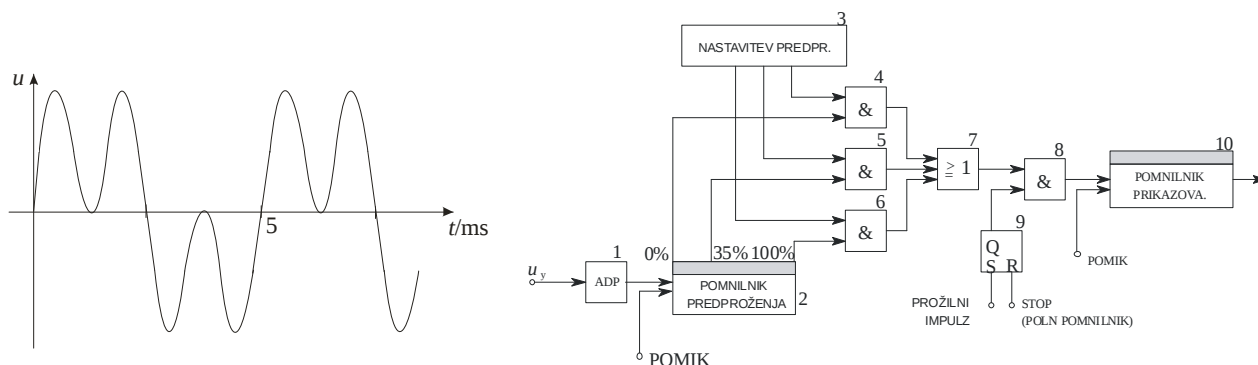
$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = \Delta U = \frac{U_D}{2^n} = \frac{2,5 \text{ V}}{2^{10}} = 2,44 \text{ mV}$$

- Pri spremembi napetosti zadnjega bita D/A pretvornika v napetostnem viru U_2 mora imeti ničelni indikator boljšo ločljivost kot pri enaki spremembi v viru U_1 , ker je upor R_2 večji kot je R_1 .

$$\Delta U_V = \Delta U \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 2,44 \text{ mV} \frac{1 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega} = 0,814 \text{ mV}$$

$$(\Delta U_V = \Delta U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 2,44 \text{ mV} \frac{2 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega} = 1,628 \text{ mV})$$

4. Kakšna je slika na zaslonu DSO pri enkratnem proženju, če je strmina $S < 0$, nivo $N = 0$, odklonski koeficient $k_t = 0,25 \text{ ms/d}$, globina pomnilnika $Z_m = 1000$, največja frekvenca vzorčenja $f_{s,m} = 10 \text{ MHz}$, aktivirana pa so vrata 4?

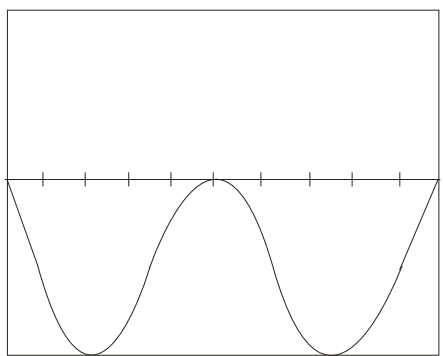


Rešitev:

- Kot sledi iz izračuna, bi za prikaz ene periode, ki traja 5 ms, potrebovali 20 delcev, če je odklonski koeficient $0,25 \text{ ms/d}$.

$$\frac{5 \text{ ms}}{0,25 \text{ ms/d}} = 20 \text{ d}$$

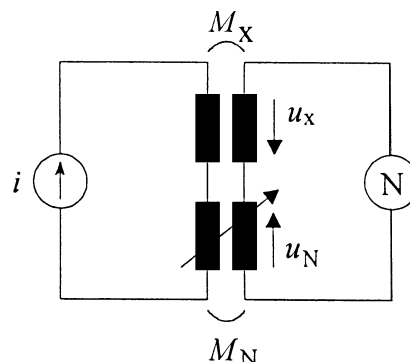
- Ker je širina zaslona osciloskopa 10 delcev, bo prikazano na zaslonu pol periode.
- Ker je strmina proženja manjša od nič, nivo proženja enak nič, aktivirana pa so vrata 4, dobimo naslednjo sliko na zaslonu osciloskopa:



5. Skicirajte vezje za merjenje medsebojne induktivnosti po metodi opozicije in dokažite, da je ločljivost vezja $\delta_q = (\Delta U)_q / (\omega I M_N)$, če je ničelni indikator voltmetr z zelo visoko upornostjo $R \rightarrow \infty \Omega$ in ločljivostjo $(\Delta U)_q$!

Rešitev:

- Vezje za merjenje medsebojne induktivnosti po metodi opozicije:



- Skozi primarni navitji teče isti izmenični tok. Na sekundarnih straneh se inducirata napetosti:

$$u_x = M_x \frac{di}{dt}; \quad u_N = M_N \frac{di}{dt}$$

- Če je tok sinusne oblike imamo:

- inducirana napetost na sekundarju M_x je: $\underline{U}_{i,x} = j\omega M_x \underline{I}$,
- inducirana napetost na sekundarju M_N pa: $\underline{U}_{i,N} = j\omega M_N \underline{I}$,

- Če se napetosti odštevata in je ničelni indikator brez odklona, imamo:

$$j\omega M_x \underline{I} - j\omega M_N \underline{I} = 0 \quad \rightarrow \quad M_x = M_N$$

- V okolici ravnovesne lege lahko za napetost ničelnega indikatorja zapišemo

$$U_N = \omega M_x I - \omega M_N I$$

- Občutljivost napetosti ničelnega indikatorja na spremembo medsebojne induktivnosti izračunamo z delnim odvodom:

$$\frac{\partial U_N}{\partial M_x} = \omega I$$

- Če infinitezimalne spremembe veličin zamenjamo s končnimi, dobimo:

$$\Delta M_x = \frac{\Delta U_N}{\omega I}$$

- in v relativni obliki: $\frac{\Delta M_x}{M_x} = \frac{\Delta U_N}{\omega I M_x} \doteq \frac{\Delta U_N}{\omega I M_N}$

- Ločljivost vezja dobimo, če v enačbi ločljivost ničelnega indikatorja zamenjamo z ločljivostjo voltmetra $(\Delta U)_q$.

$$\delta_q = \frac{(\Delta M_x)_q}{M_x} = \frac{(\Delta U)_q}{\omega I M_N}$$

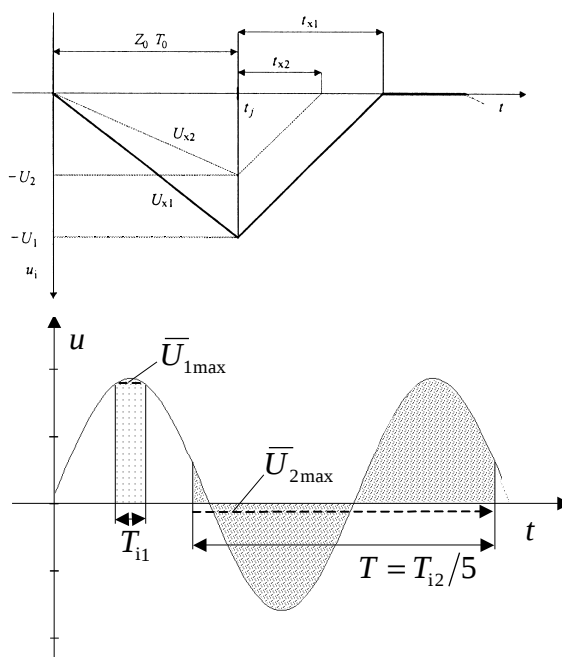
Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Z analogno-digitalnim pretvornikom z dvojnim naklonom smo merili sinusni signal $f = 50 \text{ Hz}$. Uporabili smo dva časa v prvem taktu integracije $T_{i1} = 1 \text{ ms}$ in $T_{i2} = 100 \text{ ms}$. Po večkratnih ponovitvah meritev smo dobili pri T_{i1} največjo vrednost napetosti $U_{1\max} = 0,20 \text{ V}$ in pri T_{i2} $U_{2\max} = -0,01 \text{ V}$. Koliko znaša amplituda vhodnega sinusnega signala? Skicirajte razmere!

$$\bar{U} = \hat{u} \frac{\sin \omega T_i / 2}{\omega T_i / 2}$$

Rešitev:

- Časovni diagram delovanja integracijskega **dvonaklonskega** A/D pretvornika in skica integracijskega zajemanja vrednosti napetosti v prvem taktu $T_i = Z_0 T_0$.
- Integracijsko zajemanje nam da povprečno vrednost signala v intervalu integracije. Največja tekoča povprečna vrednost je odvisna od amplitude signala in produkta časa integracije T_i ter frekvence tega sinusnega signala $f = \omega / 2\pi$.



$$\bar{U} = \hat{u} \frac{\sin \omega T_i / 2}{\omega T_i / 2}$$

- V primeru integracijskega časa $T_{i1} = 1 \text{ ms}$ sta v rezultatu lahko zajeta dva prispevka: izmenični sinusni del in enosmerni prispevek

$$\bar{U}_1 = \hat{u} \frac{\sin(\pi T_{i1}/T)}{\pi T_{i1}/T} + U_0,$$

- katerega prisotnost se pri drugem integracijskem času $T_{i2} = 100 \text{ ms}$, kjer popolnoma izločimo izmenični sinusni del ($f T_{i2} = 5 \rightarrow \sin(\pi 5)/(\pi 5) = 0$), potrdi:

$$\bar{U}_2 = \hat{u} \frac{\sin(\pi T_{i2}/T)}{\pi T_{i2}/T} + U_0 = U_0$$

- Iz obeh enačb izrazimo temensko vrednost sinusnega signala

$$\hat{u} = \frac{(\bar{U}_1 - \bar{U}_2) \pi T_{i1}/T}{\sin(\pi T_{i1}/T)}$$

- in ovrednotimo: $\hat{u} = \frac{(0,20 \text{ V} + 0,01 \text{ V}) \pi \cdot 1 \text{ ms} \cdot 50 \text{ Hz}}{\sin(\pi \cdot 1 \text{ ms} \cdot 50 \text{ Hz})} = 0,21 \text{ V}$

2. Po UI metodi želimo izmeriti upornost $R_x \approx 2 \text{ m}\Omega$ z enako ločljivostjo kot s Thomsonovim mostičem, to je $Q_{R_x} = 2 \mu\Omega$. Kolikokrat manjša je lahko ločljivost voltmetra pri UI metodi $Q_{V,UI}$ od ločljivosti voltmetra $Q_{V,Th}$ pri Thomsonovem mostiču, če v obeh primerih uporabimo tokovni vir $I_0 = 1 \text{ A}$, etalonski upor pri Thomsonovem mostiču pa znaša $R_N = 1 \text{ m}\Omega$?

$$\delta_q = \frac{(\Delta U_5)_q}{I_0 R_x} \left(1 + \frac{R_x}{R_N} \right)$$

Rešitev:

- Pri UI metodi merimo upornost R_x tako, da nanj priključimo konstanten tokovni vir I_0 , ter merimo padec napetosti na njem. Opomniti velja, da je potrebno napetost meriti neposredno na uporu (4-vodna priključitev).
- Če hočemo npr. upornost $R_x \approx 2 \text{ m}\Omega$ meriti z ločljivostjo $Q_{R_x} = 2 \mu\Omega$, bomo pri toku $I_0 = 1 \text{ A}$ potrebovali voltmeter, ki bo lahko meril napetost $U_V \approx I_0 R_x = 2 \text{ mV}$ z ločljivostjo $Q_{V,UI} \approx I_0 Q_{R_x} = 2 \mu\text{V}$.
 - Velja torej $\frac{Q_{V,UI}}{U_V} = \frac{Q_{R_x}}{R_x}$
 - oziroma: $Q_{V,UI} = \frac{Q_{R_x}}{R_x} U_V = \frac{Q_{R_x}}{R_x} I_0 R_x = \delta_q I_0 R_x$
- Pri Thomsonovem mostiču lahko potrebno ločljivost voltmetra $Q_{V,Th}$ izračunamo iz pripisane enačbe za ločljivost mostiča:

$$\delta_q = \frac{(\Delta U_5)_q}{I_0 R_x} \left(1 + \frac{R_x}{R_N} \right) = \frac{Q_{V,Th}}{I_0 R_x} \left(1 + \frac{R_x}{R_N} \right),$$

$$\text{▪ iz katere izpeljemo: } Q_{V,Th} = \delta_q I_0 R_x \left(1 + \frac{R_x}{R_N} \right)^{-1}.$$

- Od tu izračunamo razmerje ločljivosti voltmetrov, ki znaša:

$$\frac{Q_{V,UI}}{Q_{V,Th}} = \frac{\delta_q I_0 R_x \left(1 + \frac{R_x}{R_N} \right)}{\delta_q I_0 R_x} = 1 + \frac{R_x}{R_N} = 1 + \frac{2 \text{ m}\Omega}{1 \text{ m}\Omega} = 3$$

- Pri merjenju upornosti s Thomsonovim mostičem moramo uporabiti voltmeter s vsaj trikrat manjšo ločljivostjo.
 - To bi hkrati pomenilo, da bi lahko pri UI metodi z istim voltmetrom z isto ločljivostjo izmerili upornost z manjšo ločljivostjo oz. bolj natančno. Prednost Thompsonovega mostiča je po drugi strani v tem, da ni potrebno meriti celotne napetosti in toka, ampak le ničelno napetost z dovolj veliko ločljivostjo. Tako lahko pri merjenju s Thompsonovim mostičem kljub dodatnim negotovostim etalonskih uporov dosežemo nižje negotovosti. Gre torej za znane razlike med odklonskimi (UI) in ničelnimi (Thompsonov mostič) metodami.

3. Določite faktor moči na bremenu, če sta napetost in tok:

$$u/V = 100 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/2) + 10 \cdot \sin(10\pi ft + \pi/6)$$

$$i/A = 5 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/3) + 1 \cdot \sin(10\pi ft + \pi/4)$$

Rešitev:

- Faktor moči je razmerje delovne in navidezne moči: $\lambda = P/S$
- Delovna moč je definirana kot vsota prispevkov $P_i = U_i I_i \cos \varphi_i$ komponent napetosti in toka iste frekvence z upoštevanjem razlike kotov med napetostjo in tokom za ustrezno komponento.

$$P = \sum_i U_i I_i \cos \varphi_i; \quad \varphi_i = \varphi_{U,i} - \varphi_{I,i}$$

- V našem primeru imamo prispevek osnovne in pete harmonske komponente:

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1; \quad \varphi_1 = \varphi_{U,1} - \varphi_{I,1} = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$$

$$P_5 = U_5 I_5 \cos \varphi_5; \quad \varphi_5 = \varphi_{U,5} - \varphi_{I,5} = \pi/6 - \pi/4 = -\pi/12$$

- Efektivne vrednosti komponent napetosti in toka so:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 70,71 \text{ V}, \quad U_5 = \frac{\hat{u}_5}{\sqrt{2}} = \frac{10 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 7,071 \text{ V};$$

$$I_1 = \frac{\hat{i}_1}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 3,536 \text{ A}, \quad I_5 = \frac{\hat{i}_5}{\sqrt{2}} = \frac{1 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 0,707 \text{ A}$$

- Delovna moč je tako:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 = 216,51 \text{ W} + 4,83 \text{ W} = 221,34 \text{ W}$$

- Navidezna moč je enaka produktu efektivne vrednosti napetosti in toka: $S = U \cdot I$
 - Efektivno vrednost napetosti dobimo z geometrijskim seštevanjem efektivnih vrednosti komponent: $U = \sqrt{U_1^2 + U_5^2} = 71,064 \text{ V}$
 - Enako velja tudi za efektivno vrednost toka: $I = \sqrt{I_1^2 + I_5^2} = 3,606 \text{ A}$
 - Navidezna moč je tako: $S = 256,22 \text{ VA}$

- Faktor moči λ znaša v našem primeru: $\lambda = \frac{221,34 \text{ W}}{256,22 \text{ VA}} = 0,864$

4. Z univerzalnim elektronskim števcem smo merili frekvenco in periodo signala tako, da je bila ločljivost 1Hz oziroma $0,1\mu\text{s}$. Kolikšna je frekvenca signala, če je bil mejni relativni kvantizacijski pogrešek obakrat enak? Koliko je kazal števec pri merjenju frekvence oziroma periode?

Rešitev:

- Mejna vrednost kvantizacijskega pogreška pri merjenju frekvence je enaka:

$$m_{f,q} = \frac{1}{T_M f_x} = \frac{1}{KT_0 f_x} = \frac{Q_f}{f_x}$$

- Mejna vrednost kvantizacijskega pogreška pri merjenju periode je enaka:

$$m_{T,q} = \frac{KT_0}{T_x} = KT_0 f_x = Q_T f_x$$

- Če izenačimo oba pogreška $m_{f,q} = m_{T,q}$, dobimo:

$$\frac{Q_f}{f_x} = Q_T f_x \Rightarrow f_x = \sqrt{\frac{Q_f}{Q_T}} = \sqrt{\frac{1\text{Hz}}{0,1\mu\text{s}}} = 3162,3\text{Hz}$$

$$T_x = \frac{1}{f_x} = 316,23\mu\text{s}$$

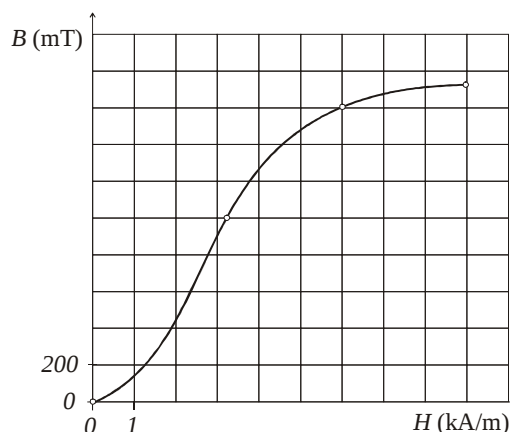
- Pri merjenju frekvence je kazal števec:

$$f_i = 3162\text{Hz} \quad \text{ali} \quad f_i = 3163\text{Hz}$$

- Pri merjenju periode je kazal števec:

$$T_i = 316,2\mu\text{s} \quad \text{ali} \quad T_i = 316,3\mu\text{s}$$

5. S Hopkinsonovim jarmom smo izmerili statično komutacijsko B - H magnetilno krivuljo feromagnetne palice. Kolikšna je bila povprečna vrednost impulza inducirane napetosti $\bar{U}$, ki je nastal ob komutaciji toka $I = 1,5 \text{ A}$ v primarno navitje Hopkinsovega jarma? Poleg statične komutacijske B - H magnetilne krivulje so podani še $N_1 = 600$, $N_2 = 1000$, $a = 0,30$, $A = 1,00 \text{ cm}^2$ in $H/(\text{A/m}) = 4000 \cdot I/\text{A}$ ter čas merjenja $T_M = 1 \text{ s}$.



$$B = \frac{T_M \bar{U}}{2N_2 A a}$$

Rešitev:

- Pri toku $I = 1,5 \text{ A}$ je bila gostota magnetnega polja:

$$H = 4000 \cdot \frac{1,5 \text{ A}}{\text{A}} \cdot \text{A/m} = 6000 \text{ A/m}$$

- Iz podane komutacijske B - H magnetilne krivulje lahko za $H = 6 \text{ kA/m}$ odčitamo gostoto magnetnega pretoka $B = 1600 \text{ mT}$.
- Zaradi komutacije toka dobimo dvojno vrednost gostote magnetnega pretoka:

$$2B = \frac{T_M \bar{U}}{N_2 A a} \Rightarrow B = \frac{T_M \bar{U}}{2N_2 A a}$$

- Od tod izračunamo povprečno vrednost impulza inducirane napetosti:

$$\bar{U} = \frac{2N_2 A a B}{T_M} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 1 \text{ cm}^2 \cdot 0,30 \cdot 1600 \text{ mT}}{1 \text{ s}}$$

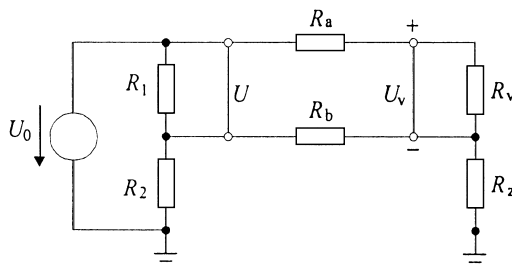
$$\bar{U} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0,30 \cdot 1,6 \text{ T}}{1 \text{ s}} = 0,096 \text{ V} = 96 \text{ mV}$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Razložite princip pravilne ozemljitve merilnega sistema! Koliko mora biti izolacijska upornost voltmetra $R_z = ?$, s katerim merimo napetosti na uporih R_1 , da bo slabljenje sofaznega signala več kot 80 dB? Voltmeter ($R_v = 10 \text{ M}\Omega$) je priključen, kot je narisano na sliki.

$$R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega, U_0 = 10 \text{ V}$$

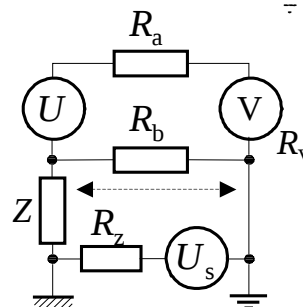
$$R_a = R_b = 10 \Omega$$



Rešitev:

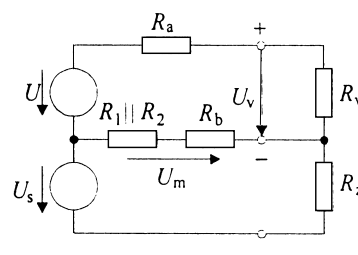
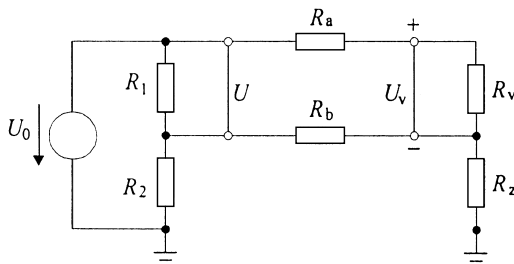
- Merilni sistem pravilno ozemljimo tako, da v zanki obeh skupnih oz. negativnih sponk vira in voltmetra dodamo proti zemlji veliko upornost Z ($Z \gg R_b + R_z$)!

- ozemljimo samo na enem mestu!



$$U_{R_b} = U_s \frac{R_b}{Z + R_b + R_z} \Rightarrow U_{V,m} \approx \frac{R_v}{R_v + R_a} \frac{R_b}{Z} U_s \rightarrow 0$$

- V našem primeru ima vir že določeno 'nizkoomsko' upornost $R_1 || R_2 = 500 \Omega$ proti zemlji in moramo dodati veliko upornost na strani voltmetra R_z . Uporabimo **voltmeter z neozemljenim** (lebdečim) vhodom, kjer negativna sponka ni ozemljena.



- Ker se skoraj ves padec napetosti z upornosti $R_1 || R_2 + R_b$ prenese neposredno na vhod voltmetra zaradi velike vhodne upornosti voltmetra $R_v \gg R_a$, se prispevek sofazne napetosti $U_s = U_0 R_2 / (R_1 + R_2)$ na vhodu voltmetra $U_{m,s}$ izrazi z:

$$U_{m,s} \doteq U_s \frac{R_1 || R_2 + R_b}{R_1 || R_2 + R_b + R_z}$$

- Slabljenje sofaznega signala v decibelih izrazimo z:

$$20 \log \frac{U_{m,s}}{U_s} = 20 \log \left(\frac{R_1 || R_2 + R_b}{R_1 || R_2 + R_b + R_z} \right) = -80 \text{ dB} \Rightarrow \frac{R_1 || R_2 + R_b}{R_1 || R_2 + R_b + R_z} = 10^{-4}$$

- Od tod določimo izolacijsko upornost:

$$\frac{510 \Omega}{510 \Omega + R_z} = 10^{-4} \Rightarrow R_z = 5099490 \Omega \approx 5,1 \text{ M}\Omega$$

2. Določite merilni rezultat za fazni kot φ člena 1. reda ($\tau = 1 \text{ ms}$) pri frekvenci $f = 2 \text{ kHz}$, če upoštevate samo kvantizacijski pogrešek. Potrebni veličini ste zmerili z univerzalnim elektronskim števcem $f_0 = 10 \text{ MHz}$, $K = 1, 10, 10^8$ in uporabili varianto z manjšim mejnim kvantizacijskim pogreškom!

Rešitev:

- Fazni kot člena 1. reda določimo iz enačbe:

$$\varphi = -\arctg(\omega \tau) \rightarrow |\varphi| = \arctg(2\pi f \tau) = 1,491386 \text{ rad}$$

- in pripadajoči časovni zamik, ki ga moramo zmeriti s števcem:

$$\Delta t = \varphi / 2\pi f = 0,11868 \text{ ms}$$

- Pri merjenju časovnega zamika nimamo izbire, drugo preostalo veličino f ali T ($\varphi = 2\pi f \Delta t = 2\pi \cdot \Delta t / T$) pa izberemo na podlagi manjšega mejnega kvantizacijskega pogreška pri danem elektronskem števcu.

- Pri merjenju frekvence f : $m_{f,q} = \frac{1}{T_M f} = \frac{1}{KT_0 f}$

- Meja je najmanjša, kadar je vrednost delilnika števca največja $K_f = 10^8$ oz. čas merjenja, ki ga omogoča števec, najdaljši $T_M = 10^8 T_0 = 10 \text{ s}$:

$$m_{f,q,\min} = \frac{f_0}{K_f f} = 5 \cdot 10^{-5}$$

- Pri merjenju periode T : $m_{T,q} = \frac{KT_0}{T} = KT_0 f$

- Meja je najmanjša, kadar je vrednost delilnika števca najmanjša $K_T = 1$ oz. časovna ločljivost, ki jo omogoča števec, najmanjša $T_0 = 1/f_0 = 0,1 \mu\text{s}$:

$$m_{T,q,\min} = \frac{f}{f_0} = 2 \cdot 10^{-4}$$

- Kot φ tako določimo z merjenjem frekvence in časovnega zamika $\varphi = 2\pi f \Delta t$. Pri produktu merjenih veličin za standardna negotovost splošno zapišemo:

$$w(\varphi) = \sqrt{w^2(f) + w^2(\Delta t)}$$

- Minimalna vrednost kvantizacijske negotovosti merjenja frekvence je:

$$w_q(f) = \frac{m_{f,q,\min}}{\sqrt{6}} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{6}}$$

- in časovnega zamika:

$$w_q(\Delta t) = \frac{m_{\Delta t,q}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{KT_0}{\Delta t} \stackrel{K=1}{=} \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{T_0}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{f_0 \Delta t} = \frac{8,426 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{6}}$$

- Skupna standardna negotovost zaradi kvantizacijskega pogreška je:

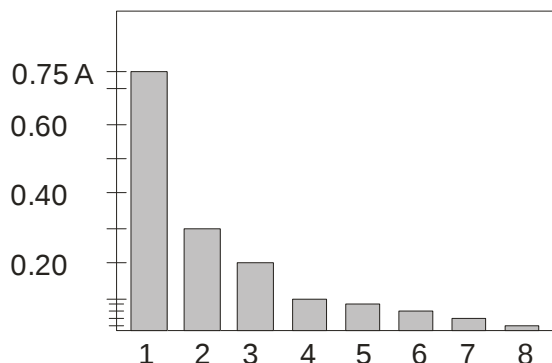
$$w(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(5 \cdot 10^{-5})^2 + (8,426 \cdot 10^{-4})^2} = 3,45 \cdot 10^{-4} \text{ oz.}$$

$$u(\varphi) = w(\varphi) \cdot \varphi = 3,45 \cdot 10^{-4} \cdot 1,4914 \text{ rad} = 5,139 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

- in zaokrožen merilni rezultat:

$$\varphi = 1,49139 \text{ rad}, \quad u(\varphi) = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}, \quad n = 1$$

3. Faktor popačenja THD_{DIN} bremena znaša 0,32. Kolikšen je efektivni tok tega bremena, če je znana informacija o harmonskih komponentah? Koliko je THD_{IEC} ?



Rešitev:

- Efektivna vrednost toka porabnika se lahko izračuna kot geometrijska vsota posameznih komponent.

$$I = \sqrt{I_{K1}^2 + I_{K2}^2 + I_{K3}^2 + \dots + I_{K8}^2}$$

- Ta rezultat je glede na podane podatke manj točen kot izračun iz podatka o THD_{DIN} (*Total Harmonic Distorsion*) in največje osnovne komponente $I_1 = 0,75 \text{ A}$. Izračun efektivne vrednosti toka iz THD_{DIN} :

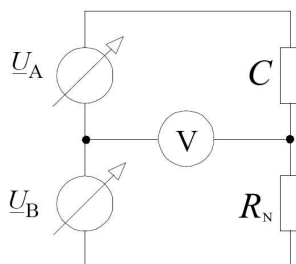
$$THD_{DIN} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I} \Rightarrow I = \frac{I_1}{\sqrt{1 - THD_{DIN}^2}}$$

$$I = \frac{0,75 \text{ A}}{\sqrt{1 - 0,32^2}} = 0,792 \text{ A}$$

- THD_{IEC} faktor po IEC pa se izračuna kot

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^n I_k^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{(0,792 \text{ A})^2 - (0,75 \text{ A})^2}}{0,75 \text{ A}} = 0,34$$

4. S pomočjo aktivnega kapacitivnega mostiča merimo kapacitivnost $C = 680 \text{ nF}$ pri frekvenci 500 Hz . Vrednost referenčnega upora je $1 \text{ k}\Omega$. Sinusna generatorja imata območje od 0 V do 20 V z ločljivostjo $\Delta U = 0,01 \text{ V}$. Faktor izgub kondenzatorja je zanemarljiv. Kako moramo nastaviti napetosti U_A in U_B na sinusnem generatorju, da bo ločljivost merjenja kapacitivnosti najboljša in kolišna je v tem primeru ta ločljivost? Vpliv ločljivosti nastavljanja faznega kota in ločljivosti ničelnega indikatorja zanemarite.



$$C = -\frac{U_B}{R_N U_A} \frac{1}{\omega \sin \varphi}$$

Rešitev:

- Če je faktor izgub zanemarljiv, potem je fazni zamik na kondenzatorju približno -90° . Da bo mostič v ravnovesju, mora biti razmerje napetosti enako:

$$\frac{U_A}{U_B} = -\frac{1}{C \cdot R_N \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sin(\varphi)} = -\frac{1}{680 \text{ nF} \cdot 1000 \Omega \cdot 2 \cdot \pi \cdot 500 \text{ Hz} \cdot \sin(-90^\circ)} = 0,4681$$

- Relativna ločljivost bo največja, ko izberemo čimvišje možne napetosti, kar prinese:

$$U_B = 20 \text{ V in}$$

$$U_A = 0,4681 \cdot 20 \text{ V} = 9,36 \text{ V}$$

- Ločljivost kapacitivnosti pri nastavljanju U_B je enaka :

$$\Delta C_B = \frac{\partial C}{\partial U_B} \Delta U = \frac{\partial C}{\partial U_B} \Delta U = -\frac{1}{R_N U_A \omega \sin(\varphi)} \Delta U =$$

$$\Delta C_B = -\frac{1}{1000 \Omega \cdot 9,36 \text{ V} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 500 \text{ Hz} \cdot \sin(-90^\circ)} \cdot 0,01 \text{ V} = 0,34 \text{ nF}$$

- Ločljivost kapacitivnosti pri nastavljanju U_A je slabša :

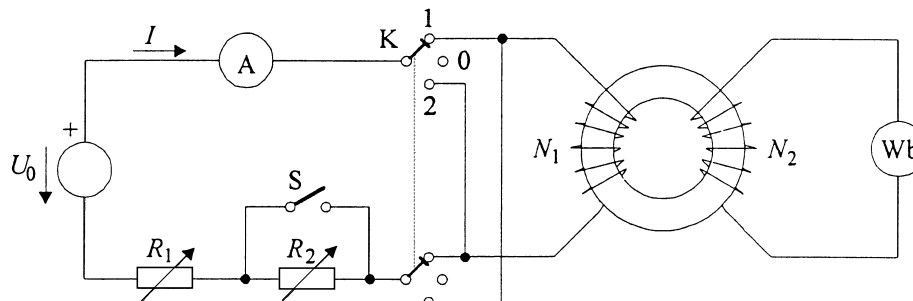
$$\Delta C_A = \left| \frac{\partial C}{\partial U_A} \right| \Delta U = \left| \frac{U_B}{R_N \cdot U_A^2 \cdot \omega \cdot \sin(\varphi)} \right| \Delta U =$$

$$\Delta C_A = \left| \frac{20 \text{ V}}{1000 \Omega \cdot (9,36 \text{ V})^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 500 \text{ Hz} \cdot \sin(-90^\circ)} \right| \cdot 0,01 \text{ V} = 0,727 \text{ nF}$$

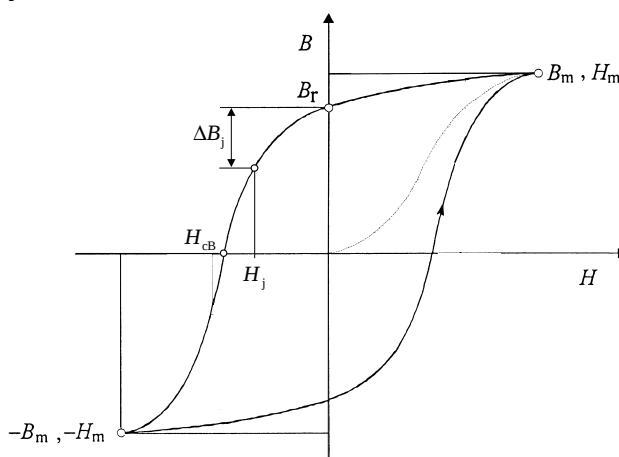
5. Skicirajte vezje za snemanje statične histerezne zanke in razložite postopek merjenja razmagnetilne krivulje!

Rešitev:

- Vezje za snemanje statične histerezne zanke:



- Potek snemanja statične histerezne zanke:



- Najprej nastavimo B_m
 - K je v polžaju 1. Stikalo S sklenemo, s čimer povečamo tok, ki ga določa upor R_1 . Dosežemo točko (B_m, H_m) .
 - Komutiramo stikalo K. Iz dvojne vrednosti B_m zaradi komutiranja dobimo: $y_1 = \frac{2N_2 A}{c_F} B_m$

- Razmagnetilna krivulja:
 - Remanenčno indukcijo dobimo tako, da pri že nastavljeni vrednosti B_m izklopimo tok ($K \rightarrow 0$):

$$\Delta B = B_m - B_r = \frac{c_F y_r}{N_2 A} \Rightarrow B_r = B_m - \frac{c_F y_r}{N_2 A}$$

- Točke razmagnetilne krivulje med B_r in H_{cb} snemamo z razlikami ΔB_j pri vklapljanju toka v negativno smer (K v polžaj 2):

$$\Delta B_j = \frac{c_F y_j}{N_2 A} \rightarrow B_j = B_r - \Delta B_j; \quad H_j = \frac{I_j N_1}{l_{sr}}$$

- Do naslednjih točk pridemo po obhodu histereze:

$$\rightarrow (-B_m, -H_m) \rightarrow (B_m, H_m) \rightarrow B_r \rightarrow$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Koliko največ sme biti frekvenca pravilno razpoznane sinusne napetosti, ki jo vzorčimo z vzorčno-zadržnim členom in pretvarjamo z 10-bitnim analogno-digitalnim pretvornikom. Vzorčno-zadržni člen ima aperturni čas $T_{ap} = 10\text{ ns}$ in akvizicijski čas $T_{ac} = 300\text{ ns}$. ADP s postopnim približevanjem potrebuje za en korak pretvorbe $T_k = 100\text{ ns}$. Skicirajte razmere!

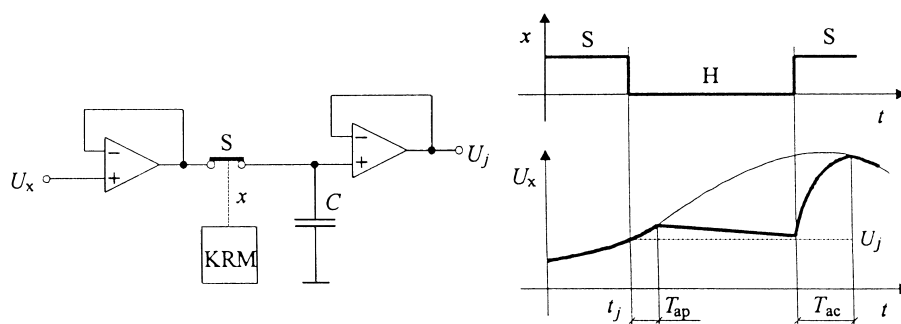
Rešitev:

- Sam analgno-digitalni pretvornik (ADP) s postopnim približevanjem potrebuje $k = 10$ korakov za eno pretvorbo:

$$T_{ADP} = k \cdot T_k = 10 \cdot 100\text{ ns} = 1\mu\text{s}$$

- Minimalni čas, ki ga porabi vzorčno-zadržni člen, je enak vsoti aperturnega časa in akvizicijskega časa:

$$T_{VZ} = T_{ap} + T_{ac} = 10\text{ ns} + 300\text{ ns} = 310\text{ ns}$$



- Skupni minimalni čas za pretvorbo enega vzorca je enak:

$$T_{s,min.} = T_{ADP} + T_{VZ} = 1\mu\text{s} + 310\text{ ns} = 1,31\mu\text{s}$$

- Za pravilno razpoznano sinusno napetost mora biti frekvenca signala vsaj dvakrat manjša od frekvence vzorčenja $f_s = 1/T_s$:

$$f < \frac{1}{2T_{s,min.}} = \frac{1}{2 \cdot 1,31\mu\text{s}} = 381,7\text{ kHz}$$

2. Za koliko se relativno spremeni vrednost uporovne dekade R_A na preciznem mostiču, ki ga uporabimo kot Wheatstonov in nato kot Kelvinov (Thomsonov) mostič - $R_B = 1000\Omega$, $R_N = 10,000(1 \pm 10^{-4})m\Omega$ - za merjenje neznane upornosti $R_x \approx 0,02\Omega$? Upornost uporabljenih vezi je $R_{vez} = 1m\Omega$. Uporabite in skicirajte vezji z najmanjšim pogreškom vezave uporov! Pri obeh mostičih morajo biti uporabljene vse dekade upora $R_A = 10 \times (1000_100_10_1_0,1)\Omega$.

Rešitev:

- Če hočemo izkoristiti vse dekade upora R_A , mora biti vrednost v mejah $11111\Omega \geq R_A \geq 1000\Omega$. To dosežemo s priključitvijo, kjer imamo razmerje uporov:

$$\frac{R_x}{R_N} = \frac{20m\Omega}{10m\Omega} = 2 = \frac{R_A}{R_B} \rightarrow \frac{R_A^\circ}{R_B} = \frac{2000\Omega}{1000\Omega}$$

- Wheatstonov** mostič ne odpravlja vpliva upornosti vezi R_{vez} med R_x in R_N , ki predstavlja bistveni sistematični pogrešek pri merjenju majhnih upornosti. Ker jo moramo priključiti k enemu uporov, je bolje, da jo priključimo k R_x , ki je v našem primeru večji kot R_N in je pogrešek priključitve manjši. Ničelni indikator tako priključimo na napetostno sponko R_N (vezava B) in v ravnovesju dobimo:

$$\frac{R_x + R_{vez}}{R_N} = \frac{21m\Omega}{10m\Omega} = 2,1 = \frac{R_A^*}{R_B} = \frac{2100\Omega}{1000\Omega} \text{ in pogrešek } \Delta R_A^* = R_A^* - R_A^\circ = 100\Omega$$

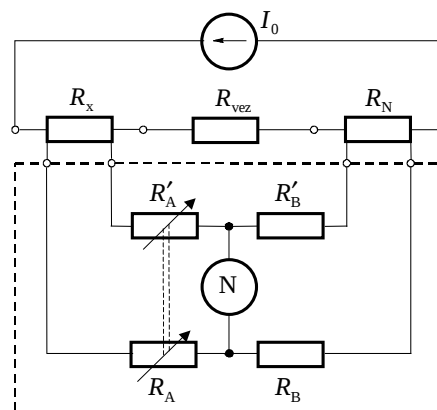
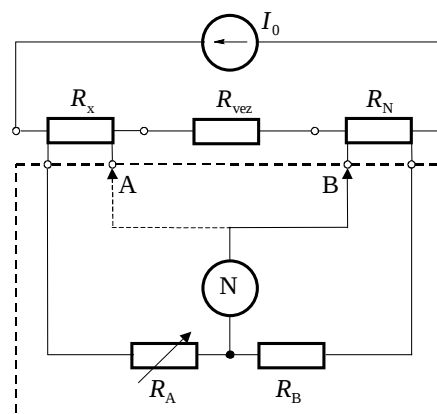
- pri vezavi A bi dobili: $\frac{R_x}{R_N + R_{vez}} = \frac{20m\Omega}{11m\Omega} = 1,81818 = \frac{R_A^{**}}{R_B} = \frac{1818,2\Omega}{1000\Omega}$
in pogrešek $\Delta R_A^{**} = R_A^{**} - R_A^\circ = -181,8\Omega$

- Kelvinov** (Thomsonov) mostič, ki je namenjen za merjenje majhnih upornosti, močno zmanjša vpliv upornosti vezi. Ničelni indikator se s pomočjo dodatnih dveh uporov R'_A in R'_B navidezno priključi med R_x in R_N tako, da se R_{vez} razdeli v enakem razmerju, kot je razmerje R_x/R_N .

$$\frac{R_x}{R_N} = 2 = \frac{R_A}{R_B} \rightarrow \frac{R_A^\circ}{R_B} = \frac{2000\Omega}{1000\Omega}$$

- Pri prehodu iz vezave Wheatstonovega mostič v vezavo Kelvinovega mostič se vrednost upornosti R_A zmanjša in relativno spremeni za:

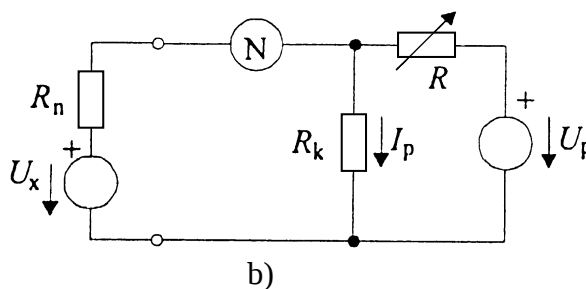
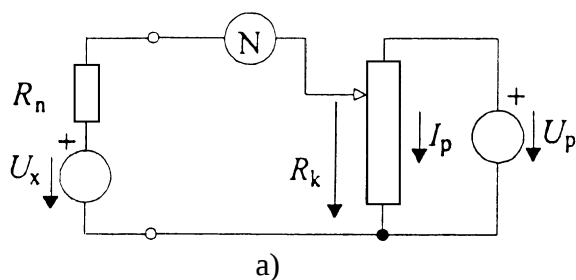
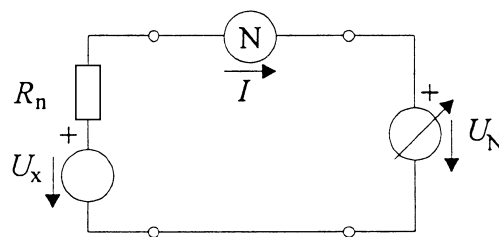
$$\delta = \frac{R_A^\circ}{R_A^*} - 1 = \frac{2000\Omega}{2100\Omega} - 1 = -0,048 \rightarrow -4,8\%$$



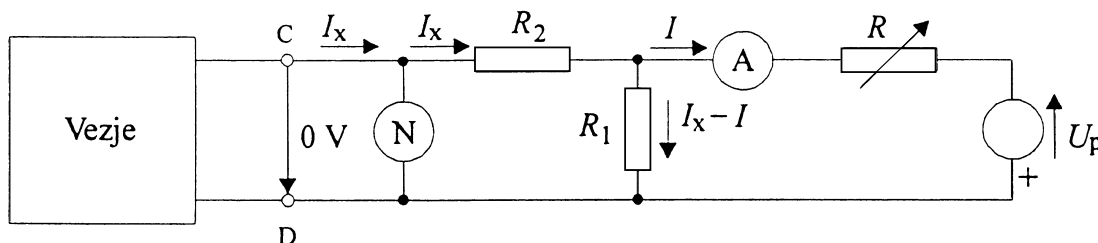
3. Opišite delovanje merilnih vezij pri kompenzacijskem merjenju napetosti in toka! Kakšne so prednosti in slabosti?

Rešitev:

- Neznano napetost U_x izmerimo tako, da jo primerjamo z znano U_N , ki jo spreminjamo (kompenziramo neznano napetost).
- Pri izravnavi čez ničelni indikator ne teče noben tok $I \rightarrow 0$: $U_x = U_N$
 - merjeni vir ni obremenjen!
 - $u(U_x) \cong u(U_N)$!
- Spremenljivo napetost $U_N = U_k$ realiziramo kot padec napetosti, ki ga povzroči tok I_p na znanem uporu R_k . Ločimo dva principa realizacije napetosti U_k :
 - **Poggendorffov princip** kompenzacije (a) - tok je stalen in upornost spremenljiva.
 - **Lindeck-Rothejev princip** kompenzacije (b) - upor je stalen in tok spremenljiv



- Spodnje merilno vezje kaže kompenzacijski način merjenja toka s sesalnim vezjem, ki nam ustvari navidezno $R_A \rightarrow 0$.
 - To dosežemo z nastavljanjem upora R in s tem toka I , tako da nam kaže ničelni indikator N odklon nič.
 - Tedaj izračunamo merjeni 'sesani' tok: $I_x = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$



- Kompenzacijsko merjenje temelji na Lindeck-Rothejevem principu, kjer se spreminja tok I in je upor (v tem primeru R_1) stalen.
- Velika prednost je, da med točkama C, D ni padca napetosti! $\Rightarrow R_A = 0 \Omega$
- Slabost je v povečani porabi instrumentov in merilnega pribora.

4. Določite deformirajočo moč (D) na bremenu, če sta napetost in tok:

$$u/V = 100 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/2) + 10 \cdot \sin(10\pi ft + \pi/6)$$

$$i/A = 5 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/3) + 1 \cdot \sin(10\pi ft + \pi/4)$$

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

Rešitev:

- Za določitev deformirajoče moči moramo poznati delovno P , navidezno S in 'čisto' jalovo moč Q :

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

- Delovna moč je definirana kot vsota prispevkov $P_i = U_i I_i \cos \varphi_i$ komponent napetosti in toka iste frekvence z upoštevanjem razlike kotov med napetostjo in tokom za ustrezno komponento.

$$P = \sum_i U_i I_i \cos \varphi_i; \quad \varphi_i = \varphi_{U,i} - \varphi_{I,i}$$

- V našem primeru imamo prispevek osnovne in pete harmonske komponente:

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1; \quad \varphi_1 = \varphi_{U,1} - \varphi_{I,1} = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$$

$$P_5 = U_5 I_5 \cos \varphi_5; \quad \varphi_5 = \varphi_{U,5} - \varphi_{I,5} = \pi/6 - \pi/4 = -\pi/12$$

- Efektivne vrednosti komponent napetosti in toka so:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 70,71 \text{ V}, \quad U_5 = \frac{\hat{u}_5}{\sqrt{2}} = \frac{10 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 7,071 \text{ V};$$

$$I_1 = \frac{\hat{i}_1}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 3,536 \text{ A}, \quad I_5 = \frac{\hat{i}_5}{\sqrt{2}} = \frac{1 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 0,707 \text{ A}$$

- Delovna moč je tako:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 = 216,51 \text{ W} + 4,83 \text{ W} = 221,34 \text{ W}$$

- Navidezna moč je enaka produktu efektivne vrednosti napetosti in toka: $S = U \cdot I$

- Efektivno vrednost napetosti dobimo z geometrijskim seštevanjem efektivnih vrednosti komponent: $U = \sqrt{U_1^2 + U_5^2} = 71,064 \text{ V}$

- Enako velja tudi za efektivno vrednost toka: $I = \sqrt{I_1^2 + I_5^2} = 3,606 \text{ A}$

- Navidezna moč je tako: $S = 256,22 \text{ VA}$

- Čisto jalovo moč dobimo podobno kot delovno moč, kjer kosinusno funkcijo zamenja sinusna:

$$Q = \sum_i U_i I_i \sin \varphi_i = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_5 I_5 \sin \varphi_5$$

$$Q = 125,00 \text{ VAr} - 1,294 \text{ VAr} = 123,71 \text{ VAr}$$

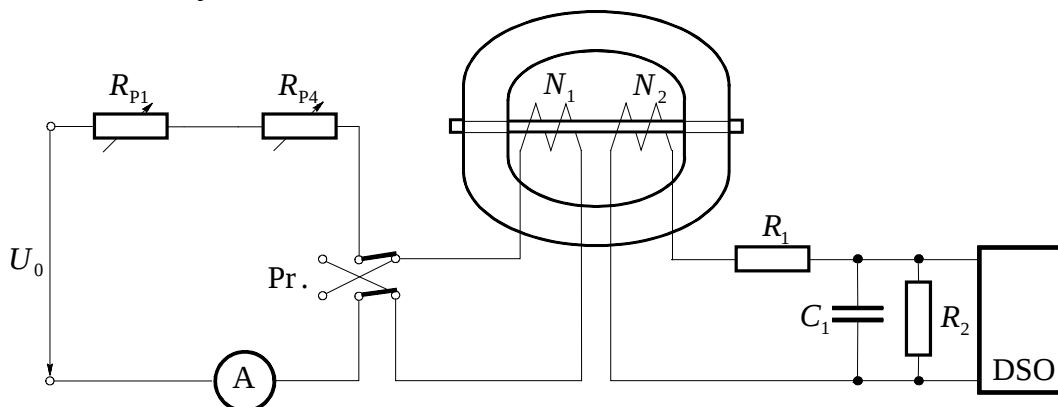
- Deformirajoča moč znaša v našem primeru:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{(256,22 \text{ VA})^2 - (221,34 \text{ W})^2 - (123,71 \text{ VAr})^2} = 36,78 \text{ VAr}$$

5. Opišite postopek izvedbe vaje, kjer ste ugotavljali statično magnetilno krivuljo feromagnetne palice! Narišite merilno vezje in podajte ključni enačbi za izračun B in H !

Rešitev:

- Merilno vezje:



- Postopek ugotavljanja statične magnetilne krivulje feromagnetne palice:
 - Povežemo elemente vezja po zgornji sliki.
 - Nastavimo maksimalni tok in s preklapljanjem stikala za zamenjavo polaritete in hkratnim zmanjševanjem toka proti nič razmagnetimo feromagnetno palico.
 - Nato nastavljamemo magnetilni tok in za vsako nastavitvev izmerimo inducirano napetost na sekundarju navitja, ki jo opazujemo s pomočjo osciloskopa.
 - Opazujemo pozitivni in negativni impulz inducirane napetosti. Iz povprečne vrednosti obeh napetosti izračunamo gostoto magnetnega pretoka za posamezno nastavljeno točko.
 - Jakost magnetnega polja pa izračunamo iz magnetilnega toka in parametrov navitja.
 - Iz podatkov za B in H narišemo statično magnetilno krivuljo.
- Potrebni enačbi:

$$H_v = \frac{I N_1}{l_v} \qquad B = \frac{T_M \bar{U}}{2 N_2 A a}$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Za kolikokrat se zanesljivo zmanjša temenska vrednost motnje omrežne frekvence pri voltmetru z integrirajočim AD pretvornikom, ki ima čas integracije nastavljen na eno periodo nazivne vrednosti omrežne frekvence $f_n = 50 \text{ Hz}$ in drugič na 100 period? Predpostavljamo, da lahko omrežna frekvenca odstopa od nazivne za največ 0,5 odstotka.

$$\overline{U} = \hat{u} \frac{\sin \pi T_i / T}{\pi T_i / T}$$

Rešitev:

- Za navajanje slabljenja motnje uporabljamo razmerje največje tekoče povprečne vrednosti motnje $\overline{U}_{om}$ proti temenski vrednosti $\hat{u}_{om}$:

$$\frac{\overline{U}_{om}}{\hat{u}_{om}} = \frac{|\sin \pi f T_i|}{\pi f T_i}$$

- Osnovni čas integracije pri voltmetrih z integrirajočim AD pretvornikom je enak periodi nazivne vrednosti omrežne frekvence $f_n = 50 \text{ Hz}$:

$$T_{i,1} = T_{i,0} = \frac{1}{f_n} = 20 \text{ ms}$$

- Če omrežna frekvenca odstopa od nazivne nimamo popolne potlačitve. Slabšo potlačitev motnje imamo pri odstopanju frekvence navzdol $f_n = 50(1 - 0,005) \text{ Hz} = 49,75 \text{ Hz}$:

$$\frac{\overline{U}_{om}}{\hat{u}_{om}} = \frac{|\sin(\pi \cdot 49,75 \text{ Hz} \cdot 20 \text{ ms})|}{\pi \cdot 49,75 \text{ Hz} \cdot 20 \text{ ms}} = 5,025 \cdot 10^{-3}$$

- Temenska vrednost je zanesljivo zmanjšana za faktor:

$$\hat{u}_{om} / \overline{U}_{om} = 199$$

- Pri podaljšanem času integracije $T_{i,2} = T_{i,0} = 100 \cdot 20 \text{ ms} = 2 \text{ s}$ se zmanjša tudi vrednost motnje:

$$\frac{\overline{U}_{om}}{\hat{u}_{om}} = \frac{|\sin(\pi \cdot 49,75 \text{ Hz} \cdot 2 \text{ s})|}{\pi \cdot 49,75 \text{ Hz} \cdot 2 \text{ s}} = 3,199 \cdot 10^{-3}$$

- V tem primeru se temenska vrednost je zanesljivo zmanjšana za faktor:

$$\hat{u}_{om} / \overline{U}_{om} = 312,6$$

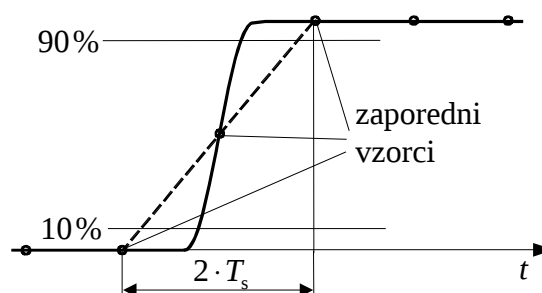
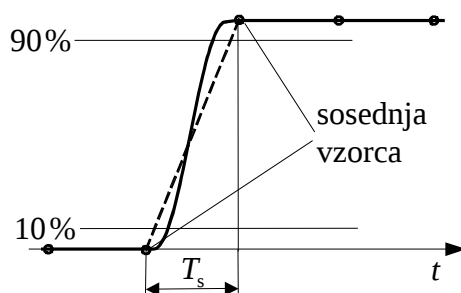
2. Z digitalnim spominskim osciloskopom merimo dvižni čas pravokotnega signala frekvence $f = 1\text{ kHz}$. Če uporabljamo enkratno proženje, v najbolj ugodnem primeru osciloskop izmeri najmanjši dvižni čas $T_1 = 77\text{ ns}$. Kolikšen dvižni čas izmeri, ko uporabimo ponavljajoče proženje in upoštevamo tudi analogni del osciloskopa? Vemo, da je dvižni čas pri ponavljajočem proženju sedemkrat manjši od najbolj neugodne (največje) vrednosti dvižnega časa pri enkratnem proženju. Pasovna širina osciloskopovega analognega kanala je $B = 80\text{ MHz}$. Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Pri enkratnem proženju je dvižni čas pri najbolj neugodni (največji) vrednosti dvižnega časa dvakrat večji od najbolj ugodnega primera (najmanjša vrednost dvižnega časa):

$$T_{\text{enkratno}(\min)} = T_1 = 77\text{ ns}$$

$$T_{\text{enkratno}(\max)} = 2 \cdot T_{\text{enkratno}(\min)} = 2 \cdot 77\text{ ns} = 154\text{ ns}$$



- Dvižni čas pri ponavljajočem proženju je sedemkrat manjši od najbolj neugodne (največje) vrednosti dvižnega časa pri enkratnem proženju:

$$T_{\text{ponavljajoče}} = \frac{T_{\text{enkratno}(\max)}}{7} = 154\text{ ns} / 7 = 22\text{ ns}$$

- Dvižni čas pri ponavljajočem proženju in upoštevanju analognega dela osciloskopa, ki je opisan s pasovno širino osciloskopovega analognega dela kanala ($B = 80\text{ MHz}$), je enak:

$$T_r = \sqrt{T_{\text{ponavljajoče}}^2 - \left(\frac{0,35}{B}\right)^2} = 21,6\text{ ns}$$

3. S Kelvinovim mostičem želimo izmeriti neznano upornost. Da bo občutljivost čimvišja, želimo uporabiti čimvečji merilni tok. Merilni tok na referenčnem uporu troši energijo in ga nekoliko segreje, posledično se mu spremeni upornost. Koliko je največji dovoljeni merilni tok, da pogrešek referenčnega upora zaradi lastnega segrevanja ne preseže ene tretjine njegove meje pogreška? Vrednost referenčnega upora je $100,017 \text{ m}\Omega$, meja pogreška referenčnega upora je $0,002\%$, temperaturni koeficient upornosti $k_t = \Delta R / (R_N \cdot \Delta t)$ je $0,001\% / ^\circ\text{C}$, toplotna upornost med referenčnim uporom in okolico je $R_t = 3,1 ^\circ\text{C/W}$.

$$\Delta t = P \cdot R_t = R_N I_m^2 \cdot R_t$$

Rešitev:

- Največji dovoljeni pogrešek zaradi lastnega segrevanja znaša:

$$E_{\max} = \frac{1}{3} m_{R_N} R_N$$

- Sprememba upornosti zaradi lastnega segrevanja je:

$$\Delta R = R_N \cdot k_t \cdot \Delta t$$

- Če upoštevamo, da je sprememba upornosti enaka največjemu dovoljenemu pogrešku, potem je sprememba temperature zaradi lastnega segrevanja:

$$\Delta t = \frac{\Delta R}{R_N \cdot k_t} = \frac{E_{\max}}{R_N \cdot k_t} = \frac{m_{R_N} R_N / 3}{R_N \cdot k_t} = \frac{m_{R_N}}{3 \cdot k_t}$$

- Sprememba temperature zaradi lastnega segrevanja je:

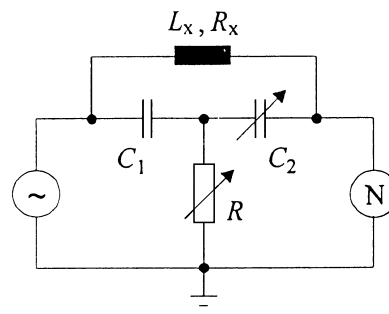
$$\Delta t = P \cdot R_t = R_N I_m^2 \cdot R_t$$

- Merilni tok je tako:

$$I_m = \sqrt{\frac{\Delta t}{R_N \cdot R_t}} = \sqrt{\frac{\frac{m_{R_N}}{3 \cdot k_t}}{R_N \cdot R_t}} = \sqrt{\frac{0,002\%}{3 \cdot 0,001\% / ^\circ\text{C} \cdot 0,100017 \Omega \cdot 3,1 ^\circ\text{C/W}}} = 1,47 \text{ A}$$

4. V katerem območju lahko merimo induktivnost tuljave s premoščenim T-vezjem (ravnovesje: $\underline{Y}_A + \underline{Y}_x = 0$), če je kondenzator $C_1 = 100 \text{ nF}$ in spreminjamo kapacitivno dekado $10 \text{ nF} \leq C_2 \leq 200 \text{ nF}$ in frekvenco napetostnega vira $10 \text{ kHz} \leq f \leq 100 \text{ kHz}$?

$$\underline{Y}_A = \frac{j\omega C_1 \cdot j\omega C_2}{j\omega C_1 + j\omega C_2 + 1/R}$$



Rešitev:

- Ničelni indikator bo ostal brez odklona, ko bo $\underline{Y}_A + \underline{Y}_x = 0$:

$$\frac{j\omega C_1 \cdot j\omega C_2}{j\omega C_1 + j\omega C_2 + 1/R} + \frac{1}{R_x + j\omega L_x} = 0$$

- Ko izenačimo imaginarni del enačbe z nič, dobimo $\omega L_x = \frac{C_1 + C_2}{\omega C_1 C_2}$ in od tod:

$$L_x = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

- V našem primeru spreminjamo frekvenco in C_2 .
 - Spodnjo mejo dosežemo z večjimi vrednostmi $f = 100 \text{ kHz}$ in $C_2 = 200 \text{ nF}$:

$$L_x = \frac{1}{(2\pi \cdot 100\,000)^2} \left(\frac{1}{100 \text{ nF}} + \frac{1}{200 \text{ nF}} \right) = 38,0 \mu\text{H},$$

- zgornjo pa z manjšimi $f = 10 \text{ kHz}$ $C_2 = 10 \text{ nF}$:

$$L_x = \frac{1}{(2\pi \cdot 10\,000)^2} \left(\frac{1}{100 \text{ nF}} + \frac{1}{10 \text{ nF}} \right) = 27,9 \text{ mH}$$

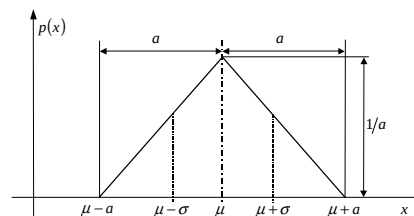
- Pri danih pogojih lahko induktivnost tuljave merimo v območju:

$$38,0 \mu\text{H} \leq L_x \leq 27,9 \text{ mH}$$

5. Radi bi merili frekvenco $f_x = 5 \text{ kHz}$ z univerzalnim elektronskim števcem tako, da bi bila standardna negotovost zaradi kvantizacijskega pogreška pod $0,001\%$. Kolikšen naj bo čas merjenja $T_M = ?$, ki je lahko samo okrogle vrednosti ($T_M/s = 0,1; 1; 10$) in kaj kaže števec (številsko vrednost in enota)? Koliko impulzov Z prešteje števec v T_M ?

Rešitev:

- Pri merjenju frekvence s štetjem impulzov imamo trikotno porazdelitev kvantizacijskega pogreška. Mejna vrednost kvantizacijskega pogreška $M_f = a$ je enaka inverzni vrednosti



časa merjenja in je za $\sqrt{6}$ večja od standardne negotovosti pri trikotni porazdelitvi.

$$u_f = \frac{M_f}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot T_M}$$

- in v relativni obliki:

$$w_f = \frac{M_f}{\sqrt{6} \cdot f_x} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot T_M \cdot f_x} = 10^{-5}$$

- od koder določimo potreben čas merjenja:

$$T_M = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot 10^{-5} \cdot 5 \text{ kHz}} = 8,165 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$$

- Mejna vrednost kvantizacijskega pogreška oziroma ločljivost je enaka:

$$(\Delta f)_q = \frac{1}{T_M} = 0,1 \text{ Hz}$$

- in števec kaže:

$$f_x = 5000,0 \text{ Hz}$$

- Števec prešteje povprečno $\bar{Z} = T_M \cdot f_x = 50\,000$ impulzov.

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Ocenite frekvenco motilnega sinusnega izmeničnega signala $\hat{u} = 64,4 \text{ mV}$, ki je dodan enosmernemu signalu $U_0 = 100 \text{ mV}$, če smo z integracijskim voltmetrom dobili pri času integracije $T_i = 20 \text{ ms}$ maksimalni odklon $U_{\max} = 141 \text{ mV}$ po večkrat ponovljenih meritvah?

$$\bar{U} = \hat{u} \frac{\sin \pi T_i / T}{\pi T_i / T}$$

Rešitev:

- Enosmerni del signala integracijski voltmeter ne slabi, zato lahko zapišemo za največjo tekočo povprečno vrednost oslavljenega sinusnega izmeničnega signala:

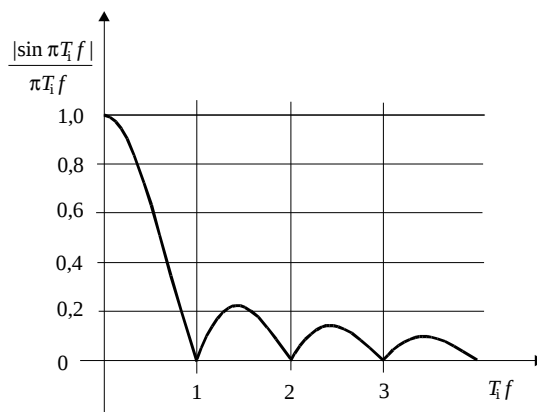
$$\bar{U} = U_{\max} - U_0 = 141 \text{ mV} - 100 \text{ mV} = 41 \text{ mV}$$

- Za navajanje slabljenja motnje uporabljamo razmerje največje tekoče povprečne vrednosti motnje $\bar{U}$ proti temenski vrednosti $\hat{u}$:

$$\frac{\bar{U}}{\hat{u}} = \frac{|\sin \pi f T_i|}{\pi f T_i}$$

- Razmerje največje tekoče povprečne vrednosti motnje proti temenski vrednosti je v našem primeru:

$$\frac{\bar{U}}{\hat{u}} = \frac{41 \text{ mV}}{64,4 \text{ mV}} = 0,636646$$



- Iz diagrama lahko ocenimo, da je to slabljenje možno le pri vrednostih $f T_i < 1$, ker je pri večjih vrednostih slabljenje večje, oziroma tekoča povprečna vrednost upada $\propto 1/f T_i$. Frekvenca je manjša od $f < 1/T_i = 50 \text{ Hz}$.
- Enačbo za iskano frekvenco lahko rešimo iteracijsko:

$$f = \frac{\sin \pi f T_i}{0,636646 \cdot \pi T_i}$$

- vendar iz diagrama dobro ocenimo frekvenco:

$$f T_i \approx 0,5 \rightarrow f \approx 25 \text{ Hz}$$

2. Kolikšen je najmanjši dvižni čas, ki ga lahko pomerimo z digitalnim osciloskopom z enkratnim proženjem s frekvenco vzorčenja 1GHz, pri čemer so meje za dvižni čas namesto [10%, 90%] nastavljene na [5%, 95%]? Vpliv analogne pasovne širine osciloskopa zanemarite.

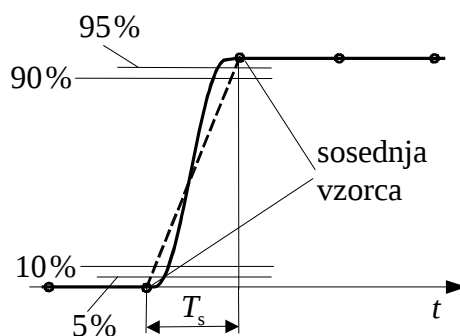
Rešitev:

- Pri enkratnem proženju pomeri digitalni osciloskop najmanjši dvižni čas z dvema zaporednima vzorcema oziroma eno periodo vzorčenja, to je

$$T_{\min,r} = 1 \cdot T_s = 1/1 \text{ GHz} = 1 \text{ ns}.$$

- Če so meje za določitev dvižnega časa nastavljene na [10%, 90%] je najmanjši dvižni čas, ki ga osciloskop zmeri, enak:

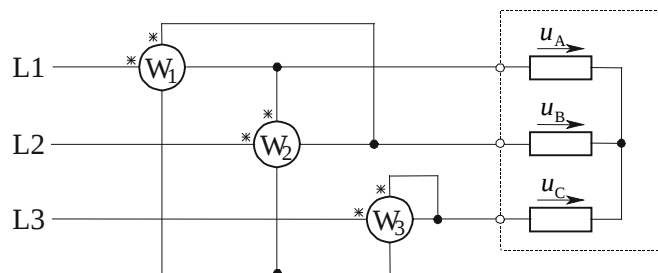
$$T_{\text{enkratno}(\min)} \Big|_{10\%}^{90\%} = 0,8 \cdot T_s = 0,8 \text{ ns}$$



- Ker je dvižni čas v našem primeru nastavljen kot čas, v katerem signal naraste od 5% do 95% stacionarnega stanja, to pomeni 90% (95% – 5%) napetosti signala in hkrati tudi 90% časa prehoda oz. dvižnega časa. Tako znaša najmanjši dvižni čas, ki ga digitalni osciloskop pomeri pri enkratnem proženju 0,9 ns.

$$T_{\text{enkratno}(\min)} \Big|_{5\%}^{95\%} = 0,9 \cdot T_s = 0,9 \text{ ns}$$

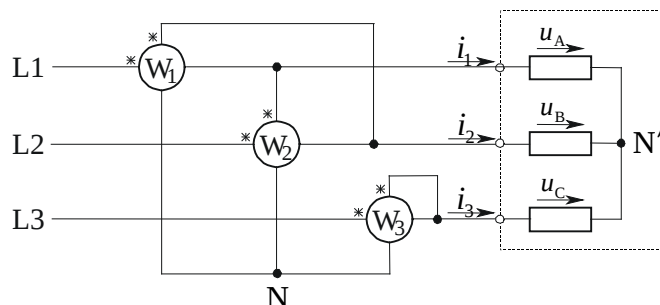
3. V trivodnem trifaznem sistemu – uravnovešen trifazni vir, nesimetrična obremenitev – merimo jalovo moč. Enaki vatmetri kažejo $P_{W1} = -200 \text{ W}$, $P_{W2} = -1500 \text{ W}$, $P_{W3} = 1500 \text{ W}$. Koliko je jalova moč bremena? Skicirajte fazorski diagram!



Rešitev:

- Jalova moč bremena je

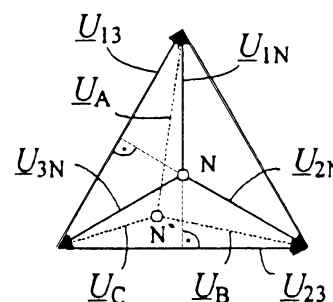
$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_A \underline{I}_1^* + \underline{U}_B \underline{I}_2^* + \underline{U}_C \underline{I}_3^* \}.$$



- Zaradi **vsote tokov nič** $\underline{I}_3^* = -(\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^*)$ (trivodni sistem), zapišemo:

$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ (\underline{U}_A - \underline{U}_C) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_B - \underline{U}_C) \underline{I}_2^* \}$$

- Ker uporabljamo enake vatmetre (enake upornosti napetostnih vej) in imamo uravnovešen napajalni trifazni vir, je skupna točka vatmetrov N v težišču enakostraničnega trikotnika. Fazne napetosti $\underline{U}_{LN}$ so za kot 90° zamaknjene proti medfaznim in za $\sqrt{3}$ manjše. Iz fazorskega diagrama razberemo, da sta potrebni medfazni napetosti $\underline{U}_{13}$ in $\underline{U}_{23}$ enaki:



$$\underline{U}_A - \underline{U}_C = \underline{U}_{13} = \sqrt{3}\underline{U}_{2N} e^{j90^\circ}$$

$$\underline{U}_B - \underline{U}_C = \underline{U}_{23} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{j90^\circ}$$

- Izhodiščno enačbo preoblikujemo v $Q = \frac{1}{2} \text{Im} \left\{ \sqrt{3} \underline{U}_{2N} I_1^* e^{j90^\circ} + \sqrt{3} \underline{U}_{1N} I_2^* e^{-j90^\circ} \right\}$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* e^{j90^\circ} \} + \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* e^{-j90^\circ} \} \right]$$

- in dobimo

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* \} - \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* \} \right]$$

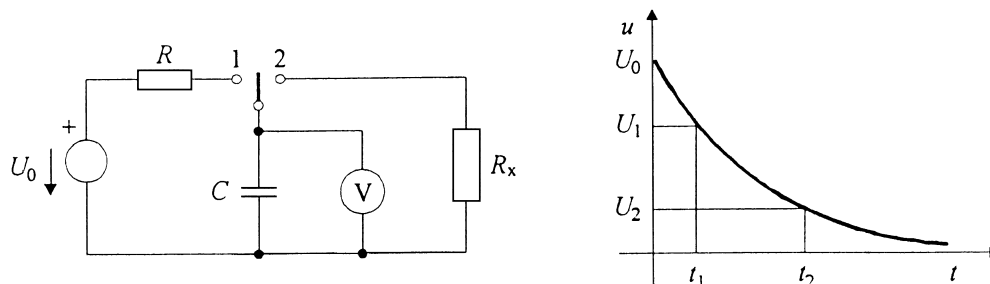
$$Q = \sqrt{3}(P_{W1} - P_{W2}) = \sqrt{3}(-200 \text{ W} - (-1500 \text{ W})) = 2251,7 \text{ VAr}$$

- Tretji vatmeter z upornostjo napetostne veje služi samo za določitev skupne točke vatmetrov N.

4. Skicirajte vezje za merjenje velikih upornosti po metodi praznjenja kondenzatorja. Koliko je upornost, če jo vključimo v vezje in napetost na kondenzatorju upade v 10s od 3V na 2V, nakar upornost odklopimo in napetost upade še za 1V v 100s? Koliko je sistematični pogrešek, če ne upoštevamo izolacijske upornosti kondenzatorja ($C = 100 \text{ nF}$) in upornosti voltmetra?

Rešitev:

- Vezje za merjenje zelo velikih upornosti po metodi praznjenja kondenzatorja



- Najprej napolnimo kondenzator na napetost U_0 (preklopnik v položaju 1) in nato priključimo merjeno upornost R_x (preklopnik v položaju 2). Kondenzator se začne prazniti pretežno preko R_x . Skupna upornost pri praznjenju v prvih 10. sekundah je vzporedna vezava treh upornosti: merjene upornosti R_x , izolacijske upornosti R_i in upornosti voltmetra R_V ($R_1 = R_x \parallel R_i \parallel R_V$). Zapišemo lahko:

- za čas t_1 : $U_1 = U_0 e^{-t_1/R_1 C} = 3 \text{ V}$;
- za čas t_2 : $U_2 = U_0 e^{-t_2/R_1 C} = 2 \text{ V}$
- in skupna upornost je v našem primeru:

$$R_1 = \frac{t_2 - t_1}{C \ln U_1 / U_2} = \frac{\Delta t_1}{C \ln 3/2} = \frac{10 \text{ s}}{100 \text{ nF} \cdot \ln 3/2} = 246,63 \text{ M}\Omega$$

- Ko odklopimo merjeno upornost R_x (preklopnik je v vmesnem položaju), se kondenzator prazni tudi sam zaradi končne izolacijske upornosti R_i in upornosti voltmetra R_V . V tem primeru, ko upade napetost z vrednosti $U_2 = 2 \text{ V}$ na vrednost $U_3 = U_2 e^{-t_3/R_2 C} = 1 \text{ V}$ v času $\Delta t_2 = 100 \text{ s}$, merimo vzporedno upornost:

$$R_2 = R_i \parallel R_V = \frac{t_3 - t_2}{C \ln U_2 / U_3} = \frac{\Delta t_2}{C \ln 2} = \frac{100 \text{ s}}{100 \text{ nF} \cdot \ln 2} = 1,443 \text{ G}\Omega$$

- Sedaj lahko izračunamo merjeno upornost R_x iz enačbe $R_1 = R_x \parallel R_2 = \frac{R_x \cdot R_2}{R_x + R_2}$:

$$R_x = \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} = \frac{1,443 \text{ G}\Omega \cdot 246,63 \text{ M}\Omega}{1,443 \text{ G}\Omega - 246,63 \text{ M}\Omega} = 297,47 \text{ M}\Omega$$

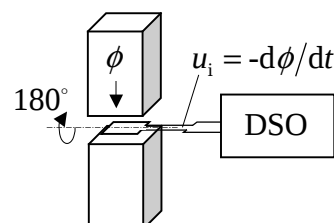
- Sistematični pogrešek je negativen:

$$E = R_1 - R_x = 246,63 \text{ M}\Omega - 297,47 \text{ M}\Omega = -50,84 \text{ M}\Omega$$

5. Magnetno indukcijo homogenega magnetnega polja B v reži trajnega magneta merimo z indukcijsko tuljavico in digitalnim spominskim osciloskopom. Tuljavico zasučemo v reži z enakomerno hitrostjo za 180° . Skicirajte potek inducirane napetosti in sliko na zaslonu DSO ter izpeljite izraz za iskano veličino!

