

Zapiski predavanj

3
TK

Avtor dokumenta Vesna Koderman
Skeniranje Simon Kovše



VERZIJA	01.01
DATUM	17.01.2010

OPOMBE

I. UVOD

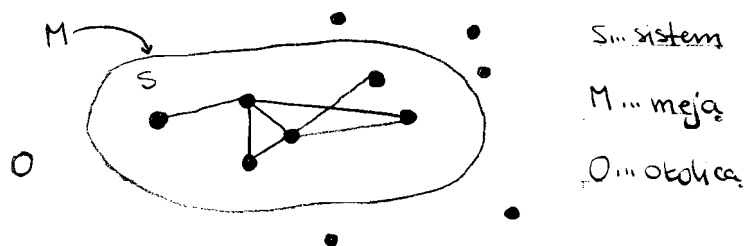
I.1. Definicije sistema:

- Sistem je skupina po naravnih zakonih povezanih in soodvisnih komponent oz. enot, ki sestavljajo celoto.
- sistem je skupina med seboj načrtno povezanih soodvisnih komponent, ki sestavljajo funkcionalno celoto.
- Sistem je skupek med seboj z določenim namenom in po določenih načelih in lastnostih povezanih soodvisnih enot, ki sestavljajo zaključeno celoto.
- Sistem je množica povezanih komponent, ki tvorijo celoto, ki ima drugačne lastnosti kot posamezne komponente.
- Sistem je celovitost urejene in omejene množice elementov, med katerimi obstajajo odnosi ali pa je te odnose mogoče rekonstruirati.

⇒ Vedno gre za neko množico elementov - in ne za en sam element.

⇒ Ti elementi so med seboj nekako povezani in sestavljajo neko zaključeno celoto.

⇒ Meja loči sistem od okolice.



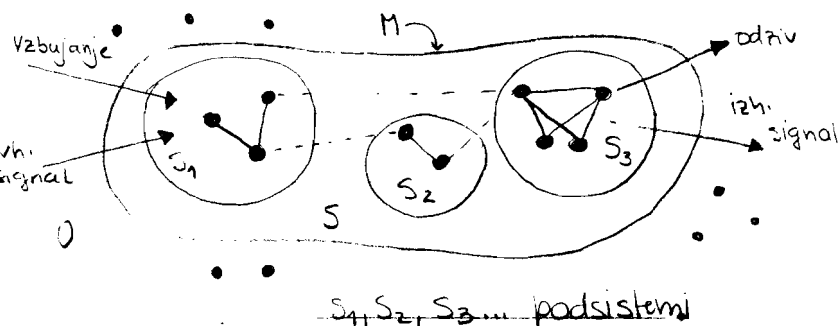
* Meja sistema omejuje oz. določa komponente (elemente) notraj in zunaj sistema

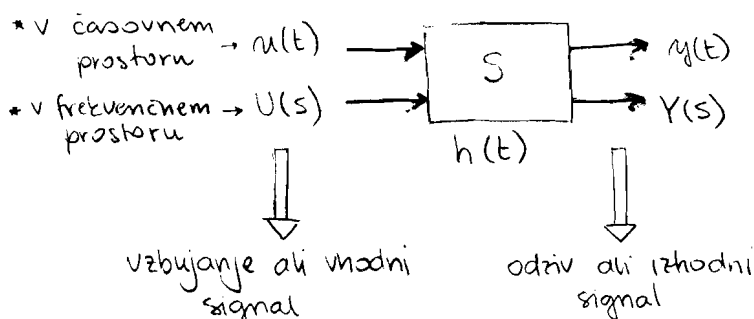
Meje sistema so dejanske / realne ali namišljene in se ELASTIČNE (lahko se premikajo v eno in drugo smer - ožetje in širjenje meje).

Meje torej lahko premikamo oz. se med analizo sistema osredotočimo samo na en del sistema (-podsystem) in ga obravnavamo kot zaključen sistem.

V sistem lahko vključujemo tudi nove komponente in na ta način

razširjamo našo sistemo.