Rešitev:

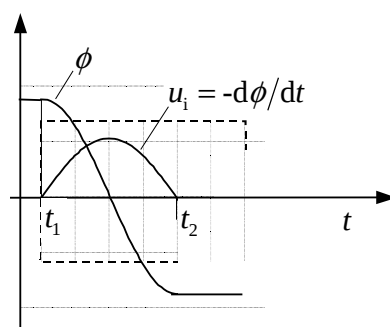
- Če enakomerno zavrtimo tuljavico v reži trajnega magneta, se magnetni pretok ϕ , ki ga ustvarja trajni magnet skozi površino tuljavice, spreminja iz pozitivne vrednosti (oz. negativne) v negativno vrednost (oz. pozitivno) po sinusni krivulji.



- Odvod polvala kosinusne oblike magnetnega pretoka in s tem inducirana napetost je polval sinusne oblike (glej skico). Upoštevajoč Faradeyev zakon $u_i = -N d\phi/dt = -NA dB/dt$ zapišemo:

$$u_i dt = -NA dB$$

$$\text{in od tod: } \int_{t_1}^{t_2} u_i dt = -NA \int_B^{-B} dB$$



- Integral na levi izrazimo s povprečno vrednostjo napetosti v času merjenja – integracije, ki jo opravimo z DSO (povprečna vrednost napetosti v oknu opazovanja):

$$\bar{U} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u_i dt = \frac{1}{T_M} \int_{t_1}^{t_2} u_i dt$$

- integral na desni pa ima dvojno vrednost magnetne indukcije, ker smo tuljavico zavrteli za 180° in prešli iz stanja B v $-B$.

$$T_M \cdot \bar{U} = NA \cdot 2B$$

- Izhodiščni položaj vrtenja mora biti 0° , da merimo samo B in ne tudi kota med vektorjema magnetnega pretoka $\vec{\phi}$ in površine tuljavice $\vec{A}$.

- Iskano magnetno indukcijo B zapišemo:

$$B = \frac{T_M \cdot \bar{U}}{2NA}$$

Rešitve nalog – MERITVE 2. del

1. Z digitalnim osciloskopom smo pri enkratnem proženju izmerili najmanjši dvižni čas periodičnega pravokotnega signala 80 ns, pri ponavljajočem proženju pa 13,5 ns. Hkrati vemo, da je dejanska (nastavljena) vrednost dvižnega časa 11,0 ns. Kolikšna je pasovna širina priključne sonde, če pasovna širina osciloskopa znaša 100 MHz?

Rešitev:

- Ker gre za periodičen in pravokoten signal, najbolje izmerimo njegov dvižni čas z uporabo ponavljajočega proženja. Sicer smo omejeni s frekvenco vzorčenja.
- Na končno izmerjeno vrednost dvižnega časa $t_{r,izm}$ (s ponavljajočim proženjem) vplivajo vsi vmesni merilni členi vse do prvotnega merjenega signala na viru: priključna sonda in vhodna analogna stopnja digitalnega osciloskopa (DO) – pasovna širina osciloskopa. V taki verigi, kjer so posamezni členi med sabo neodvisni, lahko zapišemo dvižni čas kot:

$$t_{r,izh} = t_{r,izm} = \sqrt{t_{r,vir}^2 + t_{r,sonda}^2 + t_{r,DO}^2},$$

- pri čemer dvižni čas vhodne stopnje osciloskopa dobimo preko njegove pasovne širine:

$$t_{r,DO} = \frac{0,35}{B_{DO}} = \frac{0,35}{100 \text{ MHz}} = 3,5 \text{ ns}$$

- Zdaj lahko izračunamo dvižni čas priključne sonde, ki znaša:

$$t_{r,sonda} = \sqrt{t_{r,izm}^2 - t_{r,vir}^2 + t_{r,DO}^2} = \sqrt{13,5^2 \text{ ns}^2 - 11,0^2 \text{ ns}^2 - 3,5^2 \text{ ns}^2} = 7,0 \text{ ns}$$

- Od tu pa podobno kot za vhodno stopnjo osciloskopa še pasovno širino sonde:

$$B_{sonda} = \frac{0,35}{t_{r,sonda}} = \frac{0,35}{7 \text{ ns}} = 50 \text{ MHz}$$

2. Koliko mest naj ima prikazovalnik digitalnega voltmetra ($U_D = 2\text{ V}$; $M_U = \pm(0,1\%U + 2\text{ dig.})$), ki ima integrirajoči A/D pretvornik s $T_i = 2\text{ }\mu\text{s}$, da bo pogrešek določanja trenutne vrednosti napetosti $u/\text{V} = 1 + 0,5\sin(20000t/\text{s})$ tudi v najbolj neugodnem primeru zanemarljiv?

$$\bar{U} = \hat{u} \frac{\sin \omega T_i / 2}{\omega T_i / 2}$$

Rešitev:

- Merjena napetost je sestavljena iz enosmernega dela $U_0 = 1\text{ V}$ in sinusne komponente z amplitudo $\hat{u}_{\sin} = 0,5\text{ V}$ in frekvenco:

$$2\pi f \cdot t/\text{s} = 20000 \cdot t/\text{s} \rightarrow f = \frac{20000}{2\pi} \cdot 1/\text{s} = 3183\text{ Hz}$$

- Enosmerni del signala integracijski voltmeter ne slabi, pri izmeničnem delu pa je pogrešek odvisen od položaja. V najbolj neugodnem primeru – ko se sredina integracijskega intervala ujema s temensko oz. dolinsko vrednostjo napetosti u – je njegova vrednost:

$$e = \left(\frac{\sin \pi T_i f}{\pi T_i f} - 1 \right) = -66,67 \cdot 10^{-6}$$

$$|E| = |e \cdot \hat{u}_{\sin}| = 33,33 \cdot 10^{-6}\text{ V}$$

- Sistematični pogrešek merjenja je zanemarljiv, kadar je manjši od desetine standardne negotovosti merjenja napetosti. Najbolj neugodni položaj je dolinska napetost sinusne komponente $U_{\min} = U_0 - \underset{\vee \sin}{u} = 1\text{ V} - 0,5\text{ V} = 0,5\text{ V}$.

$$|E| \leq \frac{1}{10} \frac{M_U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{10} \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} \cdot 0,5\text{ V} + 2\text{ dig.})$$

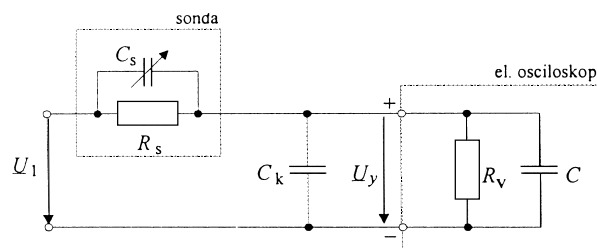
- Od tod določimo vrednost zadnjega mesta (dig.):

$$1\text{ dig.} \geq \frac{1}{2} (10\sqrt{3} \cdot 33,33 \cdot 10^{-6}\text{ V} - 0,5 \cdot 10^{-3}\text{ V}) = 38,7 \cdot 10^{-6}\text{ V}$$

$$1\text{ dig.} = 0,1\text{ mV}$$

- Vrednost zadnjega mesta prikazovalnika digitalnega voltmetra mora bi večja kot $1\text{ dig.} = 0,1\text{ mV}$, da bo pogrešek določanja trenutne vrednosti dane napetosti tudi v najbolj neugodnem primeru zanemarljiv. Prikazovalnik naj bo $4\frac{1}{2}$ mestni.

3. Koliko mora biti upornost $R_s = ?$ frekvenčno kompenzirane napetostne sonde, da bo zmanjšan nivo vhodnega signala na osciloskopu ($R_V = 1\text{M}\Omega$, $C = 50\text{pF}$) z razmerjem $100 : 1$? Za povezavo je uporabljen koaksialni kabel ($C_k/l = 40\text{pF/m}$) dolžine $l = 1,2\text{m}$. Okoli katere vrednosti moramo nastavljati kapacitivnost sonde C_s , da jo skompenziramo? Skicirajte slike na zaslonu osciloskopa pri testiranju s pravokotnim signalom!



Rešitev:

- Razmerje sonde $100 : 1$ mora veljati tudi za enosmerne signale, zato napetostni delilnik določata upora sonde R_s in vhodne upornosti R_V :

$$\frac{U_y}{U_1} = \frac{1}{100} = \frac{R_V}{R_V + R_s} \rightarrow \frac{R_V}{R_s} = \frac{1}{99}, \quad R_s = 99R_V = 99\text{M}\Omega$$

- Če želimo, da je napetostna sonda frekvenčno kompenzirana, mora biti izpolnjen pogoj:

$$R_s \cdot C_s = R_V \cdot C_V$$

- Vhodno kapacitivnost delinika C_V sestavljata kapacitivnost povezovalnega kabla C_k in kapacitivnost vhoda osciloskopa C_{osc} :

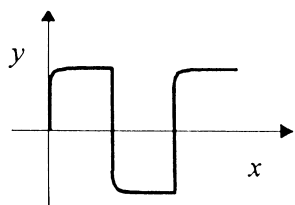
$$C_V = C_{osc} + C_k = C_{osc} + l \frac{C_k}{l} = 50\text{pF} + 1,2\text{m} \frac{40\text{pF}}{\text{m}} = 98\text{pF}$$

- Sedaj lahko izračunamo potrebno kapacitivnost frekvenčno kompenzirane sonde:

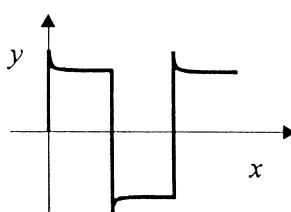
$$C_s = \frac{R_V \cdot C_V}{R_s} = \frac{1}{99} \cdot 98\text{pF} = 0,99\text{pF}$$

- Slika na zaslonu EO pri testiranju s pravokotnim signalom za različne stopnje kompenzacije sonde:

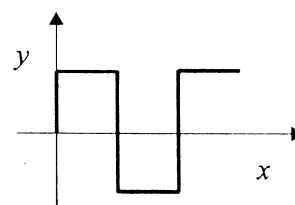
- a) podkompenzirana $R_s C_s < R_V C_V$;
- b) nadkompenzirana $R_s C_s > R_V C_V$;
- c) pravilno kompenzirana $R_s C_s = R_V C_V$.



a)

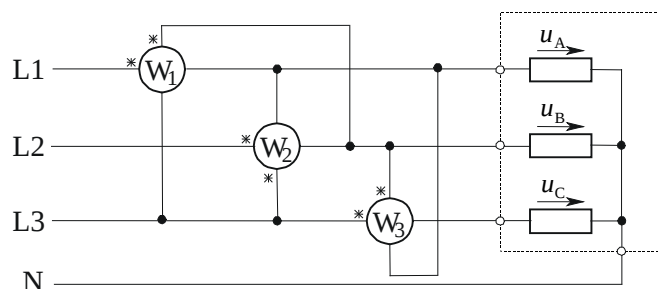


b)



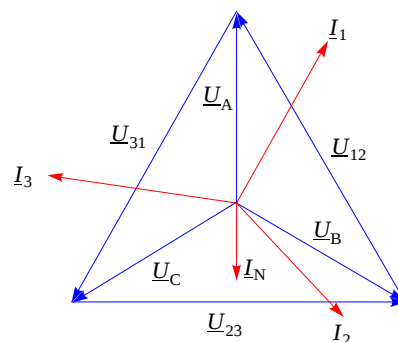
c)

4. Koliko je jalova moč bremena, ki je priključeno na uravnovešen trifazni vir, vatmetri pa kažejo: $P_{W1} = 200 \text{ W}$, $P_{W2} = 400 \text{ W}$, $P_{W3} = -500 \text{ W}$? Skicirajte fazorski diagram!



Rešitev:

- Jalova moč bremena je $Q = \frac{1}{2} \text{Im}\{\underline{U}_A \underline{I}_1^* + \underline{U}_B \underline{I}_2^* + \underline{U}_C \underline{I}_3^*\}$.
- Zaradi nevtralnega vodnika imamo tri vatmetre, skozi katere tečejo tokovi posameznih faz. Vsota tokov posameznih faz tu ni enaka nič, ampak toku v nevtralnem vodniku N.
- Če želimo meriti jalovo moč z vatmetri, moramo priključiti napetostne veje na napetosti, ki za 90° zaostajajo za napetostmi pri delovni moči. To je možno le pri uravnovešenih virih in štirivodnem sistemu! Breme ni nujno simetrično.



- Seveda so medfazne napetosti $\sqrt{3}$ -krat večje od faznih napetosti. Velja:

$$\underline{U}_A = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{23} e^{j90^\circ}, \quad \underline{U}_B = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{31} e^{j90^\circ}, \quad \underline{U}_C = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{12} e^{j90^\circ}.$$

- Izrazimo jalovo moč z medfaznimi napetostmi

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \text{Im}\{(\underline{U}_{23} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{31} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{12} \underline{I}_3^*) \cdot e^{j90^\circ}\}.$$

- in dobimo:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \text{Re}\{\underline{U}_{23} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{31} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{12} \underline{I}_3^*\} = \frac{1}{\sqrt{3}} (P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}).$$

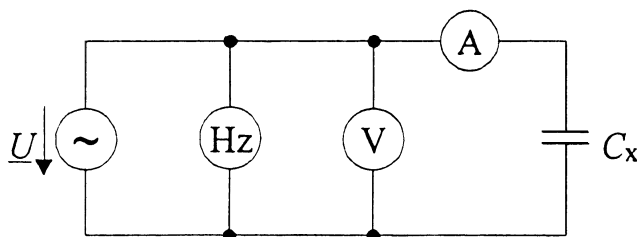
- Ker je napetost na tretjem vatmetru $\underline{U}_{21}$ in ne kot smo izpeljali $\underline{U}_{12}$, moramo spremeniti predznak:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} (200 \text{ W} + 400 \text{ W} - (-500 \text{ W})) = \frac{1100 \text{ W}}{\sqrt{3}} = 635,1 \text{ VAr}$$

5. Kolikšen je (relativni) pogrešek pri merjenju kapacitivnosti kondenzatorja po UI metodi, če spregledamo, da ima kondenzator faktor izgub 5%? Skicirajte vezje!

Rešitev:

- UI metoda merjenja kapacitivnosti se uporablja v nizkofrekvenčnem območju.



- Razmerje napetosti in toka pri serijski nadomestni vezavi je enako:

$$\frac{U}{I} = Z = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C_x)^2} = \frac{1}{\omega C_x} \sqrt{1 + d^2} \rightarrow C_x = \frac{I}{\omega U} \sqrt{1 + d^2}$$

- Če zanemarimo izgube, dobimo samo jalovo upornost. Iskana kapacitivnost je:

$$\frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C_x} \sqrt{1 + d^2} \approx \frac{1}{\omega C_{x,i}} \rightarrow C_{x,i} = \frac{I}{\omega U}$$

- padec na ampermetru ni tako pomemben (ga zanemarimo), ker imamo zamik za 90° .

- Sistematični pogrešek je:

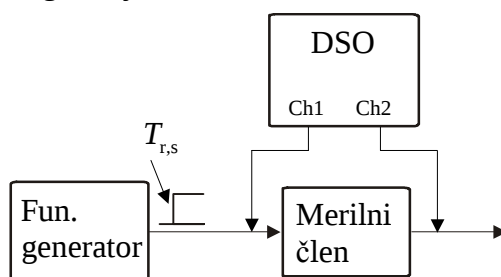
$$e = \frac{C_{x,i}}{C_x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + d^2}} - 1 = -0,00125$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko znaša dvižni čas merilnega člena T_r , če smo ga merili z dvokanalnim DS osciloskopom z $B = 100 \text{ MHz}$ in $f_s = 10 \text{ MHz}$. Na prvem kanalu smo merili dvižni čas vhodnega signala v merilni člen in dobili $T_{r,1} = 7,0 \text{ ns}$, na drugem pa dvižni čas izhodnega signala merilnega člena in dobili $T_{r,2} = 35,0 \text{ ns}$. Pri meritvi na drugem kanalu smo uporabili filter za izločanje visokofrekvenčnih motenj $B_{\text{HF}} = 20 \text{ MHz}$. Skicirajte merilno vezje in ugotovite uporabljeni način proženja!

Rešitev:

- Skica merilnega vezja:



- Ker sta izmerjena časa krajša kot vzorčni čas DSO $T_s = 1/f_s = 100 \text{ ns}$, ju je bilo možno zmeriti le s ponavljajočim proženjem na DSO.
- Skupni dvižni čas na posameznem kanalu dobimo z geometrijskim (efektivnim) seštevanjem dvižnih časov zaporedno vezanih členov (predpostavljamo, da nimajo medsebojnega vpliva):

$$T_{r,1}^2 = T_{r,s}^2 + T_{r,\text{DSO1}}^2 \quad T_{r,s} - \text{dvižni čas signala generatorja}$$

$$T_{r,2}^2 = T_{r,s}^2 + T_{r,\text{MČ}}^2 + T_{r,\text{DSO2}}^2$$

- Iz razlike časov lahko izločimo dvižni čas samega merilnega člena:

$$T_{r,2}^2 - T_{r,1}^2 = T_{r,\text{MČ}}^2 + T_{r,\text{DSO2}}^2 - T_{r,\text{DSO1}}^2 \Rightarrow T_{r,\text{MČ}} = \sqrt{T_{r,2}^2 - T_{r,1}^2 - T_{r,\text{DSO2}}^2 + T_{r,\text{DSO1}}^2}$$

- Za člen prvega reda, s katerim aproksimiramo dinamično obnašanje analognega dela vhoda DSO, velja naslednja povezava med dvižnim časom in mejno frekvenco $T_r = 0,35/f_m$. Pasovna širina merilnega člena je določena z razliko zgornje in spodnje mejne frekvence: $B = f_{m,\text{zg}} - f_{m,\text{sp}}$. Ker je $f_{m,\text{sp}} \approx 0$, je dvižni čas enak $T_r = 0,35/f_m = 0,35/B$. Na drugem kanalu nam filter za izločanje visokofrekvenčnih motenj omeji zgornjo frekvenčno mejo na $B_{\text{HF}} = f_{m,\text{DSO2}} = 20 \text{ MHz}$.

- Rezultati:

$$T_{r,\text{DSO1}} = \frac{0,35}{B} = \frac{0,35}{100 \text{ MHz}} = 3,5 \text{ ns}, \quad T_{r,\text{DSO2}} = \frac{0,35}{B_{\text{HF}}} = \frac{0,35}{20 \text{ MHz}} = 17,5 \text{ ns}$$

$$T_{r,\text{MČ}} = \sqrt{T_{r,2}^2 - T_{r,1}^2 - T_{r,\text{DSO2}}^2 + T_{r,\text{DSO1}}^2} = 29,7 \text{ ns}$$

2. Napetost na uporu U smo izmerili $n_1 = 15$ -krat in dobili $\bar{U} = 111,51 \text{ V}$ in $s(U) = 0,80 \text{ V}$, upornost R pa $n_2 = 10$ -krat in dobili $\bar{R} = 12,653 \text{ k}\Omega$ in $s(R) = 0,075 \text{ k}\Omega$. Izračunajte celotno standardno negotovost in razširjeno negotovost moči na uporu, če je stopnja zaupanja $p = 99\%$!

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/v_i}$$

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(v)$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Moč na uporu: $P = \frac{U^2}{R} = \frac{(111,51 \text{ V})^2}{12,653 \text{ k}\Omega} = 982,72979 \text{ mW}$
- Celotna standardna negotovost: $u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)}$
 - deleži neposredno merjenih veličin v celotni standardni negotovosti:

$$u_1(P) = |c_1| u(U) = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| u(U) = \frac{2U}{R} \frac{s(U)}{\sqrt{n_1}} = \frac{2 \cdot 111,51 \text{ V}}{12,653 \text{ k}\Omega} \frac{0,80 \text{ V}}{\sqrt{15}} = 3,64 \text{ mW},$$

$$u_2(P) = |c_2| u(R) = \left| \frac{\partial P}{\partial R} \right| u(R) = \frac{U^2}{R^2} \frac{s(R)}{\sqrt{n_2}} = \frac{(111,51 \text{ V})^2}{(12,653 \text{ k}\Omega)^2} \frac{0,075 \text{ k}\Omega}{\sqrt{10}} = 1,84 \text{ mW}.$$

$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)} = \sqrt{(3,64 \text{ mW})^2 + (1,84 \text{ mW})^2} = 4,078 \text{ mW}.$$

$$\rightarrow u_c(P) = 4,1 \text{ mW}$$

- Pri določanju razširjene negotovosti uporabimo zaradi manjšega števila meritev Studentovo porazdelitev. Za določitev faktorja razširitve je potrebno poznati efektivno število prostostnih stopenj posredno merjene veličine:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/v_i} = \frac{(4,078 \text{ mW})^4}{(3,64 \text{ mW})^4/14 + (1,84 \text{ mW})^4/9} = 20,02$$

$v_i = n_i - 1$ - število prostostnih stopenj neposredno merjene veličine

- Po zaokrožitvi navzdol je $v_{\text{eff}} = 20$. Za stopnjo zaupanja $p = 99\%$ odčitamo iz tabele faktor razširitve $t_p(v) = t_{99}(20) = 2,85$.
- Razširjena negotovost za moč na uporu:

$$U_{99} = k_{99} u_c(P) = t_{99}(20) u_c(P) = 2,85 \cdot 4,078 \text{ mW} = 11,62 \text{ mW}$$

$$\rightarrow U_{99} = 12 \text{ mW}$$

3. Koliko se lahko največ razlikujeta odčitka dveh nazivno enakih voltmetrov ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D + 1\text{dig} + 0,5\text{mV})$), $U_D = 2\text{V}$, ločljivost: $\Delta U_q = 0,1\text{mV}$) zaradi lastnega pogreška pri merjenju iste napetosti, da bosta še vedno ustrezala specifikaciji. Razliko odčitkov ΔU ugotovite za celotno merilno območje $0 \div U_D$ in skicirajte! Kako se razmere spremenijo, če je vhodnemu signalu dodan šumni signal $U = 0,2\text{mV}$ s temenskim faktorjem $C = 3$, frekvenci zajemanja napetosti z voltmetroma pa nista sinhroni?

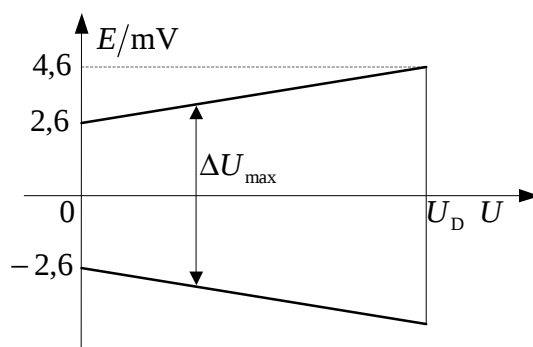
Rešitev:

- V najbolj neugodnem primeru lahko en voltmeter kaže za mejno vrednost lastnega pogreška več, kot je prava vrednost merjenega signala, in drugi za mejno vrednost lastnega pogreška manj in še vedno ustrezata specifikaciji. Skupna razlika je dvojna mejna vrednost lastnega pogreška:

$$\Delta U = 2 \cdot M = 2 \cdot (10^{-3}U + 10^{-3}U_D + 0,1\text{mV} + 0,5\text{mV}) = 2 \cdot (10^{-3}U + 2,6\text{mV})$$

$$\Delta U_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}U + 5,2\text{mV} \quad \underset{U=(0+2)\text{V}}{=} [5,2\text{mV} \div 9,2\text{mV}]$$

- Skica:

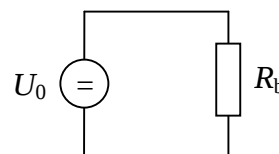


- Če je vhodnemu signalu dodan šum, ki ni lasten voltmetroma (ne sodi v lastni pogrešek instrumenta), se lahko odčitka povečata (oz. zmanjšata) v najbolj neugodnem primeru za temensko vrednost šuma:

$$\hat{u}_n = C_n \cdot U_n = 3 \cdot 0,2\text{mV} = 0,6\text{mV}$$

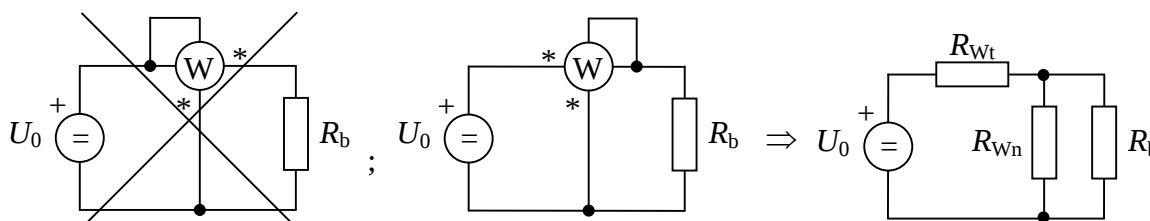
$$\Delta U_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}U + 5,2\text{mV} + 2 \cdot 0,6\text{mV} \quad \underset{U=(0+2)\text{V}}{=} [6,4\text{mV} \div 10,4\text{mV}]$$

4. Koliko je bila moč P_b na bremenu $R_b = 1000\Omega$, vezanem po sliki, pred priključitvijo vatmetra, ki nam pokaže $P_i = -66,4\text{ mW}$? Vatmeter je umerjen in ima lastni pogrešek $-0,3\text{ mW}$. Tokovna in napetostna veja vatmetra imata upornosti $R_{W,t} = 10\Omega$ oz. $R_{W,n} = 10\text{ M}\Omega$ ter skupno izhodno tokovno in izhodno napetostno sponko. Skicirajte merilno vezje s priključenim vatmetrom (označite vhodne sponke) ter določite P_b ! Vezje je napajano z idealnim napetostnim virom.



Rešitev:

- Merilno vezje
 - Ker ima vatmeter skupno izhodno tokovno in izhodno napetostno sponko in kaže negativno vrednost $P_i = -66,4\text{ mW} < 0$, je bila izmed dveh možnih priključitev uporabljena spodnja vezava (napetostna veja vatmetra je bila priključena neposredno na breme) z ustrezno nadomestno vezavo:



- Popravljeno vrednost moči dobimo z upoštevanjem lastnega pogreška vatmetra:

$$P_w = |P_i - E_w| = |-66,4\text{ mW} - (-0,3\text{ mW})| = 66,1\text{ mW}$$

- Ker imamo enosmerne razmere in je $R_0 = 0\Omega$ (idealni napetostni vir), lahko enostavno poiščemo povezavo med vrednostjo napajalne napetosti in močjo, ki jo kaže vatmeter:

$$P_w = I_w \cdot U_w, \quad I_w = \frac{U_0}{R_{W,t} + R_{W,n} \parallel R_b}, \quad U_w = I_w \cdot R_{W,n} \parallel R_b = \frac{U_0 \cdot R_{W,n} \parallel R_b}{R_{W,t} + R_{W,n} \parallel R_b}$$

$$P_w = \frac{U_0^2 \cdot R_{W,n} \parallel R_b}{(R_{W,t} + R_{W,n} \parallel R_b)^2} = U_0^2 \cdot \frac{10\text{ M}\Omega \parallel 1\text{ k}\Omega}{(10\Omega + 10\text{ M}\Omega \parallel 1\text{ k}\Omega)^2} = U_0^2 \cdot 9,80 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$$

$$\text{▪ Napajalna napetost je: } U_0 = \sqrt{\frac{66,1\text{ mW}}{9,8 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}}} = 8,213\text{ V}$$

- Pred priključitvijo vatmetra je bila moč na bremenu:

$$P_b = \frac{U_0^2}{R_b} = 67,45\text{ mW} \rightarrow P_b = 67,5\text{ mW}$$

5. Kolikšna je standardna negotovost delovne moči $w_c(P)$ pri polindirektnem merjenju, če ima porabnik fazni kot $\varphi = 30^\circ$ in smo uporabili tokovni merilni transformator ($m_K = \pm 0,1\%$, $\delta_{\max} = \pm 5'$) in vatmeter ($M_P = \pm (0,1\% P + 0,1\% P_D)$, $P = 2/3 P_D$, $P_D = 1400 \text{ W}$) pri nazivnih vrednostih in referenčnih pogojih? Za izračun negotovosti upoštevajte, da so dejanske vrednosti pogreškov majhne in izhodiščno enačbo:

$$P_i = P(1 + e_u)(1 + e_i)(1 + e_w)[1 - (\delta_u - \delta_i)\text{tg}\varphi]$$

Rešitev:

- Ker imamo polindirektno merjenje moči, se izhodiščna enačba reducira (nimamo napetostnega merilnega transformatorja):

$$P_i = P(1 + e_i)(1 + e_w)[1 + \delta_i \text{tg}\varphi]$$

- Posamezni prispevki k celotni negotovosti so:

$$u_1(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_i} \right| u(e_i) \approx P \cdot u(e_i)$$

$$u_2(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_w} \right| u(e_w) \approx P \cdot u(e_w)$$

$$u_3(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} \right| u(\delta_i) \approx P \cdot \text{tg}\varphi u(\delta_i)$$

- Celotna standardna negotovost je zato:

$$u_c(P) = P \sqrt{u^2(e_i) + u^2(e_w) + \text{tg}^2\varphi u^2(\delta_i)}$$

- Ker poznamo mejne vrednosti pogreškov, uporabimo enakomerno porazdelitev in od tod dobimo standardne negotovosti posameznih prispevkov $u = m/\sqrt{3}$:

$$u(e_i) = \frac{m_{K,i}}{\sqrt{3}} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{3}} = 5,77 \cdot 10^{-4}$$

$$u(e_w) = \frac{m_P}{\sqrt{3}} = \frac{M_P}{\sqrt{3} P} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{P_D}{P} \right) = 1,44 \cdot 10^{-3}$$

$$u(\delta_i) = \frac{\delta_{i,\max}}{\sqrt{3}} = \frac{5/60 \pi / 180}{\sqrt{3}} = 8,397 \cdot 10^{-4}$$

- Relativna standardna negotovost delovne moči je:

$$w_c(P) = \frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{u^2(e_i) + u^2(e_w) + \text{tg}^2\varphi u^2(\delta_i)} = 1,628 \cdot 10^{-3} \rightarrow w_c(P) = 1,7 \cdot 10^{-3}$$

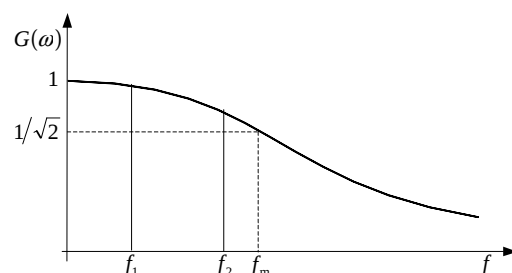
Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko je mejna frekvenca člena 1. reda, če smo z DSO izmerili pri vzbujujanju s sinusnim signalom frekvence $f_1 = 200 \text{ Hz}$ na izhodu člena temensko vrednost $U_1 = 4,95 \text{ V}$ in pri vzbujujanju s frekvenco $f_2 = 1000 \text{ Hz}$ napetost $U_2 = 4,63 \text{ V}$. Preostala napetost osciloskopa je bila $U_- = 20 \text{ mV}$. Merilni člen je bil vzbujaan s sinusnim signalom konstantne amplitude in zanemarljive enosmerne komponente!

Rešitev:

- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujujanju lahko zapišemo z uporabo mejne frekvence, kjer upoštevamo povezavo $2\pi f_m \tau = 1$:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$



- Samo izmenčni del karakteristike brez enosmerne komponente ($U_- = 0 \text{ V}$) nam pri dveh različnih frekvencah da dve izhodni napetosti pri konstantni vrednosti vhodne napetosti U_0 :

$$U_1 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}}, \quad U_2 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}}$$

- Za izločitev amplitude vzbujaalne napetosti poiščemo razmerje napetosti: $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}}$;

- Od tod dobimo mejno frekvenco iz izraza:

$$A = \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 = \frac{1 + (f_1/f_m)^2}{1 + (f_2/f_m)^2} \rightarrow f_m = \sqrt{\frac{A f_2^2 - f_1^2}{1 - A}} = 2583,2 \text{ Hz}$$

- Preostala napetost osciloskopa poveča napetosti za enosmerno komponento:

$$U_1 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} + U_-, \quad U_2 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}} + U_-$$

- Mejna frekvenca se izračuna iz popravljenega izraza za A_- :

$$A_- = \left(\frac{U_2 - U_-}{U_1 - U_-} \right)^2 = 0,874396 \rightarrow f_{m-} = \sqrt{\frac{A_- f_2^2 - f_1^2}{1 - A_-}} = 2577,4 \text{ Hz}$$

2. Katere vrednosti lahko pričakujemo na prikazovalniku voltmetra z $U_D = 100,0 \text{ V}$; $R_{V_0} = 200 \Omega/\text{V}$; $r = 0,2$, ko merimo napetost sinusnega vira? Netočnosti impedanc in frekvence zanemarite. Skicirajte vezje in fazorski diagram!

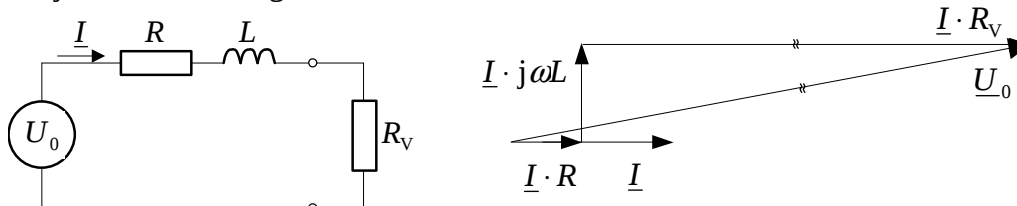
Vir: - napetost praznega teka: $U_0 = 100,0 \text{ V}$

- notranja impedanca: $R = 400 \Omega$ $L = 0,5 \text{ H}$;

- frekvenca: $f = 200 \text{ Hz}$

Rešitev:

- Vezje in fazorski diagram:



- Upornost voltmetra izračunamo iz karakteristične upornosti R_{V_0} in uporabljenega dosega voltmetra:

$$R_V = R_{V_0} \cdot U_D = 200 \Omega/\text{V} \cdot 100 \text{ V} = 20 \text{ k}\Omega$$

- Notranja impedanca vira je kompleksna z efektivno vrednostjo: $Z_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$
- Po priključitvi nam voltmeter kaže manj, kot je napetost praznega teka U_0 .

Imamo napetostni delilnik:
$$\underline{U}_V = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + \underline{Z}_0} = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + R + j\omega L}$$

- ki ga v efektivni obliki izrazimo z:

$$U_V = U_0 \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}} = 100 \text{ V} \frac{20 \text{ k}\Omega}{\sqrt{(20 \text{ k}\Omega + 400 \Omega)^2 + (2\pi \cdot 200 \text{ Hz} \cdot 0,5 \text{ H})^2}} = 97,9927 \text{ V}$$

- Ker je mejna vrednost lastnega pogreška voltmetra $M_U = \frac{r}{100} U_D = 0,2 \text{ V}$, lahko na prikazovalniku pričakujemo za to vrednost povečano oz. zmanjšano vrednost:

- Največja prikazana vrednost je :

$$U_{V,\max} = U_V + M_U = 97,9927 \text{ V} + 0,2 \text{ V} = 98,1927 \text{ V} \rightarrow U_{V,\max} = 98,2 \text{ V}$$

- Najmanjša prikazana vrednost je :

$$U_{V,\min} = U_V - M_U = 97,9927 \text{ V} - 0,2 \text{ V} = 97,7927 \text{ V} \rightarrow U_{V,\min} = 97,8 \text{ V}$$

3. S $5\frac{1}{2}$ -mestnim ohmmetrom $M_R = \pm(0,01\% R + 0,01\% R_D)$ smo merili stalno upornost pod enakimi pogoji ($n=10$). Koliko je standardna negotovost merilnega rezultata? Ocenite, kako se spremeni, če pri istih vrednostih uporabimo le $4\frac{1}{2}$ -mestni prikaz in upoštevamo dodatno negotovost zaradi zaokrožitve?

R/Ω : 99,123; 99,135; 99,146; 99,079; 99,104; 99,115; 99,098; 99,087; 99,112; 99,061

Rešitev:

- Standardna negotovost merilnega rezultata sestavljata dva prispevka: negotovost tipa A zaradi ponavljanja meritev in negotovost tipa B kot prispevek merilne metode in instrumentacije. V primeru negotovosti tipa B je prevladujoč lastni pogrešek ohmmetra.
- Negotovost tipa A dobimo z določitvijo srednje vrednosti, standardnega odklona meritev in standardne negotovosti:

$$\bar{R} = 99,106\Omega$$

$$s(R) = \sqrt{\frac{\sum_i (R_i - \bar{R})^2}{n-1}} = 0,025884\Omega$$

$$u_A = \frac{s(R)}{\sqrt{n}} = 0,008185\Omega$$

- Negotovost tipa B dobimo iz mejne vrednosti pogreška, kjer predpostavljamo pravokotno porazdelitev pogreška:

$$u_B = \frac{1}{\sqrt{3}} M_R = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-4} \cdot 99,106\Omega + 10^{-4} \cdot 200\Omega) = 0,01727\Omega$$

- $5\frac{1}{2}$ -mestni prikaz nam da $R_D = 200\Omega$ (maksimalni prikaz: 199,999).

- Skupna standardna negotovost je:

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0,01911\Omega \rightarrow u_c = 0,020\Omega$$

- $4\frac{1}{2}$ -mestni prikaz nam doda negotovost zaradi zaokrožitve na mestu 0,01 Ω :

$$u_z = \frac{0,01\Omega}{2\sqrt{3}} = 0,002887\Omega$$

- Skupna negotovost se nekoliko poveča, vendar se zaradi zaokrožitve na dve mesti to ne pozna:

$$u_{c_z} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2 + u_z^2} = 0,01933\Omega \rightarrow u_c = 0,020\Omega$$

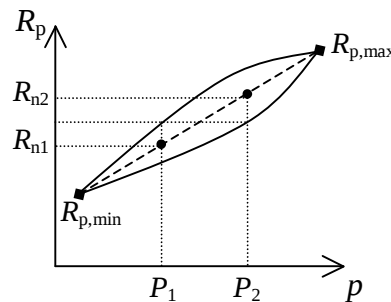
4. Z uporovnim senzorjem tlaka želimo meriti tlak v cevi. Izmerjena upornost senzorja znaša $R_p = 125 \Omega$. Določite interval možnih vrednosti tlaka v cevi za dano meritev, če je nelinearnost senzorja $n = 0,2\%$?

- Senzor tlaka: pri najnižjem tlaku 100 kPa ima senzor upornost $R_{p,\min} = 120 \Omega$, pri najvišjem tlaku 10 MPa pa $R_{p,\max} = 132 \Omega$.

Rešitev:

- Nelinearnost zapišemo kot $n = \frac{|R_p - R_n|}{R_{p,\max} - R_{p,\min}}$
- Poznamo izmerjeno vrednost R_p na dejanski karakteristiki, vendar iz nje ne moremo izračunati tlaka p , ker ne poznamo enačbe karakteristike.
- Tlak lahko izračunamo iz nazivne (linearne) karakteristike $R_n(p)$, ki pa se od dejanske razlikuje za pogrešek linearnosti E_1 oz. e_1 v relativni obliki. Ker ga ne poznamo, lahko določimo le njegove meje. Zato velja:

$$|e_1| \leq n \quad \text{oz.} \quad -n \leq e_1 \leq n$$
- Zato tudi vrednost R_n zavzame vrednosti na intervalu $[R_{n1}, R_{n2}]$ ter posledično tlak vrednosti na intervalu $[p_1, p_2]$.



- a) Izračunajmo najprej spodnjo mejo p_1 :

- Vrednost R_{n1} dobimo tako, da vzamemo $e_1 = +n$

$$R_p - R_{n1} = n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) \Rightarrow R_{n1} = R_p - n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) = 125 \Omega - 0,002 \cdot 12 \Omega = 124,976 \Omega$$

- Enačbo nazivne karakteristike (premice) zapišemo iz $R_{p,\min}$ in $R_{p,\max}$ ter $p_{\min}$ in $p_{\max}$.

$$R_n = R_{p,\min} + \frac{(R_{p,\max} - R_{p,\min})}{p_{\max} - p_{\min}}(p - p_{\min}) = R_{p,\min} + S \cdot (p - p_{\min}) \Rightarrow$$

in dobimo za p_1 :

$$\Rightarrow p_1 = p_{\min} + \frac{(R_{n1} - R_{p,\min})}{S} = 0,1 \text{ MPa} + \frac{124,976 \Omega - 120 \Omega}{12 \Omega / 9,9 \text{ MPa}} = 4,205 \text{ MPa}$$

- b) Podobno izračunamo tudi zgornjo mejo p_2 :

$$R_p - R_{n2} = n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) \Rightarrow R_{n2} = R_p + n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) = 125 \Omega + 0,002 \cdot 12 \Omega = 125,024 \Omega$$

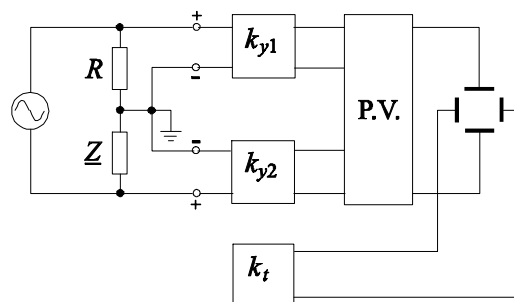
in

$$\Rightarrow p_2 = p_{\min} + \frac{(R_{n2} - R_{p,\min})}{S} = 0,1 \text{ MPa} + \frac{125,024 \Omega - 120 \Omega}{12 \Omega / 9,9 \text{ MPa}} = 4,245 \text{ MPa}$$

- Dejanski tlak glede na izmerjeno upornost leži na intervalu:

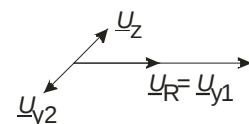
$$4,205 \text{ MPa} \leq p \leq 4,245 \text{ MPa}$$

5. Kakšna je slika na zaslonu elektronskega osciloscopa, če proži časovno bazo kanal-1, nivo proženja $N = 0$, strmina proženja $S > 0$, $k_{y1} = k_{y2}$, $f = 2 \text{ kHz}$, $k_t = 0,1 \text{ ms/d}$, $\underline{Z} = \frac{1}{2} R e^{j60^\circ}$? Narišite fazorski (kazalčni) diagram!



Rešitev:

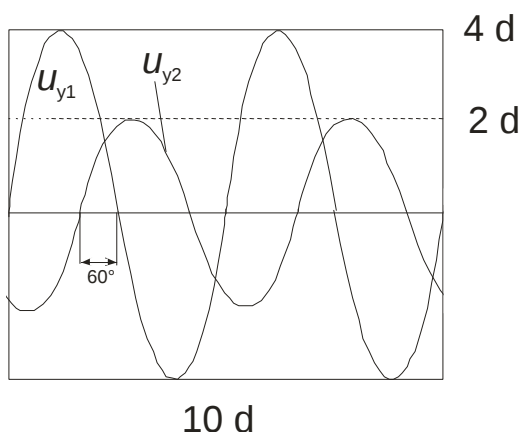
- Fazorski diagram prikazuje napetost na upor $\underline{U}_R = \underline{U}_{y1}$, ki je v fazi s tokom. Napetost na impedanci $\underline{U}_Z$ prehiteva napetost na upor za 60° . Ker sta negativni sponki na vходу osciloscopa vezani skupaj je prikazana napetost na kanalu dve $\underline{U}_{y2} = -\underline{U}_Z$ diametralna od napetosti na impedanci.



- Perioda signalov je enaka: $T = 1/f = 0,5 \text{ ms}$
 - Število delcev potrebnih za prikaz ene periode je

$$\frac{T}{k_t} = \frac{0,5 \text{ ms} \cdot \text{d}}{0,1 \text{ ms}} = 5 \text{ d},$$

- ker pa je zaslon širok 10 delcev sta na zaslonu prikazani dve periodi vsakega signala. Amplituda napetosti na impedanci je polovico manjša od napetosti na upor.



Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Z voltmetrom ($U_D = 1V$, ločljivost: $1mV$, $B = 1kHz$, člen prvega reda) merimo efektivno vrednost signala $u/V = 1 \cdot \sin \omega t + A_5 \cdot \sin 5\omega t$, $f = 500Hz$. Najmanj koliko mora biti amplituda pete harmonske komponente ($A_5 = ?$), da jo pri meritvi z voltmetrom zaznamo?

Rešitev:

- Efektivno vrednost napetosti sestavljata efektivna prispevka osnovne in pete harmonske komponente:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_5^2} = \sqrt{\left(K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(K_5 \frac{A_5}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

- Voltmeter zaradi svojega dinamičnega odziva člena 1. reda ($f_m = B = 1kHz$) različno oslabi napetosti na vhodu:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$

- $f_1 = 500Hz$: $K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} = 0,894428$;

- Efektivna vrednost osnovne komponente napetosti na voltmetru je:

$$U_1 = K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}} = 0,632456V$$

- $f_5 = 2500Hz$: $K_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_5/f_m)^2}} = 0,371391$

- Če želimo zaznati peto harmonsko komponento poleg osnovne komponente, mora biti njen efektivni prispevek večji za ločljivost voltmetra $\Delta U = 1mV$ od napetosti $U_1 = 0,632456V$:

$$U_1 + \Delta U = \sqrt{U_1^2 + U_5^2} \Rightarrow K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}} + \Delta U = \sqrt{\left(K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(K_5 \frac{A_5}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

- Amplitudo pete harmonske komponente dobimo s preureditvijo izraza:

$$\sqrt{(U_1 + \Delta U)^2 - U_1^2} = U_5 = K_5 \frac{A_5}{\sqrt{2}}$$

- $A_5 = \frac{\sqrt{2}}{K_5} \sqrt{(U_1 + \Delta U)^2 - U_1^2} = 0,1355V$

2. Napetost U , izražena v dBm_{50} (referenca 1mW , 50Ω) je dvakrat večja, kot če je izražena v dBm_{600} (referenca 1mW , 600Ω). Kolikšna je napetost U , izražena v enoti SI?

Rešitev:

- Kadar je napetost izražena v enoti decibel, je pri tem mišljeno njeno razmerje proti referenčni vrednosti U_{ref} . Izhodiščna definicija decibela je podana z desetiškim logaritmom dveh moči:

$$\frac{U}{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{P}{P_{\text{ref}}} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{R} \cdot \frac{R}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref}}} \right)$$

- $\frac{U}{\text{dBm}_{50}}$ - referenčna napetost U_{ref1} je enaka napetosti, kadar se na upor $R = 50\Omega$ sprošča moč $P = 1\text{mW}$:

$$U_{\text{ref1}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1\text{mW} \cdot 50\Omega} = 0,2236\text{V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{50}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,2236\text{V}} \right)$$

- $\frac{U}{\text{dBm}_{600}}$ - referenčna napetost U_{ref2} je enaka napetosti, kadar se na upor $R = 600\Omega$ sprošča moč $P = 1\text{mW}$:

$$U_{\text{ref2}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1\text{mW} \cdot 600\Omega} = 0,7746\text{V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{600}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,7746\text{V}} \right)$$

- Iz enačbe $\frac{U}{\text{dBm}_{50}} = 2 \frac{U}{\text{dBm}_{600}}$ izračunamo iskano napetost izraženo v SI enoti:

$$\blacksquare \quad 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref1}}} \right) = 2 \cdot 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref2}}} \right)$$

$$\blacksquare \quad \left(\frac{U}{U_{\text{ref1}}} \right) = \left(\frac{U}{U_{\text{ref2}}} \right)^2 \Rightarrow U = \frac{U_{\text{ref2}}^2}{U_{\text{ref1}}} = 2,683\text{V}$$

3. Koliko mest bi moral imeti prikazovalnik voltmetra ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$, $U_D = 2\text{ V}$), da se negotovost zaradi ločljivosti ne bi poznala v skupni negotovosti zaokroženi na dve cifri pri merjenju napetosti $U = 1,4\text{ V}$?

Rešitev:

- Skupno negotovost merjenja napetosti pretežno določa negotovost tipa B zaradi lastnega pogoška voltmetra. Mejna vrednost pogoška je:

$$M_U = \pm(1,4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}) = \pm 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- in negotovost tipa B: $u_1 = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = 1,963 \cdot 10^{-3} \text{ V} \rightarrow u_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

- Negotovost zaokrožena na dve cifri je $u_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}$. Največja vrednost, ki bi jo lahko dodali, ne da bi se poznalo pri tej zaokrožitvi, je

$$\frac{2,0099 \cdot 10^{-3} - 1,963 \cdot 10^{-3}}{\Delta U_z / V} = 0,047 \cdot 10^{-3}$$

- ker se tudi vrednost $u_1 = 2,0099 \cdot 10^{-3} \text{ V}$ zaokroži na $u_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}$
- Negotovost zaradi ločljivosti u_q ne sme v skupni negotovosti presegati prispevka zaradi zaokrožitve:

$$u_1 + \Delta U_z = \sqrt{u_1^2 + u_q^2} \Rightarrow \sqrt{(u_1 + \Delta U_z)^2 - u_1^2} = u_q$$

- $u_q = 4,32 \cdot 10^{-4} \text{ V}$

- Ker za pogošek ločljivosti privzamemo pravokotno porazdelitev, zapišemo

$$u_q = \frac{\Delta U}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \Delta U = 2\sqrt{3}u_q = 1,494 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- Ločljivost zaokrožimo navzdol na prvo dekadno vrednost
 $\Rightarrow \Delta U = 1\text{ mV}$, kar nam da $\rightarrow$ 4 mesta prikaza

4. Umerjali ste digitalni voltmeter s $6\frac{1}{2}$ mestnim prikazovalnikom. Koliko je standardna merilna negotovost tega voltmetra pri nastavljeni vrednosti, če je bila:

- razširjena merilna negotovost ($k = 2$) referenčnega inštrumenta $U_N = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ V}$,
- časovna nestabilnost merjene napetosti je razvidna iz

$$U_{N,\min} = 1,234567 \text{ V} \text{ in } U_{N,\max} = 1,246688 \text{ V},$$
- negotovost zaradi histereze znaša $u_{\text{hist}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V}$,
- negotovost zaradi lezenja znaša $u_{\text{lez}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ V}$,
- upoštevajte tudi negotovost zaradi ločljivosti umerjanega voltmetra.

Rešitev:

- Standardna negotovost referenčnega inštrumenta je za faktor razširitve manjša kot razširjena negotovost:

$$u(E_N) = \frac{U(E_N)}{k} = \frac{2,0 \cdot 10^{-6} \text{ V}}{2} = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ V},$$

- Negotovost zaradi nestabilnosti merjene napetosti aproksimiramo s pomočjo maksimalne in minimalne vrednosti izmerjenih vrednosti in za vrednotenje negotovosti najbolj neugodno porazdelitev pogreška – pravokotno obliko:

$$u(E_t) = \frac{|E_{N,\max} - E_{N,\min}|}{2\sqrt{3}} = \frac{|1,234567 \text{ V} - 1,246688 \text{ V}|}{2\sqrt{3}} = 3,499 \cdot 10^{-3} \text{ V},$$

- Negotovost zaradi histereze znaša $u_{\text{hist}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V}$ in zaradi lezenja $u_{\text{lez}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ V}$.
- Negotovost zaradi ločljivosti umerjanega voltmetra pa se izračuna iz podatka o $6\frac{1}{2}$ prikazu. Ločljivost Q namreč znaša

$$6\frac{1}{2} \Rightarrow 1,000000 \text{ V} \Rightarrow Q = 1 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

- iz nje pa dobimo negotovost zaradi ločljivosti ob upoštevanju pravokotne porazdelitve pogreška:

$$u(E_q) = \frac{Q}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot 10^{-6} \text{ V}}{2\sqrt{3}} = 2,88 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

- Skupna negotovost u_c tako znaša:

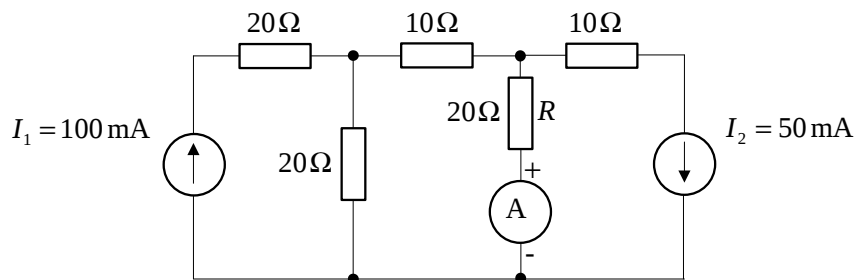
$$u_c(U_i) = \sqrt{u^2(E_N) + u^2(E_t) + u^2(E_{\text{his}}) + u^2(E_{\text{lez}}) + u^2(E_q)}$$

$$u_c(U_i) = \sqrt{(1,0 \cdot 10^{-6} \text{ V})^2 + (3,499 \cdot 10^{-3} \text{ V})^2 + (1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V})^2 + (1,2 \cdot 10^{-6} \text{ V})^2 + (2,889 \cdot 10^{-7} \text{ V})^2}$$

$$u_c(U_i) = 3,502 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- Po zaokrožitvi dobimo standardno negotovost: $u_c(U_i) = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

5. Koliko pokaže ampermeter z $U_{Ao} = 100 \text{ mV}$ in $I_D = 20 \text{ mA}$ pri merjenju toka skozi upor R ? Kolikšen je sistematični pogrešek zaradi vključitve ampermetra?



Rešitev:

- Kadar vključimo ampermeter v vezje, nam kaže manjši tok, kot je bil tok pred vključitvijo. Vzrok je v končni upornosti ampermetra, ki jo izračunamo iz karakterističnega padca napetosti U_{Ao} na izbranem merilnem območju:

$$R_A = \frac{U_{Ao}}{I_D} = \frac{100 \text{ mV}}{20 \text{ mA}} = 5 \Omega$$

- Tok skozi upor R brez ampermetra določimo po principu superpozicije. Upoštevati moramo, da ima tokovni generator neskončno veliko upornost in uporabiti enačbo za tokovni delilnik:

$$I_R = I_1 \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega} - I_2 \frac{10 \Omega + 20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega} = 0,4I_1 - 0,6I_2 = 10 \text{ mA}$$

- Ko vključimo ampermeter, se razmere spremenijo in tok se zmanjša:

$$I_A = I_1 \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega + 5 \Omega} - I_2 \frac{10 \Omega + 20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega + 5 \Omega} = 36,36 \text{ mA} - 27,27 \text{ mA} = 9,09 \text{ mA}$$

- Sistematični pogrešek zaradi vključitve ampermetra je :

$$e = \frac{I_A}{I_R} - 1 = -0,0909 \rightarrow e = -9,09\%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Kolikšen je največji informacijski pretok digitalnega voltmetra, ki ima merilni doseg $U_D = 2\text{ V}$, mejo pogreška $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D + 2\text{ dig})$, ločljivost $\Delta U_q = 1\text{ mV}$ in čas meritve $T_M = 25\text{ ms}$?

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar je pogrešek odvisen od izmerjene vrednosti v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj v območju od $x_{\min}$ do $x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)} \Rightarrow m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln\left(1 + \frac{a(x_{\max} - x_{\min})}{b}\right)$$

- Če vzamemo za enoto informacije bit, ustreza številu amplitudnih stopenj m naslednja množina informacije kot dvojiški logaritem m :

$$S = \text{lb}(m) = \log_2(m)$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas T_M , je hitrost prenosa ali **informacijski pretok** enak:

$$I = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m) = \frac{S}{T_M}$$

- Za dani voltmeter zapišemo mejni pogrešek v obliki:

$$M_U = (0,1\%U + 0,1\%U_D + 2\text{ dig}) = 10^{-3}U + 2\text{ mV} + 2\text{ mV} = 10^{-3}U + 4\text{ mV}$$

- In maksimalno število neodvisnih amplitudnih stopenj na območju $U_D = 2\text{ V}$ ($x_{\min} = 0\text{ V}$, $x_{\max} = U_D$):

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln\left(1 + \frac{10^{-3}(U_D)}{4\text{ mV}}\right) = 203,7$$

- Največja množina informacije in maksimalni informacijski pretok sta:

$$S = \text{lb}(m_{\max}) = 7,67\text{ bit} \Rightarrow I_{\max} = \frac{S}{T_M} = 306,8\text{ bit/s}$$

2. Pred časom ste merili napetost. Odčitali ste izmerjeno vrednost 14,342 V . Takrat si niste zapisali podatke o uporabljenem instrumentu. Katerega od naslednjih prikazovalnikov je imel inštrument ($1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$ ali $4\frac{1}{2}$ mestni prikaz) in kakšen je merilni rezultat?

$$1\frac{1}{2} - M_U = (4\% U_D + 2\% U_i)$$

$$2\frac{3}{4} - u(U) = 0,11 \text{ V}$$

$$4\frac{1}{2} - M_U = (5\% U_i + 3\% U_D + 3\text{dig})$$

Rešitev:

- Izmerjena vrednost je $U_i = 14,342 \text{ V}$
 - Za tako izmerjeno vrednost potrebujemo instrument, ki ima na voljo 5 mest prikaza, to je s $4\frac{1}{2}$ mestnim prikazovalnikom. Instrument ima pri tej izmerjeni vrednosti merilni doseg 20 V (največja vrednost prikaza je 19,999).
- Mejni pogrešek je: $M_U = \left(\frac{5}{100}\right) \cdot 14,342 \text{ V} + \left(\frac{3}{100}\right) \cdot 20 \text{ V} + 3 \cdot 0,001 \text{ V} = 1,3201 \text{ V}$
- in standardna negotovost: $u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = 0,7621 \text{ V}$
- Merilni rezultat je:

$$\underline{U = 14,34 \text{ V} \quad , \quad u(U) = 0,77 \text{ V} \quad , \quad n = 1}$$

3. V katerih mejah se lahko nahaja celotna standardna negotovost izhodne veličine $y = 2x_1 + x_2$, če sta vhodni veličini x_1 in x_2 medsebojno odvisni in imata enako veliki standardni negotovosti $u(x_1) = u(x_2)$?

Rešitev:

- Standardno negotovost izhodne posredno merjene veličine $u_c(y)$ določa tudi koeficient korelacije r , kadar so neposredno merjene veličine medsebojno odvisne. V našem primeru dveh medsebojno odvisnih vhodnih veličin zapišemo:

$$u_c(y) = \sqrt{(c_1 u(x_1))^2 + (c_2 u(x_2))^2 + 2rc_1c_2u(x_1)u(x_2)}$$

- Koeficiente občutljivosti izračunamo z delnim odvajanjem:

$$y = 2x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 2, \quad c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1,$$

- in označimo negotovosti vhodnih veličin: $u(x_1) = u(x_2) = u(x)$

- Ker lahko koeficient korelacije r zavzame vrednosti med -1 in $+1$, se standardna negotovost spreminja:

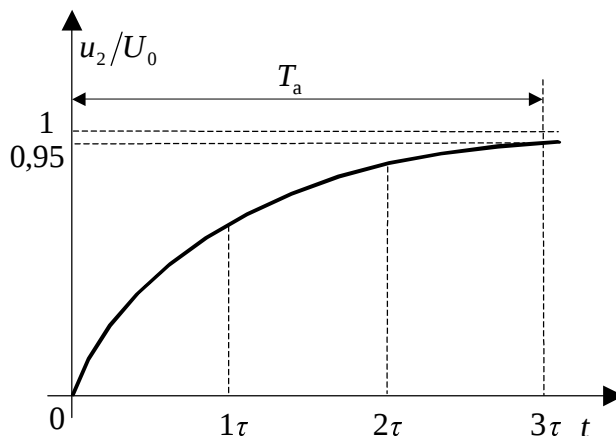
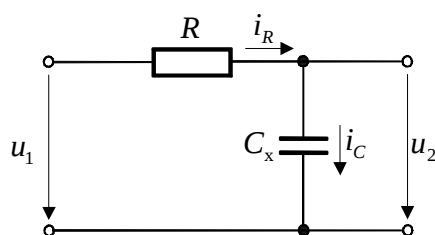
$$u_c(y) = \sqrt{4u^2(x) + u^2(x) + 4ru^2(x)}$$

- $r = -1$: $u_c(y) = \sqrt{u^2(x)} = u(x)$
- $r = +1$: $u_c(y) = \sqrt{9u^2(x)} = 3u(x)$
- Zaradi medsebojne odvisnosti se standardna negotovost izhodne posredno merjene veličine spreminja v mejah $u(x) \leq u_c(y) \leq 3u(x)$ in se precej razlikuje od primera, kadar so vhodne veličine medsebojno neodvisne $r = 0$!
- $r = 0$: $u_c(y) = \sqrt{5u^2(x)} = 2,24u(x)$

4. Kapacitivnost kondenzatorja C_x merimo tako, da kondenzator skupaj z uporom $R = 1200 \, \Omega$ vežemo v merilni člen prvega reda in merimo odzivni čas tega člena (znotraj $e = \pm 5\%$ od končnega odklona). C_x nato posredno izračunamo iz odzivnega časa. Kolikšna je ločljivost tako izmerjene kapacitivnosti, če odzivni čas merimo z ločljivostjo $1 \mu s$?

Rešitev:

- Skica vezja in potek izhodne napetosti:



- Odzivni čas T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 5\%$ končne vrednosti (zelo razširjen kriterij), velja za člen 1. reda:

$$\frac{u_2}{U_0} = 0,95 = (1 - e^{-T_a/\tau}) \Rightarrow T_a = 3\tau = 3RC$$

- Ločljivost določanja kapacitivnosti določimo z občutljivostjo $S = \partial C_x / \partial T_a$ in z ločljivostjo merjenja odzivnega časa.

$$C_x = \frac{T_a}{3R} \Rightarrow Q_{C_x} = \Delta C_x = \frac{\partial C_x}{\partial T_a} Q_{T_a} = \frac{Q_{T_a}}{3R} = \frac{1 \mu s}{3 \cdot 1200 \Omega} = 0,27 \text{ nF}$$

5. Uporovnemu senzorju temperature, za katerega velja $R_t = R_0 e^{bt}$, $R_0 = R_{0^\circ\text{C}} = 1000\Omega$, $R_{100^\circ\text{C}} = 1600\Omega$ vežemo vzporedno upor, tako da je skupna upornost pri temperaturi $t = 50^\circ\text{C}$ enaka $R_s = R_t(50^\circ\text{C})/2$. Kolikokrat je občutljivost skupne (linearizirane) karakteristike manjša od občutljivosti samega senzorja? Nazivna (idealna) karakteristika gre skozi začetno in končno točko dejanske karakteristike.

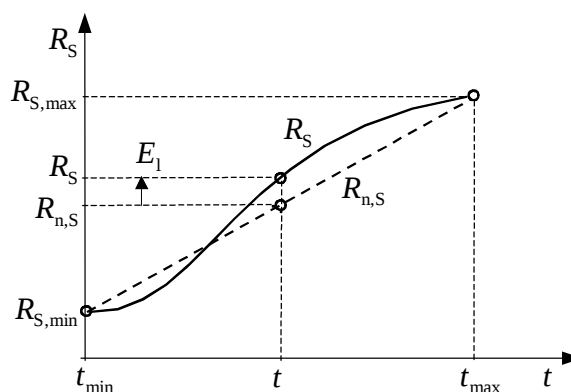
Rešitev:

- Iz karakteristike uporovnega senzorja, ki je podana z enačbo $R_t = R_0 e^{bt}$, pri čemer je R_0 upornost senzorja pri referenčni temperaturi 0°C , izračunamo koeficient b :

$$R_{100^\circ\text{C}} = R_{0^\circ\text{C}} e^{b \cdot 100^\circ\text{C}} \Rightarrow b = \frac{1}{100^\circ\text{C}} \cdot \ln\left(\frac{R_{100^\circ\text{C}}}{R_{0^\circ\text{C}}}\right) = 4,7 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$$

- Če vzporedno k senzorju z upornostjo R_t vežemo upor z upornostjo R_V , kateremu se upornost s temperaturo ne spreminja, se skupna karakteristika spremeni, občutljivost in nelinearnost pa se zmanjšata. Tako linearizirana karakteristika ima upornost R_s .

$$R_s = \frac{R_t \cdot R_V}{R_t + R_V}$$



- Ker je skupna upornost pri temperaturi $t = 50^\circ\text{C}$ enaka $R_s = R_t(50^\circ\text{C})/2$, mora biti upornost vzporedno vezanega upora R_V enaka:

$$R_V = R_{50^\circ\text{C}} = R_{0^\circ\text{C}} e^{b \cdot 50^\circ\text{C}} = 1264,91\Omega \Rightarrow R_s = R_t(50^\circ\text{C})/2$$

- Nazivna (idealna) karakteristika gre skozi začetno in končno točko dejanske karakteristike. Občutljivost je tako:

$$S = \frac{R_{t_{\max}} - R_{t_{\min}}}{t_{\max} - t_{\min}} = \frac{R_{100^\circ\text{C}} - R_{0^\circ\text{C}}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 6\Omega / ^\circ\text{C}$$

- Občutljivost skupne (linearizirane) karakteristike določa vzporedno vezan upor R_V :

$$S_s = \frac{\frac{R_{100^\circ\text{C}} \cdot R_V}{R_{100^\circ\text{C}} + R_V} - \frac{R_{0^\circ\text{C}} \cdot R_V}{R_{0^\circ\text{C}} + R_V}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 1,4795\Omega / ^\circ\text{C}$$

$$R_{S,\max} = \frac{R_{100^\circ\text{C}} \cdot R_V}{R_{100^\circ\text{C}} + R_V} = 706,43\Omega$$

$$R_{S,\min} = \frac{R_{0^\circ\text{C}} \cdot R_V}{R_{0^\circ\text{C}} + R_V} = 558,48\Omega$$

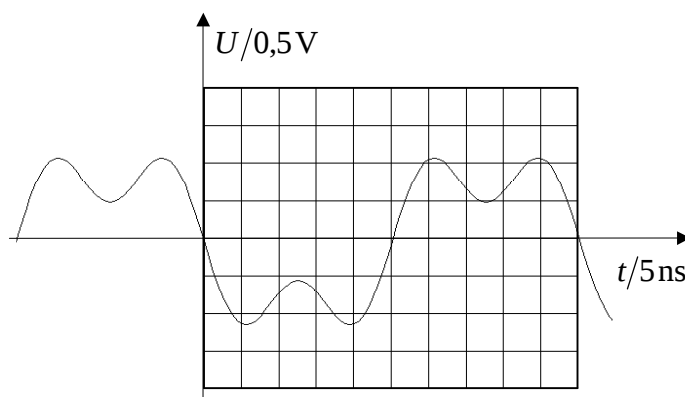
- Občutljivost skupne (linearizirane) karakteristike je manjša od občutljivosti samega senzorja: $\frac{S}{S_s} = 4,055$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Na osciloskop priključimo napetost $u/V = 1 \cdot \sin \omega t + 1/2 \cdot \sin 3\omega t$, $f = 20 \text{ MHz}$. Kakšna bi bila slika na zaslonu, če bi imel osciloskop neskončno mejno frekvenco? Kakšna pa je slika na zaslonu, če ima realni osciloskop pasovno širino $B = 20 \text{ MHz}$ (približek je člen 1. reda); $k_t = 5 \text{ ns/d}$; $k_y = 0,5 \text{ V/d}$; $N = 0 \text{ V}$; $S < 0$? Skicirajte!

Rešitev:

- V primeru idealnega osciloskopa z neskončno mejno frekvenco se signal dinamično ne popači. Na zaslonu se začne izrisovati pri prožilnem nivoju $N = 0 \text{ V}$ z negativno strmino $S < 0$. Pri nastavitvi časovne konstante $k_t = 5 \text{ ns/d}$ se izriše ena perioda signala $T = 1/f = 50 \text{ ns}$ in izkoristi zaslon (raster: $10d \times 8d$, $k_y = 0,5 \text{ V/d}$) kot prikazuje slika.



- Realni osciloskop dinamično popači sliko. Amplituda se zmanjša $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$ in fazni kot se poveča v odvisnosti od razmerja frekvence komponente in mejne frekvence:

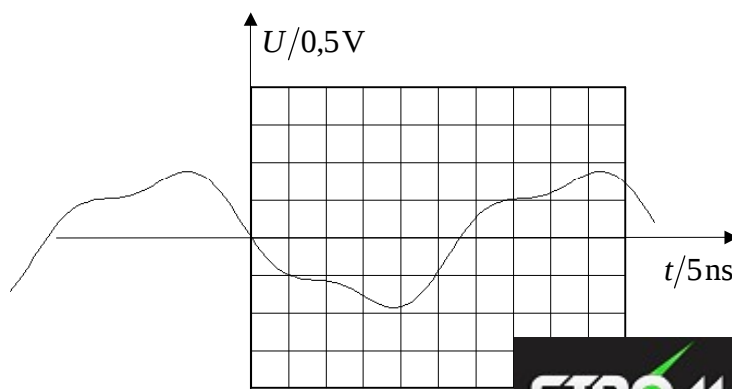
$$\varphi = -\arctg(\omega\tau) = -\arctg\left(\frac{2\pi f}{2\pi f_m}\right) = -\arctg(f/f_m)$$
- Zgornjo mejno frekvenco $f_{m,zg}$ določimo iz pasovne širine, če zanemarimo spodnjo mejno frekvenco $f_{m,sp} < 20 \text{ Hz}$.

$$B = f_{m,zg} - f_{m,sp}; \quad f_{m,sp} < 20 \text{ Hz} \Rightarrow B \doteq f_{m,zg} = f_m$$

- Za vsako od komponent moramo določiti dinamično zmanjšano amplitudo in fazni zamik:

$$\begin{aligned} \text{▪ } f/f_m = 1: \quad \frac{U_2}{U_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071, \quad \varphi = -0,785 \text{ rad} = -45^\circ \\ \text{▪ } f/f_m = 3: \quad \frac{U_2}{U_1} &= \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,3162, \quad \varphi = -1,249 \text{ rad} = -71,56^\circ \end{aligned}$$

- Popačeni signal ima funkcijo: $u/V = 0,707 \cdot \sin(\omega t - 45^\circ) + 1/2 \cdot 0,3162 \cdot \sin(3\omega t - 71,56^\circ)$
- in slika signala na zaslonu osciloskopa je:



2. Koliko je specifična prevodnost izražena v enoti SI, če je v ameriški literaturi navedeno, da znaša specifična upornost $16,54 \Omega \text{CM}/\text{ft}$?

- CM (circular mil) – 1CM je ploščina kroga, ki ima premer 1mil ;
- 1mil = 0,001in ; 1in (inch) = 25,4 mm ;
- 1ft (foot) = 12 in

Rešitev:

- Površina kroga 1CM izražena v SI enoti je:

$$\text{CM} = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \pi \frac{(1\text{mil})^2}{4} = \pi \frac{(0,001 \cdot 25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{4} = 5,067 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$$

- Dolžina 1ft izražena v SI enoti je : $1\text{ft} = 12 \cdot 25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,3048 \text{ m}$
- Od tod dobimo za specifično upornost izraženo v SI enotah:

$$\rho = 16,54 \frac{\Omega \text{CM}}{\text{ft}} = 27,496 \cdot 10^{-9} \Omega \text{m} = 27,496 \text{ n}\Omega \text{m}$$

- in za specifično prevodnost:

$$\lambda = \frac{1}{\rho} = 36,368 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}} = 36,368 \text{ M} \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

3. Podajte rezultat za $\cos \varphi$ s standardno negotovostjo!

- ampermeter: $I = 4,16 \text{ A}$, $I_D = 6 \text{ A}$, $r = 0,5$
- voltmeter: $U = 100 \text{ V}$, $U_D = 150 \text{ V}$, $r = 0,2$
- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $\cos \varphi_n = 0,8$, $r = 0,5$, $\alpha_D = 150 \text{ d}$, $\alpha = 107,2 \text{ d}$
(α pomeni odklon vatmetra v delcih d)

Rešitev:

- Najprej se izračuna $\cos \varphi$.

- Delovna moč:

$$P = P_D \frac{\alpha}{\alpha_D} = U_n I_n \cos \varphi_n \frac{\alpha}{\alpha_D} = 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot 0,8 \cdot \frac{107,2 \text{ d}}{150 \text{ d}} = 285,86 \text{ W}$$

$$P = UI \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{P}{UI} = 285,86 \text{ W} \cdot \frac{1}{100 \text{ V} \cdot 4,16 \text{ A}} = 0,687179$$

- Nato izračunamo skupno relativno in absolutno merilno negotovost.
 - relativno merilno negotovost zaradi produkta in kvocienta vhodnih veličin zapišemo z geometrijsko vsoto:

$$w_c(\cos \varphi) = \sqrt{w^2(P) + w^2(U) + w^2(I)}$$

- posamezne relativne merilne negotovosti izpeljane iz razreda danega na merilni doseg imajo obliko:

$$w(G) = \frac{u(G)}{G} = \frac{M(G)}{G\sqrt{3}} = \frac{r}{100} \frac{G_D}{G} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{100} \frac{\alpha_D}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- (opomba: ker oznaka razreda ni obkrožena, se za referenčno vrednost vzame merilni doseg.)

- zato lahko zapišemo za skupno relativno merilno negotovost:

$$w_c(\cos \varphi) = \sqrt{\left(\frac{0,5}{100} \frac{150}{107,2} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,2}{100} \frac{150}{100} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,5}{100} \frac{6}{4,16} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6,054 \cdot 10^{-3}$$

- Skupna absolutna merilna negotovost je:

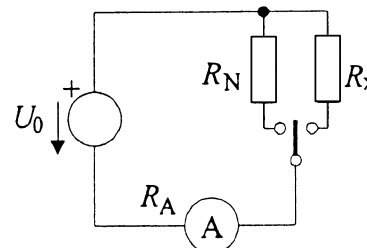
$$u_c(\cos \varphi) = w_c(\cos \varphi) \cdot \cos \varphi = 0,00416$$

- Rezultat za $\cos \varphi$ s standardno negotovostjo:

$$\cos \varphi = 0,6872 \qquad u_c(\cos \varphi) = 0,0042 \qquad n = 1$$

4. Katerega izmed uporov $R_1 \approx 9950\Omega$ ali $R_2 \approx 10500\Omega$ lahko bolj točno zmerimo po tokovni primerjalni metodi z ampermetrom $M_I = \pm(0,1\% I + 0,1\% I_D)$, $I_D = 2\text{ mA}$, ločljivost $1\mu\text{A}$, $R_A = 10\Omega$ in uporovnim etalonom $R_N = 10,000(1 \pm 10^{-4})\text{ k}\Omega$? Koliko je najmanjša dosegljiva standardna negotovost? Vezje napajamo z idealnim napetostnim virom.

Rešitev:



- Čez upor R_N teče tok: $I_N = \frac{U_0}{R_N + R_A}$
- Po preklopu stikala teče čez upor R_x tok: $I_x = \frac{U_0}{R_x + R_A}$
- Enačbi delimo in izrazimo R_x . Upoštevajoč konstantno napetost U_0 dobimo torej:

$$R_x = R_N \frac{I_N}{I_x} \left[1 + \frac{R_A}{R_N} \left(1 - \frac{I_x}{I_N} \right) \right]$$

- Če uporabimo poenostavljeni izraz $R_x = R_N I_N / I_x$, "pridelamo" sistematični pogrešek:

$$e = \frac{G_x - G_N}{G_A + G_N} \approx \frac{G_x - G_N}{G_A} = \frac{1/R_x - 1/R_N}{1/R_A} = 10^{-6}$$

- Primerjanje je tem bolj točno, čim bližje sta si relativno merjena upora ($R_x \leftrightarrow R_N$)!
 - $R_1 \approx 9950\Omega$: $\delta_1 = \frac{R_1 - R_N}{R_N} = -0,5\% \rightarrow$
 - $R_2 \approx 10500\Omega$: $\delta_2 = \frac{R_2 - R_N}{R_N} = 5\%$
 - po primerjalni metodi je moč izmeriti bolj točno R_1 .
- Skupna standardna negotovost poenostavljenega izraza $R_x = R_N \frac{I_N}{I_x}$, kadar sta si upora dovolj blizu ($|\delta| < 1\%$) in se odčitka I_N in I_x malo razlikujeta, je enaka:

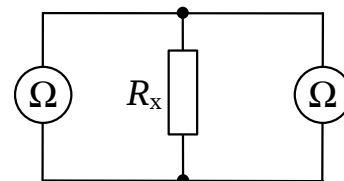
$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(R_N) + 2 \left(\frac{u(I_x)_q}{I_x} \right)^2}$$

- Najmanjšo dosegljivo standardno negotovost dobimo pri polni izkoriščenosti območja ampermetra $I_x \approx I_D$:

$$\frac{u(I_x)_q}{I_x} \Big|_{\min} = \frac{\Delta I_q}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{I_D} = \frac{10^{-6} \text{ A}}{2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ A}} = 1,443 \cdot 10^{-4}$$

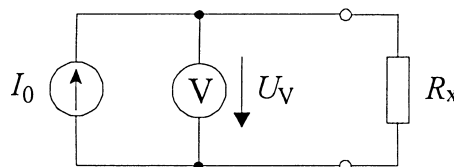
$$w_c(R_x) = \sqrt{(10^{-4}/\sqrt{3})^2 + 2(1,443 \cdot 10^{-4})^2} = 2,12 \cdot 10^{-4} \rightarrow w_c(R_x) = 2,2 \cdot 10^{-4}$$

5. Kolikšen je relativni sistematični pogrešek, če merimo upornost $R_x = 100 \Omega$ z dvema enakima idealnima ommetroma, kot je prikazano na sliki.



Rešitev:

- Oba ommetra s svojima tokovnima viroma pošiljata enak tok skozi R_x (na sliki je prikazana nadomestna shema ommetra). R_x se izračuna iz izmerjene napetosti in nastavljenega toka.



- Kadar sta pozitivni sponki ommetrov priključeni na isto stran upora, se tokova čez upor seštevata in je na njem dvakrat večja napetost, kot bi bila pri enem ommetru. Ker sta nastavljena toka I_0 enaka, kažeta ommetra 200Ω . V tem primeru je sistematični pogrešek enak:

$$e = \frac{R'_x - R_x}{R_x} = \frac{200 \Omega - 100 \Omega}{100 \Omega} = 1 \rightarrow e = 100 \%$$

- Kadar sta pozitivni sponki ommetrov priključeni na nasprotni stran upora, se tokova čez upor odštevata in je na njem napetost nič. Zato kažeta ommetra 0Ω , sistematični pogrešek pa je:

$$e = \frac{R'_x - R_x}{R_x} = \frac{0 \Omega - 100 \Omega}{100 \Omega} = -1 \rightarrow e = -100 \%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko znaša efektivna vrednost vhodnega signala, ki je sestavljen iz osnovne ($f_1 = 20 \text{ MHz}$) in tretje harmonske komponente, če nam DSO ($B = 100 \text{ MHz}$, člen prvega reda), uporabljen kot spektralni analizator, pokaže dve komponenti: črto osnovne komponente z $U_1 = 15 \text{ dBV}$ in črto tretje, ki je za 20 dB manjša? Skicirajte razmere!

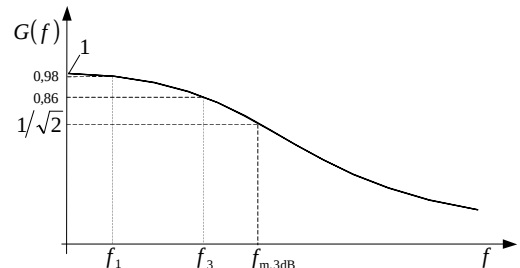
Rešitev:

- Efektivno vrednost napetosti vhodnega signala U_v sestavljata efektivna prispevka osnovne in tretje harmonske komponente:

$$U_v = \sqrt{U_{1,v}^2 + U_{3,v}^2} = \sqrt{\left(\frac{U_{1,i}}{K_1}\right)^2 + \left(\frac{U_{3,i}}{K_3}\right)^2}$$

- DSO zaradi svojega dinamičnega odziva (aproksimiran s členom 1. reda in mejno frekvenco $f_m \doteq B = 100 \text{ MHz}$) različno oslabi napetosti na vходу:

$$K = G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}} = \frac{U_i}{U_v}$$



- $f_1 = 20 \text{ MHz} : K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (20/100)^2}} = 0,9806$
- $f_3 = 60 \text{ MHz} : K_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_3/f_m)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (60/100)^2}} = 0,8574$

- Kadar je napetost izražena v enoti decibel, je pri tem mišljeno njeno razmerje proti referenčni vrednosti U_{ref} . Izhodiščna definicija decibela je podana z desetiškim logaritmom dveh moči:

$$\frac{U}{\text{dB}} = 10 \log\left(\frac{P}{P_{\text{ref}}}\right) = 10 \log\left(\frac{U^2}{R} \cdot \frac{R}{U_{\text{ref}}^2}\right) = 10 \log\left(\frac{U^2}{U_{\text{ref}}^2}\right) = 20 \log\left(\frac{U}{U_{\text{ref}}}\right)$$

- Osnovna komponenta napetosti je podana v enoti dBV, kar pomeni, da je referenčna napetost $U_{\text{ref}} = 1 \text{ V}$, in za izmerjeno napetost osnovne komponente dobimo:

$$U_{1,i} = U_{\text{ref}} \cdot 10^{\frac{U/\text{dBV}}{20}} = 1 \text{ V} \cdot 10^{\frac{15}{20}} = 5,6234 \text{ V}$$

- Ker je tretja harmonska komponenta za 20 dB manjša od prve, ki služi v tem primeru za referenčno vrednost, dobimo desetkrat manjšo napetost

$$U_{3,i}/\text{dB} = 20 \log\left(\frac{U_{3,i}}{U_{1,i}}\right) = -20 \text{ dB} \rightarrow U_{3,i} = \frac{1}{10} U_{1,i} = 0,5623 \text{ V}$$

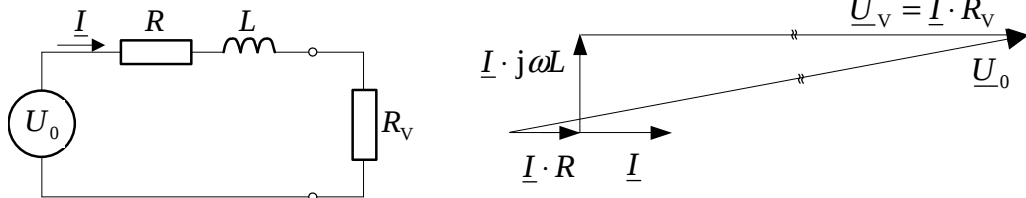
- Popravljen efektivna vrednost napetosti vhodnega signala je:

$$U_v = \sqrt{\left(\frac{U_{1,i}}{K_1}\right)^2 + \left(\frac{U_{3,i}}{K_3}\right)^2} = 5,772 \text{ V}$$

2. Kako velika mora biti upornost voltmetra $R_V = ?$, $M_U = \pm(0,10\%U + 0,10\%U_D + 1\text{dig})V$, ločljivost 100mV , L_V zanemarljiva, ko merimo z njim napetost sinusnega vira $U_0 = 100,00\text{V}$ - prazni tek; $f = 200\text{Hz}$, $R = 500\Omega$, $L = 0,4\text{H}$, da bo sistematični pogrešek priključitve zanemarljiv? Skicirajte vezje in fazorski diagram!

Rešitev:

- Vezje in fazorski diagram:



- Po priključitvi nam voltmetr kaže manj, kot je napetost praznega teka U_0 . Imamo

$$\text{napetostni delilnik: } \underline{U}_V = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + \underline{Z}_0} = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + R + j\omega L}$$

$$\text{▪ ki ga v efektivni obliki izrazimo z: } U_V = U_0 \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}}$$

- Sistematični pogrešek priključitve $e = U_V / U_0 - 1$ je zanemarljiv, kadar je manjši od desetine merilne negotovosti rezultata:

$$e \leq \frac{w(U)}{10} = \frac{1}{10} \frac{m_U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{10\sqrt{3}} \frac{M_U}{U} = \frac{1}{10\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{U_D}{U} + \frac{1\text{dig}}{U} \right)$$

- Če je sistematični pogrešek priključitve zanemarljiv, je vrednost napetosti na voltmetru približno enaka napetosti praznega teka $U \doteq U_0$. Merilni doseg voltmetra mora biti $U_D \geq U$. Najmanjšo mejno vrednost lastnega pogreška m_U in s tem najstrožji pogoj za določitev upornosti voltmetra dobimo, kadar je $U_D = U$. Od tod dobimo:

$$|e| = \left| \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}} - 1 \right| \leq \frac{1}{10\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{100,0\text{V}}{100,0\text{V}} + \frac{100\text{mV}}{100,0\text{V}} \right) = 1,732 \cdot 10^{-4}$$

- Upoštevati moramo, da je sistematični pogrešek priključitve negativen. Za primer enačaja lahko tako zapišemo kvadratično enačbo: $1 - e = \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}}$

$$R_V = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 - 4 \left(1 - \frac{1}{(1-e)^2} \right) (R^2 + (\omega L)^2)}}{2 \left(1 - \frac{1}{(1-e)^2} \right)} = \frac{-1000\Omega \pm 1000,348\Omega}{-6,93 \cdot 10^{-4}} = \frac{-502,6\Omega}{+2,887\text{M}\Omega}$$

- Pravilna rešitev je $R_V = 2,887\text{M}\Omega$ oziroma voltmetr mora imeti večjo upornost.

$$R_V \geq 2,887\text{M}\Omega$$

3. Izpeljite prikrojeno veličinsko enačbo za jakost električnega polja na razdalji r od izvora, ki seva z močjo P , za $E/(V/m)$, P/mW in r/cm , če je ustrezna veličinska enačba $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$? Uporabite jo za izračun E , če je $P = 2,6 mW$ in $r = 1 cm$!

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}, \quad c_0 \approx 300\,000 \text{ km/s}$$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$
- Pri prehodu na prikrojeno veličinsko enačbo moramo vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, množiti in deliti z željeno enoto:

$$E \frac{V/m}{V/m} = \sqrt{P \frac{mW}{mW} \cdot \mu_0 c_0 / 2\pi \left(r \frac{cm}{cm}\right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številski faktor:

$$E/V/m = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot \frac{\sqrt{10^{-3} W}}{V/m} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{10^{-2} m} = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

- $K = \frac{\sqrt{10^{-3} VA}}{10^{-2} V} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}}$

- Upoštevajoč vrednosti za $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ in $c_0 \doteq 300\,000 \text{ km/s}$

dobimo: $K = \frac{\sqrt{10^{-3}}}{10^{-2}} \frac{\sqrt{VA}}{V} \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 300 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{2\pi}}$

- in končno $K = 3,1623 \sqrt{\frac{A}{V}} \sqrt{60 \frac{H}{s}} = 24,495 \sqrt{\frac{A}{V} \cdot \frac{Vs}{A} \cdot \frac{1}{s}} \approx 24,5$

- Prikrojena veličinska enačba je: $E/V/m = 24,5 \cdot \sqrt{P/mW / (r/cm)^2}$
- Za dane podatke $P = 2,6 mW$ in $r = 1 cm$ izračunamo jakost električnega polja s pomočjo prikrojene veličinske enačbe:

$$E/V/m = 24,5 \cdot \sqrt{2,6 mW/mW / (1 cm/cm)^2} = 39,5 \rightarrow E = 39,5 V/m$$

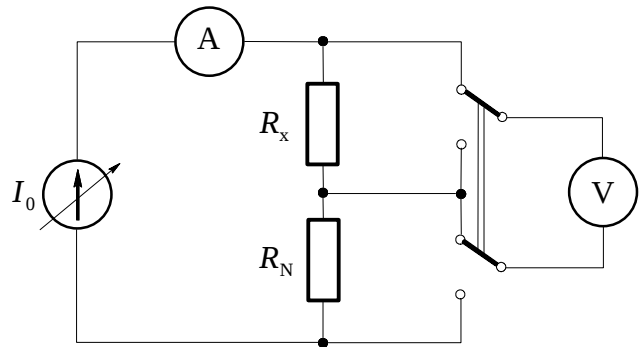
4. Napišite merilni rezultat za upornost $R_x \approx 10\text{k}\Omega$, ki smo jo merili z napetostno primerjalno metodo. Izmerjene vrednosti so naslednje:

- $U_N = 9,324\text{ V}$, $U_x = 9,284\text{ V}$
- $R_V = 1\text{M}\Omega$, $R_N = 10\text{k}\Omega$, $m_{R_N} = 10^{-4}$
- $M_V = (10^{-4}U + 3 \cdot 10^{-4}U_D + 3\text{dig})$,
 $U_D = 10\text{ V}$

Rešitev:

- Iz poenostavljenega izraza za napetostno primerjalno metodo izračunamo vrednost:

$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} = 9957,100\Omega$$



- Pri tem smo zaradi končne upornosti voltmetra $R_V = 1\text{M}\Omega$ naredili sistematični pogrešek:

$$e = \frac{R_N - R_x}{R_x + R_V} = 4,24 \cdot 10^{-5}$$

- Ker sta primerjani upornosti in ustrezno napetosti blizu skupaj $U_x/U_N = 0,9957$, se vpliv lastnega pogreška voltmetra v kvocientu zanemari. Pri določanju standardne negotovosti merilnega rezultata sodeluje dvakrat negotovost zaradi ločljivosti voltmetra $u(U_x)_q = \Delta U_{\min} / (2\sqrt{3}) = 1\text{ mV} / (2\sqrt{3})$, ker dvakrat odčitamo, in negotovost referenčnega upora:

$$\frac{u_c(R_x)}{R_x} = \sqrt{\left(\frac{u(R_N)}{R_N}\right)^2 + 2\left(\frac{u(U_x)_q}{U_x}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{m(R_N)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta U_{\min}}{2\sqrt{3}U_x}\right)^2} = 7,257 \cdot 10^{-5}$$

- Pri tem smo upoštevali, da je tokovni vir zelo stabilen, sicer bi morali upoštevati še negotovost odčitavanja ampermetra ($u(I_A)_q/I_A$).
- Sistematični pogrešek ni zanemarljiv $e \leq w_c/10$ in ga upoštevamo v končnem rezultatu:

$$R_x = 9957,100 \cdot (1 - e)\Omega = 9956,678\Omega$$

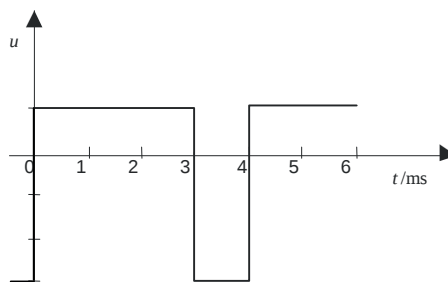
- Ker je popravek relativno zelo majhen, lahko za standardno negotovost uporabimo kar vrednost pri poenostavljenem izrazu $w_c(R_x) = 7,257 \cdot 10^{-5}$. Absolutna vrednost negotovosti je

$$u_c(R_x) = w_c(R_x) \cdot R_x = 0,7226\Omega \rightarrow u_c(R_x) = 0,73\Omega$$

- Zaokrožen merilni rezultat se zapiše v obliki:

$$R_x = 9956,68\Omega ; \quad u_c(R_x) = 0,73\Omega ; \quad n = 1$$

5. Koliko kažeta voltmeter z vrtljivim železom ter voltmeter z vrtljivo tuljavico in vgrajenim usmernikom, če nanju priključimo izmenično napetost s temensko vrednostjo $\hat{u} = 25 \text{ V}$?



Rešitev:

- Voltmeter z vrtljivim železom je eden od voltmetrov, ki merijo pravilno efektivno vrednost napetosti, ki je definirana na periodo signala $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$.

- Za dano obliko napetosti je efektivno vrednost enaka:

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{T} \left[\left(\hat{u}^2 \cdot \frac{3}{4} T \right) + \left((-3\hat{u})^2 \cdot \frac{1}{4} T \right) \right] = \hat{u}^2 \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4} \right) = 3 \cdot \hat{u}^2$$

$$U = \sqrt{3} \cdot \hat{u} = \sqrt{3} \cdot 25 \text{ V} = 43,3 \text{ V}$$

- Voltmeter z vrtljivo tuljavico in vgrajenim usmernikom se odziva na usmerjeno srednjo vrednost $U_r = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt$. Lahko meri enosmerno in izmenično napetost. Običajno je inštrument narejen za merjenje sinusne veličine, zato je njegova skala pomnožena s faktorjem oblike za sinusni signal $F_0 = \frac{U}{U_r} = \frac{\hat{u}/\sqrt{2}}{2\hat{u}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111$, da nam kaže efektivno vrednost.

$$U^* = F_0 \cdot U_r$$

- Za dano obliko napetosti je usmerjena srednja vrednost enaka:

$$U_r = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt = \frac{1}{T} \left[\left(\hat{u} \cdot \frac{3}{4} T \right) + \left(|-3\hat{u}| \cdot \frac{1}{4} T \right) \right] = \hat{u} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) = 1,5 \cdot \hat{u}$$

- Voltmeter kaže napačno efektivno vrednost napetosti, ki ni sinusne oblike.

$$U^* = F_0 \cdot U_r = 1,11 \cdot 1,5 \cdot 25 \text{ V} = 41,7 \text{ V}$$

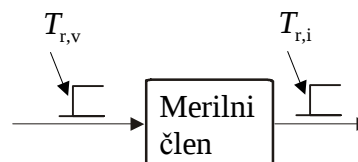
Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Dvižni čas signala na vhodu merilnega člena je $T_{r,v} = 8\text{ ns}$ in dvižni čas signala na izhodu je $T_{r,i} = 14\text{ ns}$. Do katere frekvence lahko uporabljamo merilni člen, da bo pogrešek amplitude pod 1%? Dinamično obnašanje merilnega člena aproksimiramo s členom 1. reda. Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Merilni člen zaradi svoje dinamike podaljša dvižni čas. Dvižni časi se geometrično seštevajo. Doprinos merilnega člena je tako:

$$T_{r,i}^2 = T_{r,v}^2 + T_{r,\zeta}^2 \Rightarrow T_{r,\zeta} = \sqrt{T_{r,i}^2 - T_{r,v}^2} = 11,49\text{ ns}$$



- Ker obnašanje merilnega člena aproksimiramo s členom 1. reda, lahko iz dvižnega časa določimo časovno konstanto in mejno frekvenco:

$$T_{r,v}^2 = T_r = \ln 9 \cdot \tau \Rightarrow \tau = T_r / \ln 9$$

$$f_{m,3dB} = \frac{0,35}{T_r} = 30,46\text{ MHz}$$

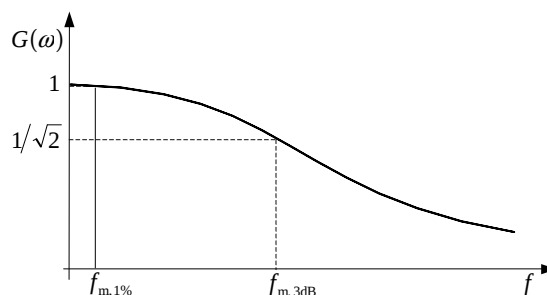
- Amplitudna karakteristika člena 1. reda upade za en odstotek pri frekvenci $f_{m,1\%}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_{m,1\%} \tau)^2}} = 0,99 \Rightarrow 1 + \left(2\pi f_{m,1\%} \frac{T_r}{\ln 9}\right)^2 = \left(\frac{1}{0,99}\right)^2$$

- Da bo pogrešek amplitude pod 1% lahko uporabljamo merilni člen do frekvence:

$$f_{m,1\%} = \frac{1}{2\pi} \frac{\ln 9}{T_r} \sqrt{\left(\frac{1}{0,99}\right)^2 - 1} = 4,34\text{ MHz}$$

- Skica razmer:



2. Skicirajte vezje za merjenje upornosti po UI metodi (varianta z manjšim sistematičnim pogreškom) in podajte merilni rezultat s standardno in razširjeno negotovostjo ($k = 2$)!

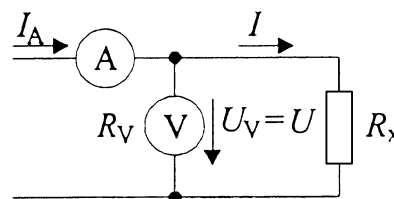
- voltmeter: $U_D = 20 \text{ V}$, $U = 7,60 \text{ V}$, $M_U = \pm(0,10\%U + 0,10\%U_D + 10 \text{ mV})$,
 $R_V = 10 \text{ M}\Omega$
- ampermeter: $I_D = 200 \text{ mA}$, $I = 167,3 \text{ mA}$, $M_I = \pm(0,10\%I + 0,10\%I_D + 1 \text{ dig})$,
 $U_{A_0} = 200 \text{ mV}$

Rešitev:

- Oceno upornosti dobimo iz kvocienta: $R_x = \frac{U}{I} = \frac{7,60 \text{ V}}{167,3 \text{ mA}} = 45,427 \Omega$

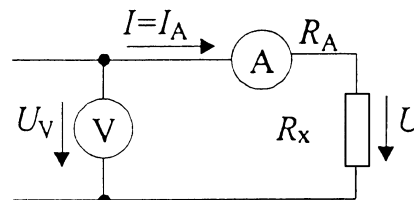
- Kadar priključimo voltmeter neposredno na upor, je izmerjena napetost tudi napetost na upor in je tok ampermetra prevelik za tok skozi končno upornost voltmetra. Sistematični pogrešek je sorazmeren razmerju R_x/R_V :

$$e_1 = -\frac{R_x}{R_x + R_V} \doteq -\frac{R_x}{R_V} = -4,54 \cdot 10^{-6}$$



- Če priključimo ampermeter neposredno pred upor, je tok ampermetra enak toku skozi upor in je napetost voltmetra prevelika za padec na upornosti ampermetra $R_A = U_{A_0}/I_D = 1 \Omega$. Sistematični pogrešek je sorazmeren kvocientu:

$$e_2 = -\frac{R_A}{R_x} = -2,2 \cdot 10^{-2}$$



- Izberemo prvo varianto z manjšim sistematičnim pogreškom $|e_1| < |e_2|$
- Standardna negotovost upornosti je sestavljena iz dveh prispevkov (voltmetra in ampermetra):

$$w(U) = \frac{m_U}{\sqrt{3}} = \frac{M_U/U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{20 \text{ V}}{7,60 \text{ V}} + \frac{10 \text{ mV}}{7,60 \text{ V}} \right) = 2,856 \cdot 10^{-3}$$

$$w(I) = \frac{m_I}{\sqrt{3}} = \frac{M_I/I}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{200 \text{ mA}}{167,3 \text{ mA}} + \frac{0,1 \text{ mA}}{167,3 \text{ mA}} \right) = 1,613 \cdot 10^{-3}$$

- Skupno standardno negotovost v relativni in absolutni obliki zapišemo:

$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)} = 3,28 \cdot 10^{-3} \rightarrow w_c(R_x) = 3,3 \cdot 10^{-3}$$

$$u_c(R_x) = w_c(R_x) \cdot R_x = 0,149 \Omega \rightarrow u_c(R_x) = 0,15 \Omega$$

- Tudi razširjeno negotovost s faktorjem razširitve $k = 2$ zaokrožimo na dve mesti:

$$U_c(R_x) = k \cdot u_c(R_x) = 2 \cdot u_c(R_x) = 0,298 \Omega \rightarrow u_c(R_x) = 0,30 \Omega$$

- Sistematični pogrešek je zanemarljiv, saj velja $e < w_c(R_x)/10$. Zato lahko rezultat za R_x zapišemo kar v obliki $R_x = U/I = 45,43 \Omega$.

- Merilni rezultat s standardno negotovostjo podamo v obliki:

$$R_x = 45,43 \Omega; \quad u_c(R_x) = 0,15 \Omega; \quad n = 1$$

- in merilni rezultat z razširjeno negotovostjo v obliki:

$$R_x = 45,43 \Omega; \quad u_c(R_x) = 0,30 \Omega; \quad n = 1$$

3. Dvema kondenzatorjema z enako nazivno vrednostjo, smo izmerili kapacitivnost z istim instrumentom. Standardna negotovost je 0,40%. Kondenzatorja vežemo zaporedno. Kolikšna je standardna negotovost kapacitivnosti te vezave? $r(C_1, C_2) = 1$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Impedanco zaporedne vezave dveh enakih kondenzatorjev ($C_1 = C_2 = C$) zapišemo v obliki:

$$Z = \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{1}{\omega \cdot C_s}$$

- Pri čemer je skupna kapacitivnost enaka: $C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C}{2}$

- Pri določanju standardne negotovosti zaporedne vezave kondenzatorjev moramo upoštevati standardni negotovosti merjenja kapacitivnosti $u(C)$, koeficienta občutljivosti c in korelacijski faktor r kot zahteva podana enačba.

- Ker smo posamezno kapacitivnost merili z istim instrumentom, sta njuni standardni negotovosti enaki: $u(C_1) = u(C_2) = u$
 - Koeficienta občutljivosti dobimo z delnim odvajanjem skupne enačbe:

$$c_1 = \frac{\partial C_s}{\partial C_1} = \frac{C_2(C_1 + C_2) - C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$c_2 = \frac{\partial C_s}{\partial C_2} = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

- Celotna standardna negotovost kapacitivnosti zaporedne vezave kondenzatorjev ob upoštevanju koeficienta korelacije $r(C_1, C_2) = 1$ je:

$$u_c(C_s) = \sqrt{(c_1 u(C_1))^2 + (c_2 u(C_2))^2 + 2 \cdot c_1 c_2 \cdot u(C_1) u(C_2)}$$

$$u_c(C_s) = \sqrt{\left(\frac{u}{4}\right)^2 + \left(\frac{u}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot u^2} = \sqrt{4 \left(\frac{u}{4}\right)^2} = \frac{u}{2}$$

- in v relativni obliki:

$$w_c(C_s) = u_c(C_s) / C_s = \frac{u}{2} \cdot \frac{2}{C} = w(C) = 4,0 \cdot 10^{-3}$$

4. Koliko je efektivnih stopenj prostosti ν_{ef} , če je izhodna veličina $y = P = I^2 R$, relativni standardni negotovosti vhodnih veličin $w(I) = 2\%$ in $w(R) = 3\%$, meritev toka $n_1 = 16$, meritev upornosti pa $n_2 = 13$?

$$\nu_{\text{ef}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/\nu_i}$$

Rešitev:

- Za izračun efektivnih stopenj prostosti po gornji enačbi potrebujemo skupno merilno negotovost, ki jo izračunamo iz posameznih prispevkov s pomočjo parcialnih odvodov.

- Izhodiščna enačba: $P = I^2 R$

- Delež k skupni negotovosti zaradi negotovosti toka:

$$w_1(P) = \frac{u_1(P)}{P} = \frac{\partial P}{\partial I} \frac{u(I)}{P} = 2IR \frac{u(I)}{P} = 2 \cdot w(I) = 2 \cdot (2 \cdot 10^{-2}) = 4 \cdot 10^{-2}$$

- Delež k skupni negotovosti zaradi negotovosti upora:

$$w_2(P) = \frac{u_2(P)}{P} = \frac{\partial P}{\partial R} \frac{u(R)}{P} = I^2 \frac{u(R)}{P} = w(R) = 3 \cdot 10^{-2}$$

- Ker imamo produkt vhodnih veličin, je skupno negotovost $u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)}$ primerneje izraziti v relativni obliki:

$$w_c(P) = \frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{w_1^2(P) + w_2^2(P)} = \sqrt{(4 \cdot 10^{-2})^2 + (3 \cdot 10^{-2})^2} = 5 \cdot 10^{-2}$$

- Število efektivnih stopenj prostosti je za eno manjše od števila meritev, ker z izračunom aritmetične sredine $\bar{x}$, ki sodeluje pri določanju eksperimentalnega standardnega odklona aritmetične sredine – standardne negotovosti tipa A

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n(n-1)}, \text{ zmanjšamo stopnjo prostosti za ena.}$$

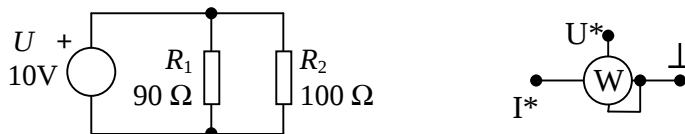
$$\nu_1 = n_1 - 1 = 15, \quad \nu_2 = n_2 - 1 = 12$$

- Število efektivnih stopenj prostosti se z negotovostmi v relativni obliki izrazi:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{\frac{u_c^4(P)}{\frac{u_1^4(P)}{\nu_1} + \frac{u_2^4(P)}{\nu_2}} \cdot \frac{P^4}{P^4}}{\frac{w_c^4(P)}{\frac{w_1^4(P)}{\nu_1} + \frac{w_2^4(P)}{\nu_2}}} = \frac{(5 \cdot 10^{-2})^4}{\frac{(4 \cdot 10^{-2})^4}{15} + \frac{(3 \cdot 10^{-2})^4}{12}} = 26,24$$

$$\rightarrow \nu_{\text{eff}} = 26$$

5. Kako bi priključili vatmeter s skupno izhodno sponko (glej sliko vatmetra), da bi z njim izmerili moč na upor R_1 v narisanim vezju ter da bo sistematični pogrešek glede na moč, ki je bila na R_1 pred priključitvijo, najmanjši? Skicirajte merilno vezje z vključenim vatmetrom. Koliko kaže vatmeter, če je njegova upornost v tokovni veji $10\ \Omega$, upornost v napetostni veji pa je zanemarljivo velika?

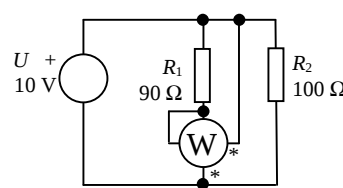
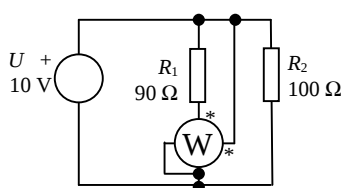


Rešitev:

- Možni priključitvi vatmetra s skupno izhodno sponko:

možnost 1:

možnost 2:



- Dodatni dve možnosti priključitve bi bili še, če bi vatmeter priključili pred uporom namesto za njim, vendar pa to ne spremeni kazanja vatmetra.
- Najprej izračunamo moč, ki jo je trošil R_1 pred priključitvijo vatmetra:

$$P_{R_1} = U_{R_1} \cdot I_{R_1} = U_{R_1} \frac{U_{R_1}}{R_1} = \frac{U^2}{R_1} = \frac{100\text{ V}^2}{90\ \Omega} = 1,1\text{ W}$$

- Po vključitvi vatmetra v vezje po prvi možnosti vezave nam kaže ob upoštevanju notranje upornosti v tokovni veji vatmetra R_{Wt} vrednost:

$$P_{W1} = U_{W1} \cdot I_{W1} = U \cdot \frac{U}{R_1 + R_{Wt}} = \frac{100\text{ V}^2}{100\ \Omega} = 1\text{ W},$$

- Sistematični pogrešek glede na moč pred priključitvijo znaša

$$E_1 = P_{W1} - P_{R_1} = 1\text{ W} - 1,1\text{ W} = -0,1\text{ W}.$$

- Če bi izbrali drugo priključitev, bi vatmeter kazal:

$$P_{W2} = U_{W2} \cdot I_{W2} = \frac{U \cdot R_1}{R_1 + R_{Wt}} \cdot \frac{U}{R_1 + R_{Wt}} = \frac{U^2 \cdot R_1}{(R_1 + R_{Wt})^2} = \frac{100\text{ V}^2 \cdot 90\ \Omega}{100\ \Omega^2} = 0,9\text{ W},$$

- Sistematični pogrešek pa bi bil

$$E_2 = P_{W2} - P_{R_1} = 0,9\text{ W} - 1,1\text{ W} = -0,2\text{ W}$$

- Ugotovimo lahko torej, da je prva priključitev ustrežnejša, ker da manjši sistematični pogrešek.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Pri vzorčenju sinusnega signala z digitalnim spominskim osciloskopom (enkratno proženje) smo dobili frekvenco prikazanega signala 2 MHz. Pri katerih frekvencah vhodnega signala je možno rekonstruirati prikazani signal, če je frekvenca vzorčenja $f_s = 20$ MHz in dvižni čas vertikalnega kanala osciloscopa $T_r = 4$ ns, da amplitudni pogrešek ni večji kot 10%? Za prikaz je bila uporabljena interpolacija s funkcijo $y = \sin x/x$.

Rešitev:

- Frekvenco prikazanega signala $f' = 2$ MHz na DSO z enkratnim proženjem smo lahko dobili, kadar je bil na vходу signal $f = 2$ MHz in je bil pravilno razpoznan ali pa pri frekvencah, ki se nahajajo okoli mnogokratnikov vzorčne frekvence $f_s = 20$ MHz.

$$f' = |kf_s - f| \quad k = 1, 2, \dots$$

- Za iskane frekvence zapišemo:

$$f = kf_s \pm f'$$

k	f/MHz
1	18, 22
2	38, 42
3	58, 62
..	..

- Ker imamo najboljšo možno interpolacijo s funkcijo $y = \sin x/x$, pogrešek zaradi interpolacije zanemarimo. Pogrešek, ki preostane, je pogrešek zaradi dinamike analognega dela osciloscopa (tipično aproksimiran s členom 1. reda). Mejno frekvenco osciloscopa dobimo iz dvižnega časa:

$$f_m = f_{m,1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi(T_r/\ln 9)} = \frac{0,35}{T_r}$$

- Nas zanima, do katere frekvence upade amplituda za manj kot 10%.

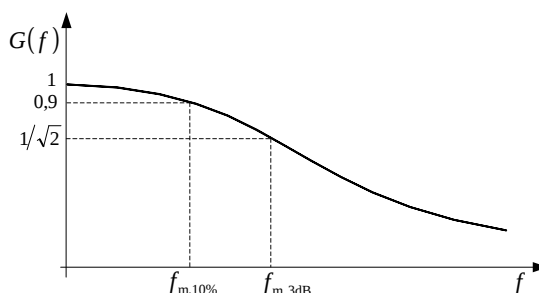
$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f/f_{m,1/\sqrt{2}}\right)^2}} = 0,9$$

- in od tod dobimo

$$f_{m,10\%} = \frac{0,35}{T_r} \sqrt{\left(\frac{1}{0,9}\right)^2 - 1} = 42,37 \text{ MHz}$$

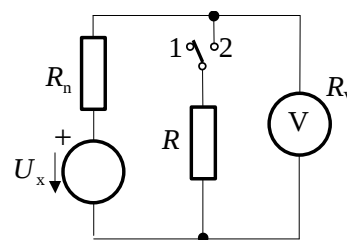
- Frekvence, pri katerih smo lahko rekonstruirali sinusni signal $f' = 2$ MHz, in istočasno amplitudni pogrešek ni bil večji kot 10%, so: $f/\text{MHz} = 2, 18, 22, 38, 42$

- Skica razmer:



2. Če je preklopnik v položaju 1, pokaže voltmetr $U_1 = 10\text{ V}$, če je v položaju 2 pa $U_2 = 9\text{ V}$. Koliko je neznana napetost U_x ? Koliko je sistematični pogrešek merilne metode, če proglasimo za neznano napetost kar U_1 ?

$$R = 10\text{ M}\Omega, \quad R_V = 10\text{ M}\Omega$$



Rešitev:

- Ko je preklopnik v položaju 1, nam kaže voltmetr padec napetosti U_1 na upor $R_1 = R_V$:

$$R_1 = R_V = 10\text{ M}\Omega, \quad U_1 = U_x \frac{R_1}{R_1 + R_n}$$

- Ko je preklopnik v položaju 2, nam kaže voltmetr padec napetosti U_2 na vzporedni kombinaciji uporov R_V in R :

$$R_2 = \frac{R_V R}{R_V + R} = 5\text{ M}\Omega, \quad U_2 = U_x \frac{R_2}{R_2 + R_n}$$

- Iz dveh enačb izračunamo neznano napetost:

$$U_x = U_1 U_2 \frac{R_2 - R_1}{R_2 U_1 - R_1 U_2} = 11,25\text{ V}$$

- Če proglasimo za neznano napetost kar U_1 , je sistematični pogrešek enak:

$$e = \frac{U_1}{U_x} - 1 = -11,1\%$$

3. Digitalni amperimeter kaže $I = 16,72 \text{ mA}$. Izrazite popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo, če smo instrument uporabili pri temperaturi $t = 8^\circ \text{C}$!

- meja pogreška: $M_I = \pm(0,15\% I + 2 \text{ dig})$
- referenčno območje: $23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$
- nazivno območje uporabe: $0^\circ \text{C} \div 50^\circ \text{C}$
- temperaturni koeficient: $\pm(0,012\% I + 1 \text{ dig})/^\circ \text{C}$

Rešitev:

- Če bi uporabili instrument pri referenčnih pogojih, bi bila meja lastnega pogreška:

$$M_I = \pm \left(\frac{0,15}{100} I + 0,02 \text{ mA} \right) = \pm 0,045 \text{ mA}$$

- Ker smo instrument uporabili izven referenčnega območja v nazivnem območju uporabe za vplivno veličino temperaturo, se meja pogreška poveča za mejo spremembe kazanja $M_{I,s} = M_I + M_I^0$. V našem primeru smo izstopili iz referenčnega območja na spodnji meji pri $23^\circ \text{C} - 5^\circ \text{C} = 18^\circ \text{C}$, zato moramo upoštevati razliko temperature do te vrednosti:

$$M_I^0 = \pm \left(\left(\frac{0,012}{100} I + 0,01 \text{ mA} \right) / ^\circ \text{C} \right) \cdot (18^\circ \text{C} - 8^\circ \text{C}) = \pm 0,12 \text{ mA}$$

- Skupna meja pogreška (lastnega in spremembe kazanja) je:

$$M_{I,s} = M_I + M_I^0 = \pm 0,165 \text{ mA}$$

- in standardna negotovost pri privzeti pravokotni porazdelitvi gostote verjetnosti pogreška:

$$u(I) = \frac{M_{I,s}}{\sqrt{3}} = 0,09535 \text{ mA} = 0,096 \text{ mA}$$

- Ker je negotovost manjša od ločljivosti, zaokrožimo na mestu, ki ga določa ločljivost:

$$u(I) = 0,096 \text{ mA} \rightarrow 0,10 \text{ mA}$$

- Merilni rezultat podamo v obliki:

$$I = 16,72 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,10 \text{ mA}, \quad n = 1$$

4. Upornost uporovnega senzorja temperature znaša $R_t = 3050 \Omega$. Zapišite merilni rezultat za izmerjeno temperaturo, če je nelinearnost senzorja $n = 0,5\%$, negotovost ohmmetra pa je zanemarljiva. Senzor ima pri 0°C upornost 9800Ω , pri 100°C pa 200Ω .

Rešitev:

- Ker ne poznamo enačbe za upornost senzorja v odvisnosti od temperature, lahko temperaturo, ki ustreza $R_t = 3050 \Omega$, izračunamo iz linearne karakteristike. Odstopanje dejanske karakteristike od linearne je največ $+0,5\%$ oz. $-0,5\%$. Ker je predznak nedoločen, imamo opravka z negotovostjo izmerjene temperature.
- Najprej zapišimo enačbo nazivne (linearne) karakteristike.

$$R_n = \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}} \cdot (t - t_{\min}) + R_{t,\min} = \frac{200 \Omega - 9800 \Omega}{100^\circ\text{C}} \cdot t + 9800 \Omega = -96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \cdot t + 9800 \Omega$$

- Zaradi nelinearnosti n se upornost R_n od dejanske upornosti R_t lahko razlikuje za največ $\pm 0,5\%$. Velja torej

$$n = \left| \frac{R_t - R_n}{R_{t,\max} - R_{t,\min}} \right| = \pm 0,5\%$$

$$\Rightarrow +0,005 = \frac{3050 \Omega - R_n}{200 \Omega - 9800 \Omega} \Rightarrow R_{n,\max} = 3098 \Omega$$

$$\Rightarrow -0,005 = \frac{3050 \Omega - R_n}{200 \Omega - 9800 \Omega} \Rightarrow R_{n,\min} = 3002 \Omega$$

- Iz linearne karakteristike izračunamo naslednji dve temperaturi:

$$t_{\max} = \frac{R_{n,\max} - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = \frac{3098 \Omega - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = 69,813^\circ\text{C}$$

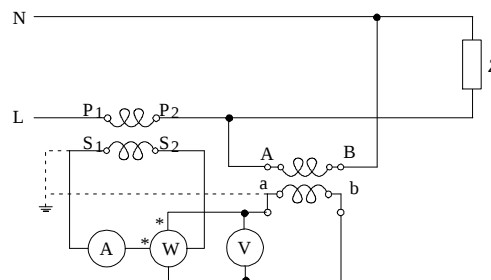
$$t_{\min} = \frac{R_{n,\min} - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = \frac{3002 \Omega - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = 70,813^\circ\text{C}$$

- Iz tega zaključimo, da (posredno) izmerjena temperatura leži na intervalu $[t_{\max}, t_{\min}]$. Od tu dobimo mejo pogreška M_t ter standardno negotovost, za katero predpostavimo enakomerno porazdelitev, ter (ustrezno zaokrožen) merilni rezultat:

$$t_i = \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2} = 70,31^\circ\text{C}, \quad u(t) = \frac{M_t}{\sqrt{3}} = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{2\sqrt{3}} = 0,29^\circ\text{C}, \quad n = 1$$

5. Kolikšne so delovna, jalova in navidezna moč porabnika?

- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $\alpha_D = 15000$, $\alpha = 12427$;
- voltmeter: $U = 102 \text{ V}$;
- ampermeter: $I = 4,72 \text{ A}$;
- tokovnik: $I_{pn} = 75 \text{ A}$, $I_{sn} = 5 \text{ A}$
- napetostnik: $U_{pn} = 35 \text{ kV}$, $U_{sn} = 100 \text{ V}$



Rešitev:

- Meritev moči porabnika se izvaja preko merilnih transformatorjev. Ker so merilni instrumenti priključeni na sekundarni strani merilnih transformatorjev, je seveda potrebno upoštevati prestavno razmerje, ki je enako razmerju primarnega nazivnega toka in sekundarnega nazivnega toka za tokovni merilni transformator. Enako je pri napetostnem merilne transformatorju. Torej

$$K_{in} = \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \quad \text{oziroma} \quad K_{un} = \frac{U_{pn}}{U_{sn}}.$$

- Delovna moč je moč, ki jo kaže vatmeter priključen na sekundarno stran merilnih transformatorjev, pomnožena s prestavnima razmerjema. Delovna moč je tako

$$P = K_{un} \cdot K_{in} \cdot P_W = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} \cdot \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \cdot \left(U_n \cdot I_n \cdot \frac{\alpha}{\alpha_D} \right)$$

$$P = \frac{35 \text{ kV}}{100 \text{ V}} \cdot \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} \cdot 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{12427}{15000} = 2,175 \text{ MW}$$

- Navidezna moč je produkt napetosti in toka, ki ju merimo z voltmetrom oziroma ampermetrom zopet na sekundarni strani merilnih transformatorjev.

$$S = K_{un} \cdot K_{in} \cdot U \cdot I = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} \cdot \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \cdot U \cdot I = \frac{35 \text{ kV}}{100 \text{ V}} \cdot \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} \cdot 102 \text{ V} \cdot 4,72 \text{ A} = 2,528 \text{ MVA}$$

- Jalova moč se izpelje iz enačbe za navidezno moč $S^2 = P^2 + Q^2$.

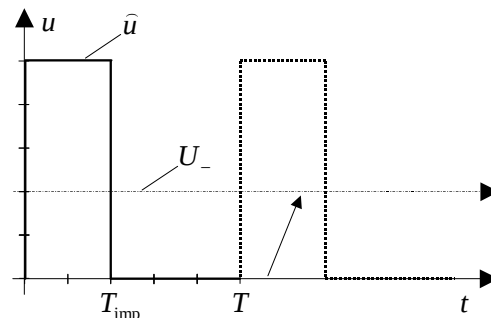
$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(2,528 \text{ MVA})^2 - (2,175 \text{ MW})^2} = 1,288 \text{ MVAr}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Pravokotno pulzno napetost u frekvence $f = 20\text{ kHz}$ in širine pulza $T_{\text{imp}} = 20\mu\text{s}$ merimo z voltmetrom, ki meri pravilno efektivno vrednost. Koliko je temenska vrednost $\hat{u}$ vhodne napetosti, če voltmeter kaže $U = 110\text{ mV}$ in je enosmerna komponenta napetosti blokirana?

Rešitev:

- Na podlagi podatkov ima signal pravokotno pulzno obliko, kjer je perioda ponavljanja pulzov enaka $T = 1/f = 50\mu\text{s}$.



- Enosmerna komponenta signala, ki je blokirana, je enaka srednji vrednosti. Ker imamo v dveh intervalih periode konstantni vrednosti $\hat{u}$ in nič, lahko zapišemo:

$$U_- = \bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt = \frac{1}{T} \left(\hat{u} \frac{2}{5} T + 0 \frac{3}{5} T \right) = \frac{2}{5} \hat{u}$$

- Po blokiran enosmerni komponenti imamo tudi sedaj v dveh intervalih periode konstantni vrednosti $(\hat{u} - U_-)$ in $(-U_-)$. Voltmeter se odziva na efektivno vrednost signala $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 \, dt}$, kar nam pri dani obliki signala da:

$$U^2 = \frac{1}{T} \left((\hat{u} - U_-)^2 \frac{2}{5} T + (-U_-)^2 \frac{3}{5} T \right) = \frac{1}{T} \left(\left(\hat{u} - \frac{2}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{2}{5} T + \left(-\frac{2}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{3}{5} T \right) =$$

$$U^2 = \left(\left(\frac{3}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{3}{5} \right) = \frac{9 \cdot 2}{25 \cdot 5} \hat{u}^2 + \frac{4 \cdot 3}{25 \cdot 5} \hat{u}^2 = \frac{30}{125} \hat{u}^2$$

- Od tod dobimo za temensko vrednost vhodne napetosti

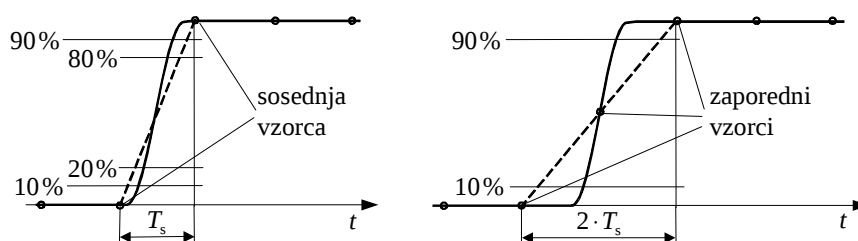
$$\hat{u} = \sqrt{\frac{125}{30}} U = 224,53\text{ mV}$$

- in zaokrožimo na ločljivost voltmetra: $\hat{u} = 225\text{ mV}$

2. Kolikšen je najmanjši dvižni čas, ki ga lahko pomerimo z osciloskopom pri enkratnem proženju, če perioda vzorčenja osciloscopa $T_s = 1\text{ns}$ ni povsem točna in ima mejo pogreška $M_{T_s} = \pm 50\text{ps}$. Osciloskop ima definiran dvižni čas kot čas, ki ga signal porabi za prehod od 20% do 80% obeh stacionarnih stanj? Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Pri digitalnih spominskih osciloskopih je dvižni čas določen s periodo vzorčenja in se spreminja pri linearni interpolaciji od $0,8T_s$ (leva slika) do $1,6T_s$ (desna slika). Iz obeh skrajnih primerov vidimo, da se pri enakem skoku napetosti merjenega signala uporabljajo dva ali trije vzorci, ker dogodek ni sinhroniziran z vzorci.



- Pri enkratnem proženju smo pri merjenju dvižnega časa omejeni s periodo vzorčenja T_s .
- Če dvižni čas definiramo kot čas, ki je potreben za prehod od 20% do 80% nivoja signala, bo tudi izmerjeni dvižni čas znašal

$$T_{r,\min} = (0,8 - 0,2) \cdot T_s = 0,6T_s$$

- Ker osciloskop periode vzorčenja nima točno nastavljene, bomo v najboljšem primeru izmerili minimalni dvižni čas

$$T'_{r,\min} = 0,6 \cdot (T_s - M_{T_s}) = 0,6 \cdot 950 \text{ ps} = 570 \text{ ps}$$

3. Koliko je še lahko notranja upornost R_0 napetostnega vira ($U_0 = 7\text{ V}$), da bi z voltmetrom merili napetost praznega teka brez korekcije zaradi priključitve instrumenta?

$$M_U = \pm(0,5\%U + 0,5\%U_D), U_D = 10\text{ V}, R_V = 10\text{ M}\Omega$$

Rešitev:

- Sistematični pogrešek zaradi priključitve instrumenta je zanemarljiv, kadar je desetkrat manjši od negotovosti izmerjene vrednosti $|E| \leq \frac{1}{10}u(U)$.

- V našem primeru je enak razliki napetosti, ki jo kaže priključen voltmeter, in napetostjo praznega teka:

$$E = U'_0 - U_0 = \frac{R_V}{R_0 + R_V}U_0 - U_0 = \frac{R_V - R_0 - R_V}{R_0 + R_V}U_0 = \frac{-R_0}{R_0 + R_V}U_0$$

- Iz absolutne vrednosti sistematičnega pogreška, ki je sicer negativen, izračunamo iskano vrednost notranje upornosti:

$$|E| = \frac{R_0}{R_0 + R_V}U_0 \quad \rightarrow \quad R_0 = \frac{E R_V}{U_0 - E}$$

- Merilna negotovost izmerjene napetosti je enaka

$$u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{0,5}{100} 7\text{ V} + \frac{0,5}{100} 10\text{ V} \right) = 49,07\text{ mV}$$

- Zanemarljivi sistematični pogrešek mora biti manjši kot $E \leq 4,907\text{ mV}$, kar nam da vrednost za notranjo upornost:

$$E \leq 4,907\text{ mV} \quad \rightarrow \quad \left(R_0 = \frac{E R_V}{U_0 - E} \right) \leq 7,016\text{ k}\Omega$$

4. Podajte popolni merilni rezultat z razširjeno negotovostjo za hipotenuzo trikotnika c , če je stopnja zaupanja $p = 95\%$! Rezultati ponovljenih meritev katet so naslednji:

$$\bar{a} = 172,35 \text{ mm}, s(a) = 1,42 \text{ mm}, n_1 = 5$$

$$\bar{b} = 294,64 \text{ mm}, s(b) = 1,68 \text{ mm}, n_2 = 8$$

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/v_i}, \quad v_i = n_i - 1$$

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(v)$	
	$p = 95\%$	$p = 99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Vrednost hipotenuze izračunamo s pomočjo srednjih vrednosti katet:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 341,346 \text{ mm}$$

- Standardna negotovost posredno merjene veličine katete je sestavljena iz deležev negotovosti obeh katet: $u_c(c) = \sqrt{u_a^2 + u_b^2}$

- Delež ene katete sestavlja koeficient občutljivosti $\partial c / \partial a$ oz. $\partial c / \partial b$ in standardna negotovost merjenja katete pri več meritvah $s(a) / \sqrt{n_1}$ oz. $s(b) / \sqrt{n_2}$.

- Koeficienta občutljivosti:

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} 2a = \frac{a}{c} = 0,50491 \quad \text{in} \quad \frac{\partial c}{\partial b} = \frac{b}{c} = 0,86317$$

- Deleža negotovosti katet:

$$u_a = \frac{\partial c}{\partial a} u(a) = \frac{a}{c} \frac{s(a)}{\sqrt{n_1}} = 0,3207 \text{ mm} \quad \text{in} \quad u_b = \frac{\partial c}{\partial b} u(b) = \frac{b}{c} \frac{s(b)}{\sqrt{n_2}} = 0,5127 \text{ mm}$$

- Standardna merilna negotovost katete je $u_c(c) = 0,6047 \text{ mm}$

- Efektivno število prostostnih stopenj, ki določajo raven zaupanja posredno merjene veličine na podlagi večkrat neposredno merjenih veličin, določajo negotovosti le-teh in število ponovitev meritev. Efektivno število prostostnih stopenj vedno zaokrožimo navzdol, saj je s tem pri enaki stopnji zaupanja interval negotovosti večji.

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(c)}{u_a^4/(n_1 - 1) + u_b^4/(n_2 - 1)} = \frac{u_c^4(c)}{u_a^4/4 + u_b^4/7} = 10,69 \rightarrow v_{\text{eff}} = 10$$

- Iz tabele dobimo za faktor razširitve: $v_{\text{eff}} = 10 \rightarrow k = t_{95\%} = 2,23$

- Zaokrožena razširjena negotovost je: $U_{95} = t_{95\%} \cdot u_c(c) = 1,348 \text{ mm} \rightarrow 1,4 \text{ mm}$
- Merilni rezultat:

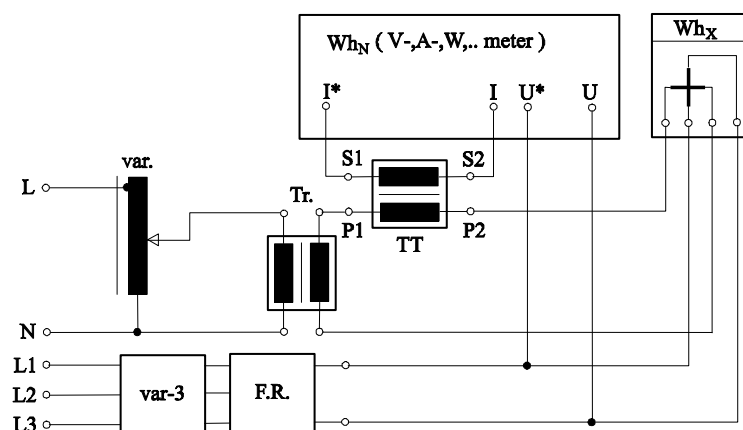
$$c = 341,3 \text{ mm}; U(c) = 1,4 \text{ mm}; k = 2,23; v_{\text{eff}} = 10; p = 95\%$$

5. Skicirajte vezje za preskus razreda enofaznega indukcijskega števca delovne energije in izračunajte, če je pri spodnjih podatkih pogrešek še v dopustnih mejah!

- indukcijski števec: $U_r = 220\text{ V}$, $10 - 40\text{ A}$, $K = 600\text{ vrt/kWh}$, $r = \textcircled{2}$, $N = 174\text{ vrt}$
- digitalni števec el. energije: $W_N = 29,18\text{ Wh}$
- tokovnik: $I_{pn} = 10\text{ A}$, $I_{sn} = 1\text{ A}$

Rešitev:

- Vezalna shema preskušanja razreda točnosti indukcijskega števca električne energije.



- Za izračun lastnega pogreška pri merjenju energije potrebujemo energijo preskušane števca W_s in referenčno energijo W :

$$e = \frac{W_s - W}{W}$$

- Energija preskušane števca se izračuna iz števila vrtljajev in konstante števca.

$$W_s = \frac{N}{K}$$

- Referenčna energija pa je energija referenčnega števca električne energije W_N pomnožena s tokovno konstanto $K_i = I_{pn}/I_{sn}$, ker je instrument na sekundarni strani tokovnega transformatorja.

$$W = K_i \cdot W_N$$

- Lastni pogrešek je tako

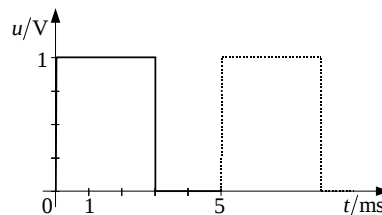
$$e = \frac{W_s - W}{W} = \frac{\frac{174\text{ vrt.}}{600\text{ vrt/kWh}} - \frac{10\text{ A}}{1\text{ A}} \cdot 29,18\text{ Wh}}{\frac{10\text{ A}}{1\text{ A}} \cdot 29,18\text{ Wh}} = -0,0062 \rightarrow e = -0,62\%$$

- Števec je prestal preskus, saj je lastni pogrešek e manjši kot dopustna maksimalna vrednost lastnega pogreška m , ki jo določena z razredom $\textcircled{r}$ podanim na izmerjeno vrednost kot referenčno vrednostjo:

$$|e| = 0,0062 < m = \frac{r}{100} = 0,02$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko časa po prehodu v novo stacionarno stanje moramo počakati z meritvijo napetosti $U = 1\text{V}$ z digitalnim voltmetrom ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$; $U_D = 1,200\text{V}$), katerega dinamično obnašanje aproksimiramo s členom prvega reda $f_m = 1\text{kHz}$, da bo dinamični pogrešek zanemarljiv? Skicirajte približni potek dinamičnega pogreška $E(t)$ za dani vhodni signal?



Rešitev:

- Karakteristika odziva člena 1. reda na stopničasto obliko signala je:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = 1 - e^{-t/\tau}$$

- Dinamični pogrešek predstavlja razliko med izmerjeno (izhodno) vrednostjo in pravo (vhodno) vrednostjo signala.. V relativni obliki ga zapišemo:

$$e_{din} = \frac{U_{iz} - U_{vh}}{U_{vh}} = \frac{U_{iz}}{U_{vh}} - 1 = -e^{-t/\tau}$$

- Ima negativni predznak in eksponentno upada v odvisnosti od časovne konstante: $\tau = \frac{1}{2\pi f_m} = 159,2\mu\text{s}$

- Ker ima sistematični značaj pogreška, je zanemarljiv, kadar je dovolj majhen proti standardni negotovosti merilnega rezultata:

$$|e_{din}| \leq \frac{1}{10} w(U)$$

- Kadar je podana mejna vrednost lastnega pogreška, privzamemo enakomerno pravokotno porazdelitev pogreška in zapišemo standardno negotovost v relativni obliki:

$$w(U) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_U}{U} = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} + 10^{-3} \frac{U_D}{U}) = 1,27 \cdot 10^{-3}$$

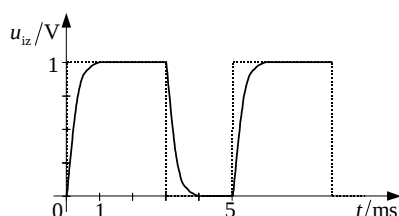
- Dinamični pogrešek mora biti manjši od:

$$|e_{din}| \leq \frac{1}{10} w(U) \rightarrow e^{-t/\tau} \leq 1,27 \cdot 10^{-4}$$

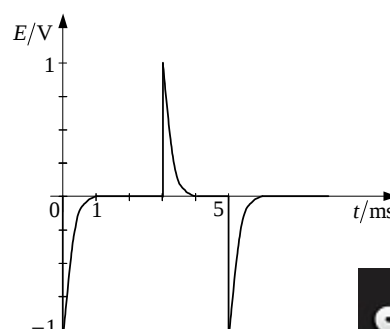
- in odzivni čas daljši od:

$$t \geq -\tau \ln(1,27 \cdot 10^{-4}) \rightarrow t \geq 1,428\text{ms}$$

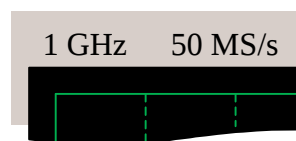
- Skica pogreška:



→



2. Z digitalnim osciloskopom merimo divžni čas T_r neperiodičnega digitalnega signala, katerega prava vrednost znaša $T_r = 1\text{ ns}$. Kakšen divžni čas T_r' izmerimo, če je osciloskop označen tako kot na izseku na sliki?



Rešitev:

- Z levo oznako na digitalnem osciloskopu je podana pasovna širina oziroma mejna frekvenca:

$$B = f_{m,zg} - f_{m,sp} \doteq f_{m,zg} \Big|_{f_{m,sp} < 10\text{ Hz}} = 1\text{ GHz}$$

- z desno pa vzorčna frekvenca:

$$f_s = 50\text{ M} \frac{\text{vzorcev(Samples)}}{\text{sekundo}} = 50\text{ MHz}$$

- Ker gre za neperiodičen signal, lahko pomerimo divžni čas samo z enkratnim proženjem.

- Če bi imeli dovolj veliko vzorčno frekvenco, tako da bi bilo veliko število vzorcev v divžnem času tudi pri enkratnem proženju, bi bil skupni divžni čas $T_{r,sk}$ geometrijsko podaljšan zaradi dinamičnega prispevka osciloskopa:

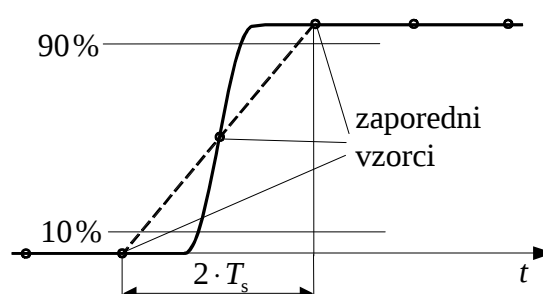
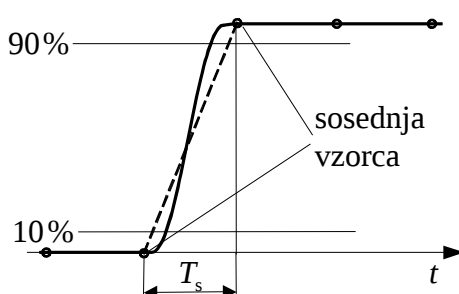
$$T_{r,sk} = \sqrt{T_{r,DSO}^2 + T_r^2} = \sqrt{\left(\frac{0,35}{f_m}\right)^2 + T_r^2} = \sqrt{(0,35\text{ ns})^2 + (1\text{ ns})^2} = 1,06\text{ ns}$$

- Ta divžni čas je precej krajši od vzorčnega časa $T_s = 1/f_s = 20\text{ ns}$, zato bo izmerjeni divžni čas T_r' pri enkratnem proženju odvisen le od periode vzorčenja T_s in bo zaradi nesinhronizacije z merjenim signalom zavzel vrednosti med

$$0,8 \cdot T_s \leq T_r' \leq 1,6 \cdot T_s$$

$$\text{oz. } \frac{0,8}{50\text{ MHz}} \leq T_r' \leq \frac{1,6}{50\text{ MHz}},$$

- kar pomeni $16\text{ ns} \leq T_r' \leq 32\text{ ns}$



3. Rezultat kalibracije voltmetra v štirih točkah je prikazan v tabeli. Prva kolona predstavlja referenčno vrednost, druga kolona kaže izmerjeno vrednost. Preračunana merilna negotovost voltmetra je 0,3V. Koliko znaša pogrešek kalibriranega instrumenta (kolona tri) in koliko je korekcija kalibriranega instrumenta (kolona štiri)?

U_{ref}/V	U_i/V	E/V	K/V
10,0	10,2		
15,0	14,9		
20,0	19,8		
25,0	25,1		

Pri uporabljanju voltmetra ste izmerili 10,1V . Zapišite enačbo in pravo vrednost rezultata!

Rešitev:

- Pogrešek kalibriranega instrumenta je razlika izmerjene vrednosti in referenčne vrednosti. Korekcija pa ima obratni predznak pogreška in se prišteva k rezultatu.

U_{ref}/V	U_i/V	E/V	K/V
10,0	10,2	+ 0,2	- 0,2
15,0	14,9	- 0,1	+0,1
20,0	19,8	- 0,2	+0,2
25,0	25,1	+0,1	- 0,1

- Če pri uporabi instrumenta izmerimo z voltmetrom 10,1V , znaša prava vrednost

$$U = U_i + K = 10,1\text{V} + (-0,2\text{V}) = 9,9\text{V}$$

- pri tem uporabimo korekcijo $K = -0,2\text{V}$ za izmerjeno točko $U_i = 10,2\text{V}$ iz tabele, saj sta vrednosti 10,1V in 10,2V zelo blizu ($\Delta U/U \approx 1\%$) in se lastni pogrešek instrumenta zelo malo spremeni $E_{10,1\text{V}} \approx E_{10,2\text{V}}$.

- Merilni rezultat je enak

$$\underline{\underline{U = 9.9\text{V} \quad , \quad u(U) = 0,3\text{V} \quad , \quad n = 1}}$$

4. Prikrojena veličinska enačba $E/(V/m) \approx 0,3 \frac{\sqrt{P/kW}}{r/km}$ podaja jakost električnega polja na razdalji r od izvora, ki seva z močjo P . Ali je uporabna za približno oceno, če je ustrezna veličinska enačba $E = \sqrt{P/2\pi\epsilon_0 c_0 r^2}$ $\epsilon_0 \approx 8,85 \text{ pF/m}$, $c_0 \approx 300\,000 \text{ km/s}$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P/2\pi\epsilon_0 c_0 r^2}$
- Pri prehodu na prikrojeno veličinsko enačbo moramo vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, množiti in deliti z željeno enoto :

$$E \frac{V/m}{V/m} = \sqrt{P \frac{kW}{kW} / \epsilon_0 c_0 2\pi \left(r \frac{km}{km} \right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številski faktor:

$$E/V/m = \sqrt{P/kW / (r/km)^2} \cdot \frac{\sqrt{10^3 W}}{V/m} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 c_0 2\pi}} \frac{1}{10^3 m} = \sqrt{P/kW / (r/km)^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

- $K = \frac{\sqrt{10^3 VA}}{10^3 V} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 c_0 2\pi}}$

- Upoštevajoč vrednosti za $\epsilon_0 \doteq 8,85 \text{ pF/m}$ in $c_0 \doteq 300\,000 \text{ km/s}$

dobimo: $K = \frac{\sqrt{10^3}}{10^3} \frac{\sqrt{VA}}{V} \sqrt{\frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot 2\pi \cdot 300 \cdot 10^6 \text{ m/s}}}$

- in končno $K = 3,1623 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{A}{V}} \sqrt{60 \frac{s}{F}} = 0,245 \sqrt{\frac{A}{V} \cdot \frac{V}{As}} = 0,245$

- Prikrojena veličinska enačba je: $E/V/m = 0,245 \cdot \sqrt{P/kW} / r/km$

- Enačba $E/(V/m) \approx 0,3 \frac{\sqrt{P/kW}}{r/km}$ je neuporabna, ker je sistematični pogrešek večji, kot je pogrešek zaokrožitve koeficienta na eno cifro $K = 0,245 \rightarrow 0,2$ ($e = \frac{0,2}{0,245} - 1 = -0,184 \rightarrow e = -18,4\%$):

$$e = \frac{0,3}{0,245} - 1 = 0,224 \rightarrow e = 22,4\%$$

5. Katere vrednosti lahko pričakujemo s 95 odstotno verjetnostjo na prikazovalniku voltmetra, ko merimo napetost vira, ki ima notranjo upornost $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ in napetost praznega teka, ki je bila določena na podlagi devetih meritev:

$$U_0 = 6,8925 \text{ V}, u(U_0) = 20 \text{ mV} \quad (n = 9) ?$$

Uporabljeni voltmeter ima podatke:
 $M_U = \pm(0,02\%U + 0,01\%U_D + 2\text{dig})$ $U_D = 10 \text{ V}$,
 $R_V = 10 \text{ M}\Omega$, ločljivost $\Delta U_q = 100 \mu\text{V}$

Negotovosti notranje upornosti R_0 in upornosti voltmetra R_V zanemarite!

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(v)$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Napetostni delilnik nam da: $U_V = U_0 \frac{R_V}{R_0 + R_V} = U_0 \cdot 0,999 = 6,885614 \text{ V}$
- Standardna negotovost je sestavljena iz prispevka voltmetra – negotovost tipa B - in prispevka negotovosti napetosti na vhodu, ki je bila ocenjena z devetimi meritvami – negotovost tipa A:

$$u_B(U_V) = \frac{1}{\sqrt{3}} M_U = \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \cdot 10^{-4} U_V + 1 \cdot 10^{-4} U_D + 0,2 \text{ mV}) = 1,488 \text{ mV}$$

$$u_A(U_V) = \frac{\partial U_V}{\partial U_0} u_A(U_0) = \frac{R_V}{R_0 + R_V} u_A(U_0) = 19,98 \text{ mV} \rightarrow u_A(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- Skupno standardno negotovost sestavljata oba prispevka.:

$$u_c(U_V) = \sqrt{u_A^2(U_V) + u_B^2(U_V)} = 20,05 \text{ mV} \rightarrow u_c(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- v danem primeru je prispevek negotovosti tipa A prevladujoč. Zato je prevladujoča tudi porazdelitev pogreška tega prispevka.
- Ker je skupna standardna negotovost tipa A dobljena na manjšem številu meritev, uporabimo pri določanju faktorja razširitve t-porazdelitev in število prostostnih stopenj $\nu_{\text{eff}} = n - 1 = 9 - 1 = 8$
 - Iz tabele dobimo za faktor razširitve: $\nu_{\text{eff}} = 8 \rightarrow k = t_{95\%} = 2,31$
- Razširjena negotovost je: $U_{95}(U_V) = t_{95\%} \cdot u_c(U_V) = 46,2 \text{ mV}$
- S 95 odstotno verjetnostjo lahko pričakujemo rezultate med $U_V - U_{95}(U_V)$ in $U_V + U_{95}(U_V)$:

$$6,839414 \text{ V} < U_V < 6,931814 \text{ V} \rightarrow 6,8394 \text{ V} < U_V < 6,9318 \text{ V}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko je največji informacijski pretok digitalnega voltmetra, ki ima merilno območje $-200\text{ V} \dots +200\text{ V}$, mejo pogreška $M_U = \pm(0,05\%U + 2\text{ dig})$, ločljivost $\Delta U_q = 10\text{ mV}$ in naredi 15 meritev v sekundi?

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar je pogrešek odvisen od izmerjene vrednosti v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj v območju od $x_{\min}$ do $x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m_{\max} = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2(ax + b)} \Rightarrow m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max} + b}{ax_{\min} + b} \right|$$

- Če vzamemo za enoto informacije bit, ustreza številu amplitudnih stopenj m naslednja množina informacije kot dvojiški logaritem m :

$$S = \text{lb}(m) = \log_2(m)$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas $T_M = 1/f_M$, je hitrost prenosa ali **informacijski pretok** enak:

$$I = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m) = \frac{S}{T_M} = f_M \cdot S$$

- Za dani voltmeter zapišemo mejni pogrešek v obliki:

$$M_U = \pm(0,05\%U + 2\text{ dig}) = 0,5 \cdot 10^{-3}U + 20\text{ mV}$$

- In maksimalno število neodvisnih amplitudnih stopenj na merilnem območju ($x_{\min} = -200\text{ V}$, $x_{\max} = +200\text{ V}$):

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 200\text{ V} + 20\text{ mV}}{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot (-200\text{ V}) + 20\text{ mV}} \right| = 406,5$$

- Največja množina informacije in maksimalni informacijski pretok sta:

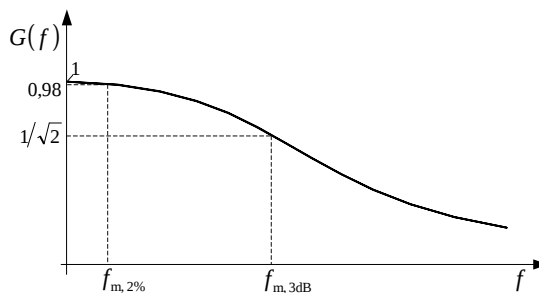
$$S = \text{lb}(m_{\max}) = 8,67\text{ bit} \Rightarrow I_{\max} = f_M \cdot S = 130,0\text{ bit/s}$$

2. Do katere frekvence signalna smemo uporabljati digitalni spominski osciloskop ($B = 100 \text{ MHz}$; člen 1. reda; $f_s = 10 \text{ MHz}$), da bo amplitudni pogrešek pri večkratnem proženju pod dvema odstotkoma? Do katere frekvence uporabljamo DSO pri enkratnem proženju (točkovno prikazovanje)? Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Pri **večkratnem proženju**, kjer imamo dovolj vzorcev v opazovanem signalu, določa obnašanje osciloskopa karakteristika člena 1. reda.
- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega (prikazanega) signala pri sinusnem vzbujanju zapišemo z uporabo mejne frekvence:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$



- Mejna frekvenca je določena s pasovno širino:

$$B = f_{m,zg} - f_{m,sp} \doteq f_{m,zg} \Big|_{f_{m,sp} < 10 \text{ Hz}} = 100 \text{ MHz}$$

- Nas zanima, do katere frekvence upade amplituda za manj kot 2% .