$u(t)$... vzbujanje

$y(t)$... odziv

$h(t)$... prenosna funkcija

a) $h(t)$ in $u(t)$ sta podana; iščemo $y(t) = ?$, $t \geq 0$

... ko imamo tak primer govorimo o ANALIZI SISTEMA

b) Podana sta vzbujanje $u(t)$ in odziv $y(t)$ in iščemo $h(t)$. N tem primeru gre za SINTEZO SISTEMA, ali gradnja

* Mi se bomo ukvarjali z analizo sistema! • Npr. z neke skice n-tega sistema želimo priti do SPLOŠNE ENAČBE: DIF. E. 1. REDA

SISTEMSKA ENAČBA

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u$$

... to je diferencialna enačba; potrebno je poznati začetne pogoje n-tega reda:

$$y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0); \quad y(t) = ?; \quad t \geq 0$$

• Če imamo diskrétne sisteme jih opisujemo z diferencialnimi enačbami.

DIFERENČNA ENAČBA n-tega REDA:

$$a_n y[k+n] + a_{n-1} y[k+n-1] + \dots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = b_m u[k+m] + \dots + b_0 u[k]$$

$$y[0], y[1], \dots, y[n-1]; \quad y[k] = ?; \quad k \geq n$$

~ Analizo diferencialnih enačb bomo delali z Z-preslikavo.

I. 2. RAZVRSTITVE SISTEMOV:

- ①
- a) Naravni in umetni
 - b) Fizični (živali, stroji...) in konceptualni (ureditev, organizacija...)
 - c) Statični (stanja sistemov se ne spreminjajo) in dinamični (sistemi z neko aktivnostjo)
 - d) Odprti (velike interakcije z okoljem) in zaprti
 - e) Enostavni (majhno št. komponent, njihove povezave so enostavne) in kompleksni

Bolj splošno delitev

→ bolj matematična delitev

- ②
- a) Porazdeljeni in strnjeni (oz. sistemi s porazdeljenimi in s strnjenimi parametri)

- Sistemi s porazdeljenimi parametri imajo spremenljivke, ki so funkcije tako časa kot prostora (PDE opisujejo porazdeljene sisteme)

? • Za strnjene sisteme velja:

$$\lambda = v/f; \quad v \approx 10^8 \text{ m/s}; \quad 0 \leq f \leq 10^6 \text{ Hz} \Rightarrow \lambda \approx 100 \text{ m}$$

(glej os. rezj!)

b) Delitev na stohastične in deterministične sisteme:

→ **STOHAŠTIČNI SISTEMI**: parametri ali spr. nekaterih sistemov lahko naključno variirajo / se spreminjajo (npr. generiranje moč sončne celice, naga in stanovanje...). Tudi vhodni signali so lahko naključni (npr. toč pod vplivom termičnega šuma, veter, ki deluje na letalo itd). Sistemi, ki imajo naključne parametre in / ali običujejo / procesirajo naključne signale se imenujejo stohastični sistemi.

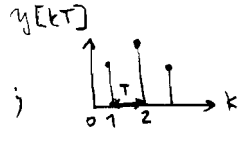
→ Na drugi strani imamo **DETERMINISTIČNE SISTEME**: parametri in vhodni signali det. sistemov so determinirane / določljive veličine.

c) Delitev na zvezne in diskretne sisteme:

ZVEZNI: imajo zvezno časovno skalo; odziv zveznega sistema:



!!! signal je definiran za vsak časovni premetek.

DISKRETNi imajo diskretno časovno skalo;  ... odziv je definiran za določene časovne trenutke. Za reševanje takšnih sistemov bomo uporabljali z-pretvarko.

d) Linearni in nelinearni sistemi:

LINEARNI: $u_1(t) \rightarrow y_1(t)$, $u_2(t) \rightarrow y_2(t)$

Če vzbujamo kombinacijo dveh vhodnih signalov:

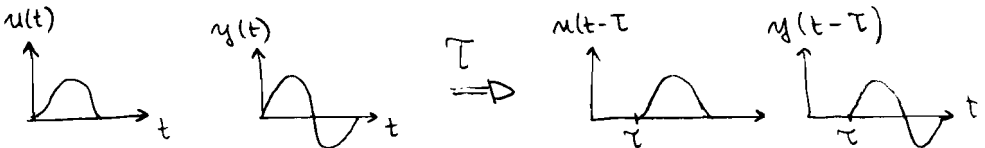
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Pri linearnih sistemih lahko uporabimo teorem o superpoziciji.

e) Časovno spremenljivi in časovno nespremenljivi sistemi:

Pri časovno nespr. sistemih se karakteristike sistema s časom ne spreminjajo.

TEST:



~ če zakasimo vzbujanje za T , se zakasni odziv za T .

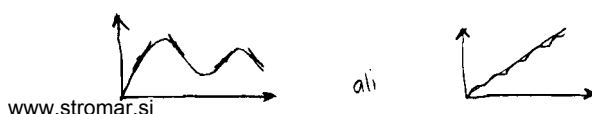
$$\Rightarrow u(t-T) \rightarrow y(t-T)$$

f) Homogeni in nehomogeni sistemi:

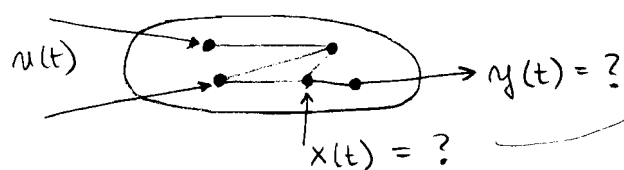
Za homogene sisteme velja, da so brez vzbujanja $\rightarrow u(t) = 0$,
nehomogeni pa vzbujanje imajo $u(t) \neq 0$

Pri tem predmetu se bomo ukvarjali s: STROJENIMI, DETERMINISTIČNIMI, ZVEZNIMI in DISKRETNIMI, LINEARNIMI, ČASOVNO NESPREMENLJIVIMI, NEHOMOGENIMI sistemi.

$\rightarrow$ Če imamo nelinearen sistem, ga lahko ne določenih območjih lineariziramo:



* Imamo nek sistem, ki ga sestavljajo med seboj povezane komponente in ga razvijamo:

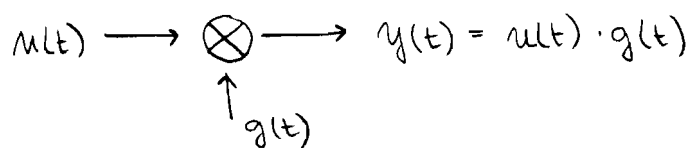


• Poleg odziva $y(t)$ nas zanima tudi $x(t)$... NOTRANJA STANJA → oz. SPREMENLJIVKE STANJ sistema

• Zanima nas tudi: STABILNOST SISTEMA, RAVNOTEŽNA STANJA (če sistem prepuščimo samemu sebi, kje se bo ustabil?), VODLJIVOST SISTEMA (ali je sistem vodljiv ali ne? Vodljiv je, če ga lahko v nekem končnem času prevedemo iz enega v drugo stanje) in SPOZNAVNOST SISTEMA (sistem je spoznaven, če opazujemo izhodni signal in iz tega lahko sklepamo, kaj se v njem dogaja / spreminja)

PRIMERI:

1.) • Imamo preprost sistem:



$$u_1(t) = u_1(t) \cdot g(t)$$

$$u_2(t) = u_2(t) \cdot g(t)$$

- Ali je sistem linearen?

$$u(t) = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 \dots$$

$$\Rightarrow y(t) = (\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) \cdot g(t) = \alpha u_1 g(t) + \beta u_2 g(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2$$

~ Če primerjamo vzbujanje $u(t) = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2$ in odziv $y(t) = \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2$, vidimo, da je sistem linearen.

- Ali je sistem časovno spremenljiv?

$$u_1(t) = u(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$u_2(t) = u(t - \tau) \rightarrow y_2(t) \quad (u(t - \tau) \cdot g(t - \tau))$$

$$y_1(t) = y(t) = u_1(t) \cdot g(t) = u(t) \cdot g(t)$$

$$y_2(t) = u_2(t) \cdot g(t) = u(t - \tau) \cdot g(t)$$

to bi veljalo za časovno
nesprem. sistem!

$$\Rightarrow y_2(t) \neq y(t - \tau) \Rightarrow \text{sistem je časovno spremenljiv}$$

2.) Ali je sistem $y(t) = u(t) + K$ linearen?

$$\Rightarrow y(t) = (u_1 + u_2) + K \neq (u_1 + K) + (u_2 + K)$$

... sistem NI linearen!

3.) Ali je sistem linearen in časovno nespremenljiv?