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}} = 0,98$$

- in od tod dobimo

$$f_{m,2\%} = f_m \sqrt{\left(\frac{1}{0,98}\right)^2 - 1} = 20,3 \text{ MHz}$$

- Pri **enkratnem proženju** in točkovni podaji moramo za dobro razpoznavanje sinusnega signala imeti dovolj veliko število vzorcev na periodo (25), zato je uporabna pasovna širina:

$$B_{pt} = \frac{f_s}{25} = \frac{10 \text{ MHz}}{25} = 400 \text{ kHz}$$

- Do te frekvence je priporočeno uporabljati DSO pri enkratnem proženju in točkovni podaji signala.

3. Digitalni ampermeter kaže $I = 17,24 \text{ mA}$. Izračunajte merilni rezultat, če smo instrument uporabili pri temperaturi $t = 46^\circ \text{C}$!

- meja pogreška: $M_I = \pm(0,15\% I + 2 \text{ dig})$
- referenčno območje: $23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$
- nazivno območje: $0^\circ \text{C} \div 55^\circ \text{C}$
- temperaturni koeficient: $\pm(0,015\% I + 1 \text{ dig})/^\circ \text{C}$

Rešitev:

- Če bi uporabili instrument pri referenčnih pogojih, bi bila meja lastnega pogreška:

$$M_I = \pm \left(\frac{0,15}{100} 17,24 \text{ mA} + 0,02 \text{ mA} \right) = \pm 45,86 \mu\text{A}$$

- Ker smo instrument uporabili izven referenčnega območja v nazivnem območju uporabe za vplivno veličino temperaturo, se meja pogreška poveča za mejo spremembe kazanja $M_{I,s} = M_I + M_I^0$. V našem primeru smo izstopili iz referenčnega območja na zgornji meji pri $23^\circ \text{C} + 5^\circ \text{C} = 28^\circ \text{C}$, zato moramo upoštevati razliko temperature od te vrednosti:

$$M_I^0 = \pm \left(\left(\frac{0,015}{100} 17,24 \text{ mA} + 0,01 \text{ mA} \right) / ^\circ \text{C} \right) \cdot (46^\circ \text{C} - 28^\circ \text{C}) = \pm 226,5 \mu\text{A}$$

- Skupna meja pogreška (lastnega in spremembe kazanja) je:

$$M_{I,s} = M_I + M_I^0 = \pm 0,2724 \text{ mA}$$

- in standardna negotovost pri privzeti pravokotni porazdelitvi gostote verjetnosti pogreška:

$$u(I) = \frac{M_{I,s}}{\sqrt{3}} = 0,157 \text{ mA} = 0,16 \text{ mA}$$

- Merilni rezultat podamo v obliki:

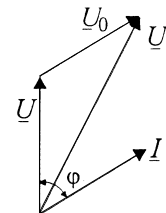
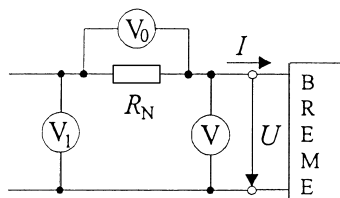
$$I = 17,24 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,16 \text{ mA}, \quad n = 1$$

4. Izrazite merilni rezultat za delovno moč $P = (U_1^2 - U^2 - U_0^2) / (2R_N)$ s standardno negotovostjo, če je $U_1 = 170 \text{ V}$, $U = U_0 = 100 \text{ V}$, $M_{U_1} = M_U = M_{U_0} = \pm 1 \text{ V}$, $R_N = 10 \text{ k}\Omega$, $M_{R_N} = \pm 50 \Omega$!

Rešitev:

- Delovna moč za dane podatke je

$$P = \frac{(170 \text{ V})^2 - 2 \cdot (100 \text{ V})^2}{2 \cdot 10 \text{ k}\Omega} = 445 \text{ mW}$$



- Celotno standardno negotovost sestavljajo deleži neposredno merjenih veličin:

$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P)}$$

- Deleži neposredno merjenih veličin tvorijo faktorji občutljivosti in ustrezne negotovosti:

$$u_1(P) = |c_1| u(U_1) = \left| \frac{\partial P}{\partial U_1} \right| u(U_1) = \frac{U_1}{R_N} u(U_1),$$

$$u_2(P) = |c_2| u(U) = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| u(U) = \frac{U}{R_N} u(U)$$

$$u_3(P) = |c_3| u(U_0) = \left| \frac{\partial P}{\partial U_0} \right| u(U_0) = \frac{U_0}{R_N} u(U_0)$$

$$u_4(P) = |c_4| u(R_N) = \left| \frac{\partial P}{\partial R_N} \right| u(R_N) = \frac{P}{R_N} u(R_N)$$

- Negotovosti voltmetrov so enake: $u(U_1) = u(U) = u(U_0) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = 0,578 \text{ V}$

- Negotovost upora R_N , ki služi posredno za merjenje toka, je:

$$u(R_N) = \frac{M_{R_N}}{\sqrt{3}} = 28,9 \Omega$$

- Ovrednotena celotna standardna negotovost je tako:

$$u_c(P) = \sqrt{\frac{(U_1^2 + U^2 + U_0^2)}{R_N^2} u^2(U) + \left(\frac{P}{R_N} \right)^2 u^2(R_N)} = \sqrt{1,63 \cdot 10^{-4} \text{ W}^2 + 1,65 \cdot 10^{-6} \text{ W}^2} = 12,8 \text{ mW}$$

- Zaokrožen merilni rezultat je:

$$P = 445 \text{ mW}, \quad u_c(P) = 13 \text{ mW}, \quad n = 1$$

5. Izpeljite številsko enačbo za delovno moč (merjenje z elektronskim osciloskopom: $P = f C k_x k_y A$), če uporabljamo enote: $[P] = \mu\text{W}$, $[f] = \text{Hz}$, $[C] = \text{nF}$, $[k_x] = [k_y] = \text{V/d}$ ($1\text{d} = 0,5\text{in}$, $1\text{in} = 25,4\text{mm}$), $[A] = \text{cm}^2$ in jo uporabite za naslednje podatke: $f = 50\text{Hz}$, $C = 47,3\text{nF}$, $k_x = 5\text{V/d}$, $k_y = 2\text{V/d}$ in $A = 35,8\text{cm}^2$!

Rešitev:

- Izrazimo veličine kot produkt številске vrednosti in enot

$$\{P\}[P] = \{f\}[f]\{C\}[C]\{k_x\}[k_x]\{k_y\}[k_y]\{A\}[A]$$

- in preoblikujemo v

$$\{P\} = \{f\}[C]\{k_x\}\{k_y\}[A] \frac{[f][C][k_x][k_y][A]}{[P]}.$$

- Vstavimo za splošne enote posameznih veličin enote, katere želimo uporabljati

$$\frac{[f][C][k_x][k_y][A]}{[P]} = \frac{\text{Hz nF} \frac{\text{V}}{12,7\text{mm}} \frac{\text{V}}{12,7\text{mm}} \text{cm}^2}{\mu\text{W}} = \frac{\text{Hz } 10^{-9}\text{F} \left(\frac{\text{V}}{12,7 \cdot 10^{-3}\text{m}} \right)^2 10^{-4}\text{m}^2}{10^{-6}\text{W}} = 6,2 \cdot 10^{-4}$$

- kjer smo uporabili enoto za $[k_x] = [k_y] = \frac{\text{V}}{\text{d}} = \frac{\text{V}}{0,5 \cdot 25,4\text{mm}} = \frac{\text{V}}{12,7\text{mm}}$

- Želena številška enačba se tako glasi:

$$\{P\} = 6,2 \cdot 10^{-4} \{f\}[C]\{k_x\}\{k_y\}[A]$$

- Izračunajmo delovno moč za dane vrednosti:

$$\{P\} = 6,2 \cdot 10^{-4} \cdot 50 \cdot 47,3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 35,8 = 524,9354 \quad (\text{v } \mu\text{W})$$

- Za rezultat dobimo le številsko vrednost. Zato moramo pri uporabi številskih enačb vedno navesti, za kakšne enote veljajo.

- Za naš primer:

$$\{P\} = 6,2 \cdot 10^{-4} \{f\}[C]\{k_x\}\{k_y\}[A] \left(\frac{P}{\mu\text{W}}, \frac{f}{\text{Hz}}, \frac{C}{\text{nF}}, \frac{k_x}{\text{V/d}}, \frac{k_y}{\text{V/d}}, \frac{A}{\text{cm}^2} \right)$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. V kakšnem razmerju so si mejne vrednosti pogreškov, če imamo enakomerno, trikotno, trapezno ($\beta = 0,66$) in Gaussovo ($z = 3$) porazdelitev gostote verjetnosti pogreška z enakimi standardnimi odkloni (negotovostmi) $\sigma_e = \sigma_{tri} = \sigma_{tra} = \sigma_G = \sigma$? Skicirajte!

Rešitev:

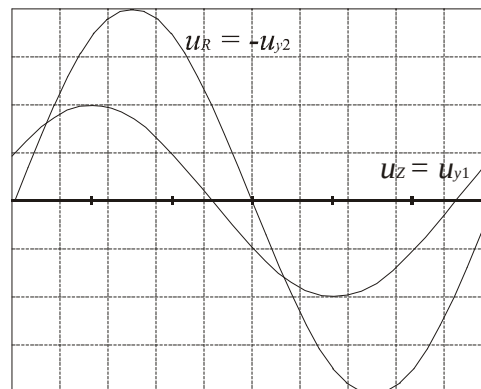
- Razmerja mejnih vrednosti pogreškov proti standardnim odklonom za različne porazdelitve:
 - Enakomerna porazdelitev: $M_e = \sqrt{3} \cdot \sigma$
 - Trikotna porazdelitev: $M_{tri} = \sqrt{6} \cdot \sigma$
 - Trapezna porazdelitev: $M_{tra} = \sqrt{6} / \sqrt{1 + \beta^2} \cdot \sigma = \sqrt{6} / \sqrt{1 + 0,66^2} \cdot \sigma$
 - Gaussova porazdelitev: $M_G = z \cdot \sigma = 3 \cdot \sigma$

Razmerja mejnih pogreškov:

$$M_e : M_{tri} : M_{tra} : M_G = \sqrt{3} \cdot \sigma : \sqrt{6} \cdot \sigma : \sqrt{6} / \sqrt{1 + 0,66^2} \cdot \sigma : 3 \cdot \sigma$$

$$M_e : M_{tri} : M_{tra} : M_G = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{2}/1,2 : \sqrt{3}$$

2. Dvokanalni osciloskop ima na zaslonu prikazano sliko. Časovno bazo proži kanal-1. Frekvenca je $f = 50 \text{ kHz}$, $k_{y1} = k_{y2}$. Kakšen je nivo proženja N ? Kakšna je strmina proženja S ? Koliko je odklonski koeficient časovne baze k_t ? Podajte enačbo, ki kaže odvisnost $\underline{Z}$ od R ?



Rešitev:

- Nivo proženja je: $N = \frac{\hat{u}_{y1}}{2} = \frac{\hat{u}_R}{4}$
- Strmina proženja je naraščajoča, ker je referenčna točka začetka odklanjanja na levem robu zaslona osciloskopa in v tej točki signal u_{y1} narašča: $S > 0$
- Odklonski koeficient časovne baze je: $k_t = \frac{1}{50 \text{ kHz} \cdot 10 \text{ d}} = 2 \text{ } \mu\text{s/d}$
- Funkcijska odvisnost impedance in upornosti je: $\underline{Z} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot e^{j30^\circ}$

3. Narišite vezje za merjenje upornosti $R_x \approx 100\Omega$ ($P_{\max} = 1W$) z U-I metodo in izberite merilna območja tako, da bo merilna negotovost najmanjša. Slednjo izračunajte! Izberite varianto z manjšim sistematičnim pogreškom.

- voltmeter: $U_D = (1, 10, 100)V$, $R_{V_0} = 10k\Omega/V$, $r = 0,2$
- ampermeter: $I_D = (50, 100, 500)mA$, $U_{A_0} = 0,2V$, $r = 0,2$

Rešitev:

- Maksimalni dopustni vrednosti U in I na upor omejujeta izbor merilnih območij:

$$R = 100\Omega, P_{\max} = 1W \Rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{R}} = 100mA \text{ oz. } U_{\max} = \sqrt{P_{\max} \cdot R} = 10V$$

- Skupno negotovost upornosti določata negotovosti merjenja napetosti in toka
 $w(R) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)}$:

$$w(U) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100} \frac{U_D}{U} \quad \text{in} \quad w(I) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100} \frac{I_D}{I}$$

- Relativna oblika negotovosti je v obeh primerih najmanjša, kadar je odčitek blizu merilnega dosega:

$$U \approx U_D \Rightarrow w(U)_{\min} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100} \quad \text{in} \quad I \approx I_D \Rightarrow w(I)_{\min} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100}$$

- Za dani upor in merilne dosege instrumentov je to možno doseči z $U_D = 10V$ in $I_D = 100mA$.
- Skupna minimalna standardna negotovost je tako:

$$w(R) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \sqrt{1^2 + 1^2} = 1,633 \cdot 10^{-3}$$

- Za izbor variante z manjšim sistematičnim pogreškom potrebujemo še upornosti instrumentov:

$$U_D = 10V \Rightarrow R_V = R_{V_0} \cdot U_D = 10k\Omega/V \cdot 10V = 100k\Omega$$

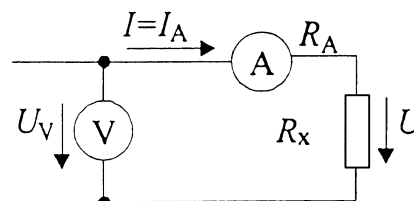
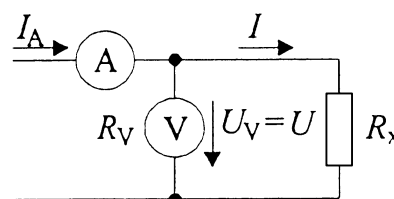
$$I_D = 100mA \Rightarrow R_A = \frac{U_{A_0}}{I_D} = \frac{0,2V}{100mA} = 2\Omega$$

- Kadar priključimo voltmeter neposredno na upor, je tok ampermetra prevelik za tok skozi končno upornost voltmetra. Sistematični pogrešek je sorazmeren razmerju R_x/R_V :

$$e_1 = -\frac{R_x}{R_x + R_V} \doteq -\frac{R_x}{R_V} \doteq -10^{-3}$$

- Če priključimo ampermeter neposredno pred upor, je napetost voltmetra prevelika za padec na upornosti ampermetra. Sistematični pogrešek je sorazmeren kvocientu:

$$e_2 = -\frac{R_A}{R_x} = -2 \cdot 10^{-2}$$



- Izberemo prvo varianto z manjšim sistematičnim pogreškom $|e_1| < |e_2|$

4. Do katere frekvence smemo uporabljati uporovni etalon (člen 1. reda), s časovno konstanto $\tau = 20\text{ ns}$, da ne bo fazni zamik večji od 1° . Za koliko odstotkov pri tej frekvenci odstopa Z od R_N ?

Rešitev:

- Frekvenčna karakteristika člena 1. reda je:

$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

- Od tod dobimo iz razmerja imaginarnega in realnega dela karakteristike $\text{tg}\varphi = \frac{\Im(G)}{\Re(G)}$ fazno karakteristiko $\varphi = -\text{atg}(\omega\tau)$.

- Iskana frekvenca za fazni zamik 1° je:

$$\text{tg}\varphi = \omega\tau \quad \rightarrow \quad f = \frac{\text{tg}\varphi}{2\pi\tau} = 138,9\text{ kHz}$$

- Odstopanje impedance Z od vrednosti pri enosmernem vzbujanju R_N določa amplitudna karakteristika člena 1. reda:

$$\frac{Z}{R_N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} = 0,9998477$$

- Pri frekvenci $f = 138,9\text{ kHz}$ odstopa Z od R_N za:

$$\Delta Z = 1 - 0,999848 = 1,52 \cdot 10^{-4}$$

5. Kot je znano, znaša permeabilnost vakuumu (magnetna konstanta) točno $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ hitrost svetlobe pa točno $299\,792\,458 \text{ m/s}$. Razložite zakaj! Ali poznate še kakšno veličino, katere vrednost je znana absolutno točno?

Rešitev:

- Absolutna točnost magnetne konstante za permeabilnost vakuumu $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ je posledica definicije ampera:

- Amper je nespremenljiv električni tok, ki pri prehodu skozi dva premočrtna, vzporedna, neskončno dolga vodnika zanemarljivega krožnega prereza, postavljena v vakuumu v medsebojni razdalji 1 metra, povzroča med njima silo $2 \cdot 10^{-7}$ newtna na meter dolžine.

$$F = lIB = l\mu_0 \frac{I^2}{2\pi d} \quad \Rightarrow \quad \mu_0 = \frac{F}{l} \frac{2\pi d}{I^2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}} \frac{2\pi \cdot 1\text{m}}{(1\text{A})^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

- Svetlobna hitrost je določena preko definicije za meter:
 - Meter je dolžina poti, ki jo v vakuumu napravi svetloba v $1/299\,792\,458$ sekunde.
- Tudi električna konstanta ϵ_0 je preko svetlobne hitrosti v vakuumu $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ absolutno točno določena z enačbo:

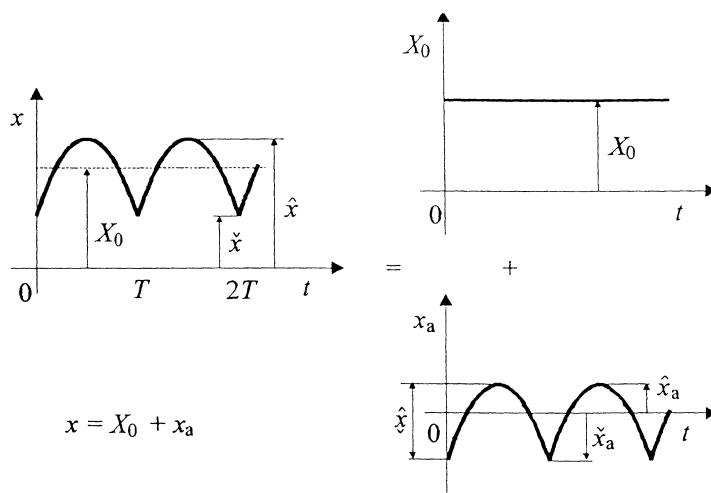
$$c^2 \mu_0 \epsilon_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Naštejte parametre, ki določajo pulzirajočo periodično veličino. Skicirajte jih in opišite v enačbah! Kako je določena efektivna valovitost?

Rešitev:

- Pulzirajoča** veličina je sestavljena iz **enosmerne** in **izmenične** komponente:



- **Maksimalno** vrednost označujemo z $\hat{x}$ ali x_m ,
- **Minimalno** vrednost označujemo z $\check{x}$ ali $x_{\min}$,
- **Enosmerno** komponento označujemo z X_0 ,
 - **Aritmetična srednja vrednost** – povprečna vrednost – je enaka enosmerni komponenti: $\overline{X} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = X_0$, ker je povprečna vrednost **izmenične** komponente x_a nič: $\overline{X}_a = \frac{1}{T} \int_0^T x_a(t) dt = 0$
- **Efektivna vrednost** pulzirajoče veličine: $X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$
 - če upoštevamo $x(t) = X_0 + x_a(t)$, dobimo: $X = \sqrt{X_0^2 + X_a^2}$
- Če pulzirajoča veličina ne spreminja predznaka, jo imenujemo **valovita veličina**.
 - Kadar je enosmerna komponenta primarnega pomena, podamo **valovitost** z najbolj pogosto uporabljeno **efektivno valovitostjo**: $r = \frac{X_a}{|X_0|}$
 - kjer je $X_a = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x_a^2(t) dt}$ efektivna vrednost izmenične komponente in $|X_0|$ absolutna vrednost enosmerne komponente.

2. Na zaslonu osciloskopa ($B=10\text{MHz}$; člen 1. reda) imamo zajeto periodo napetosti signala $u = \hat{u} \cdot \sin(20\pi t/\mu\text{s})$. Podajte merilni rezultat za efektivno in temensko vrednost napetosti signala na vhodu! Položaj signala smo sposobni oceniti z ločljivostjo $0,2\text{mm}$. $\hat{y} = 4,30\text{d}$, $k_y = 0,5\text{V/d}$, $m_y = 2 \cdot 10^{-2}$, $1\text{d} = 10\text{mm}$, $k_t = ?$

Rešitev:

- Frekvenca vhodnega signala je: $2\pi ft = 20\pi t/\mu\text{s} \rightarrow f = 10/\mu\text{s} = 10\text{MHz}$
 - Ker je x-os osciloskopov tipično razdeljena na 10 delov, mora biti konstanta časovne baze enaka:

$$10\text{d} \cdot k_t = T = 1/f \rightarrow k_t = \frac{1}{f} \frac{1}{10\text{d}} = \frac{10\text{ns}}{\text{d}}$$

- Ker je frekvenca signala enaka zgornji mejni frekvenci $B = f_m = f$ in za člen 1. reda velja $\hat{u}_{\text{prikaz}} = \hat{u}/\sqrt{2}$, dobimo za temensko napetost sinusnega signala na vhodu osciloskopa:

$$\hat{u}_{\text{prikaz}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \rightarrow \hat{u} = \sqrt{2} \cdot \hat{u}_{\text{prikaz}} = \sqrt{2} \cdot 4,30\text{d} \cdot 0,5\text{V/d} = 3,0406\text{V}$$

- in za efektivno napetost: $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 2,15\text{V}$
- Standardno negotovost prikaza na osciloskopu določata prispevka mejnega pogreška osciloskopa in pogrešek ločljivosti pri odčitku temenske vrednosti $\hat{y} = 4,30\text{d} \cdot 10\text{mm/d} = 43\text{mm}$:

$$w(y) = \sqrt{\left(\frac{m_y}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{3}y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,2\text{mm}}{2\sqrt{3} \cdot 43\text{mm}}\right)^2} = 0,0116 \rightarrow 0,012$$

- Merilni rezultat za temensko vrednost napetosti signala na vhodu je tako:

$$\hat{u} = 3,041\text{V} \quad , \quad u(\hat{u}) = \hat{u} \cdot w(y) = 0,0365\text{V} \rightarrow u(\hat{u}) = 0,037\text{V}, \quad n = 1$$

- in merilni rezultat za efektivno vrednost napetosti signala na vhodu:

$$U = 2,150\text{V} \quad , \quad u(U) = U \cdot w(y) = 0,0258\text{V} \rightarrow u(U) = 0,026\text{V}, \quad n = 1$$

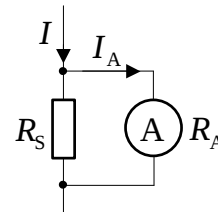
3. Ampermetru želimo s souporom razširiti merilno območje na $I'_D = 2\text{ A}$. Določite soupor tako, da bo standardna negotovost tokovnega delilnika zanemarljiva! Skicirajte vezje.

- ampermeter: $I_D = 200,0\text{ mA}$; $U_{A_0} = 200\text{ mV}$; $M_I = \pm(0,6\%I + 1\text{dig.})$; $m_{R_A} = \pm 5 \cdot 10^{-4}$

Rešitev:

- Merilno območje ampermetra razširimo s souporom R_S kot kaže

vezje in dobimo tokovni delilnik: $I_A = I \frac{R_S}{R_S + R_A}$



- Delilno razmerje je:

$$K = \frac{I_A}{I} = \frac{R_S}{R_S + R_A} = \frac{I_D}{I'_D} = \frac{200\text{ mA}}{2\text{ A}} = \frac{1}{10}$$

- Po izračunu upornosti ampermetra $R_A = \frac{U_{A_0}}{I_D} = \frac{200\text{ mV}}{200,0\text{ mA}} = 1\Omega$ določimo še

iskano vrednost upornosti soupora: $R_S = \frac{KR_A}{1-K} = 0,1111\Omega$

- Standardno negotovost delinika, ki jo sestavljata negotovost upornosti ampermetra $w(R_A)$ in iskana negotovost soupora $w(R_S)$, zapišemo:

$$w(K) = \frac{u(K)}{K} = \frac{1}{K} \sqrt{\left(\frac{\partial K}{\partial R_S} u(R_S)\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial R_A} u(R_A)\right)^2}$$

- Faktorja občutljivosti sta: $\frac{\partial K}{\partial R_S} = \frac{R_A}{(R_A + R_S)^2}$ in $\frac{\partial K}{\partial R_A} = -\frac{R_S}{(R_A + R_S)^2}$

$$w(K) = \sqrt{\left(\frac{(R_A + R_S)}{R_S} \frac{R_A}{(R_A + R_S)^2} u(R_S)\right)^2 + \left(\frac{(R_A + R_S)}{R_S} \frac{R_S}{(R_A + R_S)^2} u(R_A)\right)^2}$$

$$w(K) = \frac{R_A}{R_A + R_S} \sqrt{\left(\frac{u(R_S)}{R_S}\right)^2 + \left(\frac{u(R_A)}{R_A}\right)^2}$$

- Negotovost delinika je zanemarljiva, če velja: $w(K) \leq \frac{w(I)}{5}$

- Standardno merilno negotovost zaradi ampermetra določimo iz meje pogreška:

$$M_I = \pm(0,6\%I + 0,1\text{mA}), \quad m_I = \frac{M_I}{I} = \pm\left(6 \cdot 10^{-3} + \frac{10^{-4}\text{ A}}{I}\right)$$

- Minimalna vrednost standardne merilne negotovosti v relativni obliki je pri največjem toku $I = I_D$:

$$w(I) = \frac{m_I}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(6 \cdot 10^{-3} + \frac{10^{-4}\text{ A}}{I_D}\right) = 3,75 \cdot 10^{-3} \quad \text{in} \quad w(K) \leq \frac{w(I)}{5} = 7,506 \cdot 10^{-4}$$

- Iskano negotovost soupora $w(R_S)$ določimo iz izraza:

$$w(K) = \frac{R_A}{R_A + R_S} \sqrt{w^2(R_S) + w^2(R_A)}, \quad w(R_A) = m(R_A)/\sqrt{3} = 2,887 \cdot 10^{-4}$$

- Soupore mora biti enak $R_S = 0,1111\Omega$ in imeti standardno negotovost manjšo kot

$$w(R_S) = \sqrt{\left(\frac{R_A + R_S}{R_A}\right)^2 w^2(K) - w^2(R_A)} = 7,9 \cdot 10^{-4}$$

4. Rezultat kalibracije ampermetra v štirih točkah je prikazan v tabeli. Prva kolona predstavlja referenčno vrednost, druga kolona kaže izmerjeno vrednost. Preračunana merilna negotovost ampermetra je 0,1 A. Koliko znaša pogrešek kalibriranega inštrumenta (kolona tri) in koliko je korekcija kalibriranega inštrumenta (kolona štiri)? Pri uporabljanju ampermetra ste izmerili 15 A. Zapišite enačbo in pravo vrednost rezultata!

$I_{\text{ref}} / \text{A}$	I_i / A	E / A	K / A
10,0	9,8		
15,0	15,1		
20,0	19,8		
25,0	25,1		

Rešitev:

- Pogrešek kalibriranega inštrumenta je razlika izmerjene vrednosti in referenčne vrednosti. Korekcija pa ima obratni predznak pogreška in se prišteva k rezultatu.

$I_{\text{ref}} / \text{A}$	I_i / A	E / A	K / A
10,0	9,8	-0,2	0,2
15,0	15,1	0,1	-0,1
20,0	19,8	-0,2	0,2
25,0	25,1	0,1	-0,1

- Če pri uporabi inštrumenta izmerimo z ampermetrom 15 A, znaša prava vrednost

$$\underline{I = I_i + K = 15 \text{ A} + (-0,1 \text{ A}) = 14,9 \text{ A}}$$

- Pri tem smo upoštevali, da se lastni pogrešek instrumenta E v okolici točke kalibracije (primer: $I_i = 15,1 \text{ A} \rightarrow E = 0,1 \text{ A}$) zelo malo spremeni.
- Merilni rezultat pa je enak

$$\underline{I = 14,9 \text{ A} \quad , \quad u(I) = 0,1 \text{ A} \quad , \quad n = 1}$$

5. Izpeljite številsko enačbo za jalovo moč tuljave ($Q = I^2 \omega L$), če so neposredno merjene veličine izražene v A, Hz in mH, jalovo moč pa želimo imeti v enoti kvar!

Rešitev:

- Veličinsko enačbo $Q = I^2 \omega L$ zapišemo s produkti številskih vrednosti in enot:

$$\{Q\}[Q] = \{I\}^2 [I]^2 \{\omega\}[\omega] \{L\}[L]$$

- in preoblikujemo v obliko: $\{Q\} = \{I\}^2 \{\omega\} \{L\} \frac{[I]^2 [\omega] [L]}{[Q]}$

- Kvocien uporabljenih enot je številaska vrednost:

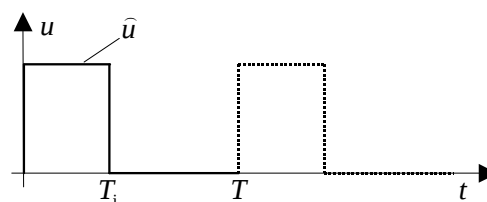
$$\frac{[I]^2 [\omega] [L]}{[Q]} = \frac{\text{A}^2 \cdot \text{Hz} \cdot 10^{-3} \text{H}}{10^3 \text{VA}} = 10^{-6} \frac{\text{AH}}{\text{Vs}} = 10^{-6}$$

- Ker za rezultat dobimo le številsko vrednost, moramo navesti tudi, za kakšne enote velja:

$$\{Q\} = \{I\}^2 \{\omega\} \{L\} \cdot 10^{-6} \rightarrow Q = 10^{-6} I^2 \omega L \quad \left(\frac{Q}{\text{kvar}}, \frac{I}{\text{A}}, \frac{\omega}{\text{Hz}}, \frac{L}{\text{Hz}} \right)$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Voltmetra sta priključena na napetost u . Voltmeter, ki se odziva na srednjo vrednost usmerjene napetosti, kaže $U_1 = 1\text{ V}$, voltmeter, ki se odziva na efektivno vrednosti, kaže pa $U_2 = 2\text{ V}$. Kolikšni so temenska vrednost napetosti $\hat{u}$, relativna širina pulza T_i/T in oblikovni faktor F ?



Rešitev:

- Srednja vrednost usmerjene napetosti: $\overline{|U|} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt = \frac{1}{T} (\hat{u} T_i) = \hat{u} \frac{T_i}{T}$

- Prvi voltmeter je umerjen za sinusno obliko signala in kaže:

$$U_1 = F_0 \cdot \overline{|U|} = F_0 \cdot \hat{u} \frac{T_i}{T}$$

- pri čemer je oblikovni faktor za sinusno obliko: $F_0 = \frac{U}{\overline{|U|}} = 1,111$

- Efektivna vrednost napetosti, ki jo kaže drugi voltmeter, je enaka:

$$U_2 = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\hat{u}^2 \frac{T_i}{T} + 0 \frac{(T - T_i)}{T}} = \hat{u} \sqrt{\frac{T_i}{T}}$$

- Razmerje napetosti je odvisno od relativne širine pulza T_i/T :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\hat{u} \sqrt{\frac{T_i}{T}}}{F_0 \cdot \hat{u} \frac{T_i}{T}} = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{\sqrt{\frac{T_i}{T}}}{\frac{T_i}{T}} = \frac{1}{F_0} \cdot \sqrt{\frac{T}{T_i}}$$

- Od tod sledi $\rightarrow \frac{T}{T_i} = \left(F_0 \cdot \frac{U_2}{U_1} \right)^2 = 4,938$

- Temenska vrednost napetosti je enaka: $\hat{u} = U_2 \sqrt{\frac{T}{T_i}} = 4,444\text{ V}$

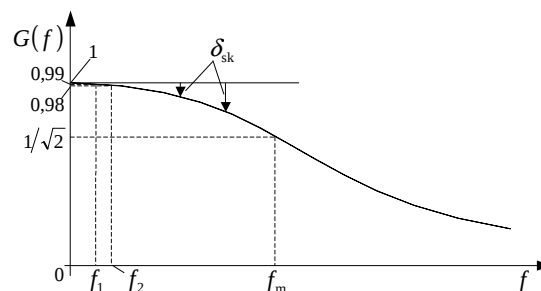
- Relativna širina impulza je: $\frac{T_i}{T} = 0,2025$

- in oblikovni faktor: $F = \frac{U}{\overline{|U|}} = F_0 \frac{U_2}{U_1} = 2,222$

2. Določite referenčno območje in nazivno območje uporabe voltmetra, ki meri temensko vrednost $M_U = \pm(0,5\%U + 0,5\%U_D)$, $U_D = 1V$, za vplivno veličino frekvenco, če upoštevamo samo dinamično obnašanje voltmetra. Voltmeter se odzove na napetostno stopnico kot člen 1. reda in doseže 95% končnega odklona v času $T_a = 5\mu s$. Skicirajte potek spremembe kazanja!

Rešitev:

- V našem primeru določa referenčno območje za vplivno veličino frekvenco dinamično obnašanje voltmetra in njegov mejni pogrešek. Ta bo najmanjši in s tem tudi najmanjše referenčno območje, če upoštevamo monotono povečanje spremembe kazanja (glej skico $\delta_{sk} = \Delta U_{sk} / U_{vh}$), kadar je merjena veličina blizu merilnega dosega.



$$m_{U,\min} = \frac{M_U}{U_D} = \pm \left(5 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3} \frac{U_D}{U_D} \right) = 10^{-2}$$

- Ker je dinamično obnašanje voltmetra opisano s členom 1. reda, zapišemo za mejno frekvenco:

$$0,95U_0 = U_0(1 - e^{-T_a/\tau}) \rightarrow f_m = \frac{\ln 20}{2\pi T_a} = 95,357 \text{ kHz}$$

- in od tod razmerje izhodne izmerjene napetosti proti vhodni merjeni

$$\text{napetosti: } \frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$

- Kljub ohranjanju vrednosti vhodne merjene napetosti, dobimo z večanjem frekvence spremembo kazanja $\Delta U_{sk} = U_{iz} - U_{vh}$. Referenčno območje za vplivno veličino frekvenco je v našem primeru od frekvence 0 Hz do frekvence, ko se sprememba kazanja izenači z mejnim pogreškom in upade amplituda na izhodu za $m_{U,\min}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}} = 1 - m_{U,\min} = 0,99 \rightarrow f_1 = f_m \sqrt{\left(\frac{1}{0,99}\right)^2 - 1} = 0,1425 \cdot f_m = 13,59 \text{ kHz}$$

- Referenčno območje je tako od 0 Hz do 13,6 kHz.

- V nazivnem območju uporabe je dopustno odstopanje spremembe kazanja povečano še za vrednost mejnega pogreška $\Delta U_{sk,\max} \leq 2M_U$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}} = 1 - 2m_{U,\min} = 0,98 \rightarrow f_2 = f_m \sqrt{\left(\frac{1}{0,98}\right)^2 - 1} = 0,203 \cdot f_m = 19,36 \text{ kHz}$$

- Nazivno območje uporabe je tako od 13,6 kHz do 19,4 kHz.

3. Koliko znaša merilni rezultat za faktor popačenja ($THD_{IEC} = \sqrt{X^2 - X_1^2} / X_1$) napetostnega signala oblike $u = 100(\sin \omega t + 1/3 \sin 3\omega t + 1/50 \sin 50\omega t) V$, če ima spektralni analizator standardno negotovost določanja amplitude $w(\hat{u}) = 10^{-2}$?

Rešitev:

- Faktor popačenja je razmerje efektivne vrednosti harmonskih komponent proti efektivni vrednosti osnovne komponente:

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U_1} = \frac{\sqrt{U_3^2 + U_{50}^2}}{U_1}$$

- Naš signal ima tri komponente, katerih efektivne vrednosti so:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100 V}{\sqrt{2}} = 70,71 V; U_3 = \frac{\hat{u}_3}{3\sqrt{2}} = 23,57 V; U_{50} = \frac{\hat{u}_{50}}{50\sqrt{2}} = 1,4142 V$$

- Faktor popačenja je: $THD_{IEC} = \frac{\sqrt{U_3^2 + U_{50}^2}}{U_1} = 0,33393$

- Ker petdeseta harmonska komponenta zelo malo prispeva k faktorju popačenja

$$THD_{IEC} \approx \frac{U_3}{U_1} = 0,3333 \text{ in je zato njen vpliv na skupno negotovost zanemarljiv,}$$

lahko zapišemo za relativno obliko standardne negotovosti za faktor popačenja $THD_{IEC} = U_3 / U_1$:

$$w(THD) = \sqrt{w^2(\hat{u}_1) + w^2(\hat{u}_3)} = 1,414 \cdot 10^{-2}$$

- Pri tem smo upoštevali, da sta relativni negotovosti določanja amplitude in efektivne vrednosti enaki $w(\hat{u}) = w(U)$.
- V absolutni obliki je standardna negotovost: $u(THD) = w(THD) \cdot THD = 4,722 \cdot 10^{-3}$
- Merilni rezultat je tako:

$$THD_{IEC} = 0,3339, \quad u(THD) = 0,0048, \quad n = 1$$

4. Trem kondenzatorjem z enako nazivno vrednostjo, smo izmerili kapacitivnost z istim instrumentom. Standardna negotovost je bila $0,2\mu\text{F}$. Kondenzatorje vežemo vzporedno. Koliko je standardna negotovost kapacitivnosti te vezave? $r(x_i, x_j) = 1$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Kapacitivnost vzporedne vezave kondenzatorjev je:

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

- Skupno standardno negotovost zapišemo z upoštevanjem faktorjev korelacije:

$$u_c(y) = \sqrt{[c_1 u(C_1)]^2 + [c_2 u(C_2)]^2 + [c_3 u(C_3)]^2 + 2[c_1 c_2 r(C_1, C_2) u(C_1) u(C_2)] + \dots}$$

- Faktorji občutljivosti so:

$$c_1 = \frac{\partial C}{\partial C_1} = 1, \quad c_2 = \frac{\partial C}{\partial C_2} = 1, \quad c_3 = \frac{\partial C}{\partial C_3} = 1$$

- posamezne negotovosti pa: $u(C_1) = u(C_2) = u(C_3) = u(C)$

- Standardna negotovost kapacitivnosti vzporedne vezave je:

$$u_c(C) = \sqrt{3 \cdot u^2(C) + 2[3 \cdot u(C)u(C)]} = u(C)\sqrt{9} = 3u(C) = 0,6\mu\text{F}$$

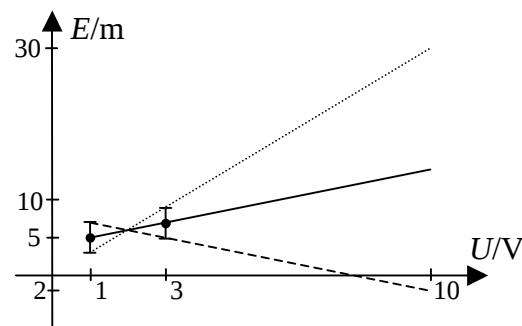
5. Ker smo omejeni z območjem referenčnega voltmetra, umerimo naš voltmeter v dveh točkah, in sicer pri 1 V ter 3 V. Izmerjeni odstopanji od referenčnega voltmetra sta v teh dveh točkah 5 mV oz. 7 mV. Kolikšno bo največje možno odstopanje, ki ga napovemo pri 10 V, če smo zgornji odstopanji izmerili z mejnim pogreškom 2 mV in če predpostavimo, da je karakteristika umerjanega voltmetra linearna?

Rešitev:

- Z umerjanjem ali kalibracijo pri $U_1 = 1 \text{ V}$ smo ugotovili odstopanje $E_1 = 5 \text{ mV}$.
 - Ker to odstopanje določimo z mejnim pogreškom $m_E = 2 \text{ mV}$, to pomeni, da dejansko odstopanje leži v intervalu $5 \text{ mV} \pm 2 \text{ mV}$ oz. med $E_{1,\min} = 3 \text{ mV}$ in $E_{1,\max} = 7 \text{ mV}$.

- Podobno velja tudi za drugo točko U_2 , kjer dejansko odstopanje E_2 leži v intervalu med $E_{2,\min} = 5 \text{ mV}$ in $E_{2,\max} = 9 \text{ mV}$.

- Ob predpostavki linearne karakteristike umerjanega voltmetra lahko grafično prikažemo ti dve kalibracijski točki, kot kaže skica:



- Če predpostavimo, da sta izmerjeni odstopanji pravi vrednosti, bi odstopanje pri 10 V lahko izračunali z naslednjo enačbo:

$$E_{10V} = \frac{E_2 - E_1}{U_2 - U_1} \cdot (10 \text{ V} - U_1) + E_1 = \frac{7 \text{ mV} - 5 \text{ mV}}{3 \text{ V} - 1 \text{ V}} \cdot (10 \text{ V} - 1 \text{ V}) + 5 \text{ mV} = 14 \text{ mV}$$

- Ker je odstopanje izmerjeno z mejnim pogreškom, bo v najbolj neugodnem primeru odstopanje pri 10 V znašalo:

$$E'_{10V} = \frac{E_{2,\max} - E_{1,\min}}{U_2 - U_1} \cdot (10 \text{ V} - U_1) + E_{1,\min} = \frac{9 \text{ mV} - 3 \text{ mV}}{3 \text{ V} - 1 \text{ V}} \cdot (10 \text{ V} - 1 \text{ V}) + 3 \text{ mV} = 30 \text{ mV}$$

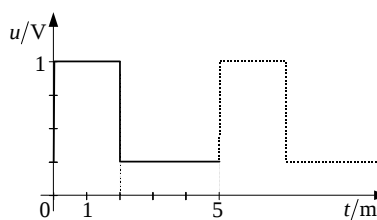
oz.

$$E''_{10V} = \frac{E_{2,\min} - E_{1,\max}}{U_2 - U_1} \cdot (10 \text{ V} - U_1) + E_{1,\max} = \frac{5 \text{ mV} - 7 \text{ mV}}{3 \text{ V} - 1 \text{ V}} \cdot (10 \text{ V} - 1 \text{ V}) + 7 \text{ mV} = -2 \text{ mV}$$

- Največje odstopanje, ki bi ga lahko pri 10 V napovedali na podlagi izmerjenih odstopanj, je torej 30 mV.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Ali z digitalnim voltmetrom ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$; $U_D = 1,200\text{ V}$), katerega dinamično obnašanje aproksimiramo s členom prvega reda $f_m = 500\text{ Hz}$, lahko pomerimo oba nivoja signala, tako da je dinamični pogrešek zanemarljiv. Skicirajte približni potek dinamičnega pogreška $E(t)$ za dani vhodni signal?



Rešitev:

- Karakteristika odziva člena 1. reda na stopničasto obliko signala je: $\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = 1 - e^{-t/\tau}$
 - Dinamični pogrešek predstavlja razliko med izmerjeno (izhodno) vrednostjo in pravo (vhodno) vrednostjo signala.. V relativni obliki ga zapišemo:

$$e_{din} = \frac{U_{iz} - U_{vh}}{U_{vh}} = \frac{U_{iz}}{U_{vh}} - 1 = -e^{-t/\tau}$$

- Ima negativni predznak in eksponentno upada v odvisnosti od časovne konstante: $\tau = 1/(2\pi f_m) = 318,3\mu\text{s}$
- Ker je dinamični pogrešek sistematičen, je zanemarljiv, kadar je dovolj majhen proti standardni negotovosti merilnega rezultata:

$$|e_{din}| \leq w(U)/10$$

- Kadar je podana mejna vrednost lastnega pogreška, privzamemo enakomerno pravokotno porazdelitev pogreška. V našem primeru imamo dve vrednosti signala (1,0 V ; 0,25 V) in ustrezni standardni negotovosti v relativni obliki:

$$w(U_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_U}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} + 10^{-3} \frac{1,2\text{ V}}{1,0\text{ V}}) = 1,27 \cdot 10^{-3}$$

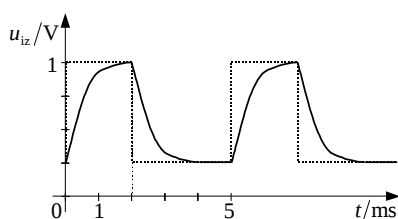
$$w(U_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_U}{U_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} + 10^{-3} \frac{1,2\text{ V}}{0,25\text{ V}}) = 3,35 \cdot 10^{-3}$$

- Dinamični pogrešek mora biti manjši od $|e_{din}| = e^{-t/\tau} \leq w(U)/10$ in odzivni čas daljši od:

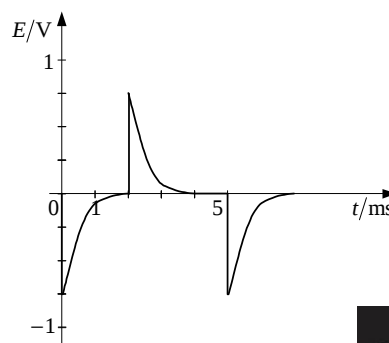
$$t_1 \geq -\tau \ln(1,27 \cdot 10^{-4}) = 2,856\text{ ms} \quad \text{oz.} \quad t_2 \geq -\tau \ln(3,35 \cdot 10^{-4}) = 1,815\text{ ms}$$

- Pri nivoju $U_1 = 1,0\text{ V}$ ne moremo zanemariti dinamičnega pogreška, ker je trajanje prekratko $t_1 > 2,0\text{ ms}$, pri nivoju $U_2 = 0,25\text{ V}$ pa lahko $t_2 < 3,0\text{ ms}$.

- Skica pogreška:



→



2. Digitalni voltmeter kaže $U_i = 122,4 \text{ mV}$. Izrazite popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo, če smo instrument uporabili pri temperaturi $t = 39^\circ \text{C}$!

- meja pogreška: $M_U = \pm(0,15\%U + 3 \text{ dig})$
- referenčno območje: $23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$
- nazivno območje uporabe: $0^\circ \text{C} \div 55^\circ \text{C}$
- temperaturni koeficient: $\pm(0,013\%U + 1 \text{ dig})/^\circ \text{C}$

Rešitev:

- Če bi uporabili instrument pri referenčnih pogojih ($23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$), bi bila meja lastnega pogreška:

$$M_U = \pm \left(\frac{0,15}{100} U_i + 3 \text{ dig} \right) = \pm \left(\frac{0,15}{100} 122,4 \text{ mV} + 3 \cdot 0,1 \text{ mV} \right) = \pm 0,484 \text{ mV}$$

- Ker smo instrument uporabili izven referenčnega območja v nazivnem območju uporabe za vplivno veličino temperaturo ($0^\circ \text{C} \div 55^\circ \text{C}$), se meja pogreška poveča za mejo spremembe kazanja $M_{U,s} = M_U + M_U^0$. V našem primeru smo izstopili iz referenčnega območja na zgornji meji pri $23^\circ \text{C} + 5^\circ \text{C} = 28^\circ \text{C}$, zato moramo upoštevati razliko temperature do te vrednosti:

$$M_U^0 = \pm \left(\left(\frac{0,013}{100} 122,4 \text{ mV} + 0,1 \text{ mV} \right) / ^\circ \text{C} \right) \cdot (39^\circ \text{C} - 28^\circ \text{C}) = \pm 1,275 \text{ mV}$$

- Skupna meja pogreška (lastnega in spremembe kazanja) je:

$$M_{U,s} = M_U + M_U^0 = \pm 1,759 \text{ mV}$$

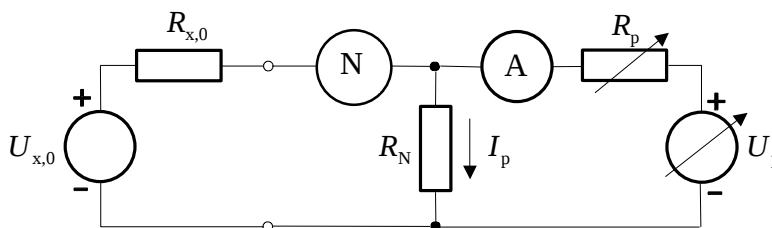
- in standardna negotovost pri privzeti pravokotni porazdelitvi gostote verjetnosti pogreška:

$$u(U) = \frac{M_{U,s}}{\sqrt{3}} = 1,0156 \text{ mV} = 1,1 \text{ mV}$$

- Merilni rezultat podamo v obliki:

$$U = 122,4 \text{ mV}, \quad u(U) = 1,1 \text{ mV}, \quad n = 1$$

3. Izrazite polni merilni rezultat za merjeno napetost U_x , ki jo merimo po Lindeck-Rothejevem principu kompenzacije ($U_{x,0} = I_A R_N + U_V$) ter naslednjimi merilnimi podatki:



- V-meter: povprečna vrednost: $\bar{U}_V = 0,21 \text{ mV}$, standardni odklon: $s(U_V) = 150 \mu\text{V}$, $n = 30$;
- A-meter: $I_A = 1,0456 \text{ mA}$, $M_I = \pm(2 \cdot 10^{-4} I_A + 5 \text{ dig})$
- etalonski upor $R_N = 1000 \Omega$, $u(R_N) = 0,1 \Omega$

Rešitev:

- Neznano napetost U_x izmerimo tako, da jo primerjamo z znano U_N , ki jo realiziramo kot padec napetosti, ki ga povzroči spremenljivi električni tok I_p na znanem kompenzacijskem uporu $R_k = R_N$ (Lindeck-Rothejev princip kompen.).
 - Pri izravnavi čez ničelni indikator praktično ne teče noben tok $I \rightarrow 0$ zato merjeni vir ni obremenjen, pomožni tok je enak toku ampermetra $I_p \doteq I_A$ in merimo napetost praznega teka.

$$U_{x,0} \doteq U_N = I_p R_k \quad \Rightarrow \quad U_{x,0} \doteq I_A R_N$$

- Ker nimamo popolne izravnave, moramo upoštevati še ničelni indikator in v splošnem zapišemo: $U_{x,0} = I_A R_N + U_V$
- V našem primeru smo večkrat pomerili odklon 'nič', zato uporabimo srednjo vrednost ($\bar{U}_V$) in zapišemo:

$$U_{x,0} = I_A \cdot R_N + \bar{U}_V = 1,0456 \text{ mA} \cdot 1000 \Omega + 0,21 \text{ mV} = 1,04581 \text{ V}$$

- Za popolni merilni rezultat potrebujemo še ovrednotenje standardne negotovosti, ki je sestavljena tako iz negotovosti tipa A (prispevek ničelnega indikatorja - U_V) kot negotovosti tipa B (prispevka ampermetra in uporovnega etalona):

$$\begin{aligned} u(U_{x,0}) &= \sqrt{\left[\left| \frac{\partial U_x}{\partial I_A} \right| \cdot u(I_A) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_x}{\partial R_N} \right| \cdot u(R_N) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_x}{\partial U_V} \right| \cdot u(\bar{U}_V) \right]^2} \\ &= \sqrt{R_N^2 \cdot \left(\frac{M_I}{\sqrt{3}} \right)^2 + I_A^2 \cdot u^2(R_N) + \left(\frac{s(U_V)}{\sqrt{n}} \right)^2} \\ &= \sqrt{(10^3 \Omega)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0456 \text{ mA} + 0,0005 \text{ mA}}{\sqrt{3}} \right)^2 + (1,0456 \text{ mA})^2 (0,1 \Omega)^2 + \left(\frac{150 \mu\text{V}}{\sqrt{30}} \right)^2} \\ u(U_{x,0}) &= \sqrt{(4,0941 \cdot 10^{-4})^2 + (1,0456 \cdot 10^{-4})^2 + (0,274 \cdot 10^{-4})^2} = 4,234 \cdot 10^{-4} \text{ V} \end{aligned}$$

- Popolni merilni rezultat zaokrožimo: $U_{x,0} = 1,04565 \text{ V}$ $u(U_{x,0}) = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ V}$

4. V katerih mejah se lahko nahaja celotna standardna negotovost $w_c(y)$ izhodne veličine $y = x_1^2 x_2$, če sta vhodni veličini x_1 in x_2 medsebojno odvisni in imata enako veliki relativni standardni negotovosti $w(x_1) = w(x_2)$?

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Standardno negotovost izhodne posredno merjene veličine $u_c(y)$ določa tudi koeficient korelacije r , kadar so neposredno merjene veličine medsebojno odvisne. V našem primeru dveh medsebojno odvisnih vhodnih veličin zapišemo standardno negotovost izhodne veličine v absolutni obliki:

$$u_c(y) = \sqrt{(c_1 u(x_1))^2 + (c_2 u(x_2))^2 + 2r c_1 c_2 u(x_1) u(x_2)}$$

- in v relativni obliki:

$$w_c(y) = \frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\left(c_1 \frac{u(x_1)}{y}\right)^2 + \left(c_2 \frac{u(x_2)}{y}\right)^2 + 2r c_1 c_2 \frac{u(x_1) u(x_2)}{y^2}}$$

- Koeficiente občutljivosti izračunamo z delnim odvajanjem:

$$y = x_1^2 x_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 x_2, \quad c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1^2,$$

- jih vstavimo v enačbo

$$w_c(y) = \sqrt{\left(2x_1 x_2 \frac{u(x_1)}{y}\right)^2 + \left(x_1^2 \frac{u(x_2)}{y}\right)^2 + 2r \cdot 2x_1 x_2 x_1^2 \frac{u(x_1) u(x_2)}{y^2}}$$

- in jo uredimo

$$w_c(y) = \sqrt{\left(2 \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + 2r \cdot 2 \frac{u(x_1)}{x_1} \frac{u(x_2)}{x_2}} = \sqrt{(2w(x_1))^2 + (w(x_2))^2 + 2r \cdot 2w(x_1)w(x_2)}$$

- Ker sta relativni standardnih negotovosti $u(x_1)/x_1 = w(x_1) = w(x_2) = u(x_2)/x_2$ enaki, zapišemo:

$$w_c(y) = \sqrt{4w^2(x) + w^2(x) + 4rw^2(x)}$$

- Koeficient korelacije r lahko zavzame vrednosti med -1 in $+1$, zato se standardna negotovost ustrezno spreminja:

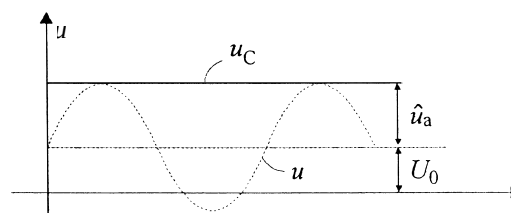
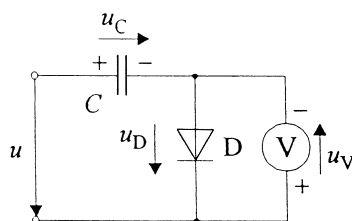
- $r = -1$: $w_c(y) = \sqrt{w^2(x)} = w(x)$

- $r = +1$: $w_c(y) = \sqrt{9w^2(x)} = 3w(x)$

- Zaradi medsebojne odvisnosti se standardna negotovost izhodne posredno merjene veličine spreminja v mejah $w(x) \leq w_c(y) \leq 3w(x)$ in se precej razlikuje od primera, kadar so vhodne veličine medsebojno neodvisne $r = 0$!

- $r = 0$: $w_c(y) = \sqrt{5w^2(x)} = 2,24w(x)$

5. Kaj meri voltmeter v narisanim vezju pri dani pulzirajoči napetosti u . Opišite in izpeljite enačbe. Voltmeter se odziva na srednjo vrednost signala.



Rešitev:

- Če želimo meriti samo izmenično komponento u_a pulzirajoče napetosti $u = U_0 + u_a$, kjer je U_0 enosmerna komponenta, priključimo instrument vzporedno k diodi in zaporedno kondenzatorju.

- Napetost na kondenzatorju u_C v ustaljenem stanju je enaka temenski vrednosti:

$$u_C = U_0 + \hat{u}_a$$

- Napetost na diodi je neodvisna od enosmerne komponente.

$$u_D = u - u_C = (U_0 + u_a) - (U_0 + \hat{u}_a) = u_a - \hat{u}_a$$

- Voltmeter priključimo tako, da je odklon enak invertirani vrednosti napetosti na diodi in dobimo pozitivno vrednost temenske vrednosti izmenične komponente:

$$u_V = -u_D = \hat{u}_a - u_a$$

- Ker se voltmeter odziva na srednjo vrednost (npr. integracijski voltmeter), je srednja vrednost napetosti u_V enaka maksimalni vrednosti izmenične komponente, ker je srednja vrednost izmenične sinusne komponent napetosti u_a enaka nič.

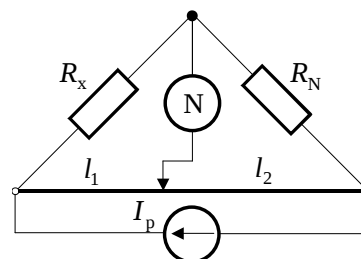
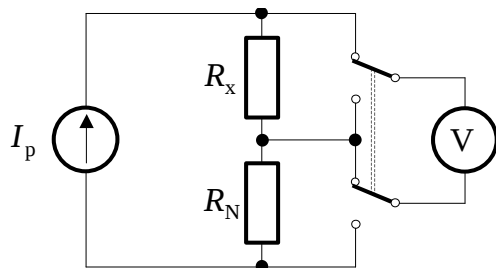
$$\bar{U}_V = \frac{1}{T} \int_0^T u_V dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\hat{u}_a - u_a) dt = \hat{u}_a - \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T u_a dt}_{=0} = \hat{u}_a$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Naštejte merilne metode in podajte njihovo delitev? Opišite in skicirajte primerjalno in zamenjalno merilno metodo.

Rešitev:

- Poznamo dve bistveno različni metodi:
 - odklonsko**, pri kateri je odklon (ali kazanje) instrumenta osnova za določitev vrednosti merjene veličine;
 - ničelno**, ko instrument kaže nič oziroma nima odklona in določimo vrednost merjene veličine na podlagi drugih, znanih pogojev merilnega vezja.
- Obe metodi lahko nadalje delimo še na: **navadne, primerjalne, zamenjalne, diferenčne in posebne.**
- Primerjalna** odklonska in ničelna merilna metoda

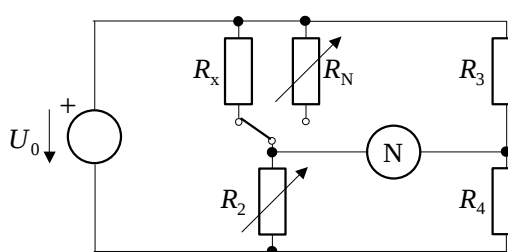
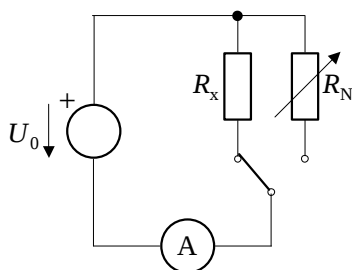


- Pri **primerjalni odklonski** metodi med seboj primerjamo napetost na neznanem uporu z napetostjo na znanem (tok mora biti **konstanten!**):

$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} \quad \Leftarrow \quad I_p = \text{konst.} = \frac{U_x}{R_x} = \frac{U_N}{R_N}$$

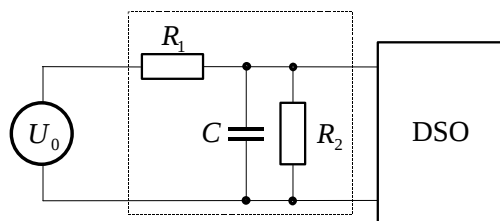
- Pri **primerjalni ničelni** metodi moramo mostiček s premikanjem drsnika po uporovni žici najprej uravnovesiti (tok ni nujno, da je stalen!): $R_x = R_N l_1 / l_2$

- Zamenjalna** odklonska in ničelna metoda



- Pri **zamenjalni** (substitucijski) **odklonski** metodi ugotovimo vrednost iskane veličine tako, da vzpostavimo v merilnem vezju dvakrat enake pogoje:
 - prvič je vključen neznani upor (merjenec);
 - drugič je vključen znani in spremenljivi upor –referenca
- Točnost instrumenta ni pomembna!

2. Določite mejno frekvenco člena, ki ga vzbuja s sinusno napetostjo. Koliko je temenska vrednost napetosti na zaslonu osciloskopa pri vzbujujanju z mejno frekvenco, če je $U_0 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 763 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 92,4 \text{ k}\Omega$, $C = 18,3 \text{ nF}$.



Rešitev:

- Opraviti imamo s členom 1. reda, ki ima časovno konstanto τ enako:

$$\tau = a \tau_1 = a R_1 C$$

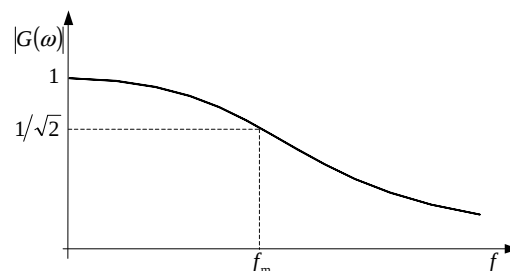
- pri čemer je a delilno razmerje uporov in določa napetost v stacionarnem stanju:

$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,108 ; \quad U_2 = a U_0 = 1,08 \text{ V}$$

- Časovna konstanta je:

$$\tau_1 = R_1 C = 13,96 \text{ ms} \rightarrow \tau = a \tau_1 = 1,508 \text{ ms}$$

- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje efektivnih vrednosti vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujujanju zapišemo:



$$|G(\omega)| = \frac{\hat{u}_{iz}}{\hat{u}_{vh}} = \frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}}$$

- Pri mejni frekvenci upade izhodna napetost relativno na $1/\sqrt{2}$ (moč izhodnega signala se prepolovi $P_{iz}/P_{vh} = U_{iz}^2/U_{vh}^2 = 1/2$). To se zgodi, kadar je $2\pi f_m \tau = 1$:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_m \tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow f_m = \frac{1}{2\pi \tau} = 105,5 \text{ Hz}$$

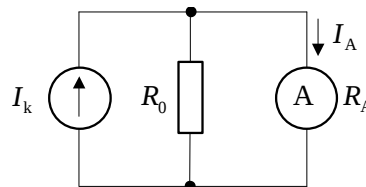
- Temenska vrednost izhodne napetosti pri sinusnem vzbujujanju je:

$$\hat{u}_{iz} = \sqrt{2} U_{iz} = \sqrt{2} a \frac{U_{vh}}{\sqrt{2}} = a U_0 = 1,08 \text{ V}$$

3. V katerem intervalu se lahko nahajajo vrednosti, ki jih kaže ampermeter ($I_D = 200,00 \text{ mA}$, $M_I = \pm(0,04\% I_i + 0,03\% I_D + 1 \text{ dig})$, $R_A = 1 \Omega$), ko merimo tok tokovnega vira, ki ima kratkostični tok $I_k = 185,37 \text{ mA} \pm 0,61 \text{ mA}$ in notranjo upornost $R_0 = 500 \Omega$?

Rešitev:

- Kadar vključimo ampermeter v vezje, nam kaže manjši tok, kot je kratkostični. Vzrok je v končni upornosti ampermetra $R_A \neq 0$. Opraviti imamo s tokovnim delilnikom:



$$I_A = I_k \frac{R_0}{R_0 + R_A} = K I_k = 0,998 I_k$$

- Ker se lahko vrednost kratkostičnega toka spreminja, se ustrezno tudi vrednost toka skozi ampermeter. To znaša v našem primeru:

$$I_A = 0,998 I_k = 185,00 \text{ mA} \pm 0,609 \text{ mA}$$

- Ampermeter ima tudi lastni pogrešek, ki se spreminja v mejah:

$$M_I = \pm(4 \cdot 10^{-4} I_i + 3 \cdot 10^{-4} I_D + 1 \text{ dig}) =$$

$$M_I = \pm(4 \cdot 10^{-4} \cdot 185,00 \text{ mA} + 3 \cdot 10^{-4} \cdot 200,00 \text{ mA} + 0,01 \text{ mA}) = \pm 0,144 \text{ mA}$$

- Od pričakovane vrednosti $I_A = 185,00 \text{ mA}$ lahko odčitek odstopa za mejno odstopanje toka skozi ampermeter $M_{I_A} = \pm 0,609 \text{ mA}$ in mejno vrednost lastnega pogreška ampermetra:

$$M = M_{I_A} + M_I = \pm(0,609 \text{ mA} + 0,144 \text{ mA}) = \pm 0,75 \text{ mA}$$

- Vrednosti, ki jih lahko kaže ampermeter, se nahajajo v intervalu:

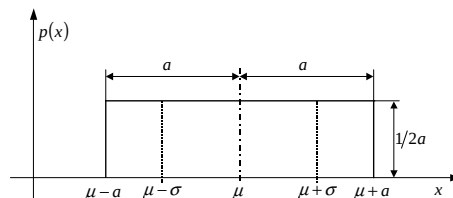
$$184,25 \text{ mA} \leq I_{\text{prikaz}} \leq 185,75 \text{ mA}$$

4. Koliko je standardna negotovost $u_c(y) = ?$ posredno merjene veličine $y = a + b + c + d$, če so porazdelitve pogreškov: pri veličini a enakomerna, veličina b trikotna, pri veličini c trapezna ($\beta = 0,66$) in pri veličini d Gaussova ($z = 3$)? Pri vseh porazdelitvah so mejne vrednosti pogreškov enake $M_e = M_{tri} = M_{tra} = M_G = M = 0,01$ in korelacijski koeficienti enaki 0. Skicirajte razmere!

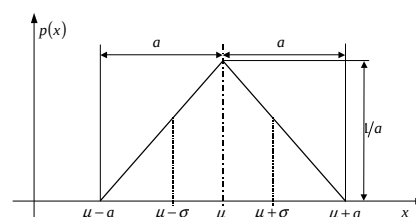
Rešitev:

- Standardni odkloni za različne porazdelitve:

- Enakomerna porazdelitev: $\sigma_a = M_e / \sqrt{3}$

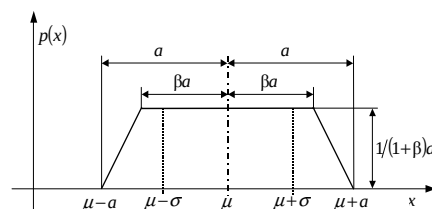


- Trikotna porazdelitev: $\sigma_b = M_{tri} / \sqrt{6}$

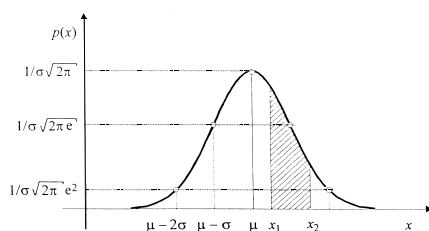


- Trapezna porazdelitev:

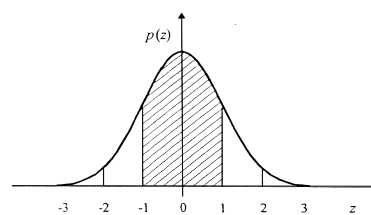
$$\sigma_c = M_{tra} \sqrt{1 + \beta^2} / \sqrt{6} = M_{tra} \sqrt{1 + 0,66^2} / \sqrt{6}$$



- Gaussova porazdelitev: $\sigma_d = M_G / 3$



⇒



$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$z = (x - \mu) / \sigma$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

- Standardno negotovost izhodne posredno merjene veličine $u_c(y)$ določajo prispevki posameznih neposredno merjenih veličin. Kadar te veličine niso mesebojno odvisne (korelirane), zapišemo standardno negotovost izhodne veličine v absolutni obliki:

$$u_c(y) = \sqrt{(c_a u(x_a))^2 + (c_b u(x_b))^2 + (c_c u(x_c))^2 + (c_d u(x_d))^2}$$

- Ker so standardne negotovosti enake standardnim odklonom ($u(x_a) = \sigma_a, \dots$) in koeficienti občutljivosti enaki $c_a = c_b = c_c = c_d = 1$, zapišemo:

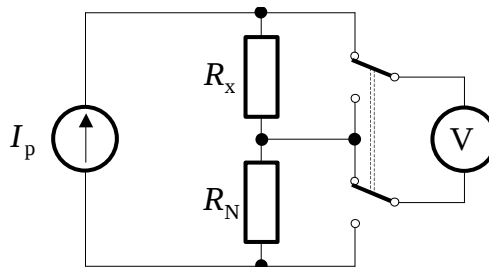
$$u_c(y) = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 + \sigma_d^2} = M \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1 + 0,66^2}{6} + \frac{1}{9}} = M \cdot 0,922$$

$$u_c(y) = 9,3 \cdot 10^{-3}$$

5. Zapišite popolni merilni rezultat za uporovno razmerje $r_x = R_1/R_2$, ki ga merimo z napetostno primerjalno metodo, če smo z istim voltmetrom izmerili padca napetosti na obeh uporih $U_1 = 3,825 \text{ V}$ in $U_2 = 3,786 \text{ V}$. Vpliva stabilnosti tokovnega vira in notranje upornosti voltmetra sta zanemarljiva. Skicirajte merilno vezje.

Rešitev:

- Pri napetostno primerjalni metodi merimo napetost najprej na upor R_1 in nato na drugem R_2 . Ker v obeh primerih teče skozi njiju enak tok (stabilen tokovni vir) in ker je notranja upornost voltmetra zanemarljivo velika, lahko zapišemo:



$$I_0 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{U_1}{U_2} = r_x$$

- Uporovno razmerje r_x torej znaša: $r_x = \frac{U_1}{U_2} = \frac{3,825 \text{ V}}{3,786 \text{ V}} = 1,01030$

- Uporovno razmerje izračunamo iz dveh napetosti, zato izračunamo negotovost $u(r_x)$ iz naslednje enačbe:

$$\frac{u(r_x)}{r_x} = \sqrt{\left[\frac{u(U_1)}{U_1}\right]^2 + \left[\frac{u(U_2)}{U_2}\right]^2}$$

- Ker se napetosti razlikujeta za manj kot 1% in se voltmeter dvakrat enako moti, lahko lastni pogrešek voltmetra v kvocientu zanemarimo in nam ostaneta pogreška odčitavanja, ker nista medsebojno odvisna (podrobnejša razlaga v skripti za vaje). Tako dobimo:

$$\frac{u(r_x)}{r_x} = \sqrt{\left[\frac{u(U_1)_q}{U_1}\right]^2 + \left[\frac{u(U_2)_q}{U_2}\right]^2},$$

- pri čemer $u(U_1)_q$ in $u(U_2)_q$ pomenita negotovosti zaradi ločljivost voltmetra Q_U , ki je v obeh primerih enaka (isti voltmeter). Glede na izmerjeni oz. prikazani vrednosti znaša ločljivost $Q_U = 1 \text{ dig} = 1 \text{ mV}$. Tako znaša negotovost uporovnega razmerja:

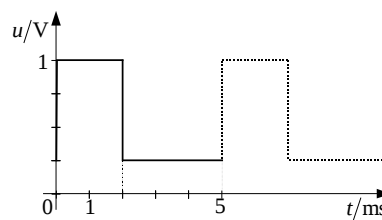
$$u(r_x) = r_x \cdot \sqrt{\left[\frac{1 \text{ mV}}{3,825 \text{ V} \cdot \sqrt{3}}\right]^2 + \left[\frac{1 \text{ mV}}{3,786 \text{ V} \cdot \sqrt{3}}\right]^2} = 1,01030 \cdot 2,146 \cdot 10^{-4} = 2,17 \cdot 10^{-4}$$

- Zaokrožen popolni merilni rezultat zapišemo v obliki:

$$r_x = 1,01030, \quad u(r_x) = 2,2 \cdot 10^{-4}, \quad n = 1$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko bi moral biti informacijski pretok digitalnega voltmetra, ki ima merilno območje ($0\text{ V} \dots U_D = 1,200\text{ V}$) in mejo pogreška $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$, da bi z njim lahko pomerili oba nivoja danega signala? Koliko bi morala biti kapaciteta digitalnega voltmetra pri danem časovnem spreminjanju signala in uporabljenem merilnem dosegu?



$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar je pogrešek odvisen od izmerjene vrednosti v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj v območju od $x_{\min}$ do $x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2(ax + b)} \Rightarrow m = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max} + b}{ax_{\min} + b} \right|$$

- Pri dani obliki signala moramo z voltmetrom pomeriti nivo $U_1 = 1\text{ V} = x_{\max,1}$ v času $T_{M,1} = 2\text{ ms}$ in nivo $U_2 = 0,25\text{ V} = x_{\max,2}$ v času $T_{M,2} = 3\text{ ms}$. V obeh primerih je spodnja meja območja $U_0 = 0\text{ V} = x_{\min}$. Število neodvisnih amplitudnih stopenj, ki jih moramo ločiti v obeh primerih je:

$$m_1 = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max,1} + b}{b} \right| = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{10^{-3} \cdot 1,0\text{ V} + 1,2\text{ mV}}{1,2\text{ mV}} \right| = 304,1$$

$$m_2 = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max,2} + b}{b} \right| = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{10^{-3} \cdot 0,25\text{ V} + 1,2\text{ mV}}{1,2\text{ mV}} \right| = 95,6$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas T_M , je hitrost prenosa ali **informacijski pretok** enak $I = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m)$. Za prvi nivo je potreben večji informacijski pretok:

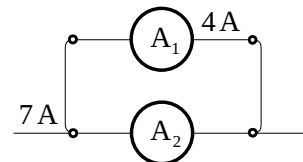
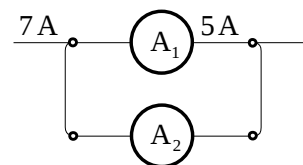
$$I_1 = \frac{1}{T_{M,1}} \text{lb}(m_1) = \frac{8,248\text{ bit}}{2\text{ ms}} = 4124,1 \frac{\text{bit}}{\text{s}} \quad \text{in} \quad I_2 = \frac{1}{T_{M,2}} \text{lb}(m_2) = \frac{6,579\text{ bit}}{3\text{ ms}} = 2193,1 \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

- Kapaciteto** voltmetra ali maksimalni informacijski pretok za dano časovno spreminjanje signala dobimo, če upoštevamo, da lahko signal zavzame vrednost na dosegu $U_i = U_D = x_{\max}$ ($C = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m_{\max})$):

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max} + b}{b} \right| = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{10^{-3} \cdot 1,2\text{ V} + 1,2\text{ mV}}{1,2\text{ mV}} \right| = 347,6$$

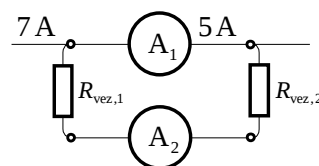
$$C = \frac{1}{T_{M,1}} \text{lb}(m_{\max}) = \frac{8,4412\text{ bit}}{2\text{ ms}} = 4220,6 \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

2. Dva brezhibna ampermetra sta priključena vzporedno v vejo s tokom $I_0 = 7\text{ A}$ na dva različna načina, tako kot kažeta skici. Ampermeter A_1 ($I_D = 6\text{ A}$, $U_{A_0} = 60\text{ mV}$) kaže v prvem primeru 5 A , v drugem pa 4 A . Kaj povzroči to razliko in zakaj tolikšno? Koliko je upornost ampermetra A_2 ?