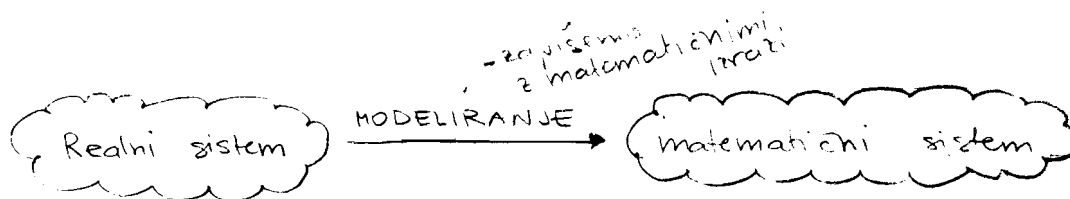
$$\hookrightarrow y(t) = u^2(t) \Rightarrow \text{sistem je nelinearen!}$$

$$\text{DOKAZ: } y(t) = [u_1(t) + u_2(t)]^2 \neq u_1^2 + u_2^2$$

- sistem je časovno nespremenljiv!

$$\text{DOKAZ: } y_1(t) = y(t) = u^2(t)$$

$$\Rightarrow y_2(t) = u^2(t - \tau) = y(t - \tau)$$



①

Npr.: $\frac{dy}{dt} = 5y(t) \iff \dot{y} - 5y = 0$ DIF. E. 1. REDA

sistem je vezan; sistem je homogen (brez nabujanja!);

sistem je linearen; sistem je časovno nespremenljiv

Ker imamo samo časovne spr. je ta sistem STRNEN (ni porzd.)

②

$$\frac{dy}{dt} - 5y^2 = 0$$

sistem je: homogen, strnjen, časovno nespremenljiv,
1. reda, vezan, nelinearen

③

$$\frac{dy}{dt} - 5y + 4t = 0$$

sistem je: 1. reda, linearen, strnjen, časovno nespremenljiv,
vzbujam

④

$$\frac{dy}{dt} = (9t + 1)y^2(t) + 5t$$

sistem je: 1. reda, nehomogen, časovno spreminjiv,
nelinearen, vzbujam

⑤

$$\frac{dy}{dt} = e^{y(t)} + 5y(t) + g(t)$$

sistem je: nelinearen, nehomogen (zaradi $g(t)$),
časovno nespremenljiv, strnjen

⑥

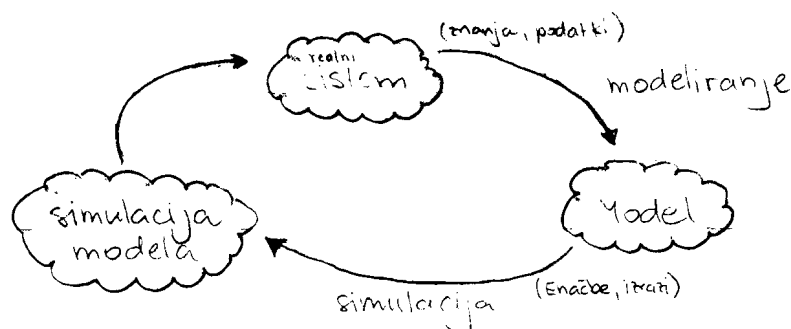
$$\frac{\partial y(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} + 2y(z,t)$$

sistem je: nelinearen, časovno nespremenljiv, ne vzbujam (homogen),
ni strnjen ampak porzdelen

$$7. \quad \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 2dy - 6x$$

sistem je: linearen, časovno nespremenljiv, homogen
(brez vzbujanja), zbirjen

II MODELIRANJE SISTEMOV



Modeliranje in simulacija sta medsebojno povezani postopka. Vsebujeta kompleksne aktivnosti, ki so povezane z gradnjo modelov, ki predstavljajo realne sisteme in eksperimentiranje z modeli z namenom pridobiti podatke o obnašanju obravnavanega sistema.

BISTVENI CILJI MODELIRANJA IN SIMULACIJE:

- izboljšati poznavanje in razumevanje mehanizmov delovanja realnega sistema; (če imamo neko vezje ga zgradimo; kakšno spremenljivo zadržimo, kakšno elemente v vezju izločimo, to lahko opišemo z enačbami)
- Napovedati obnašanje sistema v različnih situacijah;
- Omogočiti načrtovanje sistemov vodenja in njihovo vrednotenje;
- Oceniti parametre procesa, ki niso direktno merljivi
- Optimirati delovanje sistema
- Omogočiti odkrivanje napak v sistemu
- Omogočiti raziskovanje sistemov, ki bi bili v realnem svetu dragi, težavni ali problematični.

Vidimo, da je veliko razlogov za modeliranje in potem nadaljnjo simulacijo (eksperimentiranje z matematičnimi izrazi)

Modeliranje je problemsto orientirano, medtem ko je simulacija relativno neodvisna od obravnavanega primera.

Z modeliranjem želimo priti do modela. Model je poenostavljena predstavitev realnega sistema. Model naj bi omogočal razumevanje, razlago, napovedovanje in tudi rodenje obravnavanega sistema

SIMULACIJA → postopek, ki omogoča študij obnašanja sistema s pomočjo eksperimentiranja na ustreznem modelu

2) ❁ RAZVRSTITEV / KLASIFIKACIJA MODELOV

a) Fizični, mentalni in simbolični modeli abstraktni modeli

→ Fizične modele nadalje delimo na statične in dinamične.

Statični fizični modeli so: ali pomnjske kopije realnih sistemov (npr. makete) ali pa so imitacijski modeli.

Fizični modeli z dinamičnim značajem pa so po drugi strani lahko analogni modeli (modeliran sistem je predstavljen s pomočjo deločne analogije - npr. nek biološki sistem lahko študiramo na nekem sistemu iz mehanstkih delov); imamo pa tudi prototipe (pomnjske kopije realnih sistemov)

→ Mentalni model je subjektivna slika realnosti v človeških možganih.

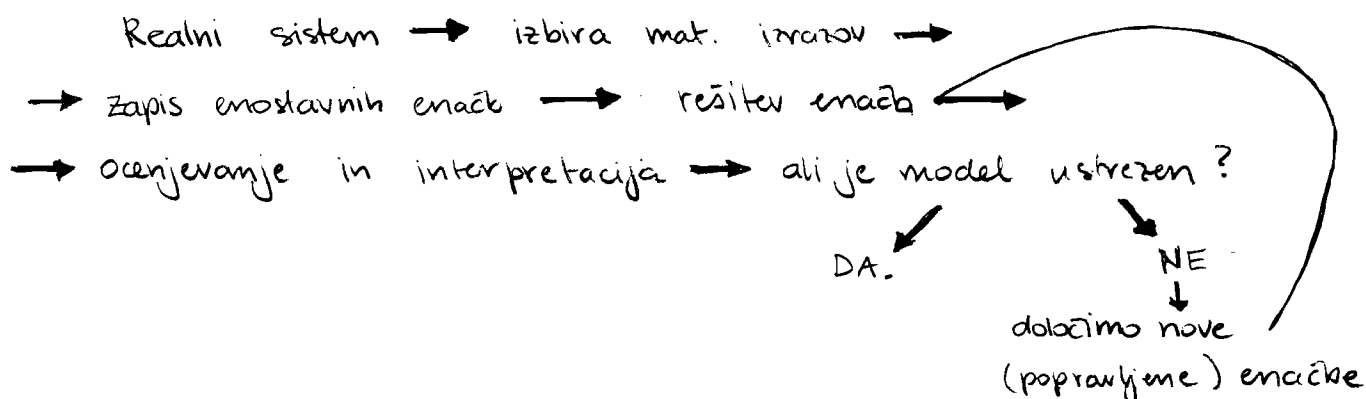
Ti modeli so zaradi svoje nepreciznosti zelo problematični za katršne koli komuniciranje.

→ Simbolični modeli so enostavnejši za gradnjo kot fizični in mnogo bolj manipulativni. Delimo jih na logične, nematematične in matematične (Poudarek bo na matematičnih modelih). Nematematične modele delimo še na verbalne (izrečeni ali zapisani opisi dogodkov, izkušnje ...), grafične (grafi, risbe, itd.) in shematične (diagrami poteka, načrt vezja, zemljevid ...). Najpomembnejši in največkrat uporabljeni so matematični modeli. Informacija, ki jo dajejo je splošno razumljiva, enostavno razložljiva in precizna. Manipulacija s temi modeli in redukcije pa sta relativno poceni. Namen o. cilj matematičnega modeliranja je priti do mat. opisa (do mat. izrazov), ki opisujejo povezave med sestavnimi deli (elementi sistema) pa tudi med elementi in vhodnimi signali.