Rešitev:

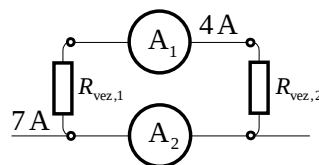
- Razliko v toku skozi ampermeter A_1 povzročata upornosti vezi med ampermetroma $R_{\text{vez},1}$ in $R_{\text{vez},2}$.



- Vezavi nam dasta dva različna tokovna delilnika:

$$\frac{I_{A,1}}{I_0} = \frac{R_{A,2} + R_{\text{vez}}}{R_{A,1} + R_{A,2} + R_{\text{vez}}} = \frac{5}{7}$$

$$\text{in } \frac{I_{A,1}}{I_0} = \frac{R_{A,2}}{R_{A,1} + R_{A,2} + R_{\text{vez}}} = \frac{4}{7}$$



- Pri tem smo upoštevali z $R_{\text{vez}} = R_{\text{vez},1} + R_{\text{vez},2}$ skupno upornost veznih žic.

- Upornost ampermetra A_1 določimo iz podatkov:

$$R_{A,1} = \frac{U_{A_0}}{I_D} = \frac{60\text{ mV}}{6\text{ A}} = 10\text{ m}\Omega$$

- Upornost ampermetra A_2 in R_{vez} pa določimo iz razmerja enačb tokovnega delilnika:

$$\frac{R_{A,2} + R_{\text{vez}}}{R_{A,2}} = \frac{5}{4} \rightarrow 4R_{\text{vez}} = R_{A,2}$$

- in od tod:

$$\frac{I_{A,1}}{I_0} = \frac{4R_{\text{vez}}}{R_{A,1} + 5R_{\text{vez}}} = \frac{4}{7} \rightarrow R_{\text{vez}} = \frac{R_{A,1}}{2} = 5\text{ m}\Omega$$

- Upornost drugega ampermetra A_2 je:

$$R_{A,2} = 4R_{\text{vez}} = 20\text{ m}\Omega$$

3. Ugotovite nelinearnost uporovnega senzorja temperature na območju med 0°C in 100°C , če gre nazivna karakteristika skozi začetno točko karakteristike in točko pri temperaturi 80°C ! Skicirajte krivuljo pogreška linearnosti.

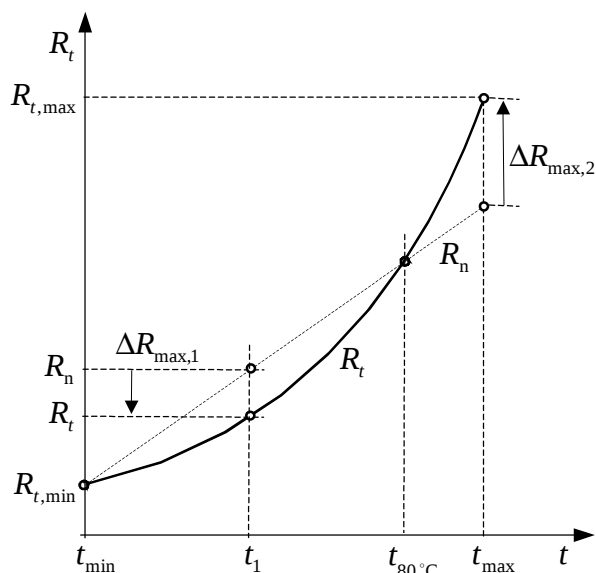
$$R_t = R_0 e^{bt}, \quad R_0 = R_{0^{\circ}\text{C}} = 1000\Omega, \quad R_{100^{\circ}\text{C}} = 1600\Omega$$

Rešitev:

- Manjkajoči koeficient b realne karakteristike $R_t = R_0 e^{bt}$ določimo iz podatkov:

$$b = \frac{1}{100^{\circ}\text{C}} \ln \frac{R_{100^{\circ}\text{C}}}{R_{0^{\circ}\text{C}}} = 4,7 \cdot 10^{-3} / ^{\circ}\text{C}$$

- Odstopanja nelinearnosti $\Delta R = R_t - R_n$ določamo na nazivno karakteristiko R_n , ki gre skozi začetno točko karakteristike in točko pri temperaturi 80°C !



$$R_n = R_{0^{\circ}\text{C}} + \frac{R_{80^{\circ}\text{C}} - R_{0^{\circ}\text{C}}}{80^{\circ}\text{C}} (t - t_{0^{\circ}\text{C}}) = R_{0^{\circ}\text{C}} + S \cdot t = 1000\Omega + 5,71 \frac{\Omega}{^{\circ}\text{C}} t$$

- Največje odstopanje $\Delta R_{\max} = ?$ moramo iskati na dveh odsekih $(0 \div 80)^{\circ}\text{C}$ in $(80 \div 100)^{\circ}\text{C}$.
 - Na prvem odseku $(0 \div 80)^{\circ}\text{C}$ z delnim odvajanjem razlike karakteristik in enačenjem z 0:

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial t} = b R_0 e^{bt} - S = 0 \rightarrow t_1 = t_{\Delta R_{\max,1}} = 41,25^{\circ}\text{C} \text{ in } \Delta R_{\max,1} = -21,41\Omega$$
 - Na drugem odseku $(80 \div 100)^{\circ}\text{C}$ je največje odstopanje kar pri končni točki (glej skico):

$$\Delta R_{\max,2}(t = 100^{\circ}\text{C}) = R_{100^{\circ}\text{C}} - R_{n,100^{\circ}\text{C}} = 1600\Omega - 1570,6\Omega = 29,43\Omega$$
- Za dano nazivno karakteristiko na območju $R_D = R_{100^{\circ}\text{C}} - R_{0^{\circ}\text{C}} = 600\Omega$ je nelinearnost enaka:

$$n = \frac{\Delta R_{\max}(t = 100^{\circ}\text{C})}{R_D} = \frac{29,43\Omega}{600\Omega} = 4,9\%$$

4. Koliko je standardna negotovost aritmetične sredine treh vrednosti napetosti U_1 , U_2 in U_3 , če so vzete iz populacije z eksperimentalno standardno negotovostjo $s_p = 3,0 \text{ mV}$ ($n_p = 300$)? Koliko vrednosti bi morali uporabiti za tvorjenje aritmetične sredine, da bi standardno negotovost aritmetične sredine treh vrednosti prepolovili?

Rešitev:

- Standardno negotovost aritmetične sredine $n = 3$ vrednosti $\bar{U} = \frac{1}{3}(U_1 + U_2 + U_3)$ dolčajo prispevki negotovosti neposredno merjenih vrednosti napetosti:

$$u_c(\bar{U}) = \sqrt{(c_1 u(U_1))^2 + (c_2 u(U_2))^2 + (c_3 u(U_3))^2}$$

- Ker so vrednosti vzete iz iste populacije z eksperimentalno ocenjeno standardno negotovostjo $s_p = 3,0 \text{ mV}$ na velikem številu meritev $n_p = 300$, imajo vse enako standardno negotovost:

$$u(U_1) = u(U_2) = u(U_3) \doteq s_p$$

- Faktorji občutljivosti so enaki delnim odvodom:

$$c_1 = \frac{\partial \bar{U}}{\partial U_1} = c_2 = c_3 = \frac{1}{3} \quad \text{oz. splošno } c_n = \frac{1}{n}$$

- Standardna negotovost aritmetične sredine je enaka:

$$u_c(\bar{U}) = \frac{1}{3} \sqrt{3s_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{3}} = 1,732 \text{ mV}$$

- oz. splošno: $u_c(\bar{U}) = \frac{1}{n} \sqrt{ns_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{n}} !!$

- Če želimo standardno negotovost aritmetične sredine treh vrednosti prepoloviti, moramo pri tvorjenju uporabiti več ($n = 12$) vrednosti:

$$\frac{u_c(\bar{U})_{n=3}}{2} = \frac{s_p}{2\sqrt{3}} = \frac{s_p}{\sqrt{12}} = 0,866 \text{ mV} \quad \leftrightarrow \quad n = 12$$

5. Podajte merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo $u_{68,3}$ in razširjeno merilno negotovostjo U_{95} , če je $s_p = 0,333 \text{ V}$ in meja pogreška merilnega instrumenta $M_U = \pm(1,0\% U_i + 1 \text{ dig})$. Ročno merjeni rezultati so v tabeli 1.

Tabela 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$U \text{ (V)}$	12,3	11,9	12,0	12,4	12,1	12,4	12,1	12,3	12,2	12,1	11,8	11,9	12,3	12,2	12,0

Tabela 2

$p / \%$	50	68,3	95	95,5	99	99,73	99,99
k	0,675	1	1,96	2,0	2,58	3	3,90

Rešitev:

- Povprečna vrednost izmerjenih vrednosti je enaka:

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j = \frac{1}{15} (12,3 \text{ V} + 11,9 \text{ V} + \dots + 12,0 \text{ V}) = 12,1333 \text{ V}$$

- Negotovost tipa A se izračuna iz standardnega odklona populacije s_p :

$$u_A(U) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{0,333 \text{ V}}{\sqrt{15}} = 0,08598 \text{ V}$$

- Negotovost tipa B se upošteva iz meje pogreška merilnega instrumenta:

$$u_B(U) = \frac{M}{\sqrt{3}} = \frac{\pm(1,0\% U_i + 1 \text{ dig})}{\sqrt{3}} = 0,12779 \text{ V}$$

- Skupna merilna negotovost tako znaša:

$$u(U) = \sqrt{u_A^2(U) + u_B^2(U)} = 0,1541 \text{ V}$$

- Merilni rezultat s standardno negotovostjo ($u_{68,3}$) je:

$$U = 12,13 \text{ V}, \quad u(U) = 0,16 \text{ V}, \quad n = 15, \quad k = 1, \quad p = 68,3\%$$

- Merilni rezultat z razširjeno merilno negotovostjo (U_{95}) pa je:

$$U = 12,13 \text{ V} \pm 0,31 \text{ V}, \quad n = 15, \quad k = 1,96, \quad p = 95\%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Ugotovite odzivni čas T_a , dvižni čas T_r in mejno frekvenco f_m merilne naprave (člen 1. reda), če je znan odziv na stopnico $U_0 = 5\text{ V}$ v dveh točkah: $u_2(t = 1\text{ ms}) = 3,46\text{ V}$ in $u_2(t \rightarrow \infty) = 4\text{ V}$. Narišite sliko ene periode na zaslonu osciloskopa ($k_{y1} = k_{y2}$) za dano napravo, če jo vzbuja sinusnim signalom frekvence f_m ! $u_{vh} = u_{y1}$, $u_{iz} = u_{y2}$

Rešitev:

- Če merilno napravo aproksimiramo s členom 1. reda, je odziv na stopnico enak:

$$u_2 = U_0(1 - e^{-t/\tau})$$

- Iz druge znane točke odziva $u_2(t \rightarrow \infty) = 4\text{ V}$, ko je prehodni pojav že izzvenel, dobimo novo stacionarno stanje U_0^* .

$$4\text{ V} = U_0^*(1 - e^{-\infty/\tau}) = U_0^*$$

- Iz prve znane točke odziva $u_2(t = 1\text{ ms}) = 3,46\text{ V}$ pa **časovno konstanto**:

$$3,46\text{ V} = 4\text{ V}(1 - e^{-1\text{ ms}/\tau}) \rightarrow \tau = 1\text{ ms} / -\ln\left(1 - \frac{3,46\text{ V}}{4\text{ V}}\right) = 0,50\text{ ms}$$

- V **odzivnem času** T_a naraste u_2 po dogovor na 95% končne vrednosti:

$$0,95U_0^* = U_0^*(1 - e^{-T_a/\tau}) \rightarrow T_a = \tau \ln 20 = 1,50\text{ ms}$$

- V **dvižnem času** T_r naraste u_2 po dogovor od 10% do 90% od prvega $u_2(t = 0) = 0\text{ V}$ do drugega $u_2(t \rightarrow \infty) = 4\text{ V}$ stacionarnega stanja :

$$0,1U_0 = U_0(1 - e^{-t_1/\tau}) \quad \text{in} \quad 0,9U_0 = U_0(1 - e^{-(t_1+T_r)/\tau})$$

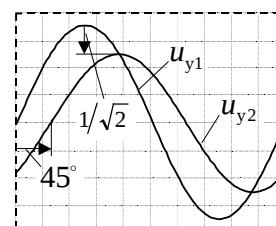
- od koder dobimo: $T_r = \tau \ln 9 = 1,10\text{ ms}$

- Mejna frekvenca** je določena z upadom razmerja izhodne z vhodno napetostjo na $1/\sqrt{2}$:

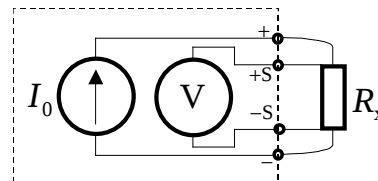
$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_m)^2 \tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow f_m = \frac{1}{2\pi \tau} = 318,3\text{ Hz}$$

- Slika ene periode na zaslonu osciloskopa:

- Pri mejni frekvenci amplituda izhodnega signala upade na $1/\sqrt{2}$ in sinus zaostane za kot $\varphi = 45^\circ$.



2. Kolikšna je relativna sistematična napaka merjenja upornosti $R_x = 75\Omega$, če jo merimo 4-vodno z digitalnim multimetrom, ki ima notranjo upornost med S-sponkama voltmetra $R_v = 1M\Omega$?



Rešitev:

- V 4-vodnem načinu merjenja upornosti multimeter meri padec napetosti neposredno na uporu. Zato nimamo opravka s sistematičnim pogreškom zaradi priključnih žic.
- Po drugi strani pa tok, ki ga generira multimeter z notranjim tokovnim virom, ne gre ves skozi upor R_x , ampak se ga določen delež zaradi končne upornosti voltmetra odcepi skozi voltmeter. Ker multimeter (ohmmeter) izračuna upornost iz nastavljenega (generiranega) toka in izmerjenega padca napetosti, imamo zaradi parazitnega (odcepljenega) toka skozi voltmeter opravka s sistematično napako.
- Dejansko izmerjena upornost tako znaša:

$$R'_x = R_x \parallel R_v = \frac{R_x \cdot R_v}{R_x + R_v}$$

- Ker je prava vrednost upora enaka $R_x = 75\Omega$, imamo opravka z relativno sistematično napako:

$$e = \frac{R'_x - R_x}{R_x} = \frac{\frac{R_x \cdot R_v}{R_x + R_v} - R_x}{R_x} = -\frac{R_x}{R_x + R_v} \approx -7,5 \cdot 10^{-5}$$

3. Rezultat kalibracije ampermetra v štirih točkah je prikazan v tabeli. Prva kolona predstavlja referenčno vrednost, druga kolona kaže izmerjeno vrednost. Preračunana merilna negotovost ampermetra je 0,45 A. Koliko znaša pogrešek kalibriranega inštrumenta (kolona tri) in koliko je korekcija kalibriranega inštrumenta (kolona štiri)? Pri uporabljanju ampermetra ste izmerili 6 A. Zapišite enačbo in korigiran merilni rezultat!

I_{ref}/A	I_i/A	E/A	K/A
1,98	2,00		
3,95	4,00		
6,03	6,00		
8,04	8,00		

Rešitev:

- Pogrešek kalibriranega instrumenta je razlika izmerjene vrednosti in referenčne vrednosti. Korekcija pa ima obratni predznak pogreška in se prišteva k rezultatu.

I_{ref}/A	I_i/A	E/A	K/A
1,98	2,00	+0,02	-0,02
3,95	4,00	+0,05	-0,05
6,03	6,00	-0,03	+0,03
8,04	8,00	-0,04	+0,04

- Če pri uporabi instrumenta izmerimo z ampermetrom 6 A, znaša prava vrednost

$$\underline{\underline{I = I_i + K = 6 \text{ A} + (+0,03 \text{ A}) = 6,03 \text{ A}}}$$

- pri tem uporabimo korekcijo $K = +0,03 \text{ A}$ za izmerjeno točko $I_i = 6 \text{ A}$ iz tabele.

- Merilni rezultat je enak

$$\underline{\underline{I = 6,03 \text{ A} \quad , \quad u(I) = 0,45 \text{ A} \quad , \quad n = 1}}$$

4. Katere vrednosti lahko pričakujemo z 99 odstotno verjetnostjo na prikazovalniku voltmetra, ko merimo napetost vira, ki ima notranjo upornost $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ in napetost praznega teka, ki je bila določena na podlagi sedmih meritev:

$$U_0 = 6,8925 \text{ V} , u(U_0) = 20 \text{ mV} (n = 7) ?$$

Uporabljeni voltmeter ima podatke:

$$M_U = \pm(0,02\%U + 0,01\%U_D + 2\text{dig}), U_D = 10 \text{ V},$$

$$R_V = 10 \text{ M}\Omega , \text{ ločljivost } \Delta U_q = 100 \mu\text{V}$$

Negotovosti notranje upornosti R_0 in upornosti voltmetra R_V zanemarite!

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(\text{v})$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Napetostni delilnik nam da: $U_V = U_0 \frac{R_V}{R_0 + R_V} = U_0 \cdot 0,999 = 6,885614 \text{ V}$
- Standardna negotovost je sestavljena iz prispevka voltmetra – negotovost tipa B - in prispevka negotovosti napetosti na vhodu, ki je bila ocenjena z devetimi meritvami – negotovost tipa A:

$$u_B(U_V) = \frac{1}{\sqrt{3}} M_U = \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \cdot 10^{-4} U_V + 1 \cdot 10^{-4} U_D + 0,2 \text{ mV}) = 1,488 \text{ mV}$$

$$u_A(U_V) = \frac{\partial U_V}{\partial U_0} u_A(U_0) = \frac{R_V}{R_0 + R_V} u_A(U_0) = 19,98 \text{ mV} \rightarrow u_A(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- Skupno standardno negotovost sestavljata oba prispevka.:

$$u_c(U_V) = \sqrt{u_A^2(U_V) + u_B^2(U_V)} = 20,05 \text{ mV} \rightarrow u_c(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- v danem primeru je prispevek negotovosti tipa A prevladujoč. Zato je prevladujoča tudi porazdelitev pogreška tega prispevka.
- Ker je skupna standardna negotovost tipa A dobljena na manjšem številu meritev, uporabimo pri določanju faktorja razširitve t-porazdelitev in število prostostnih stopenj $\nu_{\text{eff}} = n - 1 = 7 - 1 = 6$

$$\text{Iz tabele dobimo za faktor razširitve: } \nu_{\text{eff}} = 6 \rightarrow k = t_{99\%} = 3,71$$

- Razširjena negotovost je: $U_{99}(U_V) = t_{99\%} \cdot u_c(U_V) = 74,2 \text{ mV}$
- Z 99 odstotno verjetnostjo lahko pričakujemo rezultate med $U_V - U_{99}(U_V)$ in $U_V + U_{99}(U_V)$:

$$6,8114 \text{ V} < U_V < 6,9598 \text{ V}$$

5. Izpeljite številsko enačbo za faktor kvalitete $Q = 2\pi fR(C_1 + C_2)$, če so neposredno merjene veličine izražene v kHz, k Ω in nF ter jo uporabite za naslednje podatke:

$$f = 10 \text{ kHz}, R = 12 \text{ k}\Omega, C_1 = 10 \text{ nF}, C_2 = 25 \text{ nF}$$

Rešitev:

- Veličinsko enačbo $Q = 2\pi fR(C_1 + C_2)$ zapišemo s produkti številskih vrednosti in enot:

$$\{Q\}[Q] = 2\pi \{f\}[f] \{R\}[R] (\{C_1\}[C_1] + \{C_2\}[C_2])$$

- Upoštevati moramo, da sta enoti za kapacitivnosti C_1 in C_2 enaki $[C_1] = [C_2] = [C]$. Veličinsko enačbo preoblikujemo v obliko:

$$\{Q\} = 2\pi \{f\} \{R\} (\{C_1\} + \{C_2\}) \frac{[f][R][C]}{[Q]}$$

- Kvocient uporabljenih enot je številaska vrednost:

$$\frac{[f][R][C]}{[Q]} = \frac{10^3 \text{ Hz} \cdot 10^3 \Omega \cdot 10^{-9} \text{ F}}{1} = 10^{-3} \frac{\Omega \text{ F}}{\text{s}} = 10^{-3},$$

- ki ga pomnožimo še s številskim faktorjem 2π : $2\pi \cdot 10^{-3}$

- Ker za rezultat dobimo le številsko vrednost, moramo navesti tudi, za kakšne enote velja:

$$\{Q\} = 2\pi \cdot 10^{-3} \{f\} \{R\} (\{C_1\} + \{C_2\}) \rightarrow Q = 2\pi \cdot 10^{-3} fR(C_1 + C_2) \left(\frac{f}{\text{kHz}}, \frac{R}{\text{k}\Omega}, \frac{C}{\text{nF}} \right)$$

- Za dane podatke dobimo:

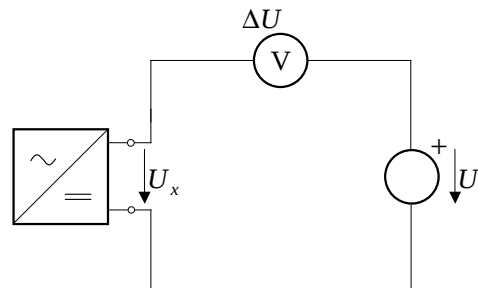
$$Q = 2\pi \cdot 10^{-3} \cdot f \cdot R \cdot (C_1 + C_2) = 2\pi \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 12 \cdot (10 + 25) = 26,39$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Značilno za diferenčno metodo je, da je doprinos negotovosti voltmetra, ki meri le majhno razliko med neznano in referenčno napetostjo, k negotovosti napetosti U_x zanemarljiv. Skicirajte vezje in določite težo prispevka negotovosti voltmetra!

Rešitev:

- Diferenčno metodo uporabljamo, kadar nas zanima sprememba fizikalne veličine.



- Razlike med neznano vrednostjo in referenčno vrednostjo ni potrebno meriti zelo točno, kadar je razlika majhna! Dokaz:

- Če je napetostna razlika $\Delta U = U_v$ majhna, lahko izenačimo U_x in U_r :

$$U_x = U_r + U_v \approx U_r$$

- Standardna negotovost napetosti U_x je enaka:

$$u(U_x) = \sqrt{\left(\frac{\partial U_x}{\partial U_r} u(U_r)\right)^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial U_v} u(U_v)\right)^2} = \sqrt{(u(U_r))^2 + (u(U_v))^2}$$

- in v relativni obliki:

$$w(U_x) = \frac{u(U_x)}{U_x} \approx \sqrt{\left(\frac{u(U_r)}{U_r}\right)^2 + \left(\frac{U_v}{U_r} \frac{u(U_v)}{U_v}\right)^2} = \sqrt{w^2(U_r) + \left(\frac{U_v}{U_r}\right)^2 w^2(U_v)}$$

$$w(U_x) \approx \sqrt{w^2(U_r) + \left(\frac{U_v}{U_x}\right)^2 w^2(U_v)} \quad \Rightarrow \quad w(U_x)_{U_v/U_x \rightarrow 0} \rightarrow w(U_r)$$

- Teža prispevka negotovosti voltmetra je enaka U_v/U_x .

2. V verigo (kaskado) vezana merilna člena – prvi ima mejno frekvenco $f_{m1} = 100 \text{ kHz}$, drugi pa časovno konstanto $\tau_2 = 1 \mu\text{s}$ (člena 1. reda) - povzročata pri frekvenci f fazni pogrešek 1° . Katera je ta frekvenca in kolikšen je pri tem amplitudni pogrešek?

Rešitev:

- Za merilni člen, ki ga aproksimiramo s členom 1. reda ($u_2 = U_0(1 - e^{-t/\tau})$), zapišemo amplitudno in fazno karakteristiko:

$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 \tau^2}}; \quad \varphi = -\arctg \omega \tau$$

- od koder lahko izrazimo frekvenco f , če poznamo fazni kot φ in časovno konstanto τ kot v našem primeru:

$$f = \frac{\text{tg } \varphi}{2\pi \tau}$$

- Pri kaskadni vezavi merilnih členov se skupni dvižni čas geometrično podaljša:

$$T_{rs}^2 = T_{r1}^2 + T_{r2}^2$$

- Če merilno napravo aproksimiramo s členom 1. reda, je povezava dvižnega časa in časovne konstante enaka:

$$T_r = \tau \ln 9 = 2,2 \tau$$

- Iz zgornjega izvedemo, da je tudi skupna časovna konstanta kaskadno vezanih merilnih členov enaka geometrični vsoti:

$$\tau_s = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$$

- Povezava mejne frekvence in časovne konstante za člen 1. reda je: $\tau = \frac{1}{2\pi f_m}$

- in za prvi merilni člen velja: $\tau_1 = \frac{1}{2\pi f_{m1}} = 1,5915 \mu\text{s}$

- Skupna časovna konstanta je tako:

$$\tau_s = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = 1,8796 \mu\text{s}$$

- Sedaj lahko izračunamo iskano frekvenco:

$$f = \frac{\text{tg } \varphi}{2\pi \tau_s} = 1478 \text{ Hz}$$

- Amplitudni pogrešek dobimo iz amplitudne karakteristike:

$$e_A = \frac{|U_2|}{|U_1|} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f \tau_s)^2}} - 1 = -1,52 \cdot 10^{-4}$$

3. Digitalni amperimeter s $4\frac{1}{2}$ -mestnim prikazovalnikom ima mejo pogreška $M_I = \pm(0,1\% I_i + 0,1\% I_D + 2 \text{ dig})$, kaže pa $I_i = 4,567 \text{ mA}$. Izrazite popolni merilni rezultat toka s standardno negotovostjo! Kakšen pa je popolni merilni rezultat, če je amperimeter umerjen in je lastni pogrešek $E = -8 \mu\text{A}$, razširjena negotovost ($k = 2$) pa $U = 21 \mu\text{A}$?

Rešitev:

- Kadar imamo eno meritev in je podan mejni pogrešek, predpostavimo, da je gostota porazdelitve pogreška pravokotne oblike in zapišemo standardno negotovost z:

$$u(I) = \frac{M_I}{\sqrt{3}},$$

- ki v našem prvem primeru znaša:

$$\begin{aligned} u(I) &= \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} I_i + 10^{-3} I_D + 2 \text{ dig}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} 4,567 \text{ mA} + 10^{-3} 19,999 \text{ mA} + 0,002 \text{ mA}) = \frac{1}{\sqrt{3}} 0,0266 \text{ mA} \\ u(I) &= 0,01534 \text{ mA} \rightarrow u(I) = 0,016 \text{ mA} \end{aligned}$$

- pri tem smo upoštevali, da je merilni doseg pri $4\frac{1}{2}$ -mestnem prikazu (največja vrednost je 19,999) $I_D = 19,999 \text{ mA}$ in vrednost zadnjega digita 0,001 mA.

- Popolni merilni rezultat toka s standardno negotovostjo zapišemo:

$$I_i = 4,567 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,016 \text{ mA}, \quad n = 1$$

- Če je instrument umerjen, poznamo lastni pogrešek instrumenta E in popravimo izmerjeno vrednost:

$$I = I_i - E = 4,567 \text{ mA} - (-8 \mu\text{A}) = 4,575 \text{ mA}$$

- Standardno negotovostjo dobimo v drugem primeru iz razširjene negotovosti:

$$u(I) = \frac{U(I)}{k} = \frac{0,021 \text{ mA}}{2} = 0,0105 \text{ mA} \rightarrow u(I) = 0,011 \text{ mA}$$

- Merilni rezultat podan s standardno negotovostjo za drugi primer je enak:

$$I_i = 4,575 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,011 \text{ mA}, \quad n = 1$$

4. V tabeli so zapisane diagonalne napetosti v četrtinskem Wheatstonovem mostiču, ki so bile izmerjene z voltmetrom $U_{5,izm}$. Mostiček je bil napajan z $U_0 = 4V$. Koliko je pogrešek zaradi nelinearnosti E , ki je definiran kot razlika med izmerjenimi vrednostmi voltmetra in idealno karakteristiko četrtinskega mostiča? Narišite graf $E(\Delta R/R)$!

$\Delta R/R$	$U_{5,izm} / mV$
-0,10	-112
-0,08	-90
-0,06	-68
-0,04	-45
-0,02	-22
0	-1
0,02	20
0,04	44
0,06	64
0,08	88
0,1	110

Rešitev:

- Idealno karakteristiko četrtinskega mostiča izračunamo z

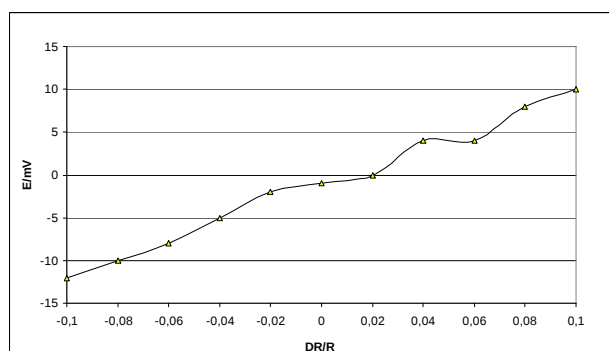
$$U_{5,izr} = \frac{U_0 \Delta R}{4R}$$

- Pogrešek nelinearnosti E je enak:

$$E = U_{5,izm} - U_{5,izr}$$

$\Delta R/R$	$U_{5,izm} / mV$	$U_{5,izr} / mV$	E / mV
-0,10	-112	-100	-12
-0,08	-90	-80	-10
-0,06	-68	-60	-8
-0,04	-45	-40	-5
-0,02	-22	-20	-2
0	-1	0	-1
0,02	20	20	0
0,04	44	40	4
0,06	64	60	4
0,08	88	80	8
0,1	110	100	10

- Graf:



5. Kolikšna je napetost U , izražena v enoti SI, če znaša 10 dBm_{50} (referenca 1 mW , 50Ω)? Kolikšna pa je, če jo izrazimo v dBm_{600} (referenca 1 mW , 600Ω).?

Rešitev:

- Kadar je napetost izražena v enoti decibel, je pri tem mišljeno njeno razmerje proti referenčni vrednosti U_{ref} . Izhodiščna definicija decibela je podana z desetiškim logaritmom dveh moči:

$$\frac{U}{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{P}{P_{\text{ref}}} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{R} \cdot \frac{R}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref}}} \right)$$

- Pri zapisu $\frac{U}{\text{dBm}_{50}}$ je referenčna napetost U_{ref1} enaka napetosti, kadar se na upor $R = 50 \Omega$ sprošča moč $P = 1 \text{ mW}$:

$$U_{\text{ref1}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1 \text{ mW} \cdot 50 \Omega} = 0,2236 \text{ V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{50}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,2236 \text{ V}} \right)$$

- V našem primeru je napetost U , izražena v enoti SI ($[U] = \text{V}$), enaka:

$$\frac{10 \text{ dBm}_{50}}{\text{dBm}_{50}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,2236 \text{ V}} \right) \Rightarrow U = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 0,2236 \text{ V} = 0,7071 \text{ V}$$

- Pri zapisu $\frac{U}{\text{dBm}_{600}}$ je referenčna napetost U_{ref2} je enaka napetosti, kadar se na upor $R = 600 \Omega$ sprošča moč $P = 1 \text{ mW}$:

$$U_{\text{ref2}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1 \text{ mW} \cdot 600 \Omega} = 0,7746 \text{ V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{600}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,7746 \text{ V}} \right)$$

- in za naš primer dobimo:

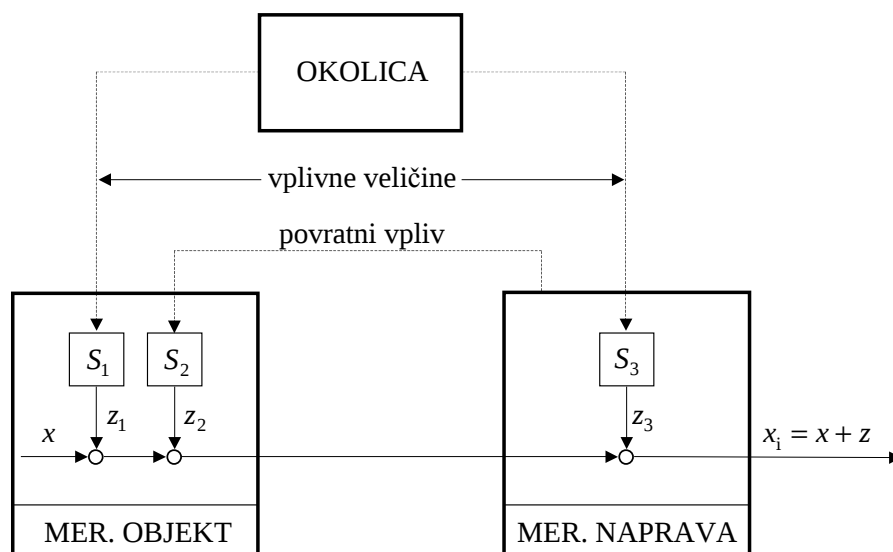
$$\frac{U}{\text{dBm}_{600}} = 20 \log \left(\frac{0,7071 \text{ V}}{0,7746 \text{ V}} \right) = -0,792 \Rightarrow U = -0,792 \text{ dBm}_{600}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Opišite postopek merjenja in razložite osnovno shemo merjenja!

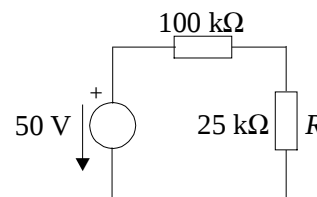
Rešitev:

- **Merjenje** je postopek, pri katerem primerjamo neznano vrednost neke fizikalne veličine z znano količino istovrstne veličine (enoto) – neposredno merjenje.
 - $I = 6\text{ A}$ - efektivna vrednost električnega toka,
 - 6 - številska vrednost,
 - A (amper) - enota za električni tok.
- Izmerjena vrednost je eden od parametrov neke fiz. veličine (i - trenutna vrednost, $\hat{i}$ - temenska vrednost, $\bar{I}$ - srednja vrednost itn.).
- **Osnovna shema merjenja:**
 - merilni objekt – nosilec merjene veličine,
 - merilna naprava – nam daje izmerjeno vrednost.



- Izmerjena vrednost x_1 se za vsoto treh delnih motenj $z_1 + z_2 + z_3$ razlikuje od prave vrednosti
 - S_1 - občutljivost merilnega objekta na vplivne veličine,
 - S_2 - povratni vpliv na priključitev merilne naprave,
 - S_3 - občutljivost merilne naprave na vplivne veličine.
- Razliko med izmerjeno vrednostjo in pravo vrednostjo imenujemo merilni pogrešek.

2. Želimo izmeriti napetost na $25\text{k}\Omega$ uporu z voltmetroma, ki imata doseg $U_D = 20\text{ V}$. Prvi ima karakteristično upornost $1\text{k}\Omega/\text{V}$, drugi pa $20\text{k}\Omega/\text{V}$. Ugotovite, koliko voltmetra kažeta in kolikšen je sistematični pogrešek pri posamezni meritvi?



Rešitev:

- Pred priključitvijo voltmetrov, je napetost na uporu R enaka:

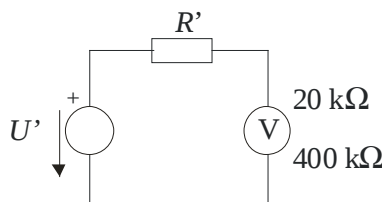
$$U_R = 50\text{ V} \cdot \frac{25\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega + 25\text{k}\Omega} = 10\text{ V}$$

- Po priključitvi voltmetrov z notranjima upornostima :

$$R_{V_1} = U_D \cdot R_{V_1,0} = 20\text{ V} \cdot 1\text{k}\Omega/\text{V} = 20\text{k}\Omega \text{ oziroma}$$

$$R_{V_2} = U_D \cdot R_{V_2,0} = 20\text{ V} \cdot 20\text{k}\Omega/\text{V} = 400\text{k}\Omega$$

- dobimo naslednje nadomestno vezje:



- kjer sta $U' = U_R$ in R' (vzporedna vezava uporov $100\text{k}\Omega$ in $25\text{k}\Omega$):

$$R' = \frac{25\text{k}\Omega \cdot 100\text{k}\Omega}{25\text{k}\Omega + 100\text{k}\Omega} = 20\text{k}\Omega$$

- Kazanje prvega voltmetra je tako enako:

$$U_{V_1} = 10\text{ V} \cdot \frac{20\text{k}\Omega}{20\text{k}\Omega + 20\text{k}\Omega} = 5\text{ V}$$

- in sistematični pogrešek je:

$$E_1 = 5\text{ V} - 10\text{ V} = -5\text{ V}; \quad e_1 = \frac{-5\text{ V}}{10\text{ V}} = -50\%$$

- Kazanje drugega voltmetra pa je enako:

$$U_{V_2} = 10\text{ V} \cdot \frac{400\text{k}\Omega}{400\text{k}\Omega + 20\text{k}\Omega} = 9,524\text{ V}$$

- in sistematični pogrešek je enak:

$$E_2 = 9,524\text{ V} - 10\text{ V} = -0,476\text{ V}; \quad e_2 = \frac{-0,476\text{ V}}{10\text{ V}} = -4,76\%$$

3. S signalnim analizatorjem smo merili efektivno vrednost signala, ki ima poleg osnovne še harmonsko komponento, in faktor popačenja ($THD_{IEC} = \sqrt{X^2 - X_1^2} / X_1$):

$$U = 1,0000 \text{ V} ; u(U) = 2,5 \text{ mV} ; n = 1$$

$$THD = 0,2000 ; u(THD) = 0,0015 ; n = 1$$

Koliko znaša merilni rezultat pri določanju osnovne komponente signala? $r(U, THD) = 0$

Rešitev:

- Iz enačbe za faktor popačenja $THD = \sqrt{U^2 - U_1^2} / U_1$ izrazimo osnovno komponento:

$$U_1 = \frac{U}{\sqrt{1 + THD^2}} = 0,98058 \text{ V}$$

- Standardna negotovost posredno merjene osnovne komponente je sestavljena iz negotovosti vhodnih veličin U in THD :

$$u(U_1) = \sqrt{(c_1 u(U))^2 + (c_2 u(THD))^2} = \sqrt{(2,4515 \text{ mV})^2 + (0,2667 \text{ mV})^2} = 2,466 \text{ mV}$$

- kjer sta faktorja občutljivosti:

$$c_1 = \frac{\partial U_1}{\partial U} = \frac{1}{\sqrt{1 + THD^2}} = 0,9806$$

$$|c_2| = \left| \frac{\partial U_1}{\partial THD} \right| = \left| -U \frac{THD}{\sqrt{(1 + THD^2)^3}} \right| = 0,1778 \text{ V}$$

- Merilni rezultat pri določanju osnovne komponente signala znaša:

$$U_1 = 0,9806 \text{ V} , \quad u(U_1) = 2,5 \text{ mV} , \quad n = 1$$

4. Koliko je največji relativni pogrešek zaokrožanja merilne negotovosti pri zaokrožanju ne eno veljavno cifro in koliko pri dveh veljavnih cifrah? Kolikšno relativno vrednost negotovosti bi v teh primerih morali dodati? Pri zaokrožanju upoštevamo samo prvo cifro, ki jo že opustimo (če je 0 navzdol, če je 1,2,.. pa navzgor).

Rešitev:

- Zaokrožitev na eno cifro:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednosti prve veljavne cifre 1.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2$ imamo večji pogrešek kot pri zaokrožanju navzdol $u = 0,1099.. \rightarrow u_z = 0,1$:

$$u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,2 - 0,11}{0,11} = 81,8\% !$$

$$u \doteq 0,11 \rightarrow u_z = 0,1 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,1 - 0,11}{0,11} = -9,1\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na eno cifro bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,2^2 - 0,11^2}}{0,11} = \frac{0,167}{0,11} = 151,8\% !$$

- Zaokrožitev na dve cifri:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednostih prvih dveh veljavnih cifer 11.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11$ imamo največji pogrešek:

$$u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,11 - 0,101}{0,101} = 8,9\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na dve cifri bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,11^2 - 0,101^2}}{0,101} = \frac{0,0436}{0,101} = 43,1\%$$

5. Koliko je najkrajši čas določanja lastnega pogreška voltmetra $M_{U,X} = \pm(0,5\%U + 0,5\%U_D + 1\text{dig})$, $U_{D,X} = 1,000\text{ V}$, $T_{r,X} = 10\text{ ms}$ (člen 1. reda) pri točki merilnega dosega, ki ga preskušamo z referenčnim voltmetrom $M_{U,N} = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D + 1\text{dig})$, $U_{D,N} = 1,200\text{ V}$, $T_{r,N} = 100\text{ ms}$ (člen 1. reda), da bo dinamični pogrešek zanemarljiv? Upoštevajte, da je bila predhodna točka preskušanja pri polovici dosega.

Rešitev:

- Dinamični pogrešek člena prvega reda pri odzivu na stopnico, ki se zgodi, ko nastavimo novo točko preskušanja ($U_0/2 \rightarrow U_0$), opišemo z:

$$E_{\text{din}} = \frac{U_0}{2} e^{-t/\tau}$$

- Ker je referenčni voltmeter desetkrat počasnejši kot preskušani voltmeter njegova dinamika določa najkrajši čas preizkušanja. Iskano časovno konstanto zato določimo iz dviznega časa referenčnega voltmetra:

$$\tau = \frac{T_{r,N}}{\ln 9} = 45,51\text{ ms}$$

- Sistematični dinamični pogrešek je zanemarljiv, kadar je manjši od desetine negotovosti preskušane voltmetra:

$$\frac{U_0}{2} e^{-t/\tau} \leq \frac{1}{10} \frac{M_{U,X}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{10} \frac{0,5\%U_0 + 0,5\%U_D + 1\text{mV}}{\sqrt{3}}$$

- Ker je preskusna točka $U_0 = U_{D,X}$, zapišemo:

$$e^{-t/\tau} \leq \frac{1}{5} \frac{0,5\% + 0,5\% + \frac{1\text{mV}}{U_{D,X}}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{5} \frac{10^{-2} + 10^{-3}}{\sqrt{3}} = 1,27 \cdot 10^{-3}$$

- Od tod dobimo najkrajši čas določanja lastnega pogreška voltmetra za dano preskusno točko:

$$t \geq -\tau \cdot \ln(1,27 \cdot 10^{-3}) = 0,3035\text{ s}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Kako bi bili povezani dvižni čas, odzivni čas in mejna frekvenca člena prvega reda, če bi za odstopanja kot kriterij uporabili mejo 1% ?

Rešitev:

- Za merilni člen, ki ga aproksimiramo s členom 1. reda, lahko v časovnem prostoru zapišemo odziv na stopničasto obliko signal z velikostjo U_0 enačbo:

$$u_2 = U_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

- Odzivni čas** T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 1\%$ končne vrednosti, velja med odzivnim časom in časovno konstanto τ povezava:

$$\frac{u_2}{U_0} = 0,99 = (1 - e^{-T_a/\tau}) \Rightarrow T_{a,1\%} = -\tau \cdot \ln(0,01) = 4,605 \cdot \tau$$

- Če merilno napravo aproksimiramo s členom 1. reda, je povezava **dvižnega časa** in časovne konstante enaka:

$$T_r = \tau \ln 9 = 2,2 \tau$$

- Od tod dobimo povezavo med dvižnim časom in odzivnim časom

$$T_r = 2,2 \tau = 2,2 \frac{T_{a,1\%}}{4,605} = 0,478 \cdot T_{a,1\%}$$

- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujanju lahko zapišemo:

$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 \tau^2}}$$

- Če določimo **mejno frekvenco** kot frekvenco, kjer upade amplituda za 1% proti izhodiščni vrednosti $|U_2|/|U_1| = 1$, lahko zapišemo:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_{m,1\%})^2 \tau^2}} = 0,99 \Rightarrow f_{m,1\%} = \frac{1}{2\pi \tau} \sqrt{\left(\frac{1}{0,99}\right)^2 - 1} = \frac{2,27 \cdot 10^{-2}}{\tau}$$

- Od tod dobimo povezavo med mejno frekvenco in odzivnim časom:

$$f_{m,1\%} = \frac{2,27 \cdot 10^{-2} \cdot 4,605}{T_{a,1\%}} = \frac{0,1044}{T_{a,1\%}} \Rightarrow f_{m,1\%} \cdot T_{a,1\%} \doteq 0,1$$

2. Koliko je največji relativni pogrešek zaokrožanja merilne negotovosti pri zaokrožanju ne eno veljavno cifro in koliko pri dveh veljavnih cifrah? Kolikšno relativno vrednost negotovosti bi v teh primerih morali dodati? Pri zaokrožanju upoštevamo samo prvo cifro, ki jo že opustimo (če je 0 navzdol, če je 1,2,.. pa navzgor).

Rešitev:

- Zaokrožitev na eno cifro:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednosti prve veljavne cifre 1.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2$ imamo večji pogrešek kot pri zaokrožanju navzdol $u = 0,1099.. \rightarrow u_z = 0,1$:

$$u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,2 - 0,11}{0,11} = 81,8\% !$$

$$u \doteq 0,11 \rightarrow u_z = 0,1 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,1 - 0,11}{0,11} = -9,1\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na eno cifro bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,2^2 - 0,11^2}}{0,11} = \frac{0,167}{0,11} = 151,8\% !$$

- Zaokrožitev na dve cifri:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednostih prvih dveh veljavnih cifer 11.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11$ imamo največji pogrešek:

$$u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,11 - 0,101}{0,101} = 8,9\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na dve cifri bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,11^2 - 0,101^2}}{0,101} = \frac{0,0436}{0,101} = 43,1\%$$

3. Po odklonski metodi želimo z voltmetrom ($U_D = 1,1 \text{ V}$) izmeriti neznano napetost. Najprej kratko sklenemo sponki voltmetra in naredimo prvo serijo meritev napetosti. Povprečna vrednost izmerjenih vrednosti $U_{V,0}$ je $+1,2 \mu\text{V}$, njihov eksperimentalni standardni odklon $s_0(u)$ pa $0,3 \mu\text{V}$. Zatem na voltmeter priključimo neznano napetost in izmerimo drugo serijo meritev. Povprečna vrednost izmerjenih vrednosti U_V je $+1,000245 \text{ V}$, njihov eksperimentalni standardni odklon $s_1(u)$ pa $22 \mu\text{V}$. Izračunajte efektivno število mest prikaza uporabljenega voltmetra $ENOD$ in efektivno število amplitudnih stopenj za izmerjeno merilno vrednost.

$$ENOD = \log_{10} \left(\frac{U_D}{s(u)} \right)$$

Rešitev:

- Efektivno število mest prikaza uporabljenega voltmetra $ENOD$ je

$$ENOD = \log_{10} \left(\frac{U_D}{s_0(u)} \right) = \log_{10} \left(\frac{1,1 \text{ V}}{0,3 \mu\text{V}} \right) = 6,56$$

- Efektivno število amplitudnih stopenj za izmerjeno merilno vrednost določimo iz korigiranega rezultata in skupnega standardnega odklona.

- Korigirani rezultat odklona voltmetra za eno meritev je

$$U_{V,\text{kor}} = U_V - U_{V,0} = 1,000245 \text{ V} - 1,2 \mu\text{V} = 1,0002438 \text{ V}$$

- Skupni standardni odklon je

$$s_{\text{sk}}(u) = \sqrt{s_0^2(u) + s_1^2(u)} = \sqrt{(0,3 \mu\text{V})^2 + (22 \mu\text{V})^2} = 22 \mu\text{V}$$

- in efektivno število amplitudnih stopenj za izmerjeno merilno vrednost:

$$m(u) = \frac{U_{V,\text{kor}}}{s_{\text{sk}}(u)} = \frac{1,0002438 \text{ V}}{22 \mu\text{V}} = 45465,6$$

4. Izpeljite številsko enačbo za jakost električnega polja na razdalji r od izvora, ki seva z močjo P , za $E/(V/m)$, P/mW in r/cm , če je ustrezna veličinska enačba $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$? Uporabite jo za izračun E , če je $P = 2,8 mW$ in $r = 2 cm$!

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m, \quad c_0 \approx 300\,000 km/s$$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$
- Pri prehodu na številsko enačbo uporabimo prikrojeno veličinsko enačbo, v kateri bomo kasneje izpustili enote. Vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, moramo množiti in deliti z želeno enoto:

$$E \frac{V/m}{V/m} = \sqrt{P \frac{mW}{mW} \cdot \mu_0 c_0 / 2\pi \left(r \frac{cm}{cm}\right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezní številski faktor:

$$E/V/m = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot \frac{\sqrt{10^{-3} W}}{V/m} \cdot \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{10^{-2} m} = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

$$K = \frac{\sqrt{10^{-3} VA}}{10^{-2} V} \cdot \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Upoštevajoč vrednosti za $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$ in $c_0 \doteq 300\,000 km/s$

$$\text{dobimo: } K = \frac{\sqrt{10^{-3}}}{10^{-2}} \frac{\sqrt{VA}}{V} \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} H/m \cdot 300 \cdot 10^6 m/s}{2\pi}}$$

- in končno $K = 3,1623 \sqrt{\frac{A}{V}} \sqrt{60 \frac{H}{s}} = 24,495 \sqrt{\frac{A}{V} \cdot \frac{Vs}{A} \cdot \frac{1}{s}} \approx 24,5$

- V prikrojeni veličinski enačbi sedaj izpustimo enote in dobimo številsko enačbo, ki potrebuje še komentar uporabljenih enot.

$$E = 24,5 \cdot \sqrt{P/r^2}, \quad \left(\frac{E}{V/m}, P/mW, r/cm \right)$$

- Za dane podatke $P = 2,8 mW$ in $r = 2 cm$ izračunamo jakost električnega polja s pomočjo številске enačbe:

$$E = 24,5 \cdot \sqrt{P/r^2} = 24,5 \cdot \sqrt{2,8/2^2} = 20,5, \quad \left(\frac{E}{V/m} \right)$$

5. Podajte merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo za sedemkrat merjeno napetost U_x !

U_x/mV	184,548	184,550	184,553	184,551	184,549	184,549	184,544
-----------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Na razpolago je šest serij meritev z isto merilno opremo pod enakimi pogoji:

n_j	21	16	31	16	26	31
$s_j/\mu\text{V}$	57	54	72	63	78	51

Upoštevajte korekcijo $-7\mu\text{V}$. $s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2(x) + (n_2-1)s_2^2(x) + \dots + (n_r-1)s_r^2(x)}{(n_1-1) + (n_2-1) + \dots + (n_r-1)}}$

Rešitev:

- Najprej izračunamo povprečno vrednost sedmih izmerjenih vrednosti.

$$\bar{U}_x = \frac{\sum_{i=1}^n U_{xi}}{n} = 184,54914 \text{ mV}$$

- Nato izračunamo standardni odklon populacije meritev iz posameznih eksperimentalnih standardnih odklonov vzorcev meritev, iz serij meritev, ki so na razpolago in so bile izvedene z isto merilno opremo pod enakimi pogoji.

$$s_p = \sqrt{\frac{20 \cdot 57^2 \mu\text{V}^2 + 15 \cdot 54^2 \mu\text{V}^2 + 30 \cdot 72^2 \mu\text{V}^2 + 15 \cdot 63^2 \mu\text{V}^2 + 25 \cdot 78^2 \mu\text{V}^2 + 30 \cdot 51^2 \mu\text{V}^2}{(21-1) + (16-1) + (31-1) + (16-1) + (26-1) + (31-1)}} \\ = 64,0546 \mu\text{V}$$

- Naslednji korak je izračun merilne negotovosti izmerjenih tokov iz standardnega odklona populacije meritev, deljenega s številom izmerjenih vrednosti.

$$u(U_x) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{64,0546 \mu\text{V}}{\sqrt{7}} = 24,21 \mu\text{V}$$

- Pri rezultatu moramo upoštevati še korekcijo $(-7\mu\text{V})$, ki se prišteje rezultatu.

$$U_x = \bar{U}_x + K = 184,54914 + (-7\mu\text{V}) = 184,54214 \text{ mV}$$

- Po zaokrožitvi merilne negotovosti dobimo rezultat s standardno negotovostjo.

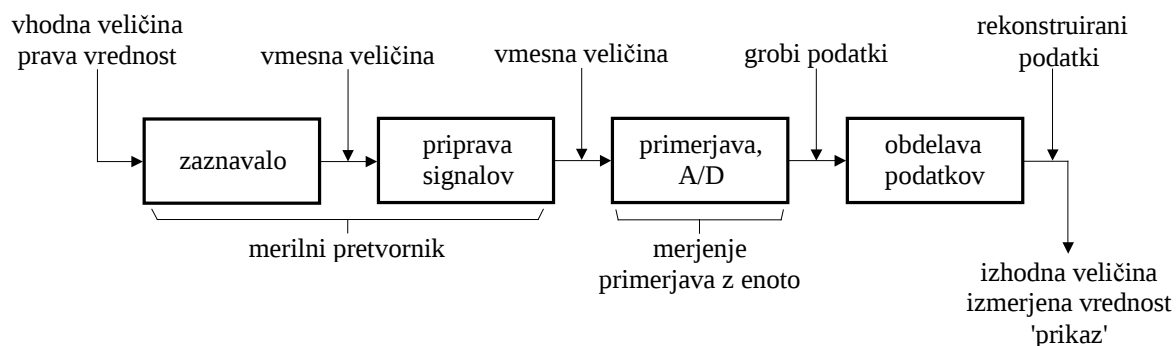
$$I_x = 184,542 \text{ mV} \quad u(I_x) = 25 \mu\text{V} \quad n = 7$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

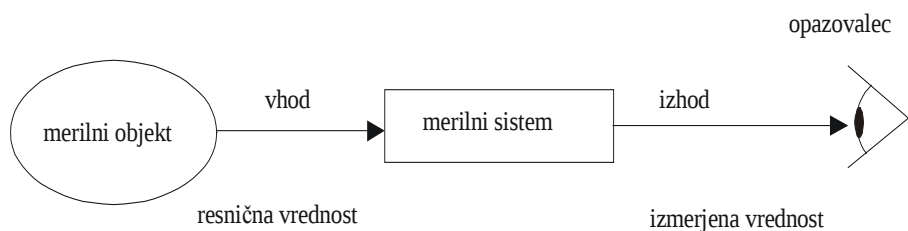
1. Skicirajte zgradbo merilnega sistema in opišite funkcije posameznih blokov v shemi! V čem se razlikujeta klasični in moderni pogled na merilni sistem?

Rešitev:

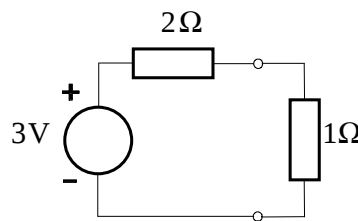
- Zgradba merilnega sistema:



- Vhodni signal vstopa v merilni pretvornik, ki je sestavljen iz zaznavala (tudi tipalo, čutilo ali senzor) in faze priprave signalov na obdelavo (ojačiti, preoblikovati, pretvoriti v veličino, ki je uporabna za neposredno primerjanje).
- Za merilnim pretvornikom je faza primerjanja merjene veličine z enoto:
 - Merjenje v ožjem smislu!
 - Izvrši se z analogno-digitalnim pretvornikom.
 - Signal za primerjavo mora biti v enosmerni obliki.
- Za analogno-digitalnim pretvornikom je faza obdelave signalov za :
 - interpretacijo podatkov, prikaz podatkov in prenos podatkov.
 - opravi funkcijo rekonstrukcije in različne matematične obdelave (npr. računanje povprečne vrednosti, integriranje, odvajanje ipd.).
- V klasični shemi je opravljal vlogo A/D pretvornika človek s svojimi čutili (tipično človeško oko).



2. Želimo izmeriti tok na upor 1Ω z ampermetroma, ki imata doseg $I_D = 1\text{A}$. Prvi ima karakteristični padec napetosti $U_{A_0,1} = 50\text{mV}$, drugi pa $U_{A_0,2} = 500\text{mV}$. Ugotovite, koliko ampermetra kažeta in kolikšen je sistematični pogrešek pri posamezni meritvi?



Rešitev:

- Pred vključitvijo ampermetrov, je tok skozi oba zaporedno vezana upora enak:

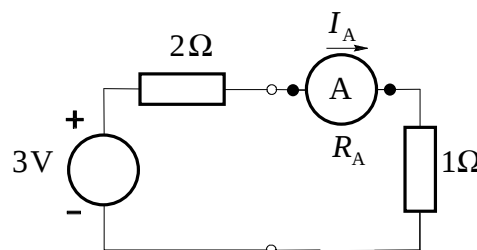
$$I_0 = \frac{3\text{V}}{2\Omega + 1\Omega} = 1\text{A}$$

- Po vključitvi ampermetrov z notranjima upornostima :

$$R_{A_1} = \frac{U_{A_0,1}}{I_D} = \frac{50\text{mV}}{1\text{A}} = 0,05\Omega \text{ oziroma}$$

$$R_{A_2} = \frac{U_{A_0,2}}{I_D} = \frac{500\text{mV}}{1\text{A}} = 0,5\Omega$$

- dobimo naslednje nadomestno vezje:



- Kazanje prvega ampermetra je tako enako:

$$I_{A,1} = \frac{3\text{V}}{2\Omega + 1\Omega + R_{A_1}} = 0,9836\text{A}$$

- in sistematični pogrešek je negativen:

$$E_1 = I_{A,1} - I_0 = 0,9836\text{A} - 1\text{A} = -0,0164\text{A} ;$$

$$e_{A,1} = \frac{I_{A,1} - I_0}{I_0} = -1,64 \cdot 10^{-2}$$

- Kazanje drugega ampermetra je enako:

$$I_{A,2} = \frac{3\text{V}}{2\Omega + 1\Omega + R_{A_2}} = 0,8571\text{A}$$

- in sistematični pogrešek je večji:

$$E_1 = I_{A,2} - I_0 = 0,8571\text{A} - 1\text{A} = -0,143\text{A} ;$$

$$e_{A,2} = \frac{I_{A,2} - I_0}{I_0} = -1,43 \cdot 10^{-1}$$

3. Kako bi se spreminjalo efektivno število amplitudnih stopenj m_D voltmetra ($U_D = 1V$), če bi imel lastni šum voltmetra enakomerno ali trikotno ali trapezno ($\beta = 0,7$) ali Gaussovo ($z = 3$) porazdelitev gostote pogreška z enakimi mejnimi vrednostmi $M_e = M_{tri} = M_{tra} = M_G = M = 0,1mV$? Koliko je pri tem efektivno število mest prikaza ENOD?

$$ENOD = \log_{10} \left(\frac{U_D}{s(u)} \right)$$

Rešitev:

- Za določitev efektivnega števila amplitudnih stopenj moramo poznati standardni odklon lastnega šuma, ki je za dane porazdelitve enak:

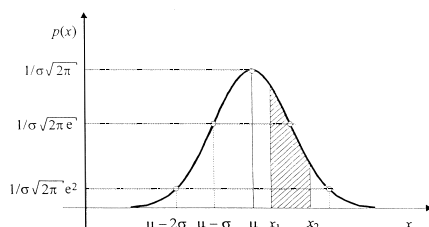
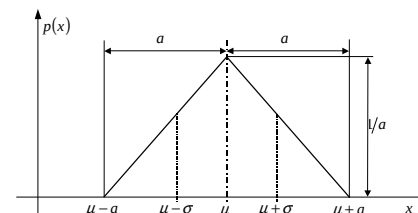
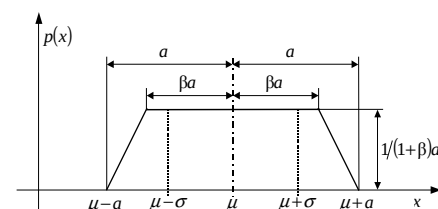
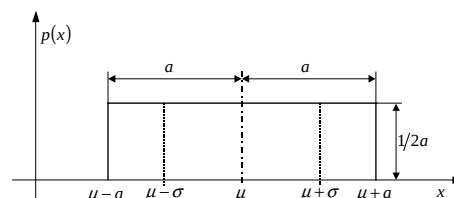
- Enakomerna porazdelitev: $\sigma_e = M_e / \sqrt{3}$

- Trapezna porazdelitev:

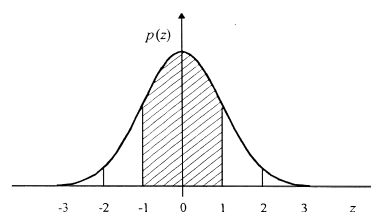
$$\sigma_{tra} = M_{tra} \sqrt{1 + \beta^2} / \sqrt{6} = M_{tra} \sqrt{1 + 0,7^2} / \sqrt{6}$$

- Trikotna porazdelitev: $\sigma_{tri} = M_{tri} / \sqrt{6}$

- Gaussova porazdelitev: $\sigma_G = M_G / 3$



⇒



$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$z = (x - \mu) / \sigma$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

- Efektivno število amplitudnih stopenj m za posamezno porazdelitev je enako:

$$m_e = \frac{U_D}{\sigma_e} = \sqrt{3} \frac{U_D}{M} = \sqrt{3} \frac{1V}{0,1mV} = \sqrt{3} \cdot 10^4 = 1,73 \cdot 10^4;$$

$$ENOD_e = \log_{10}(m_e) = \log_{10}(1,732 \cdot 10^4) = 4,24$$

$$m_{tra} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1 + 0,7^2}} \cdot 10^4 = 2,01 \cdot 10^4, \quad ENOD_{tra} = \log_{10}(m_{tra}) = 4,30;$$

$$m_{tri} = \sqrt{6} \cdot 10^4 = 2,45 \cdot 10^4, \quad ENOD_{tri} = \log_{10}(m_{tri}) = 4,39;$$

$$m_G = 3 \cdot 10^4, \quad ENOD_G = \log_{10}(m_G) = 4,48$$

4. Izpeljite prikrojeno veličinsko enačbo za zapisano izhodno veličino E , če jo želimo izračunati iz izmerjenih podatkov, kjer je $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m, $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s in

$$E = \sqrt{\frac{P\mu_0 c_0}{2\pi x^2}} \quad [E] = \text{V/m}; \quad [P] = \text{kW}; \quad [x] = \text{km}$$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi x^2}$
- Pri prehodu na prikrojeno veličinsko enačbo moramo vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, množiti in deliti z želeno enoto :

$$E \frac{\text{V/m}}{\text{V/m}} = \sqrt{P \frac{\text{kW}}{\text{kW}} \cdot \mu_0 c_0 / 2\pi \left(x \frac{\text{km}}{\text{km}}\right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številski faktor:

$$E/\text{V/m} = \sqrt{P/\text{kW} / (x/\text{km})^2} \cdot \frac{\sqrt{10^3 \text{ W}}}{\text{V/m}} \cdot \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{10^3 \text{ m}} = \sqrt{P/\text{kW} / (x/\text{km})^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

$$K = \frac{\sqrt{10^3 \text{ VA}}}{10^3 \text{ V}} \cdot \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Upoštevajoč vrednosti za $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m in $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s

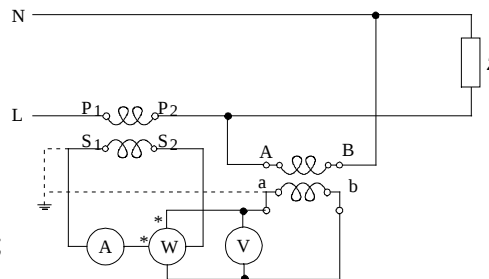
$$\text{dobimo: } K = \frac{\sqrt{10^3}}{10^3} \cdot \frac{\sqrt{\text{VA}}}{\text{V}} \cdot \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2\pi}}$$

- in končno $K = 3,162 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{\text{A}}{\text{V}}} \sqrt{60 \frac{\text{H}}{\text{s}}} = 0,24495 \sqrt{\frac{\text{A}}{\text{V}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot \frac{1}{\text{s}}} \approx 0,245$

- Prikrojena veličinska enačba je: $E/\text{V/m} = 0,245 \cdot \sqrt{P/\text{kW} / (x/\text{km})^2}$

5. Podajte popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo za faktor moči porabnika! $\lambda = P/S$

- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $y_D = 20000$,
 $y = 19111$, $r = 0,2$;
- voltmeter: $U = 105,0 \text{ V}$, $M_U = \pm(0,1\%U + 1\text{dig})$;
- ampermeter: $I = 4,820 \text{ A}$, $M_I = \pm(0,2\%I + 2\text{dig})$;
- tokovnik: $I_{pn} = 75 \text{ A}$, $I_{sn} = 5 \text{ A}$, $r = 0,1$;
- napetostnik: $U_{pn} = 50 \text{ kV}$, $U_{sn} = 100 \text{ V}$, $r = 0,1$



Rešitev:

- Faktor moči je enak razmerju delovne in navidezne moči porabnika $\lambda = P/S = P/UI$. Ker se tako vatmeter kot voltmeter in ampermeter nahajajo na sekundarni strani merilnih transformatorjev, lahko zapišemo:

$$\lambda = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{K_{um} K_{in} P_W}{K_{um} U_V \cdot K_{in} I_A} = \frac{P_W}{U_V I_A}$$

- Delovna moč, ki jo kaže vatmeter, je enaka:

$$P_W = U_n \cdot I_n \cdot \frac{y}{y_D} = 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{19111}{20000} = 477,78 \text{ W}$$

- in faktor moči je:

$$\lambda = \frac{P_W}{U_V I_A} = \frac{477,78 \text{ W}}{105,0 \text{ V} \cdot 4,820 \text{ A}} = 0,94403$$

- Ker je izhodna veličina λ enaka produktu in kvocientu vhodnih veličin, je skupna standardna negotovost za faktor moči v relativni obliki je sestavljena iz treh prispevkov na spodnji način:

$$w_c(\lambda) = \sqrt{w^2(U_V) + w^2(I_A) + w^2(P_W)} = 2,16 \cdot 10^{-3}$$

- kjer so posamezni deleži:

$$w(U_V) = \frac{M_U}{U \sqrt{3}} = \frac{10^{-3} + 0,1 \text{ V} / 105,0 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 1,127 \cdot 10^{-3},$$

$$w(I_A) = \frac{M_I}{I \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 0,001 \text{ A} / 4,820 \text{ A}}{\sqrt{3}} = 1,394 \cdot 10^{-3},$$

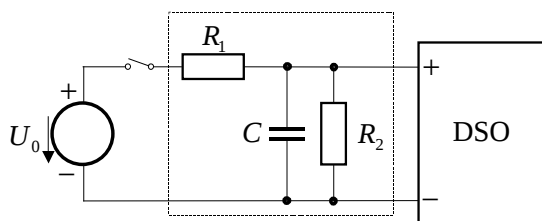
$$w(P_W) = \frac{r(P_W)}{100} \frac{y_D}{y} \frac{1}{\sqrt{3}} = 1,208 \cdot 10^{-3} \quad (\text{razred je podan na doseg})$$

- Zaokrožen popolni merilni rezultat zapišemo s standardno negotovostjo $u_c(\lambda) = w_c(\lambda) \cdot \lambda = 2,04 \cdot 10^{-3}$:

$$\lambda = 0,9440, \quad u_c(\lambda) = 0,0021, \quad n = 1$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Narišite odziv člena, ki ga merimo z osciloskopom, ko vklopimo stikalo. Izračunajte kapacitivnost kondenzatorja C , če je odzivni čas znotraj enega odstotka stacionarnega stanja $T_{a,1\%} = 7,52 \text{ ms}$ in je $U_0 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 763 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 92,4 \text{ k}\Omega$.

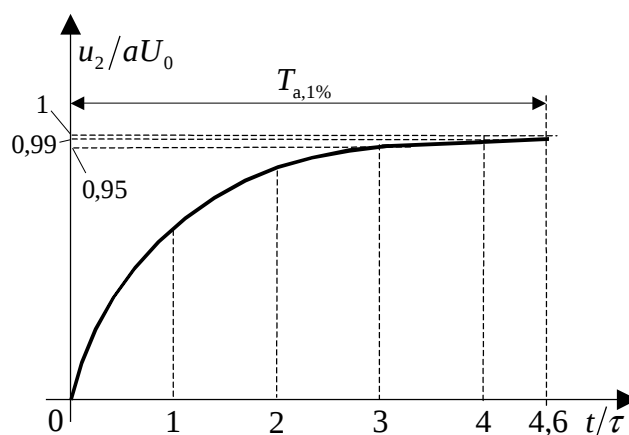


Rešitev:

- Opraviti imamo s členom 1. reda, ki ima časovno konstanto τ enako:

$$\tau = a\tau_1 = aR_1C$$

- pri čemer je a delilno razmerje uporov in določa napetost v stacionarnem stanju:



$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,108 ; \quad U_2 = aU_0 = 1,08 \text{ V}$$

- Časovna konstanta je:

$$\tau = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} C$$

- Odzivni čas T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 1\%$ končne vrednosti, velja za člen 1. reda:

$$\frac{u_2}{aU_0} = 0,99 = \left(1 - e^{-T_{a,1\%}/\tau}\right) \Rightarrow T_{a,1\%} = \ln 100 \cdot \tau \approx 4,6 \tau$$

- V našem primeru je odzivni čas enak $T_{a,1\%} = 7,52 \text{ ms}$ in od tod izračunamo iskano kapacitivnost:

$$C = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \tau = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cdot \frac{T_{a,1\%}}{4,6}$$

$$C = \frac{763 \cdot 10^3 \Omega + 92,4 \cdot 10^3 \Omega}{763 \cdot 10^3 \Omega \cdot 92,4 \cdot 10^3 \Omega} \cdot \frac{7,52 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{4,6} = 19,84 \text{ nF}$$

2. Koliko kaže vltmeter, ki se odziva na pravilno efektivno vrednost napetosti, in vltmeter, ki se odziva na usmerjeno vrednost napetosti, če ju priključimo na napetost $u/V = 150 + 100 \sin \omega t + 30 \sin 3\omega t$?

Rešitev:

- Pravilno efektivno vrednost napetosti dobimo z geometričnim seštevanjem efektivnih vrednosti komponent signala (enosmerne, osnovne in tretje harmonske komponente):

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{(150 \text{ V})^2 + \left(\frac{100 \text{ V}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30 \text{ V}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 167,18 \text{ V}$$

- Usmerjena vrednost napetosti je enaka:

$$U_r = |\bar{u}| = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

- Ker v našem primeru signal ($u/V = 150 + 100 \sin \omega t + 30 \sin 3\omega t$) nima negativne vrednosti, lahko zapišemo: $U_r = \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$. Srednja vrednost obeh sinusnih komponent v periodi je enaka nič in za naš primer zapišemo:

$$\bar{u} = 150 \text{ V}$$

- Instrumenti, ki se odzivajo na usmerjeno vrednost napetosti, imajo pomnoženo skalo z **oblikovni faktorjem** za sinusno obliko:

$$F_0 = \frac{X}{X_r} = \frac{\hat{x}/\sqrt{2}}{2\hat{x}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111$$

- Voltmeter, ki se odziva na usmerjeno vrednost napetosti, nam zato kaže:

$$U = F_0 \cdot \bar{u} = 1,111 \cdot 150 \text{ V} = 166,65 \text{ V}$$

3. Naštejte osnovne veličine in osnovne enote SI sistema. Zapišite upornost $R = 10\Omega$ le z osnovnimi enotami SI sistema (npr. preko izpeljanih veličin moči, sile)?

Rešitev:

- Mednarodni sistem veličin ISQ temelji na sedmih osnovnih veličinah: čas, dolžina, masa, električni tok, termodinamična temperatura, množina snovi in svetilnost.
 - Leta 2008 je Mednarodni urad za mere in uteži (BIPM) izdal 3. izdajo mednarodnega slovar iz metrologije (VIM), v katerem je za razliko od 2. izdaje, kjer je definiran le mednarodni sistem enot SI (fr. *Système international*), dodana še definicija mednarodnega sistema veličin ISQ (ang. *International System of Quantities*), na katerem SI temelji.
- Mednarodni sistem enot SI vsebuje sedem osnovnih enot: sekunda, meter, kilogram, amper, kelvin, mol in kandela.
- Da dobimo enote le osnovnih veličin, moramo upornost predstaviti z enačbo, v kateri nastopajo le osnovne veličine z osnovnimi enotami. Zato lahko uporabimo različne zakone, ki jih poznamo iz fizike. Upornost R lahko npr. zapišemo po ohmovem zakonu z enačbo:

$$R = \frac{U}{I}$$

- Ker je tok I že osnovna veličina, je potrebno razstaviti le napetost U . To lahko naredimo npr. preko električne moči P :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{P}{I^2}$$

- Ker tudi moč ni osnovna veličina, jo lahko razstavimo npr. preko sile F in hitrosti v . Silo nadalje preko pospeška a , preko hitrosti v do dolžine in časa.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{P}{I \cdot I} = \frac{F \cdot v}{I^2} = \frac{F \cdot l}{t \cdot I^2} = \frac{m \cdot a \cdot l}{t \cdot I^2} = \frac{m \cdot v \cdot l}{t \cdot t \cdot I^2} = \frac{m \cdot l \cdot l}{t \cdot t \cdot t \cdot I^2} = \frac{m \cdot l^2}{t^3 \cdot I^2}$$

- Zapišemo lahko tudi enotsko enačbo:

$$[R] = \frac{[m] \cdot [l]^2}{[t]^3 \cdot [I]^2}$$

- ter končno upornost $R = 10\Omega$ kot:

$$R = \{R\} \cdot [R] = 10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3 \cdot \text{A}^2}$$

4. Uporoma z enako nazivno vrednostjo, smo izmerili upornost z istim instrumentom. Standardna negotovost je bila $0,2 \text{ m}\Omega$. Upora vežemo vzporedno. Koliko je standardna negotovost upornosti te vezave? $r = 1$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Upornost vzporedne vezave uporov je:

$$R_{\text{sk}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Skupno standardno negotovost zapišemo z upoštevanjem faktorjev korelacije:

$$u_c(R_{\text{sk}}) = \sqrt{[c_1 u(R_1)]^2 + [c_2 u(R_2)]^2 + 2[c_1 c_2 r(R_1, R_2) u(R_1) u(R_2)]}$$

- Faktorji občutljivosti so:

$$c_1 = \frac{\partial R_{\text{sk}}}{\partial R_1} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

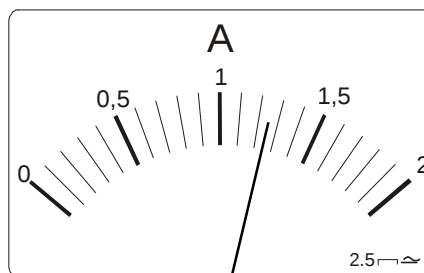
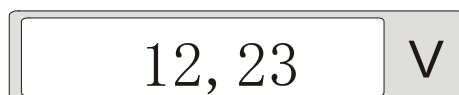
$$c_2 = \frac{\partial R_{\text{sk}}}{\partial R_2} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

- posamezne negotovosti pa: $u(R_1) = u(R_2) = u(R)$
- Standardna negotovost upornosti vzporedne vezave je:

$$u_c(R_{\text{sk}}) = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{u(R)}{4} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot 1 \cdot u^2(R)} = \sqrt{\frac{4}{16}} u(R) = \frac{u(R)}{2} = 0,1 \text{ m}\Omega$$

5. S pomočjo analognega ampermetra in digitalnega voltmetra merimo enosmerno moč P , ki se troši na bremenu. S spodnjih slik odčitajte izmerjeni vrednosti za tok I_A in napetost U_V . Podajte popolni merilni rezultat za moč bremena P . Ugotovite, ali ločljivosti inštrumentov lahko zanemarimo?