Mat. modeliranje je neke vrste mat. opis pomembnih lastnosti nekega realnega sistema. V splošnem velja bolj natančen je mat. model, bolj kompletne so enačbe s katerimi modeliramo. Med procesom mat. modeliranja bomo često prisiljeni iskati kompromis med natančnostjo modela in njegovo kompletnostjo. Želimo postati najbolj natančen možen opis sistema, pa še vedno biti zmožni izpeljati analizo sistema na modelu in izračune v primerno kratkem času.

Če imamo nek realni sistem najprej poskušamo preveč poenostaviti sistem z namenom, da dobimo zelo enostaven model. Ko na osnovi najenostavnejšega modela dobimo neko informacijo o obnašanju sistema, model koregiramo in postavimo natančnejši model.

ITERATIVNI POSTUPEK



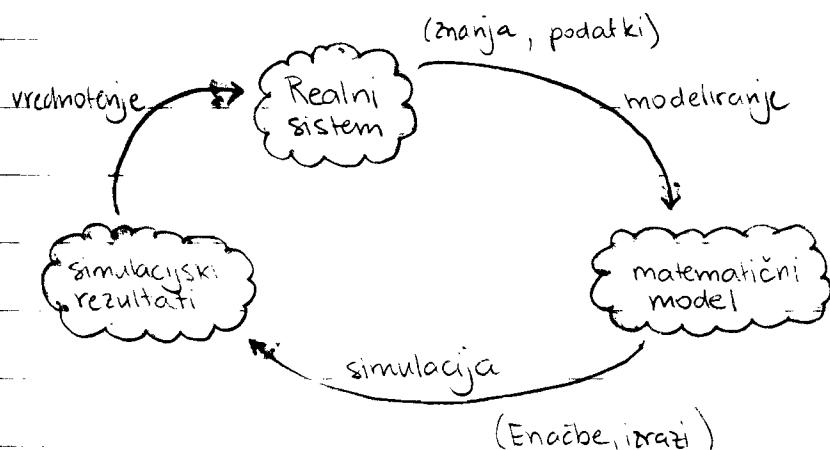
3.)

✿ NAČINI MODELIRANJA :

Mat. modeliranje lahko razdelimo na korekčno, eksperimentalno in kombinirano modeliranje. Pri korektnem modeliranju obravnavamo sistem / proces razdelimo oz. razčlenimo na omejenostnejše pod sisteme.

Povezave med pod sistemi zapišemo na osnovi ravnovesnih enačb in ramih zakonov iz ustreznega področja. Povezave med pod sistemi so na področju tehnike deločljivi, na področju družboslovja, financ itd. pa lahko predstavljajo resen problem.

Mat. model je lahko zelo kompleksen, kar zmanjšuje njegovo uporabnost, zato se moramo velikokrat odločiti za strobo preproste in dobro argumentirane poenostavitve, zanemaritve in rane predpostavke, ki naj bi omogočale predstavitev sistema z navadnimi lin. dif. enačbami čim nižjega reda.



1.)



3.

—



Abstract

— 10 —



1)

$$\Rightarrow i_g(t) = i_L(t) + i_C(t) + i_R(t)$$

Zanima nas izhod kot odziv: $y(t) = v(t)$

$$i_g(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + \frac{1}{R} v(t) + C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow C \ddot{v} + \frac{1}{R} \dot{v} + \frac{1}{L} v = \frac{di_g}{dt} \quad \leadsto \text{nehomog dif. enačba}$$

$$2) \quad v_g(t) = i_L(t) \quad ; \quad v(t) = L \frac{di_L}{dt} \quad \Rightarrow \quad i_g(t) = i_L(t) + \frac{1}{R} v(t) + C \frac{dv(t)}{dt}$$

in dobimo DIF. enačbo $\Rightarrow \quad C L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = i_g(t)$

$$3) \quad i_L(t) \quad ; \quad v_C(t) \quad ;$$

$$v_C = L \frac{di_L}{dt} \quad ; \quad \frac{di_L}{dt} = ?$$

$$i_g(t) = i_L + v_C/R + C \frac{dv_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad C \frac{dv_C}{dt} = -i_L - \frac{1}{R} v_C + i_g$$

$$\Rightarrow \quad L \frac{di_L}{dt} = v_C$$

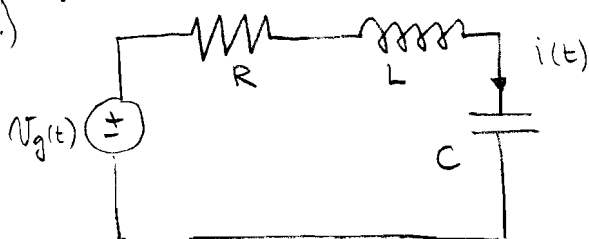
Imamo sistem dif. enačb "zapišemo z matrikami!"