Sistematične pogreške zaradi vključitve inštrumentov zanemarimo. Največja merilna napaka (meja pogreška) za voltmeter je $M_U = \pm(0,10\% U + 7 \text{ dig})$. Predpostavite, da ste sposobni analogni inštrument odčitati na eno desetinko razdelka natančno.



Rešitev:

- Voltmeter kaže $U_V = 12,23 \text{ V}$, ampermeter pa $I_A = 1,25 \text{ A}$.
 - Iskana moč je enaka: $P = I_A U_V = 1,25 \text{ A} \cdot 12,23 \text{ V} = 15,2875 \text{ W}$
- Doseg ampermetra je $I_D = 2 \text{ A}$. Razred ampermetra je $r = 2,5$.
- Ločljivost prikazovalnika voltmetra je $1 \text{ dig} = 0,01 \text{ V}$.
- Zaokroženi merilni negotovosti ampermetra in voltmetra v relativni obliki sta:

$$w(I_A) = \frac{u(I_A)}{I_A} = \frac{M_I}{\sqrt{3}} \frac{1}{I_A} = \frac{r}{100} I_D \frac{1}{I_A \sqrt{3}}$$

$$w(I_A) = \frac{2,5}{100} \frac{2 \text{ A}}{1,25 \text{ A}} \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,02309 \approx 0,024$$

$$w(U_V) = \frac{u(U_V)}{U_V} = \frac{M_U}{\sqrt{3}} \frac{1}{U_V} = \frac{(0,10\% U_V + 7 \text{ dig})}{\sqrt{3} \cdot U_V}$$

$$w(U_V) = \frac{(0,10\% \cdot 12,23 \text{ V} + 7 \cdot 0,01 \text{ V})}{\sqrt{3} \cdot 12,23 \text{ V}} = 0,003882 \approx 0,0039$$

- Zaokroženi negotovosti zaradi odčitavanja in ločljivosti instrumenta (ampermeter smo odčitali z efektivno ločljivostjo ene desetine razdelka $Q_I = 0,1 \text{ A}/10 = 0,01 \text{ A}$):

$$w(I_A)_q = \frac{u(I_A)_q}{I_A} = \frac{Q_I}{I_A \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{0,01 \text{ A}}{1,25 \text{ A} \cdot 2\sqrt{3}} = 0,0023094 \approx 0,0023$$

$$w(U_V)_q = \frac{u(U_V)}{U_V} = \frac{1 \text{ dig}}{U_V \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{0,01 \text{ V}}{12,23 \text{ V} \cdot 2\sqrt{3}} = 2,3603 \cdot 10^{-4} \equiv 2,4 \cdot 10^{-4}$$

- Negotovost zaradi ločljivosti voltmetra je zanemarljiva.

$$w(P) = \sqrt{w^2(I_A) + w^2(I_A)_q + w^2(U_V) + w^2(U_V)_q}$$

$$w(P) = \sqrt{(0,024)^2 + (0,0023)^2 + (0,0039)^2 + (0,00024)^2}$$

$$w(P) = 0,02442 \equiv 0,025$$

$$w(P) = \sqrt{w^2(I_A) + w^2(U_V)} = \sqrt{(0,024)^2 + (0,0039)^2} = 0,02431 \equiv 0,025$$

$$u(P) = w(P)P = 0,025 \cdot 15,2875 \text{ W} = 0,3822 \text{ W} = 0,39 \text{ W}$$

- Popolni merilni rezultat je:

$$P = 15,29 \text{ W} , \quad u(P) = 0,39 \text{ W} , \quad n = 1$$

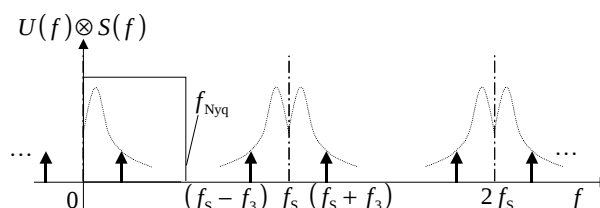
Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Naštejte pogoške, ki nastopijo pri digitalizaciji signala in jih na kratko opišite. Koliko je največji pogrešek ne-koherence pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti $u(t)/V = 1 \sin(100\pi t/s)$, če jo merimo v intervalu dolgem $T_M = 30 \text{ ms}$?

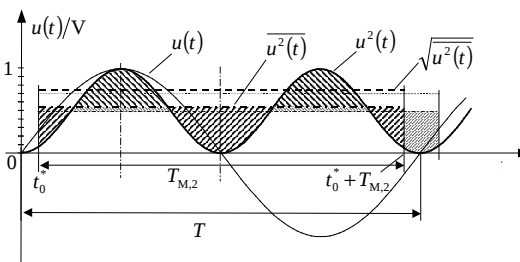
Rešitev:

- Pri digitalizaciji signala nastopi več pogreškov:

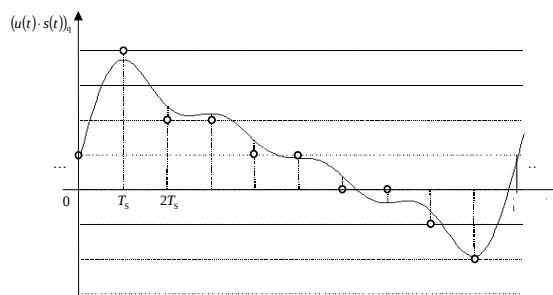
- **navideznost** zaradi prenizke frekvence vzorčenja (pogrešek **prekrivanja**);



- pogrešek **ne-koherentnega** vzorčenja, kadar **čas** merjenja **ni enak mnogokratniku** periode opazovanega signala;

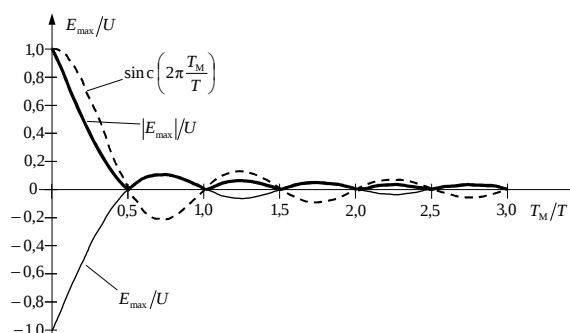


- **kvantizacijska ločljivost**;



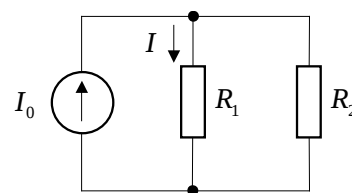
- **ločljivost** v odvisnosti od časa merjenja, itd.

- Efektivna vrednost sinusnega signala $u(t)/V = 1 \sin(50\text{Hz} \cdot 2\pi t)$ je $U = 1/\sqrt{2} \text{ V}$ in perioda $T = 1/f = 1/50\text{Hz} = 20 \text{ ms}$. Pogrešek ne-koherentnega merjenja je odvisen od časa merjenja. Ker je razmerje $T_M/T = 30 \text{ ms} / 20 \text{ ms} = 1,5$, je največji pogrešek pri merjenju efektivne vrednosti sinusne napetosti enak nič.



2. Koliko mora biti upornost ampermetra R_A , da bo sistematični pogrešek vključitve ampermetra pri merjenju toka I skozi upor R_1 zanemarljiv?

- vezje: $I_0 = 1\text{ A}$, $R_1 = 500\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$;
- ampermeter: $I_D = 600,0\text{ mA}$, $M_I = \pm(0,1\% I + 0,1\% I_D)$



Rešitev:

- Tok I , ki teče pred vključitvijo ampermetra v veji upora R_1 , izračunamo iz enačbe za tokovni delilnik:

$$I = I_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 375,0\text{ mA}$$

- Po vključitvi ampermetra z upornostjo R_A , teče v tej veji manjši tok:

$$I^* = I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} < I$$

- in sistematični pogrešek vključitve ampermetra je negativen:

$$E_s = I^* - I = I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} - I$$

- Sistematični pogrešek meritve je zanemarljiv, kadar je manjši kot od desetine standardne negotovosti.

$$|E_s| \leq \frac{u(I)}{10} = \frac{1}{10} \frac{M_I}{\sqrt{3}}$$

- Za podane vrednosti, privzeti pravokotni porazdelitvi pogreška ($u(I) = M_I / \sqrt{3}$) in upoštevanju, da se tokova I^* in I zanemarljivo malo razlikujeta, dobimo:

$$E_s \leq \frac{1}{10\sqrt{3}} (10^{-3} \cdot 375,0\text{ mA} + 10^{-3} \cdot 600,0\text{ mA}) = 0,0563\text{ mA}$$

- Od tod izračunamo iskano upornost R_A :

$$I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} - I = -E_s$$

$$1\text{ A} \frac{300\ \Omega}{R_A + 800\ \Omega} - 375,0\text{ mA} = -0,0563\text{ mA}$$

$$R_A = 0,12\ \Omega$$

- Upornost ampermetra mora biti manjša od vrednosti $R_A \leq 0,12\ \Omega$, da je sistematični pogrešek pri merjenju toka I skozi upor R_1 zanemarljiv.

3. Z digitalnim ohmmetrom želimo izmeriti upornost neznane upora R_x s pomočjo dvožične metode. Po priključitvi merjenega upora ohmmeter pokaže odčitek $R_1 = 89,35 \text{ m}\Omega$. Priključne vodnike nato kratko sklenemo, nakar ohmmeter pokaže odčitek $R_0 = 84,33 \text{ m}\Omega$. Zapišite popolni merilni rezultat za neznano upornost R_x . Meja pogreška ohmmetra je $M_R = \pm(0,1\% R + 5 \text{ dig})$. Korelacijo med obema merjenjema upornosti zanemarite.

Rešitev:

- Pri dvožičnem merjenju upornosti se k merjeni upornosti prišteje še upornost priključnih vodnikov, ki jo lahko izmerimo tako, da priključne vodnike kratko sklenemo. Neznana upornost R_x je tako

$$R_x = R_1 - R_0 = 89,35 \text{ m}\Omega - 84,33 \text{ m}\Omega = 5,02 \text{ m}\Omega$$

- Meja pogreška za posamezno meritev je:

$$M_{R1} = \pm(0,1\% R_1 + 5 \text{ dig}) = \pm(0,1\% \cdot 89,35 \text{ m}\Omega + 5 \cdot 0,01 \text{ m}\Omega) = \pm 0,139 \text{ m}\Omega$$

$$M_{R0} = \pm(0,1\% R_0 + 5 \text{ dig}) = \pm(0,1\% \cdot 84,33 \text{ m}\Omega + 5 \cdot 0,01 \text{ m}\Omega) = \pm 0,134 \text{ m}\Omega$$

- Skupno standardno negotovost dobimo iz prispevkov negotovosti posameznih meritev:

$$u(R_x) = \sqrt{(c_1 u(R_1))^2 + (c_0 u(R_0))^2}$$

$$u(R_1) = M_{R1} / \sqrt{3}, \quad u(R_0) = M_{R0} / \sqrt{3}; \quad c_1 = 1, \quad c_0 = -1;$$

$$u(R_x) = \sqrt{(M_{R1} / \sqrt{3})^2 + (M_{R0} / \sqrt{3})^2} = 0,112 \text{ m}\Omega$$

- Popolni merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo je:

$$R_x = 5,02 \text{ m}\Omega, \quad u(R_x) = 0,12 \text{ m}\Omega, \quad n = 1$$

4. Koliko je celotna relativna standardna negotovost $w_c(R_x)$ pri posrednem merjenju upornosti z metodo praznjenja kondenzatorja? $R_x = \frac{t}{C \ln(U_1/U_2)}$

$$w(t) = 2 \cdot 10^{-3}, w(C) = 3 \cdot 10^{-3}, w(U_1) = 4 \cdot 10^{-3}, w(U_2) = 5 \cdot 10^{-3}; U_1/U_2 = 1,5$$

- korelacijski koeficienti med neposredno merjenimi veličinami so $r_i = 0$

Rešitev:

- Posredno merjeno upornost lahko poenostavljeno zapišemo s tremi členi:

$$R_x = \frac{t}{C \cdot \ln(U_1/U_2)} = \frac{t}{C \cdot A}$$

- Za izraz, kjer nastopajo vhodne veličine v produktu in kvocientu, zapišemo celotno relativno standardno negotovost z geometrijsko vsoto relativnih standardnih negotovosti vhodnih veličin:

$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(t) + w^2(C) + w^2(A)}$$

- Negotovost logaritma ulomka napetosti $A = \ln(U_1/U_2)$ ovrednotimo ločeno:

$$w(A) = u(A)/A$$

$$u(A) = \sqrt{(c_1 u(U_1))^2 + (c_2 u(U_2))^2}$$

- kjer sta faktorja občutljivosti:

$$c_1 = \frac{\partial A}{\partial U_1} = \frac{\partial \ln(U_1/U_2)}{\partial U_1} = \frac{1}{U_1/U_2} \cdot \frac{1}{U_2} = \frac{1}{U_1}$$

$$c_2 = \frac{\partial \ln(U_1/U_2)}{\partial U_2} = \frac{1}{U_1/U_2} \cdot \left(-\frac{U_1}{U_2^2}\right) = -\frac{1}{U_2}$$

- Absolutno obliko standardne negotovosti, ki je brez dimenzij (logaritem razmerja!), sedaj ovrednotimo:

$$u(A) = \sqrt{\left(\frac{u(U_1)}{U_1}\right)^2 + \left(\frac{u(U_2)}{U_2}\right)^2} = \sqrt{(w(U_1))^2 + (w(U_2))^2} = 6,403 \cdot 10^{-3}$$

- in od tod še relativno obliko standardne negotovosti:

$$w(A) = \frac{u(A)}{A} = \frac{u(\ln(U_1/U_2))}{\ln(U_1/U_2)} = \frac{6,403 \cdot 10^{-3}}{\ln 1,5} = 1,579 \cdot 10^{-2}$$

- Zaokrožena celotna relativna standardna negotovost za posredno merjeno veličino R_x je enaka:

$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(t) + w^2(C) + w^2(A)} = 1,619 \cdot 10^{-2} \rightarrow w_c(R_x) = 1,7 \cdot 10^{-2}$$

5. Izrazite merilni rezultat za impedanco Z za 99% stopnjo zaupanja, če jo izmerimo posredno preko napetosti U in toka I !

- $U = 230,0 \text{ V}$, $M_U = \pm(0,05\% U + 1 \text{ dig})$, $n_1 = 1$;
- $\bar{I} = 121,4 \text{ mA}$, $s(I) = 5,6 \text{ mA}$, $n_2 = 10$

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(\text{V})$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Standardna negotovost merilnega rezultata za impedanco

$$Z = U/I = 230,0 \text{ V} / 121,4 \text{ mA} = 1894,6 \Omega$$

- sestavljata dva prispevka: negotovost merjenja napetosti in negotovost merjenja toka.

$$u(Z) = \sqrt{(c_1 u(U))^2 + (c_2 u(I))^2} \quad \text{oz.} \quad w(Z) = \frac{u(Z)}{Z} = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)}$$

- Negotovost merjenja napetosti je negotovost tipa B kot prispevek lastnega pogreška voltmetra pri eni meritvi. Določimo jo iz mejne vrednosti pri predpostavki pravokotne gostote porazdelitve pogreška.

$$u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (5 \cdot 10^{-4} \cdot 230,0 \text{ V} + 0,1 \text{ V}) = 0,1241 \text{ V}$$

- in v relativni obliki: $w(U) = \frac{u(U)}{U} = \frac{0,1241 \text{ V}}{230,0 \text{ V}} = 5,396 \cdot 10^{-4}$

- Negotovost merjenja toka je negotovost tipa A zaradi ponavljanja meritev. Določimo jo iz podanega eksperimentalnega standardnega odklona $s(I)$ in števila meritev n_2

$$u(I) = \frac{s(I)}{\sqrt{n_2}} = \frac{5,6 \text{ mA}}{\sqrt{10}} = 1,77 \text{ mA} \quad \text{in} \quad w(I) = \frac{u(I)}{\bar{I}} = \frac{1,77 \text{ mA}}{121,4 \text{ mA}} = 1,458 \cdot 10^{-2}$$

- Ker je dominantna negotovost merjenja toka - negotovost tipa A:

$$w(Z) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)} = 1,459 \cdot 10^{-2} \quad \text{in} \quad u(Z) = w(Z) \cdot Z = 27,65 \Omega,$$

- je tudi gostota porazdelitev pogreška posredno merjene veličine Z enaka gostoti porazdelitev pogreška merjenja toka (več meritev) in lahko uporabimo Studentovo t-porazdelitev za vrednotenje razširjene negotovosti ($\nu = n_2 - 1 = 9 \rightarrow t_{99\%} = 3,25$)

$$U(Z) = t_{99\%} \cdot u(Z) = 3,25 \cdot 27,65 \Omega = 89,86 \Omega$$

- Zaokrožen popolni merilni rezultat z razširjeno negotovostjo za impedanco Z zapišemo:

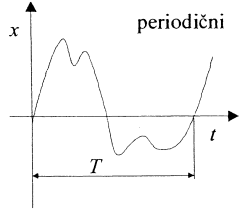
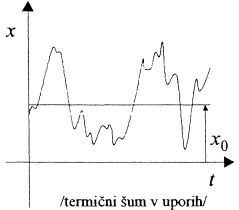
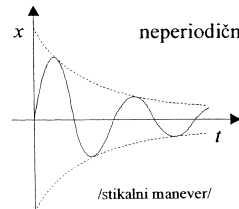
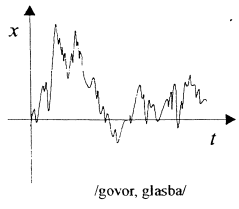
$$Z = 1895 \Omega, \quad U(Z) = 90 \Omega, \quad k = 3,25, \quad \nu_{\text{eff}} = 9, \quad p = 99\%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Kako delimo signale, ki opisujejo časovno spremenljive veličine? Opišite osnovne parametre pulznih neperiodičnih oblik signalov.

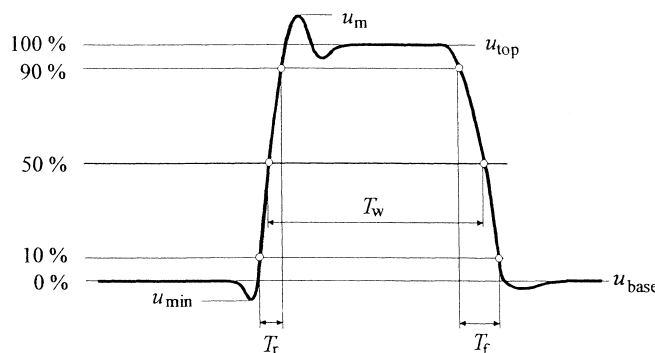
Rešitev:

- Delimo jih na to, ali lahko matematično opišemo trenutne vrednosti veličin ali ne:
 - deterministične,
 - nedeterministične – naključne (stohastične).
- Kadar se pomembni parametri dinamičnih veličin (aritmet. srednja vrednost, efektivna vrednost, itn.) s časom spreminjajo, ločimo signale na:
 - stacionarne,
 - nestacionarne.

	DETERMINISTIČNI	NEDETERMINISTIČNI
	opisujemo jih v časovnem in frekvenčnem prostoru	opisujemo jih v frekvenčnem prostoru; zanimivi za prenos informacij
STACIONARNI	 periodični	 /termični šum v uporih/
NESTACIONARNI	 neperiodični /stikalni maneuver/	 /govor, glasba/

- Nekateri parametri pulzne oblike signala.
- Izhodiščna parametra sta:

- osnovni ali **spodnji** nivo (u_{base} , 0%),
- zgornji** nivo (u_{top} , 100%),
- prevladujoči vrednosti v histogramu.



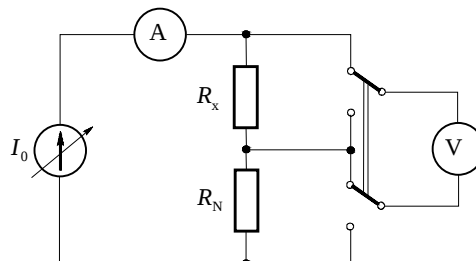
- Z obema izhodiščnima nivojema 0% in 100% sta določena tudi nivoja 10% in 90% za določitev **dviznega časa** T_r in **upadnega časa** T_f .
- Ugotovimo lahko tudi nivo 50%, ki določa **širino impulza** T_w .
 - Pri ponavljajočih pulzih je to nivo za merjenje in določanje periode, frekvence in relativne širine impulza.

2. Katerega izmed uporov $R_1 \approx 100,5 \Omega$ ali $R_2 \approx 95,0 \Omega$ lahko bolj točno zmerimo po napetostni primerjalni metodi z voltmetrom $M_U = \pm(0,1\% U + 0,1\% U_D)$, $U_D = 2 \text{ V}$, ločljivost 1 mV , in uporovnim etalonom $R_N = 100,00(1 \pm 10^{-4}) \text{ k}\Omega$? Vezje napajamo z idealnim tokovnim virom.

Rešitev:

- Standardna merilna negotovost napetostne primerjalne metode $R_x = R_N U_x / U_N$ je splošno ($U_x \neq U_N$) zapisana:

$$w_{R_x} = \sqrt{w_{R_N}^2 + w_{U_N}^2 + w_{U_x}^2}$$



- Kadar sta vrednosti upornosti in s tem obeh napetosti dovolj blizu skupaj $U_x \approx U_N$ (red velikosti 1%), se prispevek pogreška voltmetra v kvocientu izloči in ostane samo prispevek zaradi ločljivosti voltmetra:

$$w_{R_x} = \sqrt{w_{R_N}^2 + 2 \left(\frac{u(U_x)_q}{U_x} \right)^2}$$

- a) Prva upornost $R_x = R_1 \approx 100,5 \Omega$ je dovolj blizu referenčne $(R_x - R_N)/R_N = 0,005$, $U_x \approx U_N \approx 2 \text{ V}$ in lahko zapišemo standardno merilno negotovost:

$$w_{R_x} = \sqrt{w_{R_N}^2 + 2 \left(\frac{u(U_x)_q}{U_x} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{m_{R_N}}{\sqrt{3}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\Delta U}{2\sqrt{3} U_x} \right)^2}$$

$$w_{R_1} = \sqrt{\left(\frac{10^{-4}}{\sqrt{3}} \right)^2 + 2 \left(\frac{1 \text{ mV}}{2\sqrt{3} \cdot 2 \text{ V}} \right)^2} = 2,12 \cdot 10^{-4} \rightarrow w_{R_1} = 2,2 \cdot 10^{-4}$$

- b) Druga upornost $R_x = R_2 \approx 95,0 \Omega$ bolj odstopa od referenčne $(R_x - R_N)/R_N = -0,05$, $U_x = 1,9 \text{ V}$, $U_N = 2 \text{ V}$ in zato je standardna merilna negotovost večja:

$$w_{R_x} = \sqrt{w_{R_N}^2 + w_{U_N}^2 + w_{U_x}^2} = \sqrt{\left(\frac{m_{R_N}}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{M_{U_N}}{\sqrt{3} U_N} \right)^2 + \left(\frac{M_{U_x}}{\sqrt{3} U_x} \right)^2}$$

$$w_{R_2} = \sqrt{\left(\frac{10^{-4}}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{0,001 + 0,001 \cdot U_D / 2 \text{ V}}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{0,001 + 0,001 \cdot U_D / 1,9 \text{ V}}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

$$w_{R_x} = 1,65 \cdot 10^{-3} \rightarrow w_{R_2} = 1,7 \cdot 10^{-3} > w_{R_1} !$$

3. Pri preizkušanju točnosti ampermetra $M_I = \pm(1\% I + 1\% I_D + 2 \text{ dig})$, $I_D = 100 \text{ mA}$, ločljivost $0,1 \text{ mA}$, smo uporabili referenčni ampermeter $M_{I,r} = \pm(0,2\% I + 0,1\% I_{D,r} + 1 \text{ dig})$, $I_{D,r} = 150 \text{ mA}$, ločljivost $0,1 \text{ mA}$. Podajte intervala lastnega pogreška E pri vrednostih $I_1 = I_D$ in $I_2 = I_D/10$, za katera lahko s 100% verjetnostjo potrdite deklarirano točnost. Pri preizkušanju upoštevajte samo prispevek referenčnega ampermetra. Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Deklarirano točnost preskušane instrumenta moremo z gotovostjo potrditi, kadar je lastni pogrešek instrumenta manjši od razlike obeh mejnih pogreškov instrumentov, ker smo s tem zanesljivo izločili pogrešek referenčnega instrumenta:

$$|E| < M_I - M_{I,r}$$

- Pri toku $I_1 = I_D = 100 \text{ mA}$ imamo:

$$|E| < M_I - M_{I,r} = (1\% I + 1\% I_D + 2 \text{ dig}) - (0,2\% I + 0,1\% I_{D,r} + 1 \text{ dig})$$

$$|E| < (1 \text{ mA} + 1 \text{ mA} + 0,2 \text{ mA}) - (0,2 \text{ mA} + 0,15 \text{ mA} + 0,1 \text{ mA})$$

$$|E| < (2,2 \text{ mA}) - (0,45 \text{ mA}) = 1,75 \text{ mA}$$

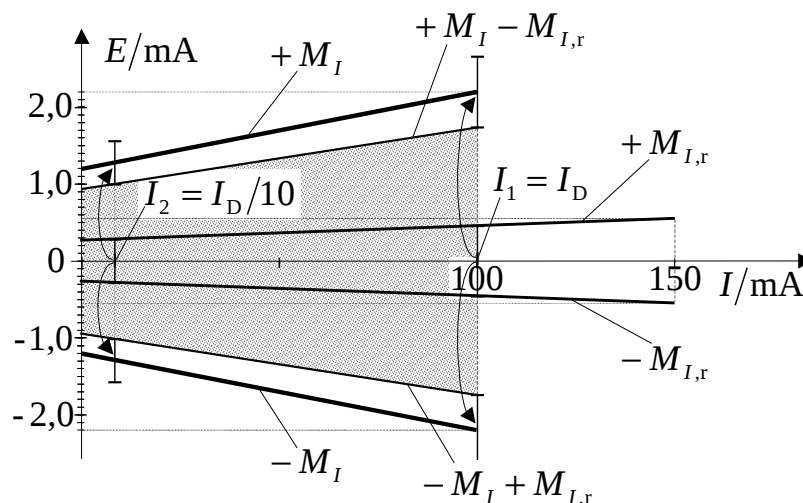
- Lastni pogrešek je lahko v mejah: $-1,75 \text{ mA} < E < 1,75 \text{ mA}$

- Pri toku $I_2 = I_D/10 = 10 \text{ mA}$ imamo:

$$|E| < (0,1 \text{ mA} + 1 \text{ mA} + 0,2 \text{ mA}) - (0,02 \text{ mA} + 0,15 \text{ mA} + 0,1 \text{ mA})$$

$$|E| < (1,3 \text{ mA}) - (0,27 \text{ mA}) = 1,03 \text{ mA}$$

- Lastni pogrešek je lahko v mejah: $-1,03 \text{ mA} < E < 1,03 \text{ mA}$
 - Skica:



4. Ker nimate W-metra, želite vhodno moč proizvoda (npr. sobnega ventilacijskega grelnika) izmeriti posredno. Katere inštrumente potrebujete, če predpostavimo sinusno obliko signalov? Izpeljite izraz za izračun skupne standardne merilne negotovosti. Navedite podatke, ki jih potrebujete za izračun merilne negotovosti vhodne moči! Predpostavimo, da je negotovost zaradi ločljivosti inštrumentov zanemarljiva.

Rešitev:

- Da bi posredno izmerili vhodno moč ventilacijskega grelnika potrebujemo A-meter, V-meter in $\cos \varphi$ -meter.
- Izračun moči: $P = UI \cos \varphi$
- Pri skupni negotovosti upoštevamo prispevke vseh treh inštrumentov:

$$u(P) = \sqrt{(|c_1| \cdot u(U))^2 + (|c_2| \cdot u(I))^2 + (|c_3| \cdot u(\cos \varphi))^2}$$

- Za izračun potrebujemo standardne merilne negotovosti merjenja vhodnih veličin ($u(U)$, $u(I)$, $u(\cos \varphi)$) in občutljivostne koeficiente:

$$|c_1| = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| = |I \cos \varphi|; \quad |c_2| = \left| \frac{\partial P}{\partial I} \right| = |U \cos \varphi|; \quad |c_3| = \left| \frac{\partial P}{\partial \cos \varphi} \right| = UI$$

- Skupna standardna merilna negotovost je enaka

$$\begin{aligned} u(P) &= \sqrt{(I \cos \varphi \cdot u(U))^2 + (U \cos \varphi \cdot u(I))^2 + (UI \cdot u(\cos \varphi))^2} = \\ &= P \cdot \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U} \right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I} \right)^2 + \left(\frac{u(\cos \varphi)}{\cos \varphi} \right)^2} = P \cdot \sqrt{(w(U))^2 + (w(I))^2 + (w(\cos \varphi))^2} \end{aligned}$$

- Potrebni podatki inštrumentov:
 - izmerjena vrednost,
 - mejni pogrešek (absolutni ali relativni).

$$u(P) = P \cdot \sqrt{\left(\frac{m_U}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_I}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_{\cos \varphi}}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

$$\text{ali} \quad = P \cdot \sqrt{\left(\frac{M_U / \sqrt{3}}{U} \right)^2 + \left(\frac{M_I / \sqrt{3}}{I} \right)^2 + \left(\frac{M_{\cos \varphi} / \sqrt{3}}{\cos \varphi} \right)^2}$$

5. Za izraz $y = x_1 + x_2$ ugotovite, kolikokrat manjša mora biti negotovost druge vhodne veličine od prve $u(x_2) \leq u(x_1)/k$ ($k = ?$), da se ne bo poznala v skupni negotovosti $u(y) \cong u(x_1)$? $u(y)$ zaokrožimo ne dve cifri na intervalu $0,10 \div 0,99$.

Rešitev:

- Standardno negotovost izhodne veličine y , ob upoštevanju da sta faktorja občutljivosti $c_1 = \partial y / \partial x_1 = 1$ in $c_2 = \partial y / \partial x_2 = 1$, zapišemo:

$$u(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} u(x_2)\right)^2} = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$$

- Standardna negotovost veličine x_2 mora biti k -krat manjša od negotovosti veličine x_1 , da se njen prispevek ne pozna v skupni negotovosti

$$u(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)} = \sqrt{u^2(x_1) + (u(x_1)/k)^2} = u(x_1) \sqrt{1 + (1/k)^2}$$

- Ker zaokrožujemo merilno negotovost ne dve cifri na intervalu $0,10 \div 0,99$ vedno navzgor razen, kadar je naslednja tretja cifra 0, imamo na obeh mejah naslednje razmere:

- Na vrednost $u = 0,10$ zaokrožimo vse vrednosti od $u \geq 0,0991$ do $u = 0,10099.. < 0,101$, zato za najbolj neugodni primer zapišemo:

$$0,101 > 0,10 \sqrt{1 + (1/k)^2}$$

- in od tod: $k > 1 / \sqrt{\left(\frac{0,101}{0,10}\right)^2 - 1} = 7,053$

- Na vrednost $u = 0,99$ zaokrožimo vse vrednosti od $u \geq 0,981$ do $u = 0,99099.. < 0,991$, zato za najbolj neugodni primer zapišemo:

$$0,991 > 0,99 \sqrt{1 + (1/k)^2}$$

- in od tod: $k > 1 / \sqrt{\left(\frac{0,991}{0,99}\right)^2 - 1} = 22,243$

- Negotovost druge vhodne veličine mora biti $k = 22,25$ - krat manjša od prve vhodne veličine, da se zanesljivo ne bo poznala v skupni standardni negotovosti izhodne veličine na intervalu $0,10 \div 0,99$.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. V katerih mejah lahko pričakujemo rezultate merjenja amplitude sinusnega signala $U = 10\text{ V}$, $f = 1\text{ kHz}$ z merilnim členom prvega reda $T_r = 50\text{ }\mu\text{s}$, če imamo na vходу prisoten še motilni signal $U_m = 1\text{ V}$, $f_m = 100\text{ kHz}$? Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Merilni člen zaradi svojega dinamičnega odziva različno oslabi napetosti na vходу. Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujanju K lahko zapišemo z uporabo mejne frekvence f_m :

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$

- mejno frekvenco dobimo iz dvižnega časa:

$$f_m = \frac{1}{2\pi(T_r/\ln 9)} \doteq \frac{0,35}{T_r} = 7,0\text{ kHz}$$

- Merjeni signal ($f_1 = 1\text{ kHz}$) je slabljen z:

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} = 0,9899$$

- in amplituda merjenega signala je enaka

$$A = K_1 \sqrt{2} U = 14,0000\text{ V}$$

- Motilni signal ($f_2 = 100\text{ kHz}$) je močnejše slabljen:

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}} = 0,06983$$

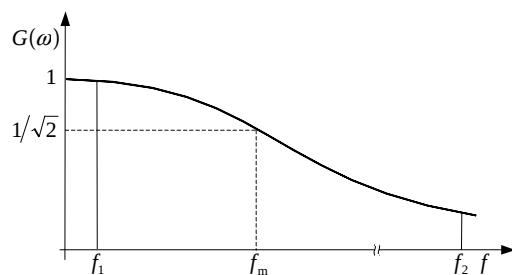
- in tudi amplituda motilnega signala:

$$A_m = K_2 \sqrt{2} U_m = 0,09875\text{ V}$$

- Ker ne poznamo faznega zamika med merjenim in motilnim signalom, lahko pričakujemo rezultate merjenja amplitude signala v mejah:

$$A - A_m \leq A \leq A + A_m$$

$$13,9013\text{ V} \leq A \leq 14,0988\text{ V}$$



2. Po napetostno primerjalni metodi merimo upornost $R_x \approx 1000 \Omega$. Kolikšno ločljivost mora imeti voltmeter ($\Delta U = ?$), da bo standardna negotovost zaradi ločljivosti zanemarljiva? Vezje napajamo s tokovnim virom $I_0 = 1,5 \text{ mA}$.

- voltmeter: $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$, $U_D = 2 \text{ V}$, $R_V = 10 \text{ M}\Omega$
- $R_N = 1 \cdot (1 \pm 10^{-4}) \text{ k}\Omega$

Rešitev:

- Ker sta vrednosti merjenega in referenčnega upora zelo blizu skupaj (red velikosti 1%), nam primerjalna metoda omogoča zmanjšanje standardne merilne negotovosti za lastni pogrešek voltmetra. Ostaneta prispevka referenčnega upora in ločljivosti voltmetra:

$$\frac{u_c(R_x)}{R_x} = \sqrt{\left(\frac{u(R_N)}{R_N}\right)^2 + 2\left(\frac{u(U_x)_q}{U_x}\right)^2}$$

- ki je zanemarljiva, kadar je manjša od petine skupne negotovosti:

$$\sqrt{2} \frac{u(U_x)_q}{U_x} < \frac{1}{5} \frac{u_c(R_x)}{R_x} \doteq \frac{1}{5} \frac{u(R_N)}{R_N} = \frac{1}{5} \frac{m(R_N)}{\sqrt{3}} = 1,155 \cdot 10^{-5}$$

- Napajalni tok $I_0 = 1,5 \text{ mA}$ povzroči padce napetosti:

$$U_x \approx U_N = 1,5 \text{ V}$$

- Pri negotovosti zaradi ločljivosti $u(U_x)_q$ upoštevamo pravokotno porazdelitev:

$$u(U_x)_q = \frac{\Delta U}{2\sqrt{3}}$$

- in od tod določimo ločljivost:

$$\Delta U < 2\sqrt{3} \cdot U_x / \sqrt{2} \cdot 1,155 \cdot 10^{-5} = 4,24 \cdot 10^{-5} \text{ V} \rightarrow \Delta U = 10 \mu\text{V}$$

3. S $5\frac{1}{2}$ -mestnim ohmmetrom $M_R = \pm(0,01\% R + 0,01\% R_D)$ smo merili stalno upornost pod enakimi pogoji ($n = 10$). Koliko je standardna negotovost merilnega rezultata?

R/Ω : 99,123; 99,135; 99,146; 99,079; 99,104; 99,115; 99,098; 99,087; 99,112; 99,061

Rešitev:

- Standardna negotovost merilnega rezultata sestavljata dva prispevka: negotovost tipa A zaradi ponavljanja meritev in negotovost tipa B kot prispevek merilne metode in instrumentacije. V primeru negotovosti tipa B je prevladujoč lastni pogrešek ohmmetra.
- Negotovost tipa A dobimo z določitvijo srednje vrednosti, standardnega odklona meritev in standardne negotovosti:

$$\bar{R} = 99,106\Omega$$

$$s(R) = \sqrt{\frac{\sum_i (R_i - \bar{R})^2}{n-1}} = 0,025884\Omega$$

$$u_A = \frac{s(R)}{\sqrt{n}} = 0,008185\Omega$$

- Negotovost tipa B dobimo iz mejne vrednosti pogreška, kjer predpostavljamo pravokotno porazdelitev pogreška:

$$u_B = \frac{1}{\sqrt{3}} M_R = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-4} \cdot 99,106\Omega + 10^{-4} \cdot 200\Omega) = 0,01727\Omega$$

- $5\frac{1}{2}$ -mestni prikaz nam da $R_D = 200\Omega$ (maksimalni prikaz: 199,999).

- Skupna standardna negotovost je:

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0,01911\Omega \rightarrow u_c = 0,020\Omega$$

4. Merilnik toka ima kalibracijski certifikat z rezultati kalibracije navedenimi v tabeli. S tem inštrumentom ste izmerili tok 1,50 A. Podajte merilni rezultat izmerjene vrednosti, če je imel referenčni instrument $2\frac{3}{4}$ mestni prikazovalnik in mejo pogreška $M_{\text{ref}} = 0,2\% I_i + 0,1\% I_D + 2\text{dig}$. Ostale prispevke k merilni negotovosti uporabljenega inštrumenta zanemarimo. Podajte popoln merilni rezultat!

I_i / A	$I_{\text{ref}} / \text{A}$	E / A
1,00	1,25	-0,25
2,00	2,11	-0,11
3,00	3,13	-0,13
4,00	4,05	-0,05

Rešitev:

- Rezultat izmerjene vrednosti je potrebno korigirati glede na vrednosti v certifikatu. Korekcija se prišteje in ima obraten predznak od pogreška v obravnavani točki. Pogrešek je razlika med izmerjeno in pravo vrednostjo. Ker v certifikatu ni podatka za pogrešek pri kazanju inštrumenta 1,50 A, se ga pridobi z linearno interpolacijo med sosednjima točkama. Tako je

$$E_{1,50} = \frac{E_{1,00} + E_{2,00}}{2} = \frac{-0,25 \text{ A} - 0,11 \text{ A}}{2} = -0,18 \text{ A}$$

- Prava vrednost je tako

$$I = I_i + K = 1,50 \text{ A} + 0,18 \text{ A} = 1,68 \text{ A}$$

- Iz prikazovalnika in podatka proizvajalca o meji pogreška referenčnega inštrumenta določimo njegovo merilno negotovost.

$$2\frac{3}{4}\text{mestni prikazovalnik} \Rightarrow \text{prikaz 399} \Rightarrow I_D = 4,00 \text{ A}$$

$$M = 0,2\% I_i + 0,1\% I_D + 2\text{dig} = 0,2\% \cdot 1,50 \text{ A} + 0,1\% \cdot 4,00 \text{ A} + 2 \cdot 0,01 \text{ A} = 0,027 \text{ A}$$

$$u(I) = \frac{M_i}{\sqrt{3}} = 0,0156 \text{ A}$$

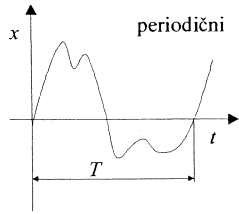
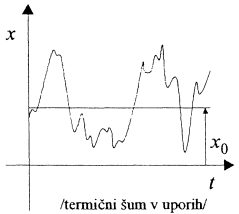
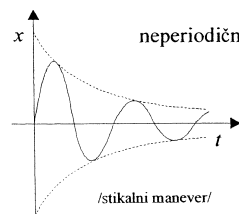
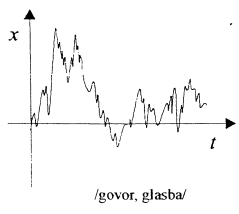
- Popolni merilni rezultat je tako

$$I = 1,68 \text{ A} \quad , \quad u(I) = 0,02 \text{ A} \quad , \quad n = 1$$

5. Kako delimo signale, ki opisujejo časovno spremenljive veličine? Opišite osnovne parametre pulznih neperiodičnih oblik signalov.

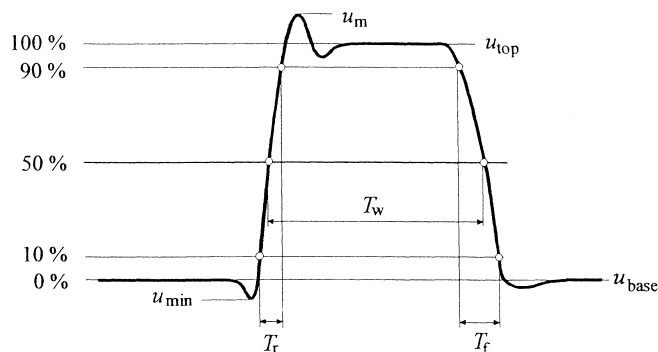
Rešitev:

- Delimo jih na to, ali lahko matematično opišemo trenutne vrednosti veličin ali ne:
 - deterministične,
 - nedeterministične – naključne (stohastične).
- Kadar se pomembni parametri dinamičnih veličin (aritmet. srednja vrednost, efektivna vrednost, itn.) s časom spreminjajo, ločimo signale na:
 - stacionarne,
 - nestacionarne.

	DETERMINISTIČNI	NEDETERMINISTIČNI
	opisujemo jih v časovnem in frekvenčnem prostoru	opisujemo jih v frekvenčnem prostoru; zanimivi za prenos informacij
STACIONARNI	periodični 	 /termični šum v uporih/
NESTACIONARNI	neperiodični  /stikalni maneuver/	 /govor, glasba/

- Nekateri parametri pulzne oblike signala.
- Izhodiščna parametra sta:

- osnovni ali **spodnji** nivo (u_{base} , 0%),
- zgornji** nivo (u_{top} , 100%),
- prevladujoči vrednosti v histogramu.



- Z obema izhodiščnima nivojema 0% in 100% sta določena tudi nivoja 10% in 90% za določitev **dvižnega časa** T_r in **upadnega časa** T_f .
- Ugotovimo lahko tudi nivo 50%, ki določa **širino impulza** T_w .
 - Pri ponavljajočih pulzih je to nivo za merjenje in določanje periode, frekvence in relativne širine impulza.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

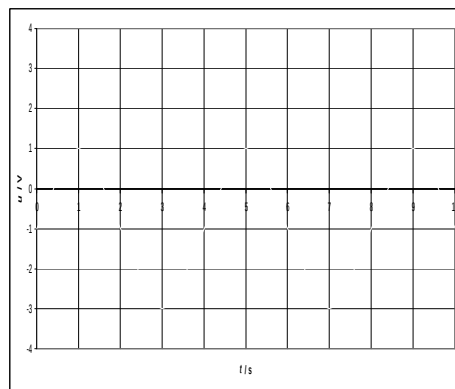
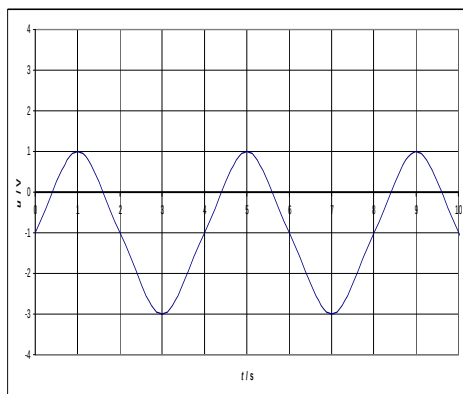
1. Funkcijski generator generira napetostni signal $u(t)/V = 2 \sin(\pi t/2s) - 1$. Določite frekvenco signala, periodo signala, vrednost amplitude od vrha do vrha (peak-to-peak).
- Narišite sliko na osciloskopu, s katerim opazujete ta signal, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = -1V$ in $S > 0$ pri $k_t = 1s/d$ in $k_y = 1V/d$.
 - Narišite sliko na osciloskopu, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = 3V$ in $S > 0$ pri $k_t = 1s/d$ in $k_y = 2V/d$.
 - Narišite sliko na osciloskopu, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = 0V$ in $S < 0$ pri $k_t = 250ms/d$ in $k_y = 500mV/d$.

Rešitev:

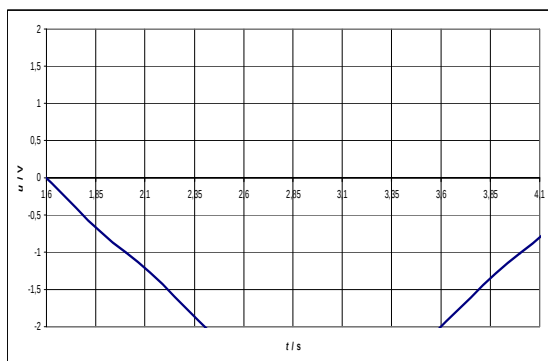
- Če splošni argument sinusa v obliki $2\pi ft$ izenačimo z argumentom napetostnega signala, lahko izračunamo frekvenco:

$$2\pi ft = \pi t/2s \rightarrow f = 1/4s = 0,25Hz \text{ in } T = 1/f = 4s$$

- Vrednost amplitude od vrha do vrha je $U_{pp} = 2\hat{u}_{\sin} = 4V$.
- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> a. $N = -1V$, $S > 0$, $k_t = 1s/d$,
$k_y = 1V/d$. | <ul style="list-style-type: none"> b. $N = 3V$, $S > 0$, $k_t = 1s/d$,
$k_y = 2V/d$. |
|---|--|

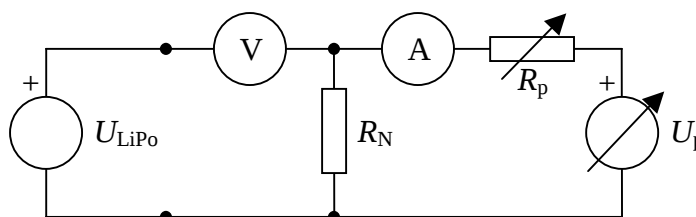


- c. $N = 0V$, $S < 0$, $k_t = 250ms/d$, $k_y = 500mV/d$.



2. Zapišite merilni rezultat za napetost U_{LiPo} litij-polimerne baterije z notranjo upornostjo $60 \text{ m}\Omega$, ki jo izmerite s kompenzacijsko metodo (glej vezje). Merilni podatki so naslednji:

- izmerjeni tok je znašal $4,120 \text{ mA}$; relativna standardna negotovost umerjenega A-metra: $w_I = 0,3\%$;
- vrednost etalonskega upora je znašala $1002,0 \Omega$; $w_R = 0,05\%$;
- voltmeter je imel odklon 0 V in standardni odklon te izmerjene napetosti $s(u) = 152 \mu\text{V}$.



Rešitev:

- Tip baterije (litij-polimerna) nima vpliva na rezultat merjenja. Prav tako pri kompenzacijski metodi nima vpliva notranja upornost baterije ($60 \text{ m}\Omega$), saj s to metodo merimo napetost odprtih sponk oz. napetost neobremenjene baterije. V ravnovesju, ko je vezje kompenzirano, namreč voltmeter kaže v povprečju nič (zanemarljiv ničelni odklon).
- Napetost litij-polimerne U_{LiPo} baterije izmerimo tako, da z delom vezja, ki je desno od voltmetra, kompenziramo U_{LiPo} . Z U_p in R_p nastavimo padec napetosti na etalonskem uporu R_N enak U_{LiPo} , kar ugotovimo z voltmetrom, ki kaže razliko 0 V .
- Napetost baterije U_{LiPo} določimo iz izmerjenega toka $I_A = I_p$, vrednosti etalona R_N in napetosti na voltmetru:

$$U_{\text{LiPo}} = U_V + I_p \cdot R_N = 0 \text{ V} + 4,120 \text{ mA} \cdot 1002,0 \Omega = 4,1283 \text{ V}$$

- Negotovost U_{LiPo} dobimo iz posameznih prispevkov negotovosti po naslednji enačbi:

$$\begin{aligned} u(U_{\text{LiPo}}) &= \sqrt{\left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial U_V} \right| \cdot u(U_V) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial I_p} \right| \cdot u(I_p) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial R_N} \right| \cdot u(R_N) \right]^2} = \\ &= \sqrt{\left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial U_V} \right| \cdot s(u) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial I_p} \right| \cdot w(I_p) \cdot I_p \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial R_N} \right| \cdot w(R_N) \cdot R_N \right]^2} = \\ &= \sqrt{[s(u)]^2 + [R_N \cdot w(I_p) \cdot I_p]^2 + [I_p \cdot w(R_N) \cdot R_N]^2} = \\ &= \sqrt{152 \mu\text{V}^2 + [4,1283 \text{ V} \cdot 3 \cdot 10^{-3}]^2 + [4,1283 \text{ V} \cdot 5 \cdot 10^{-4}]^2} = 12,6 \text{ mV} \end{aligned}$$

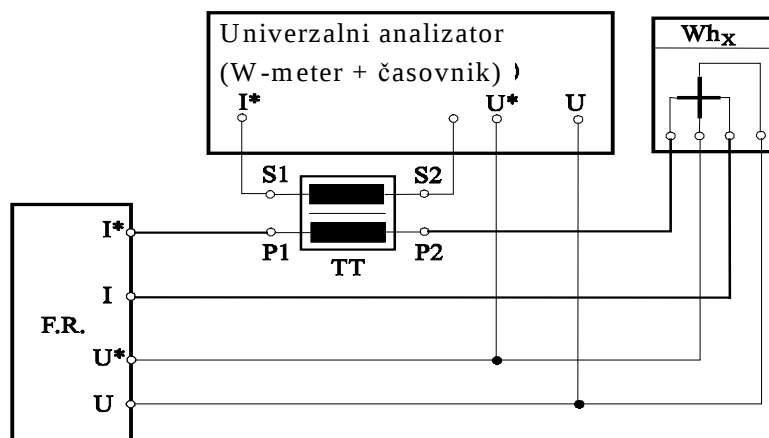
- in zaokrožen merilni rezultat:

$$U_{\text{LiPo}} = 4,128 \text{ V}, \quad u(U_{\text{LiPo}}) = 13 \text{ mV}, \quad n = 1$$

3. Skicirajte vezje za preizkus števca delovne energije po časovni metodi in izpeljite številsko enačbo za lastni pogrešek, če so veličine izražene z naslednjimi enotami:
 $[e] = \%$, $[K] = \text{vrt/kWh}$, $[P] = \text{kW}$, $[t] = \text{s}$, $[N] = \text{vrt}$

Rešitev:

- Za preizkus števca delovne energije po časovni metodi, potrebujemo stabilen vir, vatmeter in časovnik za merjenje časa obratov.



- Ugotavlja se razlika med energijo, ki jo kaže preizkušani števec delovne energije Wh_x , in pravo vrednostjo, ki je enaka produktu moči P in časa t pri časovni metodi. Ta razlika je enaka lastnemu pogrešku števca e .

$$e = \frac{W_s - W}{W}$$

- Energijo števca W_s izračunamo na osnovi števila vrtljajev rotorja števca N in njegove konstante K : $W_s = N/K$
- Prava vrednost energije W je: $W = Pt = P_w t$
- Lastni pogrešek števca e je enak: $e = \frac{W_s - W}{W} = \frac{N}{K P_w t} - 1$

- Za prehod iz veličinske enačbe v številsko izrazimo veličine kot produkt številskih vrednosti in enot:

$$\{e\}[e] = \frac{\{N\}[N]}{\{K\}[K]\{P_w\}[P_w]\{t\}[t]} - 1$$

- in preoblikujemo v $\{e\} = \frac{\{N\}}{\{K\}\{P_w\}\{t\}} \frac{[N]}{[K][P_w][t]} \frac{1}{[e]} - \frac{1}{[e]}$

- Za splošne enote posameznih veličin vstavimo enote, ki jih želimo uporabljati:

$$\frac{[N]}{[K][P_w][t]} \frac{1}{[e]} = \frac{\text{vrt}}{\text{vrt/kWh} \cdot \text{kW} \cdot \text{s}} \cdot \frac{1}{\%} = \frac{3600 \text{ s}}{\text{s}} \frac{1}{\%} = \frac{3600}{\%}$$

- Če upoštevamo, da je $\% = 0,01$, se želena številaska enačba zapiše:

$$e = \left(3600 \cdot \frac{N}{K P_w t} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\%} \quad \text{oz.} \quad e = \left(3600 \cdot \frac{N}{K P_w t} - 1 \right) \cdot 100$$

4. Koliko je standardna negotovost aritmetične sredine devetih vrednosti napetosti U_i ($i = 1, \dots, 9$), če so vzete iz populacije z eksperimentalno standardno negotovostjo $s_p = 3,0 \text{ mV}$ ($n_p = 1000$)? Koliko vrednosti moramo uporabiti, da bi bila standardna negotovost aritmetične sredine manjša od $0,2 \text{ mV}$?

Rešitev:

- Standardno negotovost aritmetične sredine $n = 9$ vrednosti $\bar{U} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{n=9} U_i = \frac{1}{9} (U_1 + \dots + U_9)$ določajo prispevki negotovosti neposredno merjenih vrednosti napetosti:

$$u_c(\bar{U}) = \sqrt{(c_1 u(U_1))^2 + \dots + (c_9 u(U_9))^2}$$

- Ker so vrednosti vzete iz iste populacije z eksperimentalno ocenjeno standardno negotovostjo $s_p = 4,0 \text{ mV}$ na velikem številu meritev $n_p = 1000$, imajo vse enako standardno negotovost:

$$u(U_1) = \dots = u(U_9) \doteq s_p$$

- Faktorji občutljivosti so enaki delnim odvodom:

$$c_1 = \frac{\partial \bar{U}}{\partial U_1} = c_i = \frac{1}{9} \quad \text{oz. splošno } c_n = \frac{1}{n}$$

- Standardna negotovost aritmetične sredine je enaka:

$$u_c(\bar{U}) = \frac{1}{9} \sqrt{9s_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{9}} = \frac{s_p}{3} = 1,0 \text{ mV}$$

- oz. splošno: $u_c(\bar{U}) = \frac{1}{n} \sqrt{ns_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{n}}$!!

- Če želimo standardno negotovost aritmetične sredine zmanjšati, moramo pri tvorjenju uporabiti več vrednosti:

$$\sqrt{n} > \frac{s_p}{u_c(\bar{U})} = \frac{3,0 \text{ mV}}{0,2 \text{ mV}} = 15 \quad \leftrightarrow \quad n > 225$$

5. Ugotovite, kateri izmed uporovnih senzorjev temperature, ki imata karakteristiko oblike $R_t = R_0 e^{b_t}$, ima manjšo nelinearnost v območju $t = 0^\circ\text{C} \div 100^\circ\text{C}$?

• Senzor 1: $R_0 = R_{0^\circ\text{C}} = 1000\ \Omega$, $R_{100^\circ\text{C}} = 1500\ \Omega$

• Senzor 2: $R_0 = R_{0^\circ\text{C}} = 1500\ \Omega$, $R_{100^\circ\text{C}} = 2100\ \Omega$

Rešitev:

- Iz karakteristike uporovnih senzorjev, ki je podana z enačbo $R_t = R_0 e^{b_t}$, pri čemer je R_0 upornost senzorja pri referenčni temperaturi 0°C , izračunamo koeficienta b_i :

$$\text{S. 1: } R_{1,100^\circ\text{C}} = R_{1,0^\circ\text{C}} e^{b_1 \cdot 100^\circ\text{C}} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{100^\circ\text{C}} \cdot \ln\left(\frac{R_{1,100^\circ\text{C}}}{R_{1,0^\circ\text{C}}}\right) = 4,055 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$$

$$\text{S. 2: } R_{2,100^\circ\text{C}} = R_{2,0^\circ\text{C}} e^{b_2 \cdot 100^\circ\text{C}} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{100^\circ\text{C}} \cdot \ln\left(\frac{R_{2,100^\circ\text{C}}}{R_{2,0^\circ\text{C}}}\right) = 3,365 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$$

- Nazivna (idealna) karakteristika $R_n = R_{t,\min} + S(t - t_{\min})$ gre skozi začetno in končno točko dejanske karakteristike. Občutljivosti sta tako:

$$\text{S. 1: } S_1 = \frac{R_{t_{\max}} - R_{t_{\min}}}{t_{\max} - t_{\min}} = \frac{R_{1,100^\circ\text{C}} - R_{1,0^\circ\text{C}}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 5\ \Omega / ^\circ\text{C}$$

$$\text{S. 2: } S_2 = \frac{R_{2,100^\circ\text{C}} - R_{2,0^\circ\text{C}}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 6\ \Omega / ^\circ\text{C}$$

- Iz karakteristike senzorja R_t in nazivne karakteristike R_n lahko ugotovimo nelinearnost senzorja, ki je enaka

$$n = |e_1|_{\max} = \frac{|R_t - R_n|_{\max}}{R_{t,\max} - R_{t,\min}}$$

- Največje odstopanje $\Delta R_{\max} = |R_t - R_n|_{\max} = ?$ moremo iskati z delnim odvajanjem razlike karakteristik in enačenjem z 0:

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial t} = b_i R_{i,0} e^{b_i t} - S_i = 0 \rightarrow t_{\Delta R_{\max,i}} = \frac{1}{b_i} \ln(S_i / b_i R_{i,0})$$

$$\text{S. 1: } t_{\Delta R_{\max,1}} = \frac{1}{b_1} \ln(S_1 / b_1 R_{1,0}) = 51,66^\circ\text{C} \text{ in } \Delta R_{\max,1} = -25,26\ \Omega$$

$$\text{S. 2: } t_{\Delta R_{\max,2}} = \frac{1}{b_2} \ln(S_2 / b_2 R_{2,0}) = 51,37^\circ\text{C} \text{ in } \Delta R_{\max,2} = -25,17\ \Omega$$

- Za dano območje $t = 0^\circ\text{C} \div 100^\circ\text{C}$ sta nelinearnosti enaki:

$$n_1 = \frac{25,26\ \Omega}{500\ \Omega} = 5,0\%, \quad n_2 = \frac{25,17\ \Omega}{600\ \Omega} = 4,2\%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko je informacijska kapaciteta digitalnega voltmetra, ki ima merilni doseg $U_D = 3\text{ V}$, mejo pogreška $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$ in čas meritve $T_M = 30\text{ ms}$? Voltmeter ima maksimalno vrednost lastnega šuma $\hat{u}_{\text{sum}} = 1\text{ mV}$.

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar imamo pogrešek v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj na merilnem območju $x_D = x_{\max} - x_{\min} (= 0) = x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)} \Rightarrow m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln\left(1 + \frac{ax_D}{b}\right)$$

- Spreminjajoči del je odvisen od merjene veličine: $ax = 0,1\%U$
 - Fiksni del pa sestavljata dva dela:
 - del lastnega pogreška voltmetra: $0,1\%U_D = 3\text{ mV}$
 - lastni šum voltmetra: $\hat{u}_{\text{sum}} = 1\text{ mV}$
- Če vzamemo za enoto informacije bit, ustreza številu amplitudnih stopenj m naslednja množina informacije kot dvojiški logaritem m :

$$S = \text{lb}(m) = \log_2(m)$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas T_M , je kapaciteta ali maksimalni informacijski pretok enak:

$$C = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m) = \frac{S}{T_M}$$

- Za dani voltmeter zapišemo pogrešek lasten instrumentu v obliki:

$$M_U = (0,1\%U + 0,1\%U_D + U_{\text{sum}}) = 10^{-3}U + 3\text{ mV} + 1\text{ mV} = 10^{-3}U + 4\text{ mV}$$

- In maksimalno število neodvisnih amplitudnih stopenj na območju $U_D = 3\text{ V}$:

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln\left(1 + \frac{10^{-3} \cdot 3\text{ V}}{4\text{ mV}}\right) = 280,8$$

- Največja množina informacije in maksimalni informacijski pretok sta:

$$S = \text{lb}(m_{\max}) = 8,13\text{ bit} \Rightarrow C = \frac{S}{T_M} = 271,1\text{ bit/s}$$

2. Baterijskemu polnilniku merite izhodno napetost v neobremenjenem stanju. Če uporabite digitalni multimeter izmerite 1,8981 V pri 10 MΩ notranje upornosti in 1,8999 V pri notranji upornosti 10 GΩ. Z nekim drugim inštrumentom z notranjo upornostjo 20 kΩ izmerite 1,2666 V in pri 30 kΩ 1,4250 V.

Koliko sta napetost praznega teka in notranja upornost polnilnika in s katerim inštrumentom ugotovimo to bolj pravilno?

Rešitev:

- Napetost praznega teka in notranjo upornost polnilnika baterij izračunamo s pomočjo podatkov meritev napetosti pri dveh različnih notranjih upornostih merilnega inštrumenta - voltmetra, ki se doseže s spremembo merilnega območja ali z dodajanjem vzporedno dodatnega upora.
- Rezultat prvega inštrumenta (A)

$$R_{V1A} = 10 \text{ M}\Omega, \quad U_{V1A} = 1,8981 \text{ V}$$

$$R_{V2A} = 10 \text{ G}\Omega, \quad U_{V2A} = 1,8999 \text{ V}$$

$$U_{V1A} = U_{AB} \frac{R_{V1A}}{R_{V1A} + R_{AB}}, \quad U_{V2A} = U_{AB} \frac{R_{V2A}}{R_{V2A} + R_{AB}}$$

- Po vmesnem računu dobimo:

$$U_A = U_{V1A} U_{V2A} \frac{R_{V2A} - R_{V1A}}{R_{V2A} U_{V1A} - R_{V1A} U_{V2A}} = 1,8999 \text{ V}$$

$$R_A = R_{V1A} \left(\frac{U_{V2A}}{U_{V1A}} - 1 \right) = 9,483 \text{ k}\Omega$$

- Rezultat drugega inštrumenta (B)

$$R_{V1B} = 20 \text{ k}\Omega, \quad U_{V1B} = 1,2666 \text{ V}$$

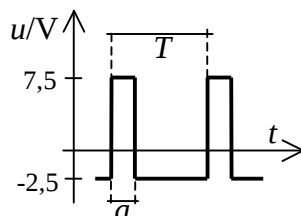
$$R_{V2B} = 30 \text{ k}\Omega, \quad U_{V2B} = 1,4250 \text{ V}$$

$$U_B = U_{V1B} U_{V2B} \frac{R_{V2B} - R_{V1B}}{R_{V2B} U_{V1B} - R_{V1B} U_{V2B}} = 1,9003 \text{ V}$$

$$R_B = R_{V1B} \left(\frac{U_{V2B}}{U_{V1B}} - 1 \right) = 2,501 \text{ k}\Omega$$

- Napetost praznega teka in notranjo upornost polnilnika izmerjena s prvim voltmetrom je bolj pravilna, ker merimo napetosti z večjo upornostjo voltmetra kot v drugem primeru in imamo manjši sistematični pogrešek!

3. Ceneni digitalni voltmeter želimo uporabiti za merjenje delovnega cikla D (ang. duty cycle) signala na sliki. Voltmeter meri izmenično napetost preko usmerjene srednje vrednosti tako, da je efektivna vrednost pravilno izmerjena le za sinusno obliko. Koliko znaša delovni cikel D , če voltmeter kaže efektivno vrednost 4,16 V?



$$D = \frac{a}{T} \cdot 100 \%$$

Rešitev:

- Voltmeter neposredno meri usmerjeno srednjo vrednost napetosti ter jo pomnoži z znanim faktorjem 1,11 tako, da v primeru sinusne napetosti pravilno pokaže efektivno vrednost.
- Voltmeter kaže 4,16 V, kar je v primeru signala na sliki napačna efektivna vrednost. Hkrati pa to pomeni, da znaša dejanska usmerjena srednja vrednost signala:

$$\overline{|u|} = \frac{U}{1,11} = \frac{4,16 \text{ V}}{1,11} = 3,75 \text{ V}$$

- Iz slike signala lahko določimo usmerjeno vrednost v odvisnosti od delovnega cikla, ki znaša:

$$\begin{aligned} \overline{|u|} &= \frac{1}{T} \left(\int_0^a |u| dt + \int_a^T |u| dt \right) = \frac{1}{T} (a \cdot 7,5 \text{ V} + (T - a) \cdot 2,5 \text{ V}) = \\ &= \frac{D}{100 \%} \cdot 7,5 \text{ V} + 2,5 \text{ V} - \frac{D}{100 \%} \cdot 2,5 \text{ V} = 3,75 \text{ V} \end{aligned}$$

- in izračunamo:

$$D = \frac{3,75 \text{ V} - 2,5 \text{ V}}{7,5 \text{ V} - 2,5 \text{ V}} \cdot 100 \% = 25 \%$$

4. Uporovnemu temperaturnemu senzorju smo izmerili karakteristiko. Podatki so v tabeli. Kolikšna je občutljivost senzorja, kolikšen je relativni pogrešek linearnosti in koliko je nelinearnost?

$t/^{\circ}\text{C}$	R_t/Ω
-60	4704
-40	5598
-20	6858
0	8313
20	10008
40	12299
60	14917
80	18124
100	21977
120	26885

Rešitev:

- Relativni pogrešek linearnosti se izračuna po enačbi

$$e_1 = \frac{R_t - R_n}{R_{t,\max} - R_{t,\min}}$$

- Iz nastavka

$$\frac{R_n - R_{t,\min}}{t - t_{\min}} = \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}}$$

- izračunamo nazivno karakteristiko R_n .

$$R_n = R_{t,\min} + \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}}(t - t_{\min}) = R_{t,\min} + S(t - t_{\min})$$

- Dopolnjena tabela:

$t/^{\circ}\text{C}$	R_t/Ω	R_n/Ω	$e_1/\%$
-60	4704	4704	0,0
-40	5598	7169	7,1
-20	6858	9633	12,5
0	8313	12098	17,1
20	10008	14562	20,5
40	12299	17027	21,3
60	14917	19491	20,6
80	18124	21956	17,3
100	21977	24420	11,0
120	26885	26885	0,0

- Nelinearnost določimo po enačbi

$$n = |e_1|_{\max} = \frac{|R_t - R_n|_{\max}}{R_{t,\max} - R_{t,\min}} = 21,3 \%$$

- občutljivost pa po enačbi

$$S = \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}} = 123,23 \Omega/^{\circ}\text{C}$$

5. Na bencinskih črpalkah merijo prostornino goriva v rezervoarjih na podlagi tehtanja in poznavanja gostote goriva. Ko dobavitelj goriva s cisterno pripelje gorivo na bencinsko črpalko, delavci na črpalki s pomočjo enačbe za gostoto goriva ρ določijo prostornino dobavljenega goriva V . Tehnica, ki je vgrajena v rezervoarjih, ima standardno negotovost tehtanja $u(m) = 50 \text{ kg}$. Termometer, s katerim delavci pomerijo temperaturo goriva, ima merilno negotovost $u(t) = 0,50^\circ\text{C}$.

Izračunajte, kakšna je dejanska prostornina goriva, ki ga črpalka dobi - kakšna je negotovost $u(V)$, če črpalka naroči $V = 30\,000$ litrov goriva pri temperaturi $t = 30^\circ\text{C}$?

$$\rho = 717,831 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot t$$

Rešitev:

- Volumen $V = m/\rho$ izrazimo z maso in gostoto goriva:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{m}{717,831 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot t}$$

- Izračunamo gostoto in maso goriva pri $t = 30^\circ\text{C}$

$$\rho = 717,831 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 30^\circ\text{C} = 742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$m = \rho V = 742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 30 \text{ m}^3 = 22\,264,56 \text{ kg}$$

- Standardno negotovost posredno merjenja prostornine zapišemo:

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial m} \cdot u(m)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot u(\rho)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \cdot u(m)\right)^2 + \left(-\frac{m}{\rho^2} \cdot u(\rho)\right)^2}$$

$$u(\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u(t) \rightarrow u(\rho) = 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot u(t) = 0,40535 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{1}{742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \cdot 50 \text{ kg}\right)^2 + \left(-\frac{22\,264,56 \text{ kg}}{\left(742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2} \cdot 0,40535 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2}$$

$$u(V) = 0,069335572 \text{ m}^3 \equiv 70 \text{ litrov}$$

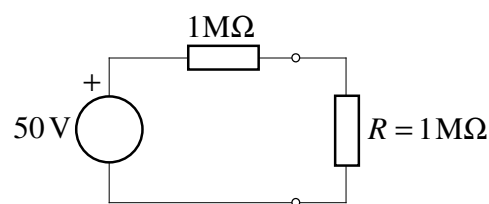
- Zapišemo rezultat:

$$V = 30\,000 \text{ l}, \quad u(V) = 70 \text{ l}, \quad n = 1$$

- Lahko zaključimo, da pri temperaturi 30°C obstoji približno 68,3% verjetnost, da bencinska črpalka, ki za merjenje prostornine dobavljenega goriva uporablja termometer z merilno negotovostjo $0,50^\circ\text{C}$ in tehtnico z negotovostjo 50 kg , od dobavitelja dobi 70 litrov preveč ali pa 70 litrov premalo goriva.

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Želimo izmeriti napetost na uporu $R = 1\text{ M}\Omega$ z dvema voltmetroma ($U_D = 50\text{ V}$). Prvi ima notranjo upornost $R_{V_1} = 1\text{ M}\Omega$, drugi pa $R_{V_2} = 10\text{ M}\Omega$. Ugotovite, koliko voltmetra kažeta in kolikšen je sistematični pogrešek pri posamezni meritvi?



Rešitev:

- Pred priključitvijo voltmetrov, je napetost na uporu R enaka:

$$U_R = 50\text{ V} \frac{1\text{ M}\Omega}{1\text{ M}\Omega + 1\text{ M}\Omega} = 25\text{ V}$$

- Po priključitvi prvega voltmetra se skupna upornost vzporedne vezave zmanjša

$$R \parallel R_{V_1} = \frac{R \cdot R_{V_1}}{R + R_{V_1}} = 500\text{ k}\Omega \text{ in voltmeter kaže:}$$

$$U_{V_1} = 50\text{ V} \frac{500\text{ k}\Omega}{1\text{ M}\Omega + 500\text{ k}\Omega} = 16,66\text{ V}$$

- Sistematični pogrešek priključitve je enak:

$$E_1 = 16,66\text{ V} - 25\text{ V} = -8,33\text{ V} \text{ in } e_1 = \frac{-8,33\text{ V}}{25\text{ V}} = -33,3\%$$

- Po priključitvi drugega voltmetra se skupna upornost vzporedne vezave poveča

$$R \parallel R_{V_2} = \frac{R \cdot R_{V_2}}{R + R_{V_2}} = 909,1\text{ k}\Omega \text{ in voltmeter kaže:}$$

$$U_{V_2} = 50\text{ V} \frac{909,1\text{ k}\Omega}{1\text{ M}\Omega + 909,1\text{ k}\Omega} = 23,81\text{ V}$$

- Sistematični pogrešek priključitve je v tem primeru enak:

$$E_1 = 23,81\text{ V} - 25\text{ V} = -1,19\text{ V} \text{ in } e_1 = \frac{-1,19\text{ V}}{25\text{ V}} = -4,8\%$$

2. Ker nimate W-metra, želite vhodno moč naprave (npr. sobnega ventilacijskega grelnika) izmeriti posredno. Katere instrumente potrebujete, če predpostavimo sinusno obliko signalov? Izpeljite izraz za izračun skupne standardne merilne negotovosti. Navedite podatke, ki jih potrebujete za izračun merilne negotovosti vhodne moči! Predpostavimo, da je negotovost zaradi ločljivosti inštrumentov zanemarljiva.

Rešitev:

- Da bi posredno izmerili vhodno moč ventilacijskega grelnika pri sinusnem vzburjanju ($P = UI \cos \varphi$) potrebujemo A-meter, V-meter in $\cos \varphi$ -meter.
- Pri skupni negotovosti upoštevamo prispevke vseh treh inštrumentov:

$$u(P) = \sqrt{(|c_1| \cdot u(U))^2 + (|c_2| \cdot u(I))^2 + (|c_3| \cdot u(\cos \varphi))^2}$$

- Za izračun potrebujemo standardne merilne negotovosti merjenja vhodnih veličin ($u(U)$, $u(I)$, $u(\cos \varphi)$) in občutljivostne koeficiente:

$$|c_1| = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| = |I \cos \varphi|; \quad |c_2| = \left| \frac{\partial P}{\partial I} \right| = |U \cos \varphi|; \quad |c_3| = \left| \frac{\partial P}{\partial \cos \varphi} \right| = UI$$

- Skupna standardna merilna negotovost je enaka:

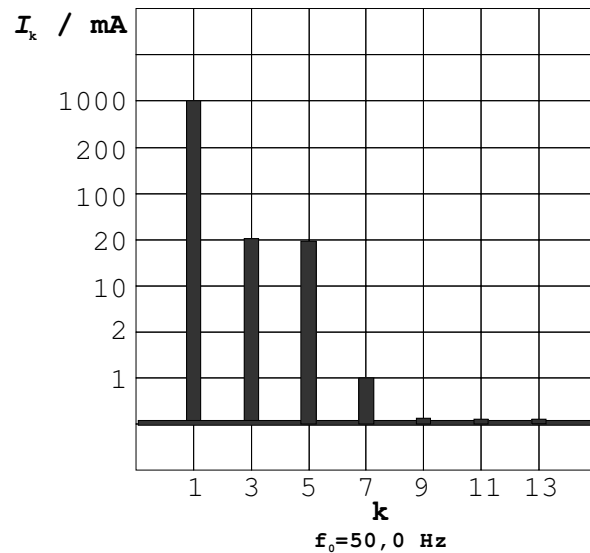
$$\begin{aligned} u(P) &= \sqrt{(I \cos \varphi \cdot u(U))^2 + (U \cos \varphi \cdot u(I))^2 + (UI \cdot u(\cos \varphi))^2} = \\ &= P \cdot \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U} \right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I} \right)^2 + \left(\frac{u(\cos \varphi)}{\cos \varphi} \right)^2} = P \cdot \sqrt{(w(U))^2 + (w(I))^2 + (w(\cos \varphi))^2} \end{aligned}$$

- Potrebni podatki inštrumentov:
 - izmerjena vrednost,
 - mejni pogrešek (absolutni ali relativni).

$$w(P) = \sqrt{\left(\frac{m_U}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_I}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_{\cos \varphi}}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

$$\text{ali} \quad = \sqrt{\left(\frac{M_U / \sqrt{3}}{U} \right)^2 + \left(\frac{M_I / \sqrt{3}}{I} \right)^2 + \left(\frac{M_{\cos \varphi} / \sqrt{3}}{\cos \varphi} \right)^2}$$

3. Z analizatorjem moči merimo THD neznanega bremena. Spodnja slika prikazuje frekvenčno analizo toka nelinearnega bremena. Izračunajte THD_{IEC} in THD_{DIN} za to breme, če predpostavimo, da harmonskih komponent $k > 9$ ni.