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dv_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/RC & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} \cdot i_g$$

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot u \quad \Rightarrow \quad \dot{X} = AX + Bu$$

Zaporedna vezava!

II.)



$$\Rightarrow v_g(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

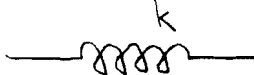
$$y(t) = i(t) \quad \dots \text{odziv}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = v_g(t) \\ i_L(t) = C \frac{dv_C}{dt} \\ v_g(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} + v_C(t) \end{array} \right. \quad \text{system}$$

MEHANIKA

masa 

masa m [kg]

vzmet 

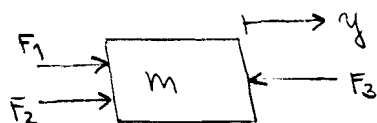
koeficient vzmeti k [N/m]

dušilka 

koeficient dušenja b [Ns/m]

vzbujanje je vedno sila F [N]

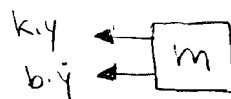
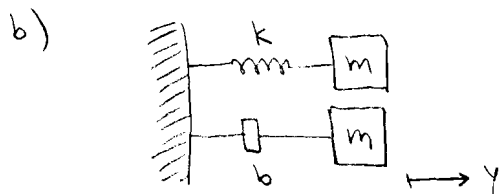
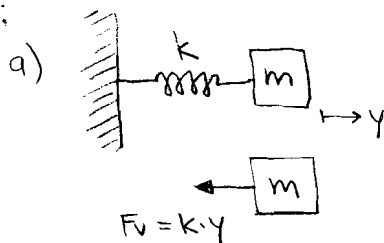
$$\sum_i F_i = m \cdot a$$



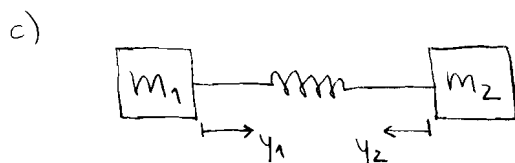
$$F_1 + F_2 + F_3 = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

- F_v ... sila vzmeti ; $F_v = k \cdot y$; F_v nasprotuje gibanju telesa
- F_b ... sila dušilke ; $F_b = b \cdot dy/dt = b \cdot \dot{y}(t)$; F_b imamo tudi v primeru trizja

PRIMERI:

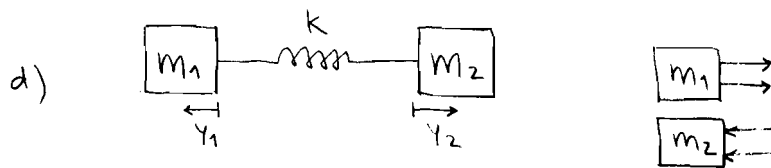


(t. nimamo samo vzmeti, ampak še dušilko)

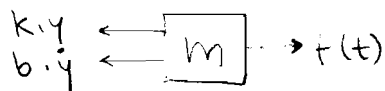
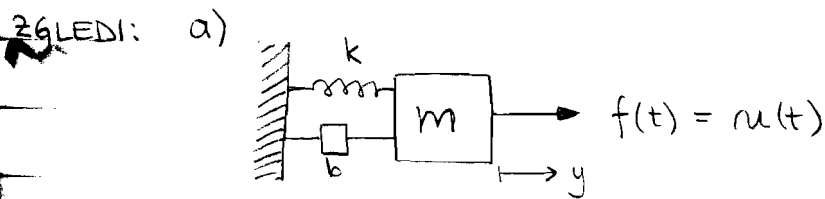


$$m_1 \leftarrow k \cdot y_1 \leftarrow k \cdot y_2 \rightarrow k(y_1 + y_2)$$

$$m_2 \rightarrow k \cdot y_2 \rightarrow k \cdot y_1 \rightarrow k(y_1 + y_2)$$



Ko modeliramo mehanike sisteme moramo za vsako telo določiti sile, ki delujejo na telo.