Rešitev

- Efektivna vrednost toka bremena je:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2}$$

$$I = \sqrt{(1000 \text{ mA})^2 + (20 \text{ mA})^2 + (20 \text{ mA})^2 + (1 \text{ mA})^2} = 1000,40 \text{ mA}$$

- Izračunani vrednosti THD sta praktično enaki:

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{(1000,40 \text{ mA})^2 - (1000 \text{ mA})^2}}{1000 \text{ mA}} = 0,0283$$

$$THD_{DIN} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I} = \frac{\sqrt{(1000,40 \text{ mA})^2 - (1000 \text{ mA})^2}}{1000,40 \text{ mA}} = 0,0283$$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Najmanj koliko vrtljajev mora narediti indukcijski števec delovne energije med preskusom, da bo relativna meja pogreška zaradi merjenja časa znašala največ 0,12 % in bo s tem njen prispevek zanemarljiv? Čas merimo z mejnim pogreškom $M_t = 0,1\text{ s}$. Fantomska obremenitev znaša 1 kW, števec pa ima konstanto 750 vrt./kWh.

Rešitev:

- Relativno mejo pogreška merjenja časa določimo iz absolutnega mejnega pogreška $M_t = 0,1\text{ s}$ z enačbo:

$$m_t = \frac{M_t}{t}$$

- Če bi šlo za pogrešek stoparice, bi morali upoštevati dvojno vrednost zaradi pogreška pri začetku in kocu merjenja časa.
- Iz enačbe za izmerjeno energijo števca W , lahko povežemo potrebno število vrtljajev števca N s časom merjenja t preko konstante števca K ter priključene moči P , ki je v tej vrsti preskušanja ponavadi fantomska:

$$W = P \cdot t = \frac{N}{K}$$

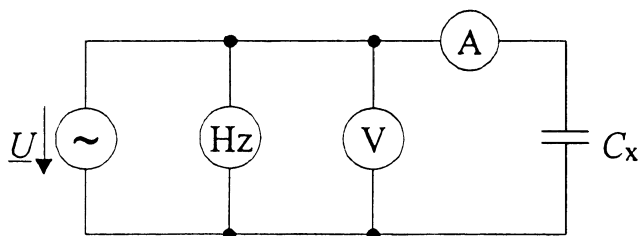
- Po združitvi obeh enačb dobimo potrebno število vrtljajev, ki mora biti za pravilno meritev celo število:

$$N = P \cdot \frac{M_t}{m_t} \cdot K = 1000\text{ W} \cdot \frac{0,1\text{ s}}{1,2 \cdot 10^{-3}} \cdot 750 \frac{\text{vrt}}{\text{kWh}} = 17,4 \text{ vrtljajev} \rightarrow 18 \text{ vrtljajev}$$

2. Kolikšen je (relativni) pogrešek pri merjenju kapacitivnosti kondenzatorja po UI metodi, če spregledamo, da ima kondenzator faktor izgub 4 % ? Skicirajte vezje!

Rešitev:

- UI metoda merjenja kapacitivnosti se uporablja v nizkofrekvenčnem območju.



- Razmerje napetosti in toka pri serijski nadomestni vezavi je enako:

$$\frac{U}{I} = Z = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C_x)^2} = \frac{1}{\omega C_x} \sqrt{1 + d^2} \quad \rightarrow \quad C_x = \frac{I}{\omega U} \sqrt{1 + d^2}$$

- Če zanemarimo izgube, dobimo samo jalovo upornost. Iskana kapacitivnost je:

$$\frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C_x} \sqrt{1 + d^2} \approx \frac{1}{\omega C_{x,i}} \quad \rightarrow \quad C_{x,i} = \frac{I}{\omega U}$$

- padec na ampermetru ni tako pomemben (ga zanemarimo), ker imamo zamik za 90° .

- Sistematični pogrešek je:

$$e = \frac{C_{x,i}}{C_x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + d^2}} - 1 = -0,0008$$

3. Določite delovno in navidezno moč na bremenu, če sta napetost in tok:

$$u/\text{V} = 100 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/2)$$

$$i/\text{A} = 5 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/3) + 1 \cdot \sin(10\pi ft + \pi/4)$$

$$P = \sum_i U_i I_i \cos \varphi_i$$

Rešitev:

- Delovna moč je definirana kot vsota prispevkov $P_i = U_i I_i \cos \varphi_i$ komponent napetosti in toka iste frekvence z upoštevanjem razlike kotov med napetostjo in tokom za ustrezno komponento.

$$P = \sum_i U_i I_i \cos \varphi_i; \quad \varphi_i = \varphi_{U,i} - \varphi_{I,i}$$

- V našem primeru imamo samo prispevek osnovne komponente:

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1; \quad \varphi_1 = \varphi_{U,1} - \varphi_{I,1} = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$$

- Efektivne vrednosti komponent napetosti in toka so:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 70,71 \text{ V};$$

$$I_1 = \frac{\hat{i}_1}{\sqrt{2}} = \frac{5 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 3,536 \text{ A}, \quad I_5 = \frac{\hat{i}_5}{\sqrt{2}} = \frac{1 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 0,707 \text{ A}$$

- Delovna moč je tako:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 216,51 \text{ W}$$

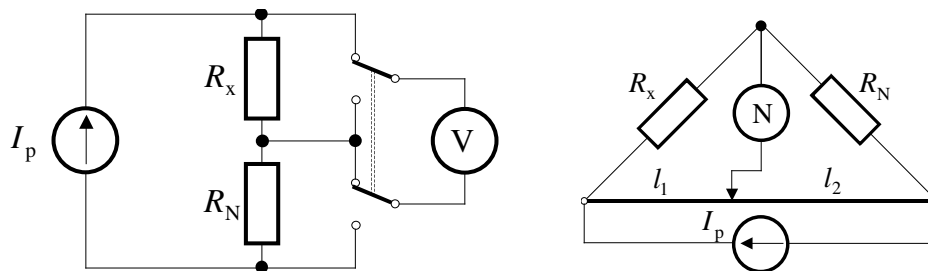
- Navidezna moč je enaka produktu efektivne vrednosti napetosti in toka: $S = U \cdot I$
 - Efektivno vrednost napetosti že poznamo: $U = U_1 = 70,71 \text{ V}$
 - Efektivno vrednost toka dobimo z geometrijskim seštevanjem efektivnih vrednosti komponent: $I = \sqrt{I_1^2 + I_5^2} = 3,606 \text{ A}$
 - Navidezna moč je tako: $S = U \cdot I = 254,98 \text{ VA}$

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Naštejte merilne metode in podajte njihovo delitev? Opišite in skicirajte primerjalno in zamenjalno merilno metodo.

Rešitev:

- Poznamo dve bistveno različni metodi:
 - **odklonsko**, pri kateri je odklon (ali kazanje) instrumenta osnova za določitev vrednosti merjene veličine;
 - **ničelno**, ko instrument kaže nič oziroma nima odklona in določimo vrednost merjene veličine na podlagi drugih, znanih pogojev merilnega vezja.
- Obe metodi lahko nadalje delimo še na: **navadne, primerjalne, zamenjalne, diferenčne in posebne.**
- **Primerjalna** odklonska in ničelna merilna metoda:

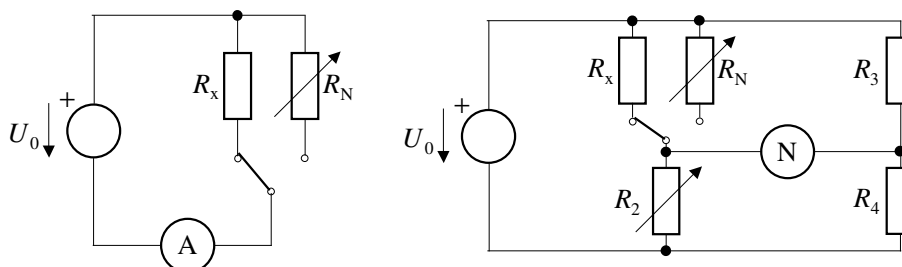


- Pri **primerjalni odklonski** metodi med seboj primerjamo napetost na neznanem upor z napetostjo na znanem (tok mora biti **konstanten**):

$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} \Leftrightarrow I_p = \text{konst.} = \frac{U_x}{R_x} = \frac{U_N}{R_N}$$

- Pri **primerjalni ničelni** metodi moramo mostiček s premikanjem drsnika po uporovni žici najprej uravnovesiti (tok ni nujno, da je stalen!): $R_x = R_N l_1 / l_2$

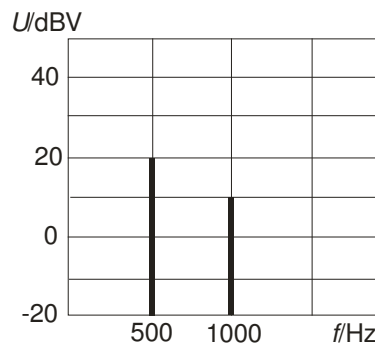
- **Zamenjalna** odklonska in ničelna metoda:



- Pri **zamenjalni** (substitucijski) **odklonski** metodi ugotovimo vrednost iskane veličine tako, da vzpostavimo v merilnem vezju dvakrat enake pogoje:
 - prvič je vključen neznan upor (merjenec);
 - drugič je vključen znani in spremenljivi upor – referenca.
- Točnost instrumenta ni pomembna!

2. Z osciloskopom smo posneli frekvenčni spekter signala, ki je prikazan na sliki. Koliko je efektivna napetost signala? Skicirajte časovni potek napetosti! Fazni zamik med obema komponentama signala je enak nič.

$$U_k / \text{dBV} = 20 \log \frac{U_k / \text{V}}{1 \text{ V}}$$



Rešitev:

- Efektivni napetosti komponent se izračuna s pomočjo podane enačbe in iz vrednosti podani v spektru:

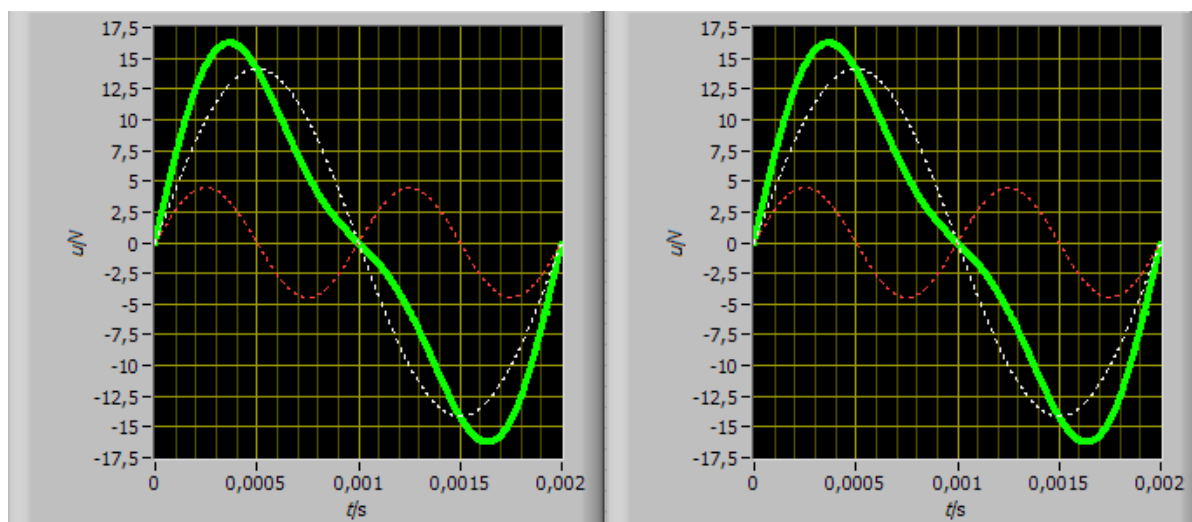
$$U_1 = 1 \text{ V} \cdot 10^{\frac{20 \text{ dBV/dBV}}{20}} = 10 \text{ V}$$

$$U_2 = 1 \text{ V} \cdot 10^{\frac{10 \text{ dBV/dBV}}{20}} = 3,16 \text{ V}$$

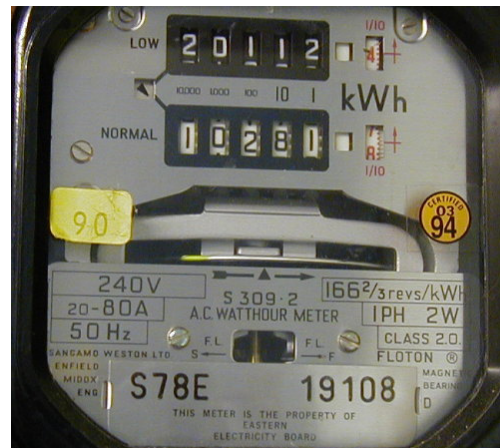
- Skupna efektivna vrednost signala je:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = 10,49 \text{ V}$$

- in časovni potek:



3. Želimo preskusiti delovanje števca električne energije (na sliki). Pri tem želimo uporabiti referenčni sistem za merjenje električne energije, za katerega vemo, da je njegov mejni pogrešek $M_N = \pm(0,3\% W_x + 0,07\% W_D + 6 \text{ dig})$, kjer je W_x izmerjena vrednost energije, W_D pa merilni doseg sistema. Izračunajte, ali je referenčni sistem, ki je pri poskusu kazal vrednost $W_N = 062,120 \text{ Wh}$, primeren za preskus števca. Referenčni sistem ima na voljo tri merilna območja (1 Wh, 1000 Wh in 10000 Wh). Za faktor razširitve običajno upoštevamo razširitveni faktor $k = 2$.



Rešitev:

- Velja, da je referenčni sistem zadosti točen in posledično primeren za preskus samo takrat, če je njegova razširjena merilna negotovost enaka ali manjša od tretjine meje pogreška preskušane števca.

$$W_{95} \leq \frac{1}{3}m \quad (1)$$

- Meja pogreška (=največja merilna napaka) preskušane števca je $m = 2\%$, kar razberemo s slike njegove prednje plošče, kjer je označen razred inštrumenta »CLASS = 2.0«
- Relativna standardna negotovost referenčnega sistema je:

$$M_N = \pm(0,3\% W_x + 0,07\% W_D + 6 \text{ dig})$$

$$M_N = (0,3\% \cdot 62,120 \text{ Wh} + 0,07\% 1000 \text{ Wh} + 6 \cdot \text{dig}) = 0,892 \text{ Wh},$$

- kjer ločljivost dobimo iz prikazovalnika referenčnega sistema: $1 \text{ dig} = 0,001 \text{ Wh}$

- Razširjena merilna negotovost referenčnega sistema znaša:

$$W_{95} = 2w_N = 2 \frac{m_N}{\sqrt{3}} = 2 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_N}{W_N} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{0,889 \text{ Wh}}{62,120 \text{ Wh}} = 1,658\%,$$

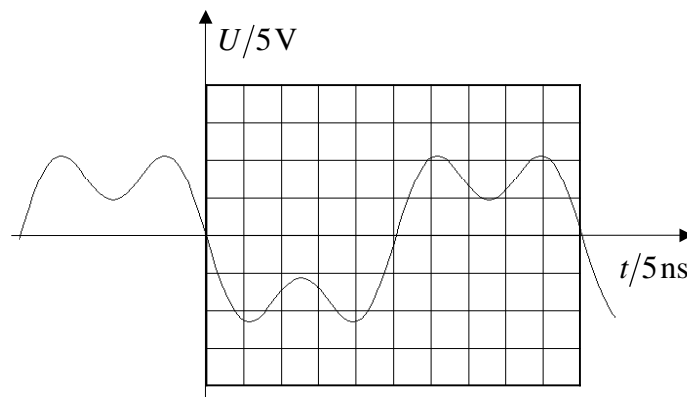
- kar je več od tretjine meje pogreška preskušane števca, ki znaša $0,66\%$. Torej neenačba (1) ne velja in referenčni sistem ni primeren.

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Na osciloskop priključimo napetost $u/V = 10 \cdot \sin \omega t + 5 \cdot \sin 3\omega t$, $f = 20 \text{ MHz}$. Kakšna je slika na zaslonu, če ima osciloskop pasovno širino $B = 500 \text{ MHz}$ (približek je člen 1. reda); $k_t = 5 \text{ ns/d}$; $k_y = 5 \text{ V/d}$; $N = 0 \text{ V}$; $S < 0$? Kakšna je slika na zaslonu, če ima osciloskop vključen filter s pasovno širino $B = 20 \text{ MHz}$. Skicirajte!

Rešitev:

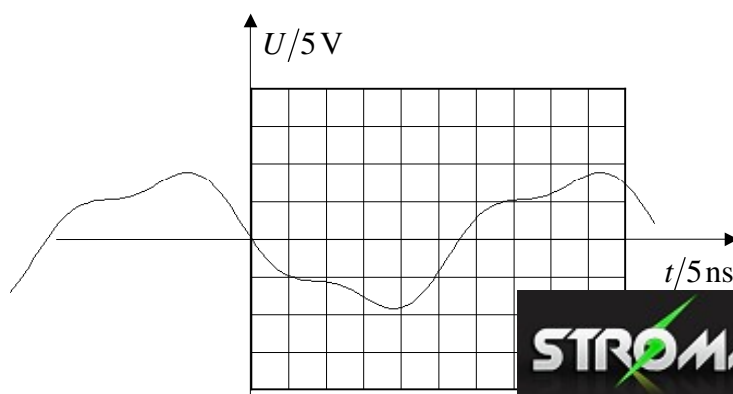
- V primeru nefiltriranega vhoda s pasovno širino $B = 500 \text{ MHz}$ se signal dinamično zanemarljivo popači ($B \doteq f_m \gg f$). Signal se na zaslonu začne izrisovati pri prožilnem nivoju $N = 0 \text{ V}$ z negativno strmino $S < 0$. Pri nastavitvi časovne konstante $k_t = 5 \text{ ns/d}$ se izriše ena perioda signala $T = 1/f = 50 \text{ ns}$ in izkoristi zaslon (raster: $10\text{d} \times 8\text{d}$, $k_y = 0,5 \text{ V/d}$) kot prikazuje slika.



- Vhodni filter dinamično popači sliko. Amplituda se zmanjša $\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$
 - in fazni kot se poveča v odvisnosti od razmerja frekvence komponente in mejne frekvence: $\varphi = -\arctg(\omega\tau) = -\arctg\left(\frac{2\pi f}{2\pi f_m}\right) = -\arctg(f/f_m)$
- Zgornjo mejno frekvenco $f_{m,zg}$ določimo iz pasovne širine, če zanemarimo spodnjo mejno frekvenco $f_{m,sp} < 20 \text{ Hz}$.

$$B = f_{m,zg} - f_{m,sp}; \quad f_{m,sp} < 20 \text{ Hz} \Rightarrow B \doteq f_{m,zg} = f_m$$

- Za vsako od komponent moramo določiti dinamično zmanjšano amplitudo in fazni zamik:
 - $f/f_m = 1: \quad \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071, \quad \varphi = -0,785 \text{ rad} = -45^\circ$
 - $f/f_m = 3: \quad \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,3162, \quad \varphi = -1,249 \text{ rad} = -71,56^\circ$
- Popačeni signal ima obliko: $u/V = 7,07 \cdot \sin(\omega t - 0,785 \text{ rad}) + 5 \cdot 0,3162 \cdot \sin(3\omega t - 1,25 \text{ rad})$
- in slika signala na zaslonu osciloskopa je:



2. Rezultat kalibracije voltmetra v štirih točkah je prikazan v tabeli. Prva kolona predstavlja referenčno vrednost, druga kolona kaže izmerjeno vrednost. Preračunana merilna negotovost voltmetra je $0,2\text{ V}$. Koliko znaša pogrešek kalibriranega inštrumenta (kolona tri) in koliko je korekcija kalibriranega inštrumenta (kolona štiri)? Pri uporabljanju voltmetra ste izmerili 10 V . Zapišite enačbo za pravo vrednost in merilni rezultat!

U_{ref}/V	U_i/V	E/V	K/V
5,0	5,2		
10,0	9,9		
15,0	14,8		
20,0	20,1		

Rešitev:

- Pogrešek kalibriranega inštrumenta je razlika izmerjene vrednosti in referenčne vrednosti. Korekcija pa ima obratni predznak pogreška in se prišteva k rezultatu.

U_{ref}/V	U_i/V	E/V	K/V
5,0	5,2	+0,2	-0,2
10,0	9,9	-0,1	+0,1
15,0	14,8	-0,2	+0,2
20,0	20,1	+0,1	-0,1

- Če pri uporabi inštrumenta izmerimo z voltmetrom 10 V , kar je zelo blizu vrednosti umerjene točke $U_i = 9,9\text{ V}$ in kot zelo dober približek uporabimo kar njeno korekcijo, znaša prava vrednost:

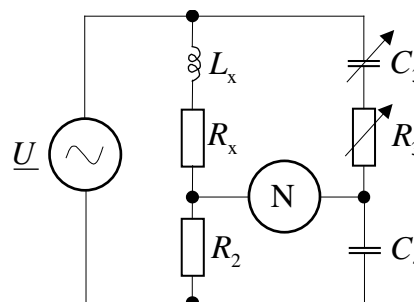
$$U = U_i + K = 10\text{ V} + (+0,1\text{ V}) = 10,1\text{ V}$$

- Merilni rezultat pa je enak:

$$\underline{\underline{U = 10,1\text{ V} \quad , \quad u(U) = 0,2\text{ V} \quad , \quad n = 1}}$$

3. Podajte popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo za induktivnost L_x , če uporabljamo dani mostič:

- $R_2 = 100,0 \Omega$; $M_{R_2} = \pm 0,2 \Omega$
- $R_3 = 8,54 \text{ k}\Omega$; $m_{R_3} = \pm 5 \cdot 10^{-3}$
- $C_3 = 92,5 \text{ nF}$; $m_{C_3} = \pm 4 \cdot 10^{-3}$
- $C_4 = 100,0 \text{ nF}$; $M_{C_4} = \pm 0,5 \text{ nF}$
- $f = 1000,0 \text{ Hz}$; $M_f = \pm 0,1 \text{ Hz}$



Rešitev:

- Za impedance mostiča zapišemo: $\underline{Z}_x = R_x + j\omega L_x$, $\underline{Z}_2 = R_2$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}, \quad \underline{Z}_4^{-1} = j\omega C_4$$

- Iz razmerja $\underline{Z}_x / \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 / \underline{Z}_4$, ko je mostič uravnovešen, zapišemo:

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_2 / \underline{Z}_4 \cdot \underline{Z}_3 \quad \Rightarrow \quad R_x + j\omega L_x = j\omega R_2 C_4 \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right)$$

- Ko izenačimo imaginarna dela leve in desne strani enačbe, dobimo iskano induktivnost:

$$L_x = R_2 R_3 C_4 = 85,40 \text{ mH}$$

- Kadar je posredno merjena veličina enaka produktu neposredno merjenih veličin, se skupna standardna negotovost izrazi z geometrijsko vsoto standardnih negotovosti vhodnih veličin v relativni obliki.

$$w_c(L_x) = \sqrt{w^2(R_2) + w^2(R_3) + w^2(C_4)}$$

- V našem primeru so posamezne standardne negotovosti:

$$w(R_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_{R_2}}{R_2} = 1,155 \cdot 10^{-3}$$

$$w(R_3) = \frac{m_{R_3}}{\sqrt{3}} = 2,887 \cdot 10^{-3}$$

$$w(C_4) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_{C_4}}{C_4} = 2,887 \cdot 10^{-3}$$

$$w_c(L_x) = 4,243 \cdot 10^{-3} \rightarrow u_c(L_x) = w_c(L_x) \cdot L_x = 0,362 \text{ mH} \rightarrow 0,37 \text{ mH}$$

- Merilni rezultat je:

$$L_x = 85,40 \text{ mH}, \quad u_c(L_x) = 0,37 \text{ mH}, \quad n = 1$$

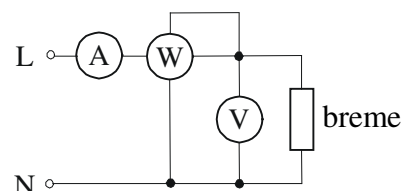
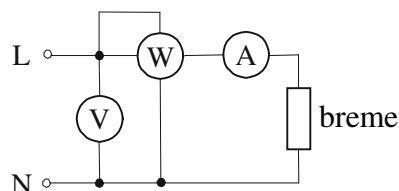
Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Pri merjenju moči na bremenu uporabite vezavo z manjšim sistematičnim pogreškom. Ali ga lahko zanemarimo?

- vatmeter: $U_n = 75 \text{ V}$; $I_n = 2,5 \text{ A}$; $\cos \varphi_n = 0,2$; $R_{W,n} = 1 \text{ M}\Omega$; $R_{W,t} = 0,2 \Omega$;
 $y_D = 150$; $y = 126,9$; $r = 0,5$;
- voltmeter: $U_D = 100 \text{ V}$; $U_i = 75 \text{ V}$; $R_V = 1 \text{ M}\Omega$;
- ampermeter: $I_D = 3 \text{ A}$; $I_i = 2 \text{ A}$; $U_{A_0} = 300 \text{ mV}$.

Rešitev:

- Obeh veličin bremena (napetost in tok) ne moremo sočasno pravilno meriti.



- Pri prvi varianti vezave instrumentov je sistematični pogrešek enak:

$$P = P_W - I^2(R_{W,t} + R_A) \Rightarrow E_1 = I^2(R_{W,t} + R_A) = (2 \text{ A})^2 \left(0,2 \Omega + \frac{300 \text{ mV}}{3 \text{ A}} \right) =$$

$$E_1 = 1,2 \text{ W}$$

- v drugi varianti vezave instrumentov pa:

$$P = P_W - U^2 \left(\frac{1}{R_{W,n}} + \frac{1}{R_V} \right) \Rightarrow E_2 = U^2 \left(\frac{1}{R_{W,n}} + \frac{1}{R_V} \right) = (75 \text{ V})^2 \left(\frac{1}{1 \text{ M}\Omega} + \frac{1}{1 \text{ M}\Omega} \right) =$$

$$E_2 = 0,01125 \text{ W}$$

- Pri merjenju uporabimo tako drugo vezavo.
- Če želimo zanemariti ta sistematični pogrešek, ga moramo primerjati z merilno negotovostjo merjenja moči z vatmetrom:

$$E_2 \leq \frac{u(P)}{10} = \frac{1}{10} \frac{M_P}{\sqrt{3}} = \frac{1}{10} \frac{r \cdot P_D}{100\sqrt{3}} \quad ?$$

- Merilni doseg vatmetra določa tudi nazivni $\cos \varphi_n$:

$$P_D = U_n I_n \cos \varphi_n = 75 \text{ V} \cdot 2,5 \text{ A} \cdot 0,2 = 37,5 \text{ W}$$

- in primerjamo:

$$E_2 = 0,01125 \text{ W} > \frac{1}{10} \frac{r \cdot P_D}{100\sqrt{3}} = \frac{1}{10} \frac{0,5 \cdot 37,5 \text{ W}}{100\sqrt{3}} = 0,010825 \text{ W}$$

- Tudi sistematičnega pogreška druge variante ne moremo zanemariti.

2. Podajte merilni rezultat s standardno negotovostjo za sedemkrat merjeno napetost U_x ! Standardna negotovost celotne populacije je bila ocenjena z $s_p = 65,4005 \mu\text{V}$. Upoštevajte korekcijo $-15 \mu\text{V}$.

U_x/mV	186,553	186,550	186,548	186,544	186,549	186,549	186,551
-----------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Rešitev:

- Srednja vrednost, kot najboljša ocena napetosti U_x , je:

$$\bar{U}_x = \frac{\sum_{i=1}^n U_{xi}}{n} = 186,54914 \text{ mV}$$

- To vrednost moramo še korigirati s korekcijo:

$$U_x = \bar{U}_x + K = 186,54914 \text{ mV} - 15 \mu\text{V} = 186,53414 \text{ mV}$$

- Standardno negotovost zaupanja aritmetični sredini sedmih vrednosti ocenimo s pomočjo standardne negotovosti celotne populacije:

$$u(U_x) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{65,4005 \mu\text{V}}{\sqrt{7}} = 24,719 \mu\text{V}$$

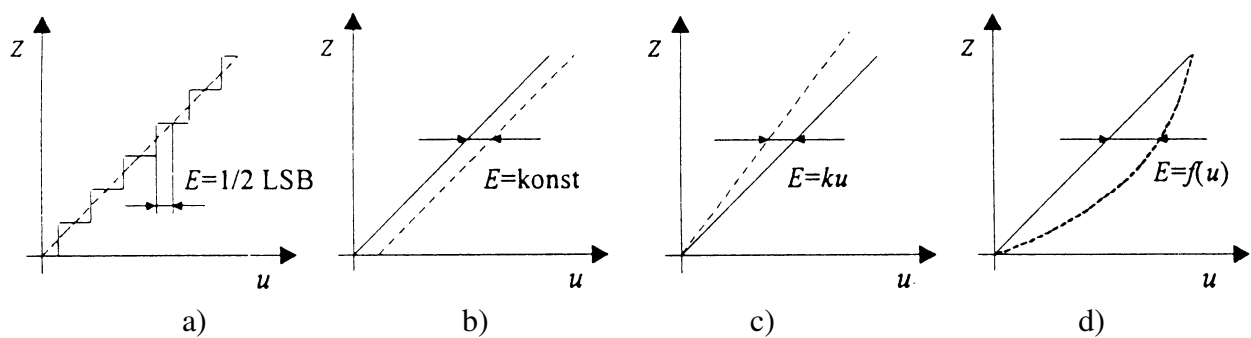
- Merilni rezultat še zaokrožimo:

$$U_x = 186,534 \text{ mV}, \quad u(U_x) = 25 \mu\text{V}, \quad n = 7, \quad k = 1, \quad p = 68,3\%$$

3. Naštejte pogoške analogno-digitalnega pretvornika in nakažite načine, kako jih lahko korigiramo z mikroračunalnikom v digitalnih elektronskih instrumentih. Skicirajte in pokažite z enačbami!

Rešitev:

- Pogoške analogno-digitalnega pretvornika (ADP) razdelimo na:
 - kvantizacijskega - a,
 - ničelnega - b,
 - naklonskega - c,
 - pogrešek nelinearnosti - d.
- Pri ADP ločimo še integralno nelinearnost (INL), ki je vezana na celotno merilno območje $n_{INL} = |E|_{\max} / U_D$, in diferencialno nelinearnost (DNL), ki je vezana na nazivni korak kvantizacije $\Delta_0 = U_D / 2^n$: $n_{DNL} = |\Delta - \Delta_0|_{\max} / \Delta_0$



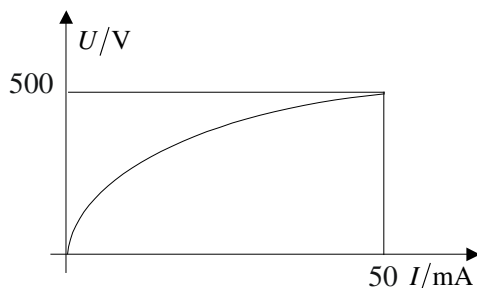
- Enostavno lahko korigiramo ničelni in naklonski pogrešek z dvema referenčnima napetostima, ki ju priklopimo na vhod:
 - $U_0 = 0 \text{ V} \rightarrow Z = Z_0$ - vhod ADP kratko sklenemo
 - $U_{\text{ref}} \rightarrow Z = Z_{\text{ref}}$ - na vhod priključimo znano referenčno napetost
- Vse ostale vrednosti AD pretvorbe korigiramo z linearno karakteristiko, ki jo določata ti referenčni vrednosti.

$$Z_{\text{kor}} = (Z - Z_0) \frac{Z_{\text{ref}}}{Z_{\text{ref}} - Z_0}$$

- Pogrešek nelinearnosti lahko zmanjšamo tako, da zmanjšamo interval, na katerem opazujemo odstopanje od linearne karakteristike.

Rešitve nalog – Merilna tehnika – VSŠ

1. Nekatere dele UI karakteristike ne moremo zmeriti tako, da bi bili mejni pogreška napetosti oz. toka manjši od 1%. Ugotovite katere!



- voltmeter:
 $U_D = (2000 - 200 - 20)V$,
 $M_U = \pm(0,2\% U + 0,1\% U_D)$
- ampermeter:
 $I_D = (200 - 20 - 2)mA$,
 $M_I = \pm(0,3\% I + 0,1\% I_D)$

Rešitev:

- Če želimo, da je mejni pogrešek merjenja napetosti manjši od 1%, postavimo pogoj za relativno mejno vrednost pogreška:

$$m_U = \frac{M_U}{U} = 2 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3} \frac{U_D}{U} \leq 10^{-2}$$

- in od tod dobimo, da mora biti napetost vedno večja od osmine območja, če želimo skupni pogrešek pod 1%:

$$1 \cdot 10^{-3} \frac{U_D}{U} \leq 8 \cdot 10^{-3} \rightarrow \frac{U_D}{8} \leq U$$

- Napetostna območja, ki jih z danim voltmetrom ne moremo meriti z mejnim pogreškom pod 1%, so:

$$U_D = 2000V : 2000V/8 = 250V > U > 200V$$

$$U_D = 200V : 200V/8 = 25V > U > 20V$$

$$U_D = 20V : 20V/8 = 2,5V > U$$

- Če želimo, da je mejni pogrešek merjenja toka manjši od 1%, postavimo ponovno pogoj za relativno mejno vrednost pogreška:

$$m_I = \frac{M_I}{I} = 3 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3} \frac{I_D}{I} \leq 10^{-2}$$

- in od tod dobimo, da mora biti tok vedno večji od sedmine območja, če želimo skupni pogrešek pod 1%:

$$1 \cdot 10^{-3} I \leq 7 \cdot 10^{-3} \rightarrow \frac{I_D}{7} \leq I$$

- Tokovna območja, ki jih z danim ampermetrom ne moremo meriti z mejnim pogreškom pod 1%, so:

$$I_D = 200mA : 200mA/7 = 28,57mA > I > 20mA$$

$$I_D = 20mA : 20mA/7 = 2,857mA > I > 2mA$$

$$I_D = 2mA : 2mA/7 = 0,2857mA > I$$

2. Podajte merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo u in razširjeno merilno negotovostjo U_{95} , če je $s_p = 0,333 \text{ V}$ in meja pogreška merilnega instrumenta $M = \pm(0,2\% U_i + 2 \text{ dig})$. Ročno merjeni rezultati so v tabeli 1.

Tabela 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$U(\text{V})$	12,3	11,9	12,0	12,4	12,1	12,4	12,1	12,3	12,2	12,1	11,8	11,9	12,3	12,2	12,0

Tabela 2

$p/\%$	50	68,3	95	95,5	99	99,73	99,99
k	0,675	1	1,96	2,0	2,58	3	3,90

Rešitev:

- Povprečna vrednost izmerjenih vrednosti je enaka:

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j = \frac{1}{15} (12,3 \text{ V} + 11,9 \text{ V} + \dots + 12,0 \text{ V}) = 12,1333 \text{ V}$$

- Negotovost tipa A se izračuna iz standardnega odklona popupacije s_p :

$$u_A(U) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{0,333 \text{ V}}{\sqrt{15}} = 0,08598 \text{ V}$$

- Pri negotovosti tipa B se upošteva meja pogreška merilnega instrumenta, kjer uporabimo za $U_i = \bar{U}$ in ločljivost $1 \text{ dig} = 0,1 \text{ V}$:

$$u_B(U) = \frac{M}{\sqrt{3}} = \frac{\pm(0,2\% U_i + 2 \text{ dig})}{\sqrt{3}} = 0,12948 \text{ V}$$

- Skupna merilna negotovost tako znaša:

$$u(U) = \sqrt{u_A^2(U) + u_B^2(U)} = 0,1554 \text{ V}$$

- Merilni rezultat s standardno negotovostjo je:

$$U = 12,13 \text{ V}, \quad u(U) = 0,16 \text{ V}, \quad n = 15, \quad k = 1, \quad p = 68,3\%$$

- Merilni rezultat z razširjeno merilno negotovostjo (U_{95}) pa je:

$$U = 12,13 \text{ V}, \quad U_{95}(U) = 0,31 \text{ V}, \quad n = 15, \quad k = 1,96, \quad p = 95\%$$

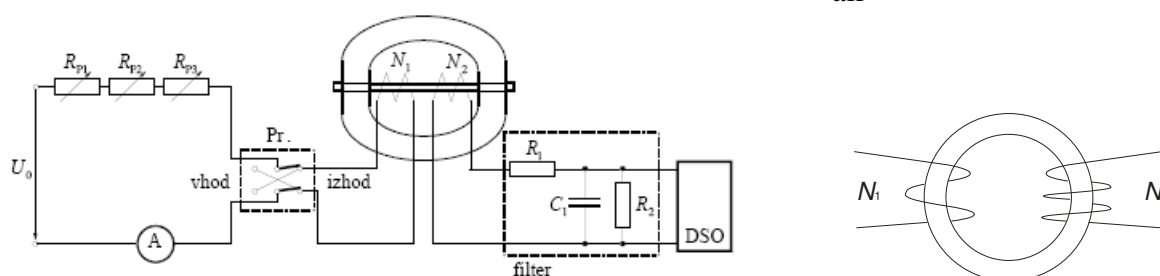
3. Narišite vezje za snemanje statične komutacijske krivulje in razložite:

- kako merimo magnetno indukcijo B (razlaga in enačba),
- kako merimo jakost magnetnega polja H (razlaga in enačba),
- zakaj uporabljamo nizkoprepustni filter pri merjenju B in
- zakaj naredimo za vsako točko po dve meritvi?

Rešitev:

- Vezje za snemanje statične komutacijske krivulje je prikazano na sliki.

ali



- a) Magnetno indukcijo merimo preko inducirane napetosti $u_i = -N_2 \cdot A \cdot \frac{dB}{dt}$:

$$\int_0^{T_M} u_i \cdot dt = -N_2 \cdot A \cdot \int_B^{-B} dB \quad \Rightarrow \quad T_M \cdot \bar{U} = 2 \cdot N_2 \cdot A \cdot B$$

- oziroma:

$$B = \frac{T_M \cdot \bar{U}}{2 \cdot N_2 \cdot A}$$

- b) Jakost magnetnega polja merimo preko magnetilnega toka:

$$H = \frac{I \cdot N_1}{l_{sr}}$$

- c) Nizkonapetostni filter uporabljamo za glajenje inducirane napetosti in poenotenje dolžine časa merjenja T_M .
- d) Za vsako točko naredimo dve meritvi zaradi preostale (offsetne) napetosti DSO.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{U}_1 = \bar{U} + \bar{u}_{\text{off}} \\ \bar{U}_2 = -\bar{U} + \bar{u}_{\text{off}} \end{array} \right\} \bar{U} = \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_2}{2}$$

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

1. Pogrešek priključitve pri merjenju napetosti je bil $e = -2\%$. Koliko je kazal voltmeter in koliko je bila notranja upornost voltmetra, če ima napetostni vir $U_0 = 3\text{ V}$, $R_0 = 300\ \Omega$?

Rešitev:

- Napetost, ki jo kaže voltmeter U_V , je zaradi napetostnega delilnika nekoliko manjša, kot je napetost praznega teka U_0 . Dobimo jo s pomočjo Theveninovega nadomestnega vezja in jo izrazimo z

$$U_V = U_0 \frac{R_V}{R_V + R_0}$$

- Pri tem je bil sistematični pogrešek priključitve voltmetra enak

$$e = \frac{U_V - U_0}{U_0} = \frac{U_V}{U_0} - 1$$

- Upornost uporabljenega voltmetra se tako izračuna iz

$$e = \frac{U_V}{U_0} - 1 = \frac{U_0 \frac{R_V}{R_V + R_0}}{U_0} - 1 = \frac{-R_0}{R_0 + R_V}$$

$$\text{■ oziroma } R_V = \frac{-R_0(1+e)}{e} = \frac{-300\ \Omega(1+(-0,02))}{-0,02} = 14700\ \Omega$$

- Napetost, ki jo kaže voltmeter pa je

$$U_V = U_0 \frac{R_V}{R_V + R_0} = 3\text{ V} \cdot \frac{14700\ \Omega}{14700\ \Omega + 300\ \Omega} = 2,94\text{ V}$$

2. Podajte merilni rezultat za jalovo moč na kondenzatorju s standardno negotovostjo?

- V-meter: $U = 230,00 \text{ V}$; $U_D = 250 \text{ V}$; $M_U = \pm(0,2\%U + 0,3\%U_D)$
- Hz-meter: $f = 50,000 \text{ Hz}$; $M_f = \pm(0,05\%f + 1 \text{ dig})$
- F-meter: $C = 234,5 \mu\text{F}$; $M_C = \pm(0,5\%C + 3 \text{ dig})$ $Q = U^2 \omega C$

Rešitev:

- Jalovo moč izračunamo iz vrednosti, ki jih kažejo merilni instrumenti:

$$Q = U^2 \omega C = 3897,16 \text{ VAr}$$

- Za merilni rezultat potrebujemo še standardno merilno negotovost, ki jo sestavljajo prispevki vhodnih neodvisnih veličin:

$$u(Q) = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial U} \cdot u(U)\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \omega} \cdot u(\omega)\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial C} \cdot u(C)\right)^2}$$

$$u(Q) = \sqrt{(2U\omega C \cdot u(U))^2 + (U^2 C \cdot u(\omega))^2 + (U^2 \omega \cdot u(C))^2}$$

- Standardna merilna negotovost zapisana v relativni obliki se poenostavi v:

$$w(Q) = \frac{u(Q)}{Q} = \sqrt{\left(2 \frac{u(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{u(\omega)}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{u(C)}{C}\right)^2} =$$

$$w(Q) = \sqrt{(2w(U))^2 + w^2(f) + w^2(C)}$$

- Negotovosti vhodnih veličin izračunamo iz mejnih vrednosti pogreškov instrumentov in pri predpostavki pravokotne porazdelitve gostote verjetnosti pogreškov, kjer je standardna negotovost za $\sqrt{3}$ manjša od mejne vrednosti:

$$\blacksquare w(U) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_U}{U} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3} \frac{U_D}{U} \right) = 3,037 \cdot 10^{-3}$$

$$\blacksquare w(f) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_f}{f} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(5 \cdot 10^{-4} + \frac{0,001 \text{ Hz}}{50,000 \text{ Hz}} \right) = 3,002 \cdot 10^{-4}$$

$$\blacksquare w(C) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_C}{C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(5 \cdot 10^{-3} + \frac{0,3 \mu\text{F}}{234,5 \mu\text{F}} \right) = 3,625 \cdot 10^{-3}$$

- in skupna standardna negotovost izhodne veličine Q je tako:

$$w(Q) = 7,081 \cdot 10^{-3} \rightarrow w(Q) = 7,1 \cdot 10^{-3}$$

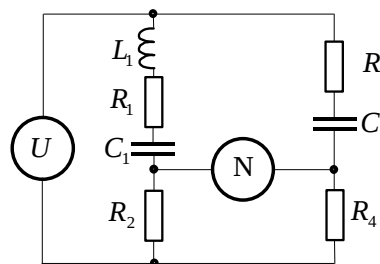
- Tudi standardno negotovost v absolutni obliki zaokrožimo na dve decimalni mesti

$$u(Q) = w(Q) \cdot Q = 27,59 \text{ VAr} \rightarrow u(Q) = 28 \text{ VAr}$$

- Zaokrožen merilni rezultat s standardno negotovostjo zapišemo v obliki:

$$Q = 3897 \text{ VAr} \quad u(Q) = 28 \text{ VAr} \quad n = 1$$

3. Pri katerih frekvencah mostiča ne moremo uravnovesiti, če spreminjamo R_2 , R_3 , R_4 ali C_3 ?



Rešitev:

- Za mostič zapišemo impedance posameznih vej:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1, \quad \underline{Z}_2 = R_2, \quad \underline{Z}_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}, \quad \underline{Z}_4 = R_4$$

- Ravnovena enačba $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3$ nam da naslednjo povezavo,

$$\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 \right) \cdot R_4 = R_2 \cdot \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right)$$

- ki jo uredimo v obliko:

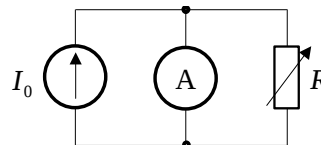
$$R_1 R_4 + \frac{R_4}{j\omega C} (1 - \omega^2 L_1 C_1) = R_2 R_3 + \frac{R_3}{j\omega C_3}$$

- Mostič ne moremo uravnovesiti, kadar je izraz $(1 - \omega^2 L_1 C_1)$ negativen in ne moremo izravnati imaginarni del leve in desne strani ravnovesne enačbe.

$$1 - \omega^2 L_1 C_1 < 0 \quad \rightarrow \quad 1 < \omega^2 L_1 C_1 \quad \rightarrow \quad f > \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}$$

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

1. Kolikšen je karakteristični padec napetosti ampermetra z $I_D = 1\text{mA}$, katerega odklon pade na polovico, če zmanjšamo upornost R od 1000Ω na 250Ω ?



Rešitev:

- Za dano nalogo moramo ugotoviti upornost ampermetra R_A . Ker imamo opraviti s tokovnim delilnikom, zapišemo $I_A = I_0 \frac{R}{R + R_A}$. Dana imamo odklona ampermetra pri dveh vrednostih upornosti R :

$$\blacksquare \quad R_1 = 1000\Omega \rightarrow I_{A,1} = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_A};$$

$$\blacksquare \quad R_2 = 250\Omega \rightarrow I_{A,2} = I_0 \frac{R_2}{R_2 + R_A}.$$

- Iz razmerja tokov določimo upornost ampermetra:

$$\frac{I_{A,1}}{I_{A,2}} = 2 = \frac{R_1}{R_2} \frac{R_2 + R_A}{R_1 + R_A} = 4 \frac{R_2 + R_A}{R_1 + R_A} \rightarrow R_A = 500\Omega$$

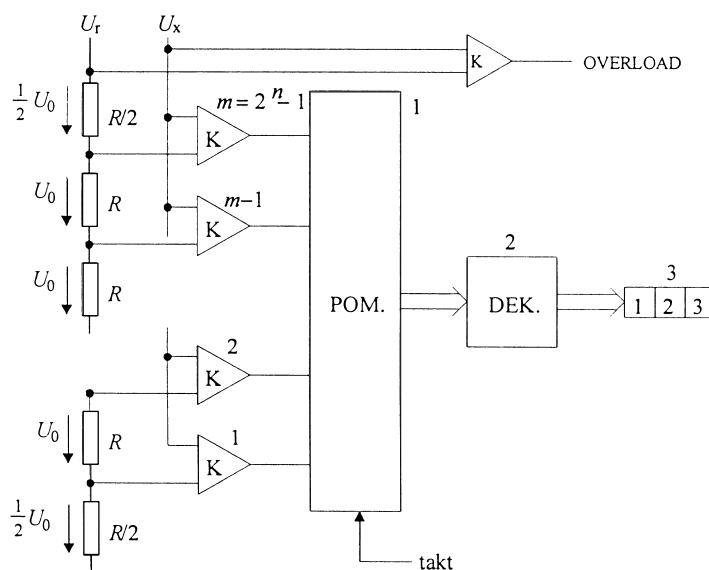
- Karakteristični padec napetosti je enak napetosti na ampermetru pri polnem odklonu:

$$U_{A0} = I_D R_A = 1\text{mA} \cdot 500\Omega = 0,5\text{V}$$

2. Skicirajte vezje paralelnega A/D pretvornika in razložite princip delovanja. Koliko je potrebnih referenc in koliko korakov pretvorbe 8-bitnega A/D pretvornika? Kolikšna je lahko frekvenca sinusne vhodne napetosti, da bodo vsi biti verodostojni, če je čas enega takta $t = 1\text{ ns}$?

Rešitev:

- Paralelni trenutni pretvornik (flash converter):



- Postopek kvantizacije je pred vzorčenjem!
- Referenčne napetosti so realizirane z uporovnim delilnikom
 - Komparatorji pod nivojem napetosti U_x imajo vrednost 1 in nad 0 - termometerska koda.
 - Eksponentno se poveča poraba pri realizaciji. Število potrebnih referenc in komparatorjev je $r = 2^n - 1$
- Uporablja se za zelo velike hitrosti pretvarjanja, ker se pretvoba izvrši v enem koraku ($k = 1$), zato je čas pretvorbe v našem primeru enak času takta $t_c = 1\text{ ns}$.
- Največja dopustna sprememba vhodne napetosti v času pretvorbe t_c naj bo manjša od ločljivosti ADP (Δ), da bodo vsi biti verodostojni:

$$\left| \frac{dU_x}{dt} \right|_{\max} = \frac{\Delta}{t_c} = \frac{U_D}{2^n t_c}; \quad U_D - \text{doseg ADP}$$

- Če je na vhodu sinusna napetost, imamo: $u_x = \hat{u} \sin \omega t \Rightarrow \left| \frac{du_x}{dt} \right|_{\max} = \omega \hat{u}$

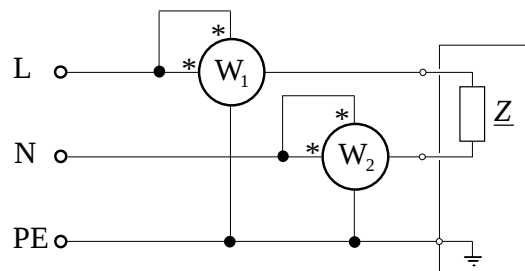
- Kadar je ADP polno izkoriščen $\hat{u} = U_D/2$, je največja frekvenca signala:

$$2\pi f \hat{u} = 2\pi f \frac{U_D}{2} = \frac{U_D}{2^n t_c} \Rightarrow f = \frac{1}{2^n \pi t_c}$$

- in v našem primeru: $f = \frac{1}{2^8 \pi 1\text{ ns}} = 1,24\text{ MHz}$

3. Čemu je enaka vsota odčitkov vatmetrov:

- dvakratni delovni moči,
- nič,
- delovni moči P kompleksnega porabnika $\underline{Z}$?



Rešitev:

- Prvi vatmeter kaže moč, ki je enaka:

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{U}_L - \underline{U}_{PE}) \cdot \underline{I}_Z^* \right\}$$

- Zaradi priključitve tokovne veje drugega vatmetra se predznak moči tega vatmetra spremeni in kaže:

$$P_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{U}_N - \underline{U}_{PE}) \cdot (-\underline{I}_Z^*) \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{U}_{PE} - \underline{U}_N) \cdot (\underline{I}_Z^*) \right\}$$

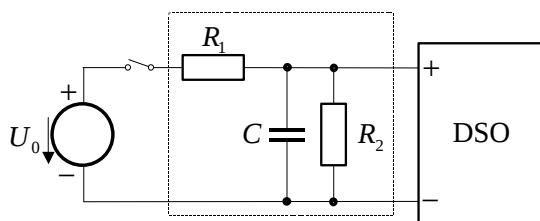
- Vsota odčitkov vatmetrov je enaka delovni moči P kompleksnega porabnika $\underline{Z}$, ker se potencial zaščitnega vodnika PE izloči:

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{U}_L - \underline{U}_{PE}) \cdot \underline{I}_Z^* \right\} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{U}_{PE} - \underline{U}_N) \cdot (\underline{I}_Z^*) \right\}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (\underline{U}_L - \underline{U}_N) \cdot \underline{I}_Z^* \right\} = P_Z$$

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

1. Narišite odziv člena, ki ga merimo z osciloskopom, ko vklopimo stikalo in izračunajte odzivni čas ter vrednost izhodne napetosti po tem času, če je $U_0 = 10\text{ V}$, $R_1 = 763\text{ k}\Omega$, $R_2 = 92,4\text{ k}\Omega$, $C = 18,3\text{ nF}$.



Rešitev:

- Opraviti imamo s členom 1. reda, ki ima časovno konstanto τ enako:

$$\tau = a\tau_1 = aR_1C$$

- pri čemer je a delilno razmerje uporov in določa napetost v stacionarnem stanju:

$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,108 ; \quad U_2 = aU_0 = 1,08\text{ V}$$

- Časovna konstanta je:

$$\tau_1 = R_1C = 13,96\text{ ms} \rightarrow \tau = a\tau_1 = 1,508\text{ ms}$$

- Odzivni čas T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 5\%$ končne vrednosti (zelo razširjen kriterij), velja za člen 1. reda:

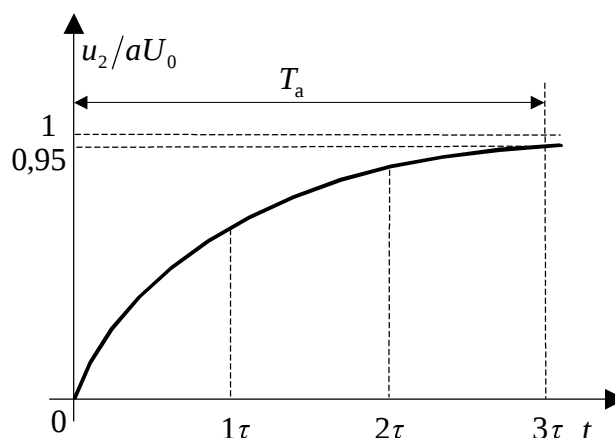
$$\frac{u_2}{aU_0} = 0,95 = (1 - e^{-T_a/\tau}) \Rightarrow T_a = \ln 20 \cdot \tau \approx 3\tau$$

- V našem primeru je odzivni čas enak:

$$T_a = 3\tau = 3 \cdot 1,508\text{ ms} = 4,52\text{ ms}$$

- in napetost:

$$u_2 = aU_0(1 - e^{-T_a/\tau}) = 1,08\text{ V} \cdot 0,95 = 1,03\text{ V}$$



2. Skicirajte merilno vezje Kelvinovega (Thomsonovega) mostiča. Določite mesto priključitve R_x oziroma R_N v mostič in izberite vrednosti R_B in R_A tako, da bodo vključene vse stopnje uporovne dekade R_B !

- mostič: $R_A = R'_A = (1, 10, 100) \Omega$
 $R_B = R'_B = 9 \times (100, 10, 1, 0,1) \Omega$;
- etalon: $R_N = 10 \text{ m}\Omega$,
- merjenec R_x je žica okroglega preseka: $d = 3 \text{ mm}$, $l = 1 \text{ m}$, $\lambda = 57 \text{ MS/m}$

Rešitev:

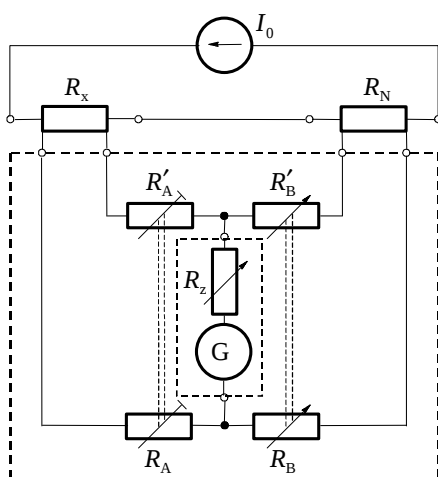
- Za določitev mesta priključitve moramo najprej izračunati približno vrednost upornosti R_x žice okroglega preseka $A = \pi d^2/4$, dolžine $l = 1 \text{ m}$ in s specifično prevodnostjo $\lambda = 57 \text{ MS/m}$:

$$R_x = \frac{l}{A\lambda} = \frac{4l}{\pi d^2 \lambda} = \frac{4 \cdot 1 \text{ m}}{\pi (3 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2 57 \cdot 10^6 \text{ S}} = 0,0024819 \Omega = 2,4819 \text{ m}\Omega$$

- Če hočemo izkoristiti vse stopnje uporovne dekade R_B , mora biti vrednost večja kot $R_B \geq 100 \Omega$, pri čemer upoštevamo, da je dekada R_A lahko nastavljena le na 1Ω , 10Ω ali 100Ω .
- Ko je mostič v ravnovesju določimo iz mostičnega razmerja vrednosti dekad R_A in R_B za obe priključitvi R_x in R_N .

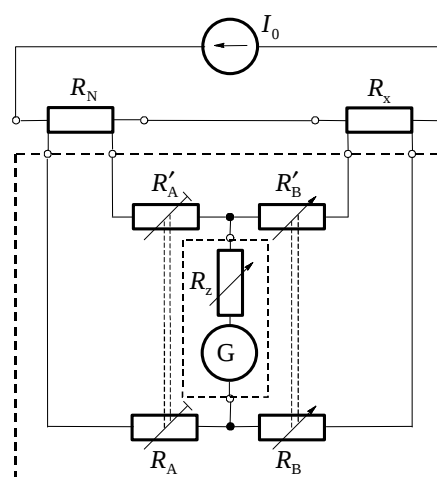
a) prva priključitev:

$$\frac{R_x}{R_N} = \frac{2,48 \text{ m}\Omega}{10 \text{ m}\Omega} = 0,248 = \frac{R_A}{R_B} \rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{100 \Omega}{402,9 \Omega}$$



b) druga priključitev:

$$\frac{R_x}{R_N} = 0,248 = \frac{R_B}{R_A} \rightarrow \frac{R_B}{R_A} = \frac{24,8 \Omega}{100 \Omega}$$



- Vse stopnje uporovne dekade R_B lahko izkoristimo samo pri prvi priključitvi $R_B = 402,9 \Omega$. V drugem primeru tudi najboljši približek $R_A = 100 \Omega$ in $R_B = 24,8 \Omega$ ne omogoča uporabe vseh dekad R_B .

3. Določite delovno moč in faktor moči na bremenu, če sta napetost in tok:

$$u/\text{V} = 100 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/3)$$

$$i/\text{A} = 5 \cdot \sin(2\pi ft + \pi/2) + 1 \cdot \sin(6\pi ft + \pi/6)$$

$$P = \sum_i U_i I_i \cos \varphi_{UI,i}$$

Rešitev:

- Delovna moč je definirana kot vsota prispevkov $P_i = U_i I_i \cos \varphi_i$ komponent napetosti in toka iste frekvence z upoštevanjem razlike kotov med napetostjo in tokom za ustrezno komponento.

$$P = \sum_i U_i I_i \cos \varphi_{UI,i}; \quad \varphi_{UI,i} = \varphi_{U,i} - \varphi_{I,i}$$

- V našem primeru imamo prispevek samo osnovne komponente, ker je prispevek tretje harmonske komponente toka zaradi ortogonalnosti enak nič.

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1; \quad \varphi_1 = \varphi_{U,1} - \varphi_{I,1} = \pi/3 - \pi/2 = -\pi/6$$

- Efektivni vrednosti osnovnih komponent napetosti in toka sta:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100\text{V}}{\sqrt{2}} = 70,71\text{V}, \quad I_1 = \frac{\hat{i}_1}{\sqrt{2}} = \frac{5\text{A}}{\sqrt{2}} = 3,536\text{A};$$

- Delovna moč je tako:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 216,51\text{W}$$

- Navidezna moč je enaka produktu efektivne vrednosti napetosti in toka: $S = U \cdot I$

- Efektivno vrednost napetosti že poznamo: $U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100\text{V}}{\sqrt{2}} = 70,71\text{V}$

- Efektivno vrednost toka dobimo z geometrijskim seštevanjem efektivnih vrednosti komponent, kjer je $I_3 = \frac{\hat{i}_3}{\sqrt{2}} = \frac{1\text{A}}{\sqrt{2}} = 0,707\text{A}$:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 3,606\text{A}$$

- Navidezna moč je: $S = 254,98\text{VA}$

- Faktor moči je razmerje delovne in navidezne moči: $\lambda = \frac{P}{S}$

- in znaša v našem primeru: $\lambda = \frac{216,51\text{W}}{254,98\text{VA}} = 0,849$

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

1. Skicirajte vezje za merjenje upornosti po UI metodi (varianat z manjšim sistematičnim vplivom instrumentov) in podajte popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo!

- voltmeter: $U = 12,41\text{ V}$, $M_U = \pm(0,1\%U + 1\text{ dig})$, $R_V = 10\text{ M}\Omega$;
- ampermeter: $I_D = 200\text{ }\mu\text{A}$, $I = 162,3\text{ }\mu\text{A}$, $M_I = \pm(0,2\%I + 0,05\%I_D)$, $U_{A0} = 0,2\text{ V}$

Rešitev:

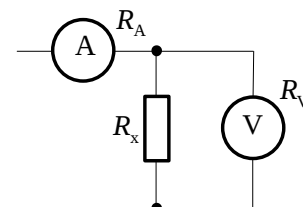
- Vrednost upornosti določimo iz odčitkov instrumentov:

$$R_x = \frac{U}{I} = \frac{12,41\text{ V}}{162,3\text{ }\mu\text{A}} = 76,463\text{ k}\Omega$$

- Sistematični pogrešek priključitve pri UI metodi določajo razmerja upornosti instrumentov in upornosti R_x .

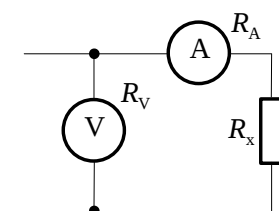
- Pri prvi varianti priključitve je enak:

$$|e_1| = \left| -\frac{R_x}{R_V} \right| = \frac{76,463\text{ k}\Omega}{10\text{ M}\Omega} = 7,6 \cdot 10^{-3}$$



- Pri drugi varianti priključitve ga določa upornost ampermetra $R_A = U_{A0}/I_D = 1000\text{ }\Omega$

$$e_2 = \frac{R_A}{R_x} = \frac{1000\text{ }\Omega}{76,463\text{ k}\Omega} = 1,3 \cdot 10^{-2}$$



- Uporabimo tako prvo varianto priključitve.

- Standardno negotovost tipa B dobimo iz mejnih vrednosti pogreškov:

$$M_U = \pm(0,1\%U + 1\text{ dig}) = \pm\left(\frac{0,1}{100}12,41\text{ V} + 0,01\text{ V}\right) = \pm 0,0224\text{ V}$$

$$M_I = \pm(0,2\%I + 0,05\%I_D) = \pm\left(\frac{0,2}{100}162,3\text{ }\mu\text{A} + \frac{0,05}{100}200\text{ }\mu\text{A}\right) = \pm 0,425\text{ }\mu\text{A}$$

- in relativni standardni negotovosti:

$$w(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}U} = 1,04 \cdot 10^{-3} \quad \text{ter} \quad w(I) = \frac{M_I}{\sqrt{3}I} = 1,51 \cdot 10^{-3}$$

- skupna standardna negotovost upornosti R_x kot posredno merjene veličine je: $w(R_x) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)} = 1,84 \cdot 10^{-3}$

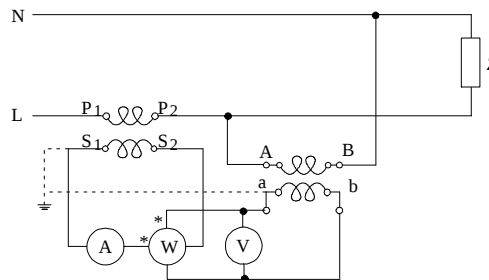
- oz. v absolutni obliki: $u(R_x) = w(R_x) \cdot R_x = 140\text{ }\Omega$

- Popolni merilni rezulta zaokrožimo in zapišemo:

$$R_x = 76,46\text{ k}\Omega ; \quad u(R_x) = 0,14\text{ k}\Omega ; \quad n = 1$$

2. Kolikšne so delovna, jalova in navidezna moč porabnika?

- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $y_D = 20000$, $y = 19111$;
- voltmeter: $U = 105 \text{ V}$;
- amperimeter: $I = 4,82 \text{ A}$;
- tokovnik: $I_{pn} = 75 \text{ A}$, $I_{sn} = 5 \text{ A}$;
- napetostnik: $U_{pn} = 50 \text{ kV}$, $U_{sn} = 100 \text{ V}$;



Rešitev:

- Delovna moč se izračuna iz izmerjene vrednosti vatmetra. Potrebno je upoštevati, da je vatmeter priključen na sekundarni strani tokovnika in napetostnika.

- Prestavi transformatorjev sta:

$$K_{un} = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} = \frac{50 \text{ kV}}{100 \text{ V}} = 500 \quad \text{in} \quad K_{in} = \frac{I_{pn}}{I_{sn}} = \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} = 15$$

- Delovna moč je za prestavi večja vrednost, kot jo kaže vatmeter:

$$P_W = U_n \cdot I_n \cdot \frac{y}{y_D} = 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{19111}{20000} = 477,775 \text{ W}$$

$$P = K_{un} \cdot K_{in} \cdot P_W = 500 \cdot 15 \cdot 477,775 \text{ W} = 3,583 \text{ MW}$$

- Navidezna moč se izračuna iz izmerjenih vrednosti voltmetra in ampermetra. Pozor, tudi ta dva instrumenta sta vezana na sekundarni strani tokovnika in napetostnika.

$$S = K_{un} \cdot K_{in} \cdot U \cdot I = 500 \cdot 15 \cdot 105 \text{ V} \cdot 4,82 \text{ A} = 3,796 \text{ MVA}$$

- In še izračun jalove moči.

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(3,796 \text{ MVA})^2 - (3,583 \text{ MW})^2} = 1,253 \text{ MVAr}$$

3. Skozi primarno (magnetilno) navitje feromagnetnega toroidnega jedra s presekom 4cm^2 stečejo trije tokovni impulzi (povzročajo nasičenje). Prva dva sta pozitivna, tretji pa je negativen. Le eden je zanesljivo uporaben za ugotavljanje značilne veličine. Katera in kolikšna je iskana veličina, če se je zaradi odločilnega impulza inducirala v sekundarnem navitju z $N_2 = 20$ obojev napetost, katere integral znaša 18mVs ? Skicirajte potek B v odvisnosti od H za dani potek magnetenja!

Rešitev:

- Upoštevajoč Faradejev zakon zapišemo za inducirano napetost u_i v sekundarnem navitju toroidnega jedra s presekom A in z N_2 ovoji pri spremembi magnetne indukcije B :

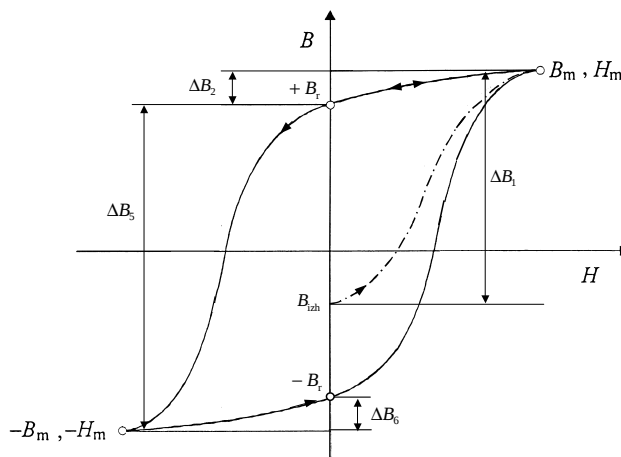
$$u_i = -N_2 A \frac{dB}{dt} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} u_i dt = -N_2 A \int_{B_i}^{B_f} dB = -N_2 A \Delta B \rightarrow \Delta B = \frac{\int_0^{T_M} u_i dt}{N_2 A}$$

- Pri prvem vzbujačnem impulzu preidemo iz nekega splošnega magnetnega stanja v nasičenje in se vrnemo po histerezi v remanenčno stanje $+B_r$:

$$\Delta B_1 = B_{izh} \rightarrow +B_m \text{ in}$$

$$\Delta B_2 = +B_m \rightarrow +B_r$$

- Ker izhodiščne točke ne poznamo, je rezultat po prvem vzbujačnem impulzu neuporaben.



- Pri drugem impulzu se zaradi pozitivnega impulza, ki povzroča nasičenje, ponovno vzpnemo v $+B_m$ (ΔB_3) in vrnemo nazaj v $+B_r$ (ΔB_4). Inducirana napetost je v obeh primerih enaka in nasprotnega predznaka ($\Delta B_3 = -\Delta B_4 = -\Delta B_2$). Integral je enak nič. Tudi v tem primeru ne moremo ničesar ugotoviti.
- Pri tretjem negativnem vzbujačnem impulzu se iz pozitivnega remanenčnega stanja premaknemo v negativno nasičenje $-B_m$ in se po histerezi zanki pomaknemo v negativno remanenčno stanje $-B_r$:

$$\Delta B_5 = +B_r \rightarrow -B_m \text{ in } \Delta B_6 = -B_m \rightarrow -B_r$$

- Skupna sprememba je enaka dvojni vrednosti remanenčne indukcije:

$$\Delta B = \Delta B_5 - \Delta B_6 = 2B_r$$

- Remanenčno vrednost magnetne indukcije še ovrednotimo:

$$B_r = \frac{\int_0^{T_M} u_i dt}{2N_2 A} = \frac{18 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}}{2 \cdot 20 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 1,125 \text{ T}$$

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

1. Koliko kažeta voltmeter, ki se odziva na pravilno efektivno vrednost napetosti, in voltmeter, ki se odziva na usmerjeno vrednost napetosti, če ju priključimo na napetost $u/V = 100 + 100\sin\omega t$?

Rešitev:

- Pravilno efektivno vrednost napetosti dobimo z geometričnim seštevanjem efektivnih vrednosti obeh komponent:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2} = \sqrt{(100\text{ V})^2 + \left(\frac{100\text{ V}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 122,5\text{ V}$$

- Usmerjena vrednost napetosti je enaka:

$$U_r = \overline{|u|} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

- Ker v našem primeru signal $u/V = 100 + 100\sin\omega t$ nima negativne vrednosti, lahko zapišemo: $U_r = \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$. Srednja vrednost sinusne komponente v periodi je enaka nič. Zato lahko zapišemo za naš primer:

$$\bar{u} = 100\text{ V}$$

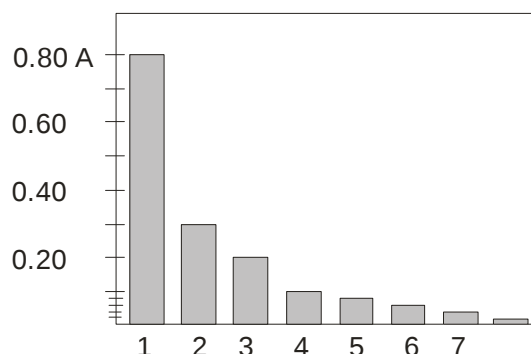
- Instrumenti, ki se odzivajo na usmerjeno vrednost napetosti, imajo pomnoženo skalo z **oblikovni faktorjem** za sinusno obliko:

$$F_0 = \frac{X}{X_r} = \frac{\hat{x}/\sqrt{2}}{2\hat{x}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111$$

- Voltmeter, ki se odziva na usmerjeno vrednost napetosti, nam zato kaže:

$$U = F_0 \cdot \bar{u} = 1,111 \cdot 100\text{ V} = 111,1\text{ V}$$

2. Analizator moči kaže rezultate na sliki. Efektivna vrednost toka porabnika je 0,85 A. Koliko sta THD_{IEC} in THD_{DIN} ?



Rešitev:

- Efektivna vrednost toka porabnika je 0,85 A. Podatek je podan, lahko pa se izračuna kot geometrijska vsota posameznih komponent.

$$I = \sqrt{I_{K1}^2 + I_{K2}^2 + I_{K3}^2 + \dots + I_{K8}^2}$$

- THD faktor po IEC standardu se izračuna kot

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^n I_k^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{(0,85 \text{ A})^2 - (0,80 \text{ A})^2}}{0,80 \text{ A}} = 0,36$$

- THD faktor po DIN standardu pa se izračuna kot

$$THD_{DIN} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I} = \frac{\sqrt{(0,85 \text{ A})^2 - (0,80 \text{ A})^2}}{0,85 \text{ A}} = 0,34$$

3. Pri merjenju dinamične histerezne zanke feromagnetnega jedra, pri sinusni obliki gostote magnetnega pretoka B , ste s primernim vezjem dobili dve izmerjeni vrednosti skupnih izgub v jedru. In sicer $P_{s1} = 1,127 \text{ W/kg}$ pri $F_1/F_0 = 1,213$ in $P_{s2} = 1,288 \text{ W/kg}$ pri $F_2/F_0 = 1,344$. Koliko znašajo histerezne in vrtilne izgube pri $F_3/F_0 = 1$?

$$P_s = aB_m^n f + b \frac{d^2 B_m^2 F^2 f^2}{\rho} = P_h + P_e = P_h + c \left(\frac{F}{F_0} \right)^2$$

Rešitev:

- Za ločitev izgub uporabimo metodo ločevanja histereznih in vrtilnih izgub s faktorjem oblike signala. Izhodiščno enačbo poenostavimo:

$$P_s = P_h + c \left(\frac{F}{F_0} \right)^2$$

- Iz dveh izmerjenih točk

določimo koeficiente premice, ki

$$P_{s1} = P_h + c \left(\frac{F_1}{F_0} \right)^2$$

$$P_{s2} = P_h + c \left(\frac{F_2}{F_0} \right)^2$$

$$1,127 = P_h + c(1,213)^2$$

$$1,288 = P_h + c(1,344)^2$$

$$1,288 - 1,127 = c((1,344)^2 - (1,213)^2)$$

$$c = 0,481 \text{ W/kg}$$

- Če koeficient c vstavimo v eno od gornjih enačb, dobimo $P_h = 0,419 \text{ W/kg}$.
- Preračun izgub na $F_3/F_0 = 1$ se izvede z vstavitvijo podatkov v osnovno enačbo.