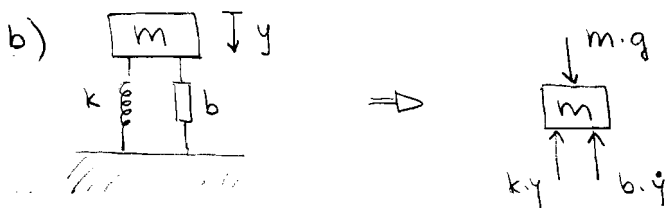


$$f(t) - k \cdot y - b \cdot \dot{y} = m \cdot a = m \cdot \ddot{y}$$

diferencialna enačba II. reda
(nehomogena, linearna, čas. nespr.)

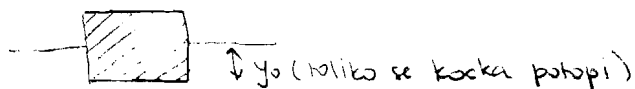
Da zapišemo enačbo 1. reda vzamemo za spr.: $y, \dot{y} = v$

$\Rightarrow m \cdot \dot{v} = -k \cdot y - b \cdot v + f(t)$... dif. enačba I. reda

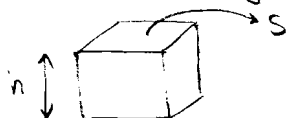


$$\sum F_i = m \cdot a$$

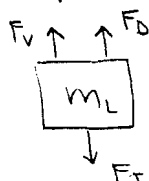
c) Imamo ledeno kocko na vodi:



katere sile delujejo na kocko?



$$V = S \cdot h$$



$$\sum_i F_i = m_L \cdot a = m_L \cdot \ddot{a}$$

$$F_T = m_L \cdot g \quad \dots \text{sila teže}$$

$$F_v = \rho_v \cdot S \cdot (y + y_0) \cdot g$$

$$F_D = b \cdot \dot{y}$$

$$\Rightarrow F_T - F_v - F_D = m \cdot \ddot{y}$$

$$m \cdot \ddot{y} = m_L \cdot g - \rho_v \cdot S \cdot (y + y_0) \cdot g - b \cdot \dot{y} \quad ; \quad y = ? \quad ; \quad y_0 = ?$$

$$\dot{y} = v \quad ; \quad \underbrace{m \cdot \ddot{v} = -bv + \rho_v \cdot S \cdot y}_{\rightarrow \text{DIF.E. (Hom. I. reda)}} \iff \underbrace{m\ddot{y} + b\dot{y} + \rho_v \cdot S \cdot y = 0}_{\rightarrow \text{DIF.E. (Hom. II. reda)}}$$

Ravnotežno stanje (mirovanje):

$$\sum_i F_i = 0$$

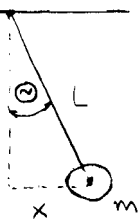
$$\Rightarrow F_T - F_v = 0$$

$$\Rightarrow m_L \cdot g - \rho_v \cdot S \cdot y_0 \cdot g = 0$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{m_L}{\rho_v \cdot S}$$

KONKRETNI PRIMERI MODELIRANJA

Nihalo



$$\sum \tau_z = F \cdot r = I \cdot \alpha_z \Rightarrow \text{II. Newtonov zakon; } \tau_z \dots \text{navor}$$

$r = x \dots$ ročica

$I \dots$ vztrajnostni moment

$\alpha_z \dots$ kotni pospešek

$$r = x; \quad \alpha_z = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$I = \sum m_i R_i^2$$

$R = L$

$$F \cdot x = m L^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow F \cdot L \cdot \sin \theta = m \cdot L^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow$$

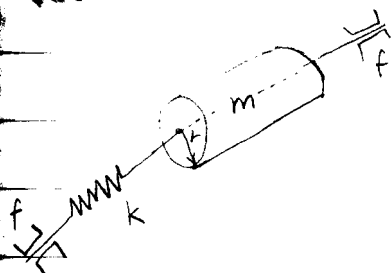
$$\Rightarrow m \cdot g \cdot L \cdot \sin \theta = m \cdot L^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L \cdot \ddot{\theta} - g \cdot \sin \theta = 0}; \quad \theta(t) = ?; t \geq 0; \theta(0); \dot{\theta}(0);$$

Kako lahko