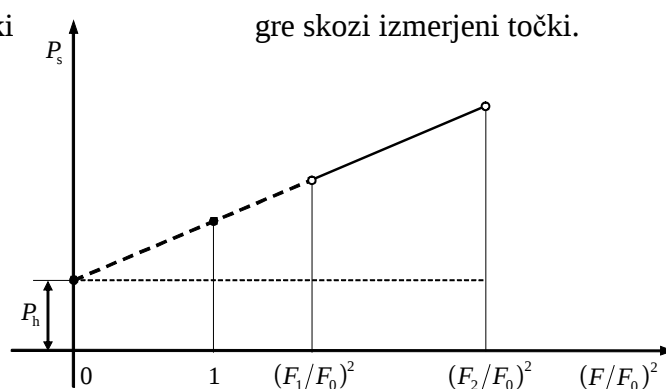
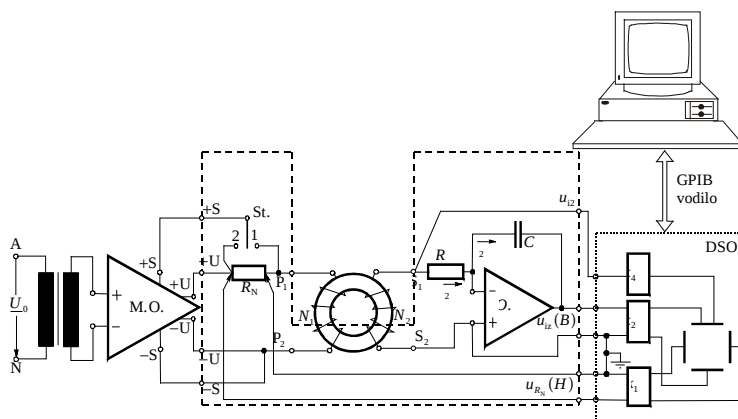
$$P_{s3} = 0,419 \text{ W/kg} + 0,481 \text{ W/kg} \cdot (1)^2 = 0,900 \text{ W/kg}$$

- Histerezne izgube so konstantne.

$$P_{h1} = P_{h2} = P_{h3} = 0,419 \text{ W/kg}$$

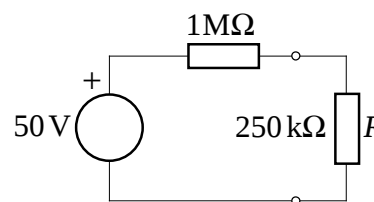
- Vrtilne izgube dobimo, če od skupnih izgub odštejemo histerezne.

$$P_{e3} = P_{s3} - P_{h3} = 0,481 \text{ W/kg}$$



Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

1. Želimo izmeriti napetost na $250\text{ k}\Omega$ upor z voltmetroma, ki imata doseg $U_D = 10\text{ V}$. Prvi ima notranjo upornost $1\text{ M}\Omega$, drugi pa $10\text{ M}\Omega$. Ugotovite, koliko voltmetra kažeta in kolikšen je sistematični pogrešek pri posamezni meritvi?



Rešitev:

- Pred priključitvijo voltmetrov, je napetost na upor R enaka:

$$U_R = 50\text{ V} \frac{250\text{ k}\Omega}{1\text{ M}\Omega + 250\text{ k}\Omega} = 10\text{ V}$$

- Po priključitvi prvega voltmetra se skupna upornost vzporedne vezave zmanjša

$$R \parallel R_{V_1} = \frac{R \cdot R_{V_1}}{R + R_{V_1}} = 200\text{ k}\Omega \text{ in voltmeter kaže:}$$

$$U_{V_1} = 50\text{ V} \frac{200\text{ k}\Omega}{1\text{ M}\Omega + 200\text{ k}\Omega} = 8,33\text{ V}$$

- Sistematični pogrešek priključitve je enak:

$$E_1 = 8,33\text{ V} - 10\text{ V} = -1,67\text{ V} \text{ in } e_1 = \frac{-1,67\text{ V}}{10\text{ V}} = -16,7\%$$

- Po priključitvi drugega voltmetra se skupna upornost vzporedne vezave zmanjša

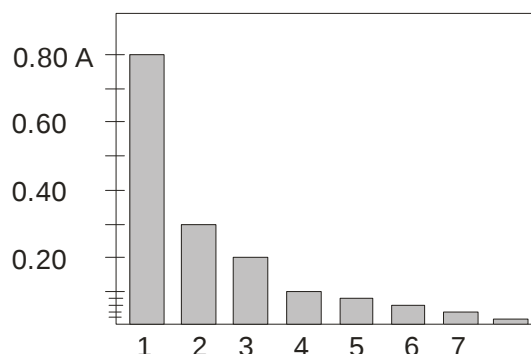
$$R \parallel R_{V_2} = \frac{R \cdot R_{V_2}}{R + R_{V_2}} = 243,9\text{ k}\Omega \text{ in voltmeter kaže:}$$

$$U_{V_2} = 50\text{ V} \frac{243,9\text{ k}\Omega}{1\text{ M}\Omega + 243,9\text{ k}\Omega} = 9,80\text{ V}$$

- Sistematični pogrešek priključitve je v tem primeru enak:

$$E_1 = 9,80\text{ V} - 10\text{ V} = -0,20\text{ V} \text{ in } e_1 = \frac{-0,20\text{ V}}{10\text{ V}} = -2,0\%$$

2. Analizator moči kaže rezultate na sliki. Efektivna vrednost toka porabnika je 0,89 A. Koliko sta THD_{IEC} in THD_{DIN} ?



Rešitev:

- Efektivna vrednost toka porabnika je 0,89 A. Podatek je podan, lahko pa se izračuna kot geometrijska vsota posameznih komponent.

$$I = \sqrt{I_{K1}^2 + I_{K2}^2 + I_{K3}^2 + \dots + I_{K8}^2}$$

- THD faktor po IEC standardu se izračuna kot

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^n I_k^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{(0,89 \text{ A})^2 - (0,80 \text{ A})^2}}{0,80 \text{ A}} = 0,49$$

- THD faktor po DIN standardu pa se izračuna kot

$$THD_{DIN} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I} = \frac{\sqrt{(0,89 \text{ A})^2 - (0,80 \text{ A})^2}}{0,89 \text{ A}} = 0,44$$

3. Pri merjenju statične komutacijske B - H magnetilne krivulje feromagnetne palice s Hopkinsonovim jarmom želimo določiti magnetno indukcijo B . Na sekundarnem navitju z $N_2 = 1000$ ovoji smo dobili spodnje izmerjene vrednosti. Napišite popolni merilni rezultat za B .

- $\bar{U} = 99 \text{ mV}$, $w(\bar{U}) = 1\%$;
- $T_M = 0,77 \text{ s}$, $m(T_M) = 0,03$;
- $A = 1,00 \text{ cm}^2$, $u(A) = 3 \text{ mm}^2$;
- $a = 0,3$, $M(a) = 0,01$.

$$B = \frac{T_M \bar{U}}{2N_2 A a}$$

Rešitev:

- Magnetna indukcija je enaka:

$$B = \frac{0,77 \text{ s} \cdot 0,099 \text{ V}}{2 \cdot 1000 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0,3} = 1,2705 \text{ T}$$

- Ker imamo posredno merjeno veličino B izraženo v obliki produkta in kvocienta neposredno merjenih veličin, izrazimo standardno negotovost v relativni obliki:

$$w_c(B) = \sqrt{w^2(T_M) + w^2(\bar{U}) + w^2(N_2) + w^2(A) + w^2(a)}$$

- kjer so:

$$w(T_M) = \frac{m(T_M)}{\sqrt{3}} = \frac{0,03}{\sqrt{3}} = 1,73 \cdot 10^{-2}$$

$$w(\bar{U}) = 0,10 \cdot 10^{-2}$$

$$w(N_2) = 0$$

$$w(A) = \frac{u(A)}{A} = \frac{0,03 \text{ cm}^2}{1 \text{ cm}^2} = 3,0 \cdot 10^{-2}$$

$$w(a) = \frac{m(a)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M(a)}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{0,01}{0,3} = 1,92 \cdot 10^{-2}$$

- in je tako standardna negotovost v relativni in absolutni obliki enaka:

$$w_c(B) = 3,96 \cdot 10^{-2} \quad \text{in} \quad u_c(B) = w_c(B)B = 0,0504 \text{ T}$$

- Standardno negotovost zaokrožimo na dve mesti in merilni rezultat zapišemo v obliki:

$$B = 1,271 \text{ T}, \quad u_c(B) = 0,051 \text{ T}, \quad n = 1$$

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

1. Digitalni ampermeter s $3\frac{3}{4}$ -mestnim prikazom ima mejo pogreška $M_I = \pm(0,4\% I_i + 0,3\% I_D + 2\text{dig})$, kaže pa $I_i = 3,476\text{mA}$. Izrazite popolni merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo!

Rešitev:

- Pri $N\frac{3}{4}$ - mestnem prikazu je prva cifra lahko 0, 1, 2 ali 3, zato je merilni doseg uporabljenega ampermetra $I_D = 3,999\text{mA} \rightarrow I_D = 4\text{mA}$.
- Digit ustreza enoti zadnje cifre prikaza $1\text{dig} \hat{=} 0,001\text{mA}$.
- Mejna vrednost pogreška je:

$$M_I = \pm(0,04\% I_i + 0,03\% I_D + 2\text{dig}) = \pm(4 \cdot 10^{-3} \cdot 3,476\text{mA} + 3 \cdot 10^{-3} \cdot 4\text{mA} + 0,002\text{mA})$$

$$M_I = \pm 0,0279\text{mA}$$

- in standardna negotovost:

$$u(I) = \frac{M_I}{\sqrt{3}} = \pm 0,0161\text{mA}$$

- Zaokrožen popolni merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo je enak:

$$I = 3,476\text{mA}, \quad u(I) = 0,017\text{mA}, \quad n = 1$$

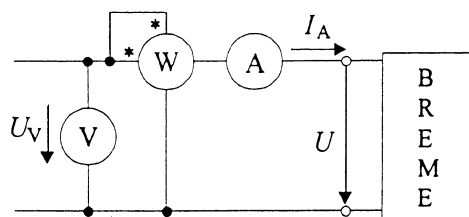
2. Pri merjenju moči na bremenu uporabite vezavo z manjšim sistematičnim pogreškom. Podajte popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo za delovno moč porabnika!

- vatmeter: $U_n = 75 \text{ V}$, $I_n = 0,5 \text{ A}$, $R_{wn} = 10^5 \Omega$, $R_{wt} = 0,1 \Omega$, $r = 0,5$; $y_D = 150,0 \text{ d}$, $y_i = 129,6 \text{ d}$
- voltmeter: $U_D = 100 \text{ V}$, $U_i = 75 \text{ V}$, $R_{v0} = 100 \Omega/\text{V}$
- ampermeter: $I_D = 3 \text{ A}$, $I_i = 2 \text{ A}$, $U_{A0} = 300 \text{ mV}$

Rešitev:

- Možni sta dve priključitvi instrumentov, kjer je vsaj ena veličina bremena (napetost ali tok) pravilno merjena:

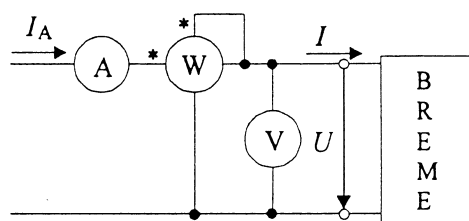
- Če priključimo tokovno vejo neposredno na breme, je tok tokovne veje vatmetra enak toku bremena in je napetost na napetostni veji in voltmetru prevelika za padec na upornosti tokovne veje vatmetra in ampermetra



$R_A = U_{A0}/I_D = 300 \text{ mV}/3 \text{ A} = 0,1 \Omega$. Vatmeter kaže večjo moč, kot je moč na bremenu $P_W = P + I^2(R_{wt} + R_A)$, in sistematični pogrešek je enak:

$$E_1 = I_i^2(R_{wt} + R_A) = (2 \text{ A})^2(0,1 \Omega + 0,1 \Omega) = 0,8 \text{ W}$$

- Če priključimo napetostno vejo neposredno na breme, je napetost bremena pravilno izmerjena in je tok tokovne veje vatmetra povečan za tok skozi napetostno vejo vatmetra in



voltmeter ($R_V = R_{v0} \cdot U_D = 100 \Omega/\text{V} \cdot 100 \text{ V} = 10^4 \Omega$). Vatmeter kaže večjo moč, kot je moč na bremenu $P_W = P + U^2(1/R_{wn} + 1/R_V)$ in sistematični pogrešek je enak:

$$E_2 = U_i^2(1/R_{wn} + 1/R_V) = (75 \text{ V})^2(1/(10^5 \Omega) + 1/(10^4 \Omega)) = 0,619 \text{ W}$$

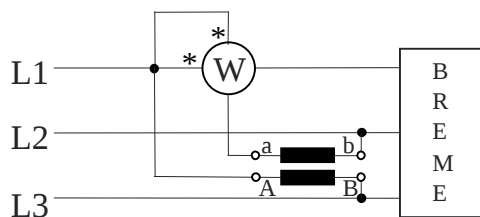
- Odčitek vatmetra korigiramo za sistematični pogrešek po drugi vezavi:

$$P = U_n I_n \frac{y_i}{y_D} - E_2 = 75 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ A} \frac{129,6 \text{ d}}{150 \text{ d}} - 0,619 \text{ W} = 31,781 \text{ W}$$

- Standardna negotovost rezultata je enaka: $u(P) = \frac{M_P}{\sqrt{3}} = \frac{r}{100} \frac{U_n I_n}{\sqrt{3}} = 0,108 \text{ W}$
- Popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo sedaj zapišemo:

$$P = 31,78 \text{ W}, \quad u(P) = 0,11 \text{ W}, \quad n = 1$$

3. Kaj kaže vatmeter, če je trifazni sistem uravnotežen? Skicirajte fazorski diagram. ($K_u = 1$)



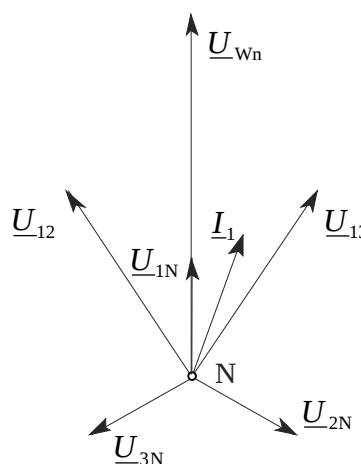
Rešitev:

- Skozi tokovno vejo vatmetra teče tok prve faze bremena $\underline{I}_1$, na napetostni veji vatmetra pa imamo vsoto dveh medfaznih napetosti:

$$\underline{U}_{Wn} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{13}$$

- Drugo medfazno napetost $\underline{U}_{13}$ nam vsili napetostnik s prestavo $K_u = 1$.

- Fazorski (kazalčni) diagram:



- Vsota napetosti na napetostni veji vatmetra $\underline{U}_{Wn}$ je zaradi uravnoteženega sistema in s tem enakostraničnega napetostnega trikotnika enaka:

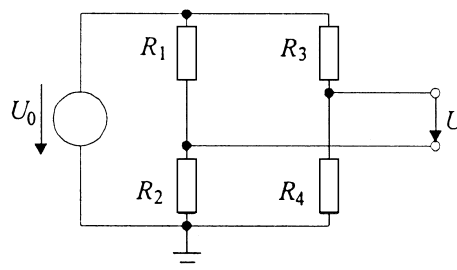
$$\underline{U}_{Wn} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{13} = 3\underline{U}_{1N}$$

- Moč, ki jo kaže vatmeter, je enaka moči simetričnega bremena:

$$P_W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{U}_{Wn} \underline{I}_1^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (\underline{U}_{12} + \underline{U}_{13}) \underline{I}_1^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ 3\underline{U}_{1N} \underline{I}_1^* \} = 3P_1 = P_{\text{brema}}$$

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

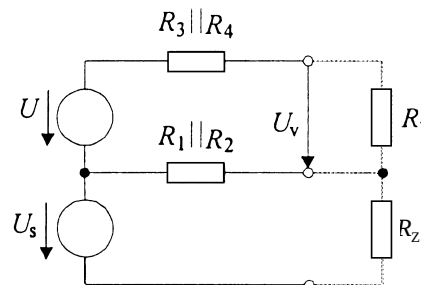
1. Koliko kaže voltmeter z neozemljenim vhodom ($R_V = 10\text{ M}\Omega$, $R_Z = 1\text{ M}\Omega$), ki ga vključimo v diagonalo odklonskega četrtinskega mostiča $R_{10} = R_2 = R_3 = R_4 = 1\text{ k}\Omega$, $U_0 = 4\text{ V}$ in merimo napetost pri spremembi upora za $\Delta R_1/R_{10} = 0,01$. Upornosti vezi zanemarite.



$$U_V = U_0 \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

Rešitev:

- Voltmeter kaže vsoto dveh prispevkov: merjene napetosti mostiča in vpliv sofazne napetosti.



- Merjena diagonalna napetost odklonskega četrtinskega mostiča pri pogoju, da je upornost voltmetra zelo velika $R_V \gg R_{10}$, je enaka:

$$U_5 = \frac{U_0}{4} \frac{\Delta R_1}{R_{10}} = 10\text{ mV}$$

- Vpliv motilne sofazne napetosti $U_s \approx U_A \approx U_B \approx U_0/2 = 2\text{ V}$ (velja za mostič z enakimi upornostmi) je enak:

$$U_{m,s} = U_s \frac{R_1 || R_2}{R_1 || R_2 + R_Z} = 2\text{ V} \frac{500\text{ }\Omega}{500\text{ }\Omega + 1\text{ M}\Omega} = 1\text{ mV}$$

- Prispevek sofazne napetosti na vhodu voltmetra $U_{m,s}$ določa napetostni delilnik nadomestne notranje upornosti mostiča $R_1 || R_2$ v spodnji veji in izolacijske upornosti R_Z , ker se ves padec napetosti z upornosti $R_1 || R_2$ prenese neposredno na vhod voltmetra zaradi velike vhodne upornosti voltmetra $R_V \gg R_3 || R_4$:

- Voltmeter kaže vsoto obeh prispevkov:

$$U_V = U_5 + U_{m,s} = 11\text{ mV}$$

2. Izpeljite prikrojeno veličinsko enačbo za zapisano izhodno veličino E , če jo želimo izračunati iz izmerjenih podatkov, kjer je $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$, $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ in

$$E = \sqrt{\frac{P\mu_0 c_0}{2\pi x^2}} \quad [E] = \text{V/m}; \quad [P] = \text{kW}; \quad [x] = \text{km}$$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi x^2}$
- Pri prehodu na prikrojeno veličinsko enačbo moramo vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, množiti in deliti z željeno enoto :

$$E \frac{\text{V/m}}{\text{V/m}} = \sqrt{P \frac{\text{kW}}{\text{kW}} \cdot \mu_0 c_0 / 2\pi \left(x \frac{\text{km}}{\text{km}}\right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številski faktor:

$$E / \text{V/m} = \sqrt{P / \text{kW} / (x / \text{km})^2} \cdot \frac{\sqrt{10^3 \text{ W}}}{\text{V/m}} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{10^3 \text{ m}} = \sqrt{P / \text{kW} / (x / \text{km})^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

$$K = \frac{\sqrt{10^3 \text{ VA}}}{10^3 \text{ V}} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Upoštevajoč vrednosti za $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ in $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

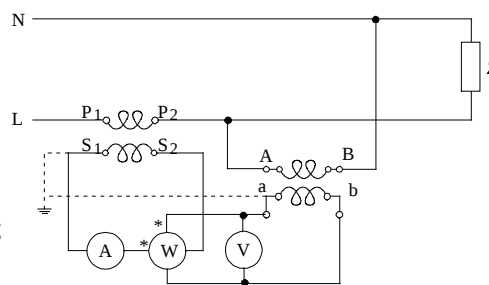
$$\text{dobimo: } K = \frac{\sqrt{10^3}}{10^3} \frac{\sqrt{\text{VA}}}{\text{V}} \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2\pi}}$$

- in končno $K = 3,162 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{\text{A}}{\text{V}}} \sqrt{60 \frac{\text{H}}{\text{s}}} = 0,24495 \sqrt{\frac{\text{A}}{\text{V}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot \frac{1}{\text{s}}} \approx 0,245$

- Prikrojena veličinska enačba je: $E / \text{V/m} = 0,245 \cdot \sqrt{P / \text{kW} / (x / \text{km})^2}$

3. Podajte popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo za delovno moč porabnika!

- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $y_D = 20\,000$,
 $y = 19111$, $r = 0,2$;
- voltmeter: $U = 105,0 \text{ V}$, $M_U = \pm(0,1\%U + 1\text{dig})$;
- ampermeter: $I = 4,820 \text{ A}$, $M_I = \pm(0,2\%I + 2\text{dig})$;
- tokovnik: $I_{pn} = 75 \text{ A}$, $I_{sn} = 5 \text{ A}$, $r = 0,1$;
- napetostnik: $U_{pn} = 50 \text{ kV}$, $U_{sn} = 100 \text{ V}$, $r = 0,1$



Rešitev:

- Delovna moč se izračuna iz izmerjene vrednosti vatmetra. Potrebno je upoštevati, da je vatmeter priključen na sekundarni strani tokovnika in napetostnika.

- Prestavi transformatorjev sta:

$$K_{un} = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} = \frac{50 \text{ kV}}{100 \text{ V}} = 500 \quad \text{in} \quad K_{in} = \frac{I_{pn}}{I_{sn}} = \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} = 15$$

- Delovna moč je za prestavi večja vrednost, kot jo kaže vatmeter:

$$P_W = U_n \cdot I_n \cdot \frac{y}{y_D} = 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{19111}{20\,000} = 477,775 \text{ W}$$

$$P = K_{un} \cdot K_{in} \cdot P_W = 500 \cdot 15 \cdot 477,775 \text{ W} = 3,58331 \text{ MW}$$

- Skupna standardna negotovost za delovno moč v relativni obliki je sestavljena iz treh prispevkov:

$$w_c(P) = \sqrt{w^2(K_{un}) + w^2(K_{in}) + w^2(P_W)} = 1,46 \cdot 10^{-3}$$

- kjer so posamezni deleži:

$$w(K_{un}) = \frac{r(K_{un})}{100} / \sqrt{3} = 5,77 \cdot 10^{-4},$$

$$w(K_{in}) = \frac{r(K_{in})}{100} / \sqrt{3} = 5,77 \cdot 10^{-4},$$

(razreda sta podana za prestavno razmerje)

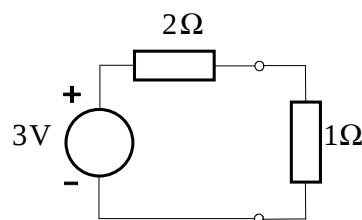
$$w(P_W) = \frac{r(P_W)}{100} \frac{y_D}{y} / \sqrt{3} = 1,21 \cdot 10^{-3} \quad (\text{razred je podan na doseg})$$

- Zaokrožen popolni merilni rezultat zapišemo s standardno negotovostjo
 $u_c(P) = w_c(P) \cdot P = 5,23 \cdot 10^{-3} \text{ MW}$:

$$P = 3,5833 \text{ MW}, \quad u_c(P) = 0,0053 \text{ MW}, \quad n = 1$$

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

1. Želimo izmeriti tok na upor 1Ω z ampermetroma, ki imata doseg $I_D = 1\text{ A}$. Prvi ima karakteristični padec napetosti $U_{A_0,1} = 50\text{ mV}$, drugi pa $U_{A_0,2} = 500\text{ mV}$. Ugotovite, koliko ampermetra kažeta in kolikšen je sistematični pogrešek pri posamezni meritvi?



Rešitev:

- Pred vključitvijo ampermetrov, je tok skozi oba zaporedno vezana upora enak:

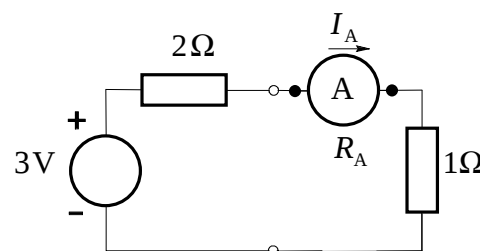
$$I_0 = \frac{3\text{ V}}{2\Omega + 1\Omega} = 1\text{ A}$$

- Po vključitvi ampermetrov z notranjima upornostima :

$$R_{A_1} = \frac{U_{A_0,1}}{I_D} = \frac{50\text{ mV}}{1\text{ A}} = 0,05\Omega \text{ oziroma}$$

$$R_{A_2} = \frac{U_{A_0,2}}{I_D} = \frac{500\text{ mV}}{1\text{ A}} = 0,5\Omega$$

- dobimo naslednje nadomestno vezje:



- Kazanje prvega ampermetra je tako enako:

$$I_{A,1} = \frac{3\text{ V}}{2\Omega + 1\Omega + R_{A_1}} = 0,9836\text{ A}$$

- in sistematični pogrešek je negativen:

$$E_1 = I_{A,1} - I_0 = 0,9836\text{ A} - 1\text{ A} = -0,0164\text{ A} ;$$

$$e_{A,1} = \frac{I_{A,1} - I_0}{I_0} = -1,64 \cdot 10^{-2}$$

- Kazanje drugega ampermetra je enako:

$$I_{A,2} = \frac{3\text{ V}}{2\Omega + 1\Omega + R_{A_2}} = 0,8571\text{ A}$$

- in sistematični pogrešek je večji:

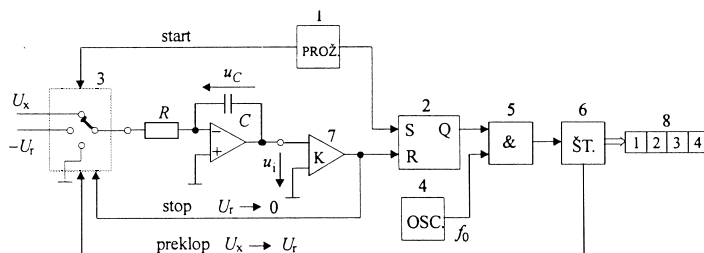
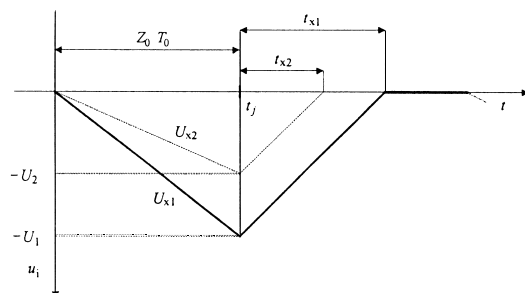
$$E_1 = I_{A,2} - I_0 = 0,8571\text{ A} - 1\text{ A} = -0,143\text{ A} ;$$

$$e_{A,2} = \frac{I_{A,2} - I_0}{I_0} = -1,43 \cdot 10^{-1}$$

2. Opišite osnovna načina integracijskega merjenja v analogno-digitalnih pretvornikih. V kakšnem razmerju morata biti čas integracije in motilni signal, da dobimo popolno izločitev motnje? Skicirajte!

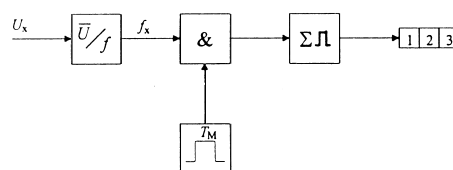
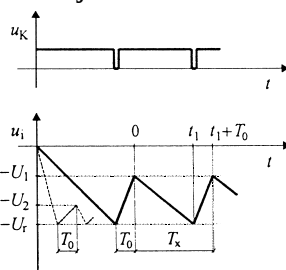
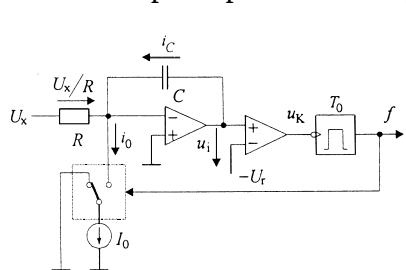
Rešitev:

- Osnovna načina integracijskega merjenja v A/D pretvornikih delujeta s **časom** kot vmesno veličino (npr.: dvonaklonski princip) oziroma s **frekvenco** kot vmesno veličino (npr.: z izenačevanjem naboja).
- Časovni diagram delovanja integracijskega **dvonaklonskega** A/D pretvornika:



- Imamo dva takta integriranja, ki se izvaja s pomočjo kondenzatorja C v negativni povratni zanki ojačevalnika. Napetost integracije je enaka napetosti na kondenzatorju: $u_i \approx u_C$
- Motilni signal se izloči v prvem taktu** $T_i = Z_0 T_0$, ko se integrira merjena napetost U_x : $U_1 = \frac{Z_0 T_0}{RC} \bar{U}_{x1}$
- Izenačenje napetosti obeh integracij U_1 nam da: $Z = \frac{Z_0}{U_r} \bar{U}_{x1}$

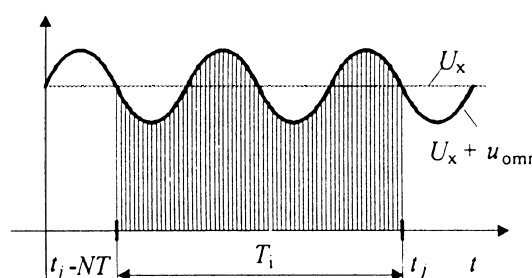
- ADP s frekvenco** kot analogno vmesno veličino. U/f pretvornik deluje na principu izenačevanja naboja.



- Frekvenca ponavljanja impulzov je $f_x = \frac{1}{R I_0 T_0} \bar{U}_x$.
- Digitalizacija se izvrši s štetjem impulzov frekvence $Z = f_x T_M$ v času $T_M = T_i$, v katerem **se izloči motilni signal**.

- Vpliv izmeničnega motilnega signala se popolnoma izloči v času integracije, ki mora biti enak mnogokratniku periode motilnega signala $T_i \approx N \cdot T$

$$\bar{U}_j = \frac{1}{NT} \int_{t_j - NT}^{t_j} (U_x + u_{\text{omr}}) dt = U_x + \frac{1}{NT} \int_{t_j - NT}^{t_j} u_{\text{omr}} dt \approx U_x$$

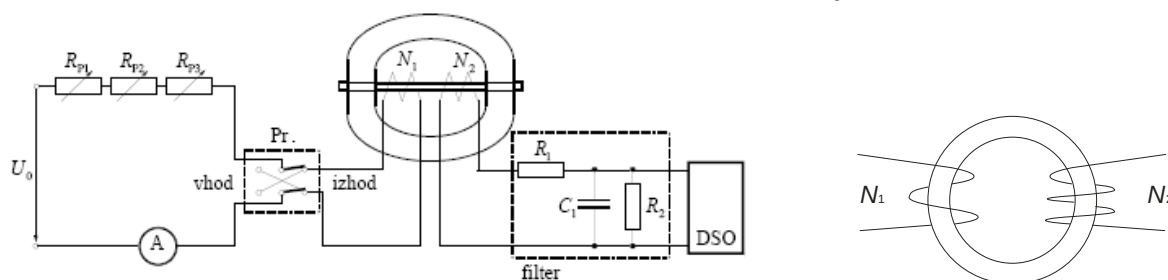


3. Narišite vezje za snemanje statične komutacijske krivulje in razložite
- kako merimo magnetno indukcijo B ,
 - kako merimo jakost magnetnega polja H ,
 - zakaj uporabljamo nizkoprepustni filter pri merjenju B in
 - zakaj naredimo za vsako točko po dve meritvi?

Rešitev:

- Vezje za snemanje statične komutacijske krivulje je prikazano na sliki.

ali



- a) **Magnetno indukcijo** merimo preko inducirane napetosti

$$u_i = -N_2 \cdot A \cdot \frac{dB}{dt} \Rightarrow \int_0^{T_M} u_i \cdot dt = -N_2 \cdot A \cdot \int_B^{-B} dB \Rightarrow T_M \cdot \bar{U} = 2 \cdot N_2 \cdot A \cdot B$$

oziroma

$$B = \frac{T_M \cdot \bar{U}}{2 \cdot N_2 \cdot A}$$

- b) **Jakost magnetnega polja** merimo preko magnetilnega toka

$$H = \frac{I \cdot N_1}{l_{sr}}$$

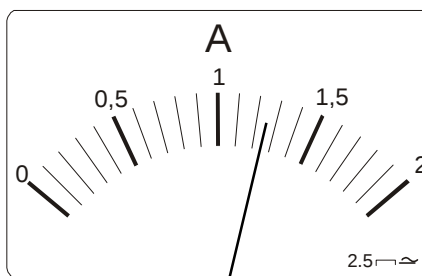
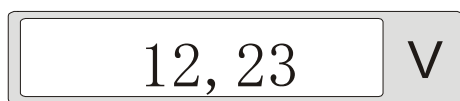
- c) **Nizkonapetostni filter** uporabljamo za glajenje inducirane napetosti in poenotenje dolžine časa merjenja T_M .
- d) Za vsako točko naredimo **dve meritvi zaradi preostale** (offsetne) napetosti DSO

$$\left. \begin{array}{l} \bar{U}_1 = \bar{U} + \bar{u}_{off} \\ \bar{U}_2 = -\bar{U} + \bar{u}_{off} \end{array} \right\} \bar{U} = \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_2}{2}$$

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

1. S pomočjo analognega ampermetra in digitalnega voltmetra merimo enosmerno moč P , ki se troši na bremenu. S spodnjih slik odčitajte izmerjeni vrednosti za tok I_A in napetost U_V . Ugotovite, ali ločljivosti inštrumentov lahko zanemarimo. Podajte popolni merilni rezultat za moč bremena P .

Sistematične pogreške zaradi vključitve inštrumentov zanemarimo. Največja merilna napaka (meja pogreška) za voltmeter je $M_U = \pm(0,10\% U + 7 \text{ dig})$. Predpostavite, da ste sposobni analogni inštrument odčitati na eno desetinko razdelka natančno.



Rešitev:

- Voltmeter kaže $U_V = 12,23 \text{ V}$, ampermeter pa $I_A = 1,25 \text{ A}$.
 - Iskana moč je enaka: $P = I_A U_V = 1,25 \text{ A} \cdot 12,23 \text{ V} = 15,2875 \text{ W}$
- Doseg ampermetra je $I_D = 2 \text{ A}$. Razred ampermetra je $r = 2,5$.
- Ločljivost prikazovalnika voltmetra je $1 \text{ dig} = 0,01 \text{ V}$.
- Zaokroženi merilni negotovosti ampermetra in voltmetra v relativni obliki sta:

$$w(I_A) = \frac{u(I_A)}{I_A} = \frac{M_I}{\sqrt{3}} \frac{1}{I_A} = \frac{r}{100} I_D \frac{1}{I_A \sqrt{3}}$$

$$w(I_A) = \frac{2,5}{100} \frac{2 \text{ A}}{1,25 \text{ A} \sqrt{3}} = 0,02309 \approx 0,024$$

$$w(U_V) = \frac{u(U_V)}{U_V} = \frac{M_U}{\sqrt{3}} \frac{1}{U_V} = \frac{(0,10\% U_V + 7 \text{ dig})}{\sqrt{3} \cdot U_V}$$

$$w(U_V) = \frac{(0,10\% \cdot 12,23 \text{ V} + 7 \cdot 0,01 \text{ V})}{\sqrt{3} \cdot 12,23 \text{ V}} = 0,003882 \approx 0,0039$$

- Zaokroženi negotovosti zaradi odčitavanja in ločljivosti instrumenta (ampermeter smo odčitali z efektivno ločljivostjo ene desetine razdelka $Q_I = 0,1 \text{ A}/10 = 0,01 \text{ A}$):

$$w(I_A)_q = \frac{u(I_A)_q}{I_A} = \frac{Q_I}{I_A \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{0,01 \text{ A}}{1,25 \text{ A} \cdot 2\sqrt{3}} = 0,0023094 \approx 0,0023$$

$$w(U_V)_q = \frac{u(U_V)}{U_V} = \frac{1 \text{ dig}}{U_V \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{0,01 \text{ V}}{12,23 \text{ V} \cdot 2\sqrt{3}} = 2,3603 \cdot 10^{-4} \equiv 2,4 \cdot 10^{-4}$$

- Negotovost zaradi ločljivosti voltmetra je zanemarljiva.

$$w(P) = \sqrt{w^2(I_A) + w^2(I_A)_q + w^2(U_V) + w^2(U_V)_q}$$

$$w(P) = \sqrt{(0,024)^2 + (0,0023)^2 + (0,0039)^2 + (0,00024)^2}$$

$$w(P) = 0,02442 \equiv 0,025$$

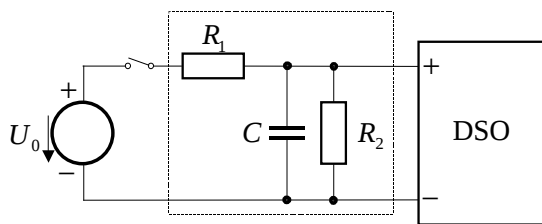
$$w(P) = \sqrt{w^2(I_A) + w^2(U_V)} = \sqrt{(0,024)^2 + (0,0039)^2} = 0,02431 \equiv 0,025$$

$$u(P) = w(P)P = 0,025 \cdot 15,2875 \text{ W} = 0,3822 \text{ W} = 0,39 \text{ W}$$

- Popolni merilni rezultat je:

$$P = 15,29 \text{ W}, \quad u(P) = 0,39 \text{ W}, \quad n = 1$$

2. Narišite odziv člena, ki ga merimo z osciloskopom, ko vklopimo stikalo. Izračunajte kapacitivnost kondenzatorja C , če je odzivni čas znotraj petih odstotkov stacionarnega stanja $T_a = 4,52 \text{ ms}$ in je $U_0 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 763 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 92,4 \text{ k}\Omega$.

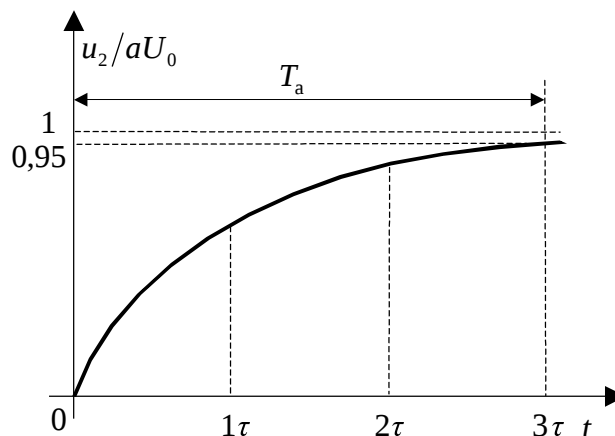


Rešitev:

- Opraviti imamo s členom 1. reda, ki ima časovno konstanto τ enako:

$$\tau = a\tau_1 = aR_1C$$

- pri čemer je a delilno razmerje uporov in določa napetost v stacionarnem stanju:



$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,108 ; \quad U_2 = aU_0 = 1,08 \text{ V}$$

- Časovna konstanta je:

$$\tau = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} C$$

- Odzivni čas T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 5\%$ končne vrednosti (zelo razširjen kriterij), velja za člen 1. reda:

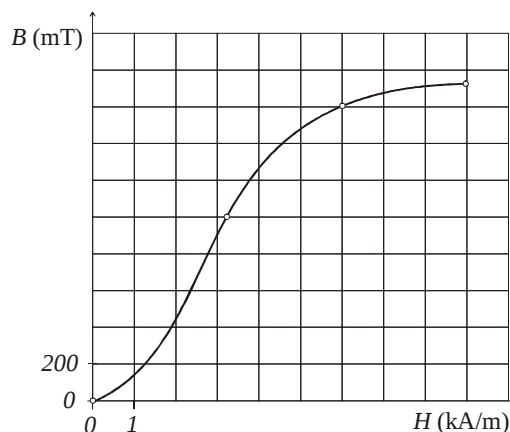
$$\frac{u_2}{aU_0} = 0,95 = (1 - e^{-T_a/\tau}) \Rightarrow T_a = \ln 20 \cdot \tau \approx 3\tau$$

- V našem primeru je odzivni čas enak $T_a = 4,52 \text{ ms}$ in od tod izračunamo iskano kapacitivnost:

$$C = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \tau = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cdot \frac{T_a}{3}$$

$$C = \frac{763 \cdot 10^3 \Omega + 92,4 \cdot 10^3 \Omega}{763 \cdot 10^3 \Omega \cdot 92,4 \cdot 10^3 \Omega} \cdot \frac{4,52 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{3} = 18,28 \text{ nF}$$

3. S Hopkinsonovim jarmom smo izmerili statično komutacijsko B - H magnetilno krivuljo feromagnetne palice. Kolikšna je bila povprečna vrednost impulza inducirane napetosti $\bar{U}$, ki je nastal ob komutaciji toka $I = 1,5 \text{ A}$ v primarno navitje Hopkinsovega jarma? Poleg statične komutacijske B - H magnetilne krivulje so podani še $N_1 = 600$, $N_2 = 1000$, $a = 0,30$, $A = 1,00 \text{ cm}^2$ in $H/(\text{A/m}) = 4000 \cdot I/\text{A}$ ter čas merjenja $T_M = 1 \text{ s}$.



$$B = \frac{T_M \bar{U}}{2N_2 A a}$$

Rešitev:

- Pri toku $I = 1,5 \text{ A}$ je bila gostota magnetnega polja:

$$H = 4000 \cdot \frac{1,5 \text{ A}}{\text{A}} \cdot \text{A/m} = 6000 \text{ A/m}$$

- Iz podane komutacijske B - H magnetilne krivulje lahko za $H = 6 \text{ kA/m}$ odčitamo gostoto magnetnega pretoka $B = 1600 \text{ mT}$.
- Zaradi komutacije toka dobimo dvojno vrednost gostote magnetnega pretoka:

$$2B = \frac{T_M \bar{U}}{N_2 A a} \Rightarrow B = \frac{T_M \bar{U}}{2N_2 A a}$$

- Od tod izračunamo povprečno vrednost impulza inducirane napetosti:

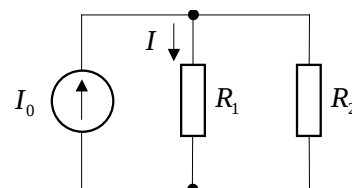
$$\bar{U} = \frac{2N_2 A a B}{T_M} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 1 \text{ cm}^2 \cdot 0,30 \cdot 1600 \text{ mT}}{1 \text{ s}}$$

$$\bar{U} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0,30 \cdot 1,6 \text{ T}}{1 \text{ s}} = 0,096 \text{ V} = 96 \text{ mV}$$

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

1. Koliko mora biti upornost ampermetra R_A , da bo sistematični pogrešek vključitve ampermetra pri merjenju toka I skozi upor R_1 zanemarljiv?

- vezje: $I_0 = 1\text{ A}$, $R_1 = 500\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$;
- ampermeter: $I_D = 600,0\text{ mA}$, $M_I = \pm(0,1\% I + 0,1\% I_D)$



Rešitev:

- Tok I , ki teče pred vključitvijo ampermetra v veji upora R_1 , izračunamo iz enačbe za tokovni delilnik:

$$I = I_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 375,0\text{ mA}$$

- Po vključitvi ampermetra z upornostjo R_A , teče v tej veji manjši tok:

$$I^* = I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} < I$$

- in sistematični pogrešek vključitve ampermetra je negativen:

$$E_s = I^* - I = I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} - I$$

- Sistematični pogrešek meritve je zanemarljiv, kadar je manjši od desetine standardne negotovosti.

$$|E_s| \leq \frac{u(I)}{10} = \frac{1}{10} \frac{M_I}{\sqrt{3}}$$

- Za podane vrednosti, privzeti pravokotni porazdelitvi pogreška ($u(I) = M_I / \sqrt{3}$) in upoštevanju, da se tokova I^* in I zanemarljivo malo razlikujeta, dobimo:

$$E_s \leq \frac{1}{10\sqrt{3}} (10^{-3} \cdot 375,0\text{ mA} + 10^{-3} \cdot 600,0\text{ mA}) = 0,0563\text{ mA}$$

- Od tod izračunamo iskano upornost R_A :

$$\begin{aligned} I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} - I &= -E_s \\ 1\text{ A} \frac{300\ \Omega}{R_A + 800\ \Omega} - 375,0\text{ mA} &= -0,0563\text{ mA} \\ R_A &= 0,12\ \Omega \end{aligned}$$

- Upornost ampermetra mora biti manjša od vrednosti $R_A \leq 0,12\ \Omega$, da je sistematični pogrešek pri merjenju toka I skozi upor R_1 zanemarljiv.

2. Z digitalnim ohmmetrom želimo izmeriti upornost neznanega upora R_x s pomočjo dvožične metode. Po priključitvi merjenega upora ohmmeter pokaže odčitek $R_1 = 89,35 \text{ m}\Omega$. Priključne vodnike nato kratko sklenemo, nakar ohmmeter pokaže odčitek $R_0 = 84,33 \text{ m}\Omega$. Zapišite popolni merilni rezultat za neznano upornost R_x . Meja pogreška ohmmetra je $M_R = \pm(0,1\% R + 5 \text{ dig})$. Korelacijo med obema merjenjema upornosti zanemarite.

Rešitev:

- Pri dvožičnem merjenju upornosti se k merjeni upornosti prišteje še upornost priključnih vodnikov, ki jo lahko izmerimo tako, da priključne vodnike kratko sklenemo. Neznana upornost R_x je tako

$$R_x = R_1 - R_0 = 89,35 \text{ m}\Omega - 84,33 \text{ m}\Omega = 5,02 \text{ m}\Omega$$

- Meja pogreška za posamezno meritev je:

$$M_{R1} = \pm(0,1\% R_1 + 5 \text{ dig}) = \pm(0,1\% \cdot 89,35 \text{ m}\Omega + 5 \cdot 0,01 \text{ m}\Omega) = \pm 0,139 \text{ m}\Omega$$

$$M_{R0} = \pm(0,1\% R_0 + 5 \text{ dig}) = \pm(0,1\% \cdot 84,33 \text{ m}\Omega + 5 \cdot 0,01 \text{ m}\Omega) = \pm 0,134 \text{ m}\Omega$$

- Skupno standardno negotovost dobimo iz prispevkov negotovosti posameznih meritev:

$$u(R_x) = \sqrt{(c_1 u(R_1))^2 + (c_0 u(R_0))^2}$$

$$u(R_1) = M_{R1} / \sqrt{3}, \quad u(R_0) = M_{R0} / \sqrt{3}; \quad c_1 = 1, \quad c_0 = -1;$$

$$u(R_x) = \sqrt{(M_{R1} / \sqrt{3})^2 + (M_{R0} / \sqrt{3})^2} = 0,112 \text{ m}\Omega$$

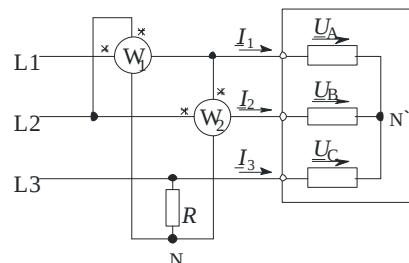
- Popolni merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo je:

$$R_x = 5,02 \text{ m}\Omega, \quad u(R_x) = 0,12 \text{ m}\Omega, \quad n = 1$$

3. V trifaznem sistemu želite meriti jalovo moč nesimetričnega bremena. Kateri pogoji morajo biti izpolnjeni, da jo lahko merite z dvema vatmetroma? Koliko znaša, če kaže prvi vatmeter $P_1 = 32,1 \text{ W}$ in drugi $P_2 = 27,1 \text{ W}$?

Rešitev:

- Jalovo moč lahko izmerimo z dvema W-metroma, z vezavo na sliki, če imamo:
 - trifazni **trivodni** sistem,
 - uravnovešen trifazni vir in pravilno fazno zaporedje,
 - ter dodatni upor $R = R_{W1,n} = R_{W2,n}$ za določitev težiščne točke simetričnega trikotnika, da dobimo fazno napetost, ki je za 90° zamaknjena proti medfazni napetosti.



- Ker je v trivodnem sistemu vsota tokov nič, lahko zapišemo $\underline{I}_3^* = -(\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^*)$ in jalovo moč izrazimo s: $Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ (\underline{U}_A - \underline{U}_C) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_B - \underline{U}_C) \underline{I}_2^* \}$

- Pri simetričnem napajanju zapišemo za napetost med fazama 1 in 3: $\underline{U}_A - \underline{U}_C = \underline{U}_{13} = \sqrt{3} \underline{U}_{2N} e^{j90^\circ}$
- in za napetost med fazama 2 in 3: $\underline{U}_B - \underline{U}_C = \underline{U}_{23} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{-j90^\circ}$

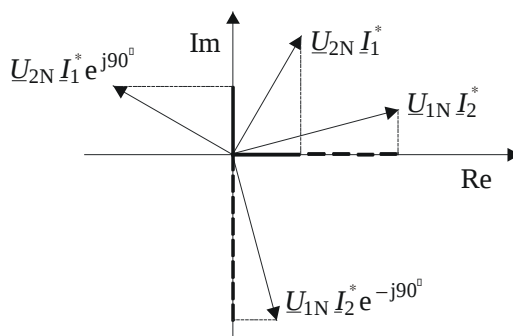
- Skupno jalovo moč merimo z dvema vatmetroma:

$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \sqrt{3} \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* e^{j90^\circ} + \sqrt{3} \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* e^{-j90^\circ} \}$$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* e^{j90^\circ} \} + \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* e^{-j90^\circ} \} \right]$$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* \} - \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* \} \right]$$

- $Q = \sqrt{3} (P_{W1} - P_{W2}) = \sqrt{3} (32,1 \text{ W} - 27,1 \text{ W}) = 8,7 \text{ VAR}$

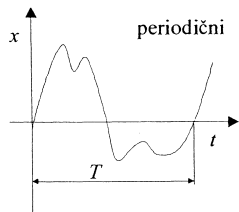
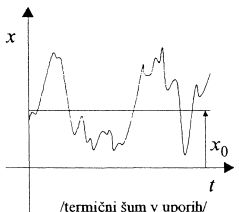
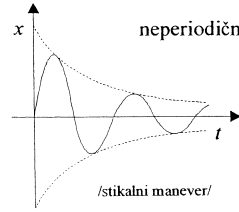
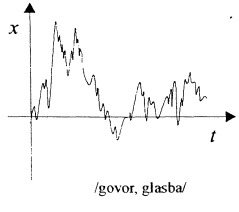


Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

- Kako delimo signale, ki opisujejo časovno spremenljive veličine? Opišite osnovne parametre pulznih neperiodičnih oblik signalov.

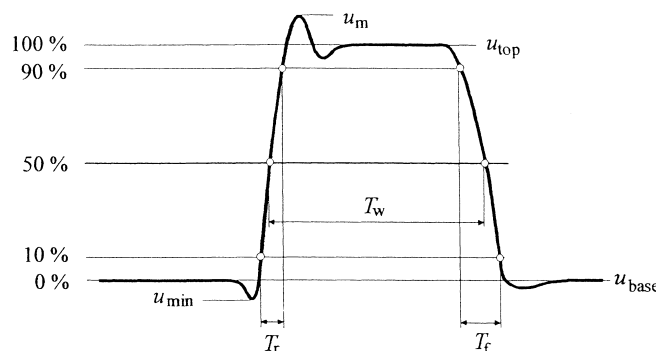
Rešitev:

- Delimo jih na to, ali lahko matematično opišemo trenutne vrednosti veličin ali ne:
 - deterministične,
 - nedeterministične – naključne (stohastične).
- Kadar se pomembni parametri dinamičnih veličin (aritmet. srednja vrednost, efektivna vrednost, itn.) s časom spreminjajo, ločimo signale na:
 - stacionarne,
 - nestacionarne.

	DETERMINISTIČNI	NEDETERMINISTIČNI
	opisujemo jih v časovnem in frekvenčnem prostoru	opisujemo jih v frekvenčnem prostoru; zanimivi za prenos informacij
STACIONARNI	 periodični	 /termični šum v uporih/
NESTACIONARNI	 neperiodični /stikalni maneuver/	 /govor, glasba/

- Nekateri parametri pulzne oblike signala.
- Izhodiščna parametra sta:

- osnovni ali **spodnji** nivo (u_{base} , 0%),
- zgornji** nivo (u_{top} , 100%),
- prevladujoči vrednosti v histogramu.



- Z obema izhodiščnima nivojema 0% in 100% sta določena tudi nivoja 10% in 90% za določitev **dvižnega časa** T_r in **upadnega časa** T_f .
- Ugotovimo lahko tudi nivo 50%, ki določa **širino impulza** T_w .
 - Pri ponavljajočih pulzih je to nivo za merjenje in določanje periode, frekvence in relativne širine impulza.

2. Koliko največ sme biti frekvenca pravilno razpoznane sinusne napetosti, ki jo vzorčimo z vzorčno-zadržnim členom in pretvarjamo z 10-bitnim analogno-digitalnim pretvornikom. Vzorčno-zadržni člen ima aperturni čas $T_{ap} = 10\text{ ns}$ in akvizicijski čas $T_{ac} = 300\text{ ns}$. ADP s postopnim približevanjem potrebuje za en korak pretvorbe $T_k = 100\text{ ns}$. Skicirajte razmere!

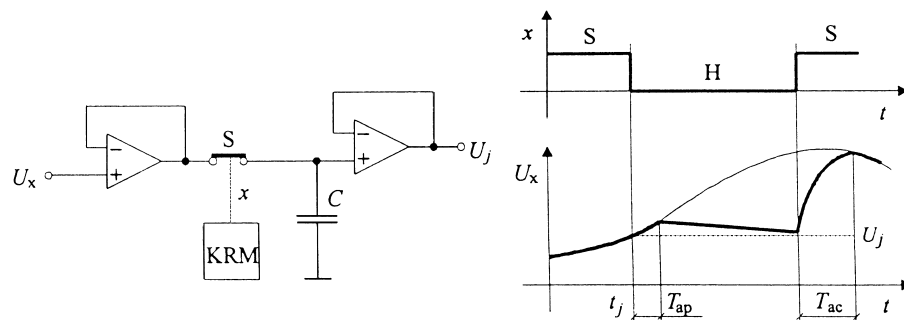
Rešitev:

- Sam analgno-digitalni pretvornik (ADP) s postopnim približevanjem potrebuje $k = 10$ korakov za eno pretvorbo:

$$T_{ADP} = k \cdot T_k = 10 \cdot 100\text{ ns} = 1\text{ }\mu\text{s}$$

- Minimalni čas, ki ga porabi vzorčno-zadržni člen, je enak vsoti aperturnega časa in akvizicijskega časa:

$$T_{VZ} = T_{ap} + T_{ac} = 10\text{ ns} + 300\text{ ns} = 310\text{ ns}$$



- Skupni minimalni čas za pretvorbo enega vzorca je enak:

$$T_{s,min.} = T_{ADP} + T_{VZ} = 1\text{ }\mu\text{s} + 310\text{ ns} = 1,31\text{ }\mu\text{s}$$

- Za pravilno razpoznano sinusno napetost mora biti frekvenca signala vsaj dvakrat manjša od frekvence vzorčenja $f_s = 1/T_s$:

$$f < \frac{1}{2T_{s,min.}} = \frac{1}{2 \cdot 1,31\text{ }\mu\text{s}} = 381,7\text{ kHz}$$

3. Ker nimate W-metra, želite vhodno moč proizvoda (npr. sobnega ventilacijskega grelnika) izmeriti posredno. Katere inštrumente potrebujete, če predpostavimo sinusno obliko signalov? Izpeljite izraz za izračun skupne standardne merilne negotovosti. Navedite podatke, ki jih potrebujete za izračun merilne negotovosti vhodne moči! Predpostavimo, da je negotovost zaradi ločljivosti inštrumentov zanemarljiva.

Rešitev:

- Da bi posredno izmerili vhodno moč ventilacijskega grelnika potrebujemo A-meter, V-meter in $\cos \varphi$ -meter.
- Izračun moči: $P = UI \cos \varphi$

- Pri skupni negotovosti upoštevamo prispevke vseh treh inštrumentov:

$$u(P) = \sqrt{(|c_1| \cdot u(U))^2 + (|c_2| \cdot u(I))^2 + (|c_3| \cdot u(\cos \varphi))^2}$$

- Za izračun potrebujemo standardne merilne negotovosti merjenja vhodnih veličin ($u(U)$, $u(I)$, $u(\cos \varphi)$) in občutljivostne koeficiente:

$$|c_1| = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| = I \cos \varphi; \quad |c_2| = \left| \frac{\partial P}{\partial I} \right| = U \cos \varphi; \quad |c_3| = \left| \frac{\partial P}{\partial \cos \varphi} \right| = UI$$

- Skupna standardna merilna negotovost je enaka

$$\begin{aligned} u(P) &= \sqrt{(I \cos \varphi \cdot u(U))^2 + (U \cos \varphi \cdot u(I))^2 + (UI \cdot u(\cos \varphi))^2} = \\ &= P \cdot \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U} \right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I} \right)^2 + \left(\frac{u(\cos \varphi)}{\cos \varphi} \right)^2} = P \cdot \sqrt{(w(U))^2 + (w(I))^2 + (w(\cos \varphi))^2} \end{aligned}$$

- Potrebni podatki inštrumentov:
 - izmerjena vrednost,
 - mejni pogrešek (absolutni ali relativni).

$$u(P) = P \cdot \sqrt{\left(\frac{m_U}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_I}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_{\cos \varphi}}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

$$\text{ali} \quad = P \cdot \sqrt{\left(\frac{M_U / \sqrt{3}}{U} \right)^2 + \left(\frac{M_I / \sqrt{3}}{I} \right)^2 + \left(\frac{M_{\cos \varphi} / \sqrt{3}}{\cos \varphi} \right)^2}$$

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

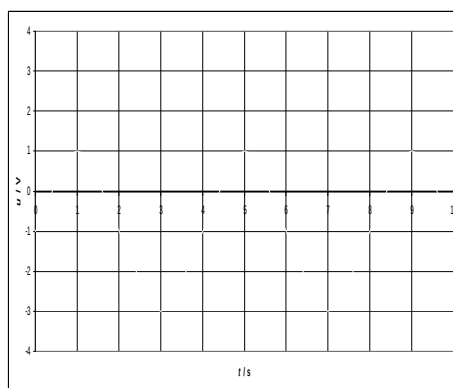
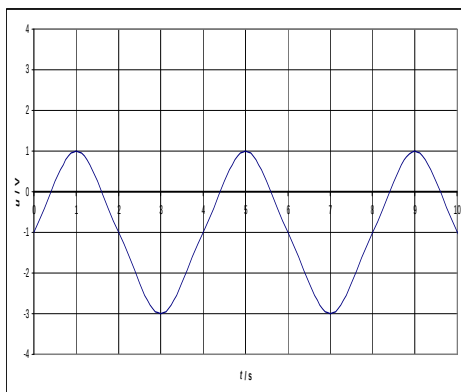
1. Funkcijski generator generira napetostni signal $u(t)/V = 2 \sin(\pi t/2s) - 1$. Določite frekvenco signala, periodo signala, vrednost amplitude od vrha do vrha (peak-to-peak).
 - a. Narišite sliko na osciloskopu, s katerim opazujete ta signal, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = -1V$ in $S > 0$ pri $k_t = 1s/d$ in $k_y = 1V/d$.
 - b. Narišite sliko na osciloskopu, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = 3V$ in $S > 0$ pri $k_t = 1s/d$ in $k_y = 2V/d$.
 - c. Narišite sliko na osciloskopu, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = 0V$ in $S < 0$ pri $k_t = 250ms/d$ in $k_y = 500mV/d$.

Rešitev:

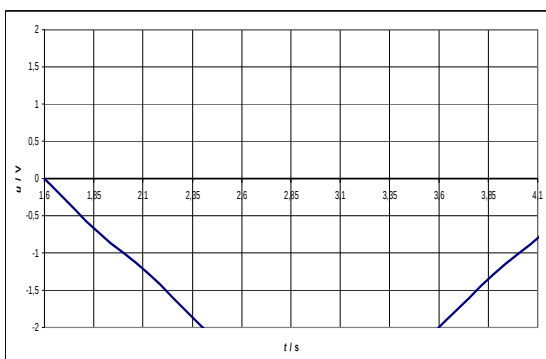
- Če splošni argument sinusa v obliki $2\pi ft$ izenačimo z argumentom napetostnega signala, lahko izračunamo frekvenco:

$$2\pi ft = \pi t/2s \rightarrow f = 1/4s = 0,25Hz \text{ in } T = 1/f = 4s$$

- Vrednost amplitude od vrha do vrha je $U_{pp} = 2\hat{u}_{\sin} = 4V$.
- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> a. $N = -1V$, $S > 0$, $k_t = 1s/d$,
$k_y = 1V/d$. | <ul style="list-style-type: none"> b. $N = 3V$, $S > 0$, $k_t = 1s/d$,
$k_y = 2V/d$. |
|---|--|



- c. $N = 0V$, $S < 0$, $k_t = 250ms/d$, $k_y = 500mV/d$.

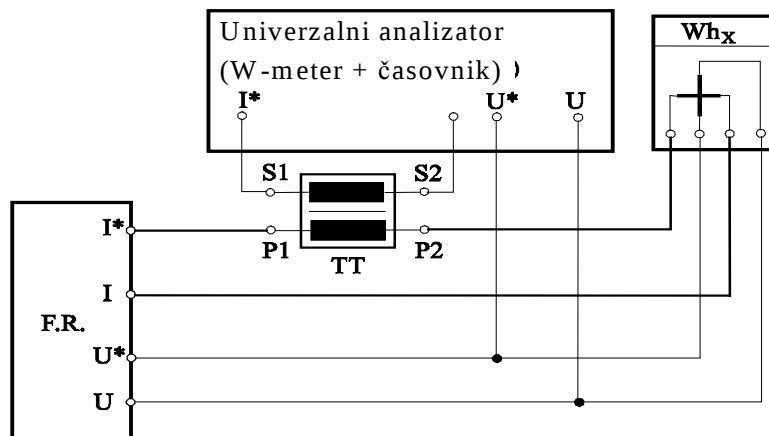


2. Skicirajte vezje za preizkus števca delovne energije po časovni metodi in izpeljite številsko enačbo za lastni pogrešek, če so veličine izražene z naslednjimi enotami:

$$[e] = \% , [K] = \text{vrt/kWh} , [P] = \text{kW} , [t] = \text{s} , [N] = \text{vrt}$$

Rešitev:

- Za preizkus števca delovne energije po časovni metodi, potrebujemo stabilen vir, vatmeter in časovnik za merjenje časa obratov.



- Ugotavlja se razlika med energijo, ki jo kaže preizkušani števec delovne energije Wh_x , in pravo vrednostjo, ki je enaka produktu moči P in časa t pri časovni metodi. Ta razlika je enaka lastnemu pogrešku števca e .

$$e = \frac{W_s - W}{W}$$

- Energijo števca W_s izračunamo na osnovi števila vrtljajev rotorja števca N in njegove konstante K : $W_s = N/K$
- Prava vrednost energije W je: $W = Pt = P_w t$
- Lastni pogrešek števca e je enak: $e = \frac{W_s - W}{W} = \frac{N}{K P_w t} - 1$

- Za prehod iz veličinske enačbe v številsko izrazimo veličine kot produkt številskih vrednosti in enot:

$$\{e\}[e] = \frac{\{N\}[N]}{\{K\}[K]\{P_w\}[P_w]\{t\}[t]} - 1$$

$$\text{in preoblikujemo v } \{e\} = \frac{\{N\}}{\{K\}\{P_w\}\{t\}} \frac{[N]}{[K][P_w][t]} \frac{1}{[e]} - \frac{1}{[e]}$$

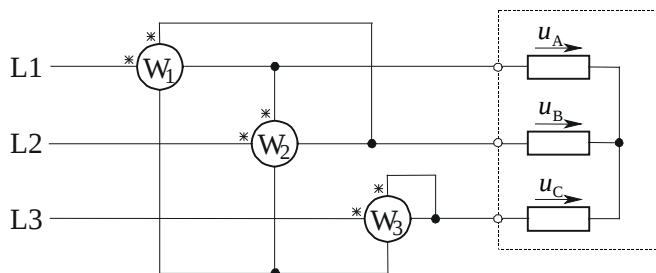
- vstavimo za splošne enote posameznih veličin enote, ki jih želimo uporabljati:

$$\frac{[N]}{[K][P_w][t]} \frac{1}{[e]} = \frac{\text{vrt}}{\text{vrt/kWh} \cdot \text{kW} \cdot \text{s}} \cdot \frac{1}{\%} = \frac{3600 \text{ s}}{\text{s}} \frac{1}{\%} = \frac{3600}{\%}$$

- Če upoštevamo, da je $\% = 0,01$, se željena številsko enačba zapiše:

$$e = \left(3600 \cdot \frac{N}{K P_w t} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\%} \quad \text{oz.} \quad e = \left(3600 \cdot \frac{N}{K P_w t} - 1 \right) \cdot 100$$

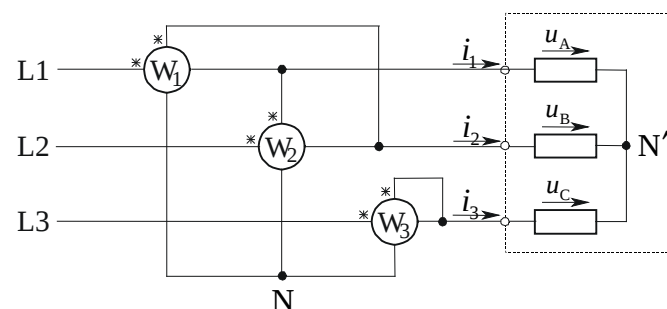
3. V trivodnem trifaznem sistemu – uravnovešen trifazni vir, nesimetrična obremenitev – merimo jalovo moč. Enaki vatmetri kažejo $P_{W1} = -200 \text{ W}$, $P_{W2} = -1500 \text{ W}$, $P_{W3} = 1500 \text{ W}$. Koliko je jalova moč bremena? Skicirajte fazorski diagram!



Rešitev:

- Jalova moč bremena je

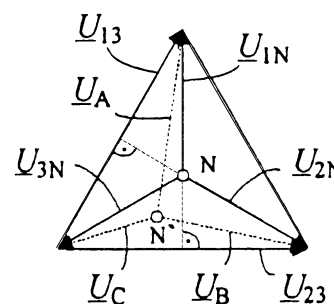
$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_A \underline{I}_1^* + \underline{U}_B \underline{I}_2^* + \underline{U}_C \underline{I}_3^* \}.$$



- Zaradi vsote tokov nič $\underline{I}_3^* = -(\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^*)$ (trivodni sistem), zapišemo:

$$Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ (\underline{U}_A - \underline{U}_C) \underline{I}_1^* + (\underline{U}_B - \underline{U}_C) \underline{I}_2^* \}$$

- Ker uporabljamo enake vatmetre (enake upornosti napetostnih vej) in imamo uravnovešen napajalni trifazni vir, je skupna točka vatmetrov N v težišču enakostraničnega trikotnika. Fazne napetosti $\underline{U}_{LN}$ so za kot 90° zamaknjene proti medfaznim in za $\sqrt{3}$ manjše. Iz fazorskega diagrama razberemo, da sta potrebni medfazni napetosti $\underline{U}_{13}$ in $\underline{U}_{23}$ enaki:



$$\underline{U}_A - \underline{U}_C = \underline{U}_{13} = \sqrt{3} \underline{U}_{2N} e^{j90^\circ}$$

$$\underline{U}_B - \underline{U}_C = \underline{U}_{23} = \sqrt{3} \underline{U}_{1N} e^{-j90^\circ}$$

- Izhodiščno enačbo preoblikujemo v $Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \sqrt{3} \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* e^{j90^\circ} + \sqrt{3} \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* e^{-j90^\circ} \}$

$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* e^{j90^\circ} \} + \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* e^{-j90^\circ} \} \right]$$

- in dobimo

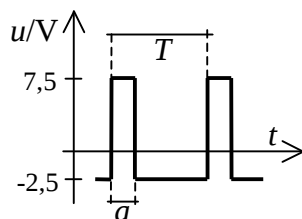
$$Q = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{2N} \underline{I}_1^* \} - \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{1N} \underline{I}_2^* \} \right]$$

$$Q = \sqrt{3} (P_{W1} - P_{W2}) = \sqrt{3} (-200 \text{ W} - (-1500 \text{ W})) = 2251,7 \text{ VAr}$$

- Tretji vatmeter z upornostjo napetostne veje služi samo za določitev skupne točke vatmetrov N.

Rešitve nalog – MERILNA TEHNIKA

1. Ceneni digitalni voltmeter želimo uporabiti za merjenje delovnega cikla D (ang. duty cycle) signala na sliki. Voltmeter meri izmenično napetost preko srednje vrednosti usmerjene napetosti tako, da je efektivna vrednost pravilno izmerjena le za sinusno obliko. Koliko znaša delovni cikel D , če voltmeter kaže efektivno vrednost 4,16 V?



$$D = \frac{a}{T} \cdot 100 \%$$

Rešitev:

- Voltmeter neposredno meri srednjo vrednost usmerjene napetosti ter jo pomnoži z znanim faktorjem 1,11 tako, da v primeru sinusne napetosti pravilno pokaže efektivno vrednost.
- Voltmeter kaže 4,16 V, kar je v primeru signala na sliki napačna efektivna vrednost. Hkrati pa to pomeni, da znaša dejanska usmerjena srednja vrednost signala:

$$\overline{|u|} = \frac{U}{1,11} = \frac{4,16 \text{ V}}{1,11} = 3,75 \text{ V}$$

- Iz slike signala lahko določimo usmerjeno vrednost v odvisnosti od delovnega cikla, ki znaša:

$$\begin{aligned} \overline{|u|} &= \frac{1}{T} \left(\int_0^a |u| dt + \int_a^T |u| dt \right) = \frac{1}{T} (a \cdot 7,5 \text{ V} + (T - a) \cdot 2,5 \text{ V}) = \\ &= \frac{D}{100 \%} \cdot 7,5 \text{ V} + 2,5 \text{ V} - \frac{D}{100 \%} \cdot 2,5 \text{ V} = 3,75 \text{ V} \end{aligned}$$

- in izračunamo:

$$D = \frac{3,75 \text{ V} - 2,5 \text{ V}}{7,5 \text{ V} - 2,5 \text{ V}} \cdot 100 \% = 25 \%$$

2. Uporovnemu temperaturnemu senzorju smo izmerili karakteristiko. Podatki so v tabeli. Kolikšna je občutljivost senzorja, kolikšen je relativni pogrešek linearnosti in koliko je nelinearnost?

$t/^{\circ}\text{C}$	R_t/Ω
-60	4704
-40	5598
-20	6858
0	8313
20	10008
40	12299
60	14917
80	18124
100	21977
120	26885

Rešitev:

- Relativni pogrešek linearnosti se izračuna po enačbi

$$e_1 = \frac{R_t - R_n}{R_{t,\max} - R_{t,\min}}$$

- Iz nastavka

$$\frac{R_n - R_{t,\min}}{t - t_{\min}} = \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}}$$

- izračunamo nazivno karakteristiko R_n .

$$R_n = R_{t,\min} + \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}}(t - t_{\min}) = R_{t,\min} + S(t - t_{\min})$$

- Dopolnjena tabela:

$t/^{\circ}\text{C}$	R_t/Ω	R_n/Ω	$e_1/\%$
-60	4704	4704	0,0
-40	5598	7169	7,1
-20	6858	9633	12,5
0	8313	12098	17,1
20	10008	14562	20,5
40	12299	17027	21,3
60	14917	19491	20,6
80	18124	21956	17,3
100	21977	24420	11,0
120	26885	26885	0,0

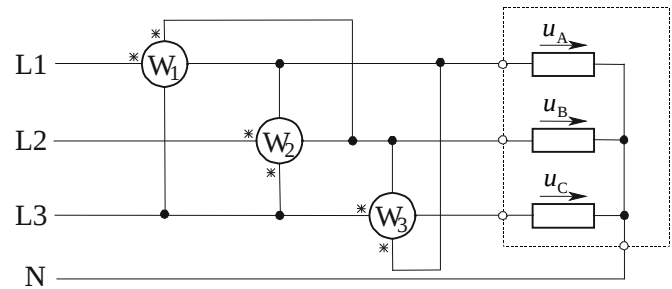
- Nelinearnost določimo po enačbi

$$n = |e_1|_{\max} = \frac{|R_t - R_n|_{\max}}{R_{t,\max} - R_{t,\min}} = 21,3 \%$$

- občutljivost pa po enačbi

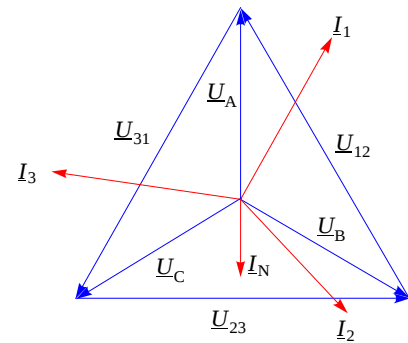
$$S = \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}} = 123,23 \Omega/^{\circ}\text{C}$$

3. Koliko je jalova moč bremena, ki je priključeno na uravnovešen trifazni vir, vatmetri pa kažejo: $P_{W1} = 200 \text{ W}$, $P_{W2} = 400 \text{ W}$, $P_{W3} = 500 \text{ W}$? Skicirajte fazorski diagram!



Rešitev:

- Jalova moč bremena je $Q = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{U}_A \underline{I}_1^* + \underline{U}_B \underline{I}_2^* + \underline{U}_C \underline{I}_3^* \}$.
- Zaradi nevtralnega vodnika imamo tri vatmetre, skozi katere tečejo tokovi posameznih faz. Vsota tokov posameznih faz tu ni enaka nič, ampak toku v nevtralnem vodniku N.
- Če želimo meriti jalovo moč z vatmetri, moramo priključiti napetostne veje na napetosti, ki za 90° zaostajajo za napetostmi pri delovni moči. To je možno le pri uravnovešenih virih in štirivodnem sistemu! Breme ni nujno simetrično.



- Seveda so medfazne napetosti $\sqrt{3}$ -krat večje od faznih napetosti. Velja:

$$\underline{U}_A = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{23} e^{j90^\circ}, \quad \underline{U}_B = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{31} e^{j90^\circ}, \quad \underline{U}_C = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{12} e^{j90^\circ}.$$

- Izrazimo jalovo moč z medfaznimi napetostmi

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \text{Im} \{ (\underline{U}_{23} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{31} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{12} \underline{I}_3^*) \cdot e^{j90^\circ} \}.$$

- in dobimo:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{U}_{23} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{31} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{12} \underline{I}_3^* \} = \frac{1}{\sqrt{3}} (P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}).$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} (200 \text{ W} + 400 \text{ W} + 500 \text{ W}) = \frac{1100 \text{ W}}{\sqrt{3}} = 635,1 \text{ VAr}$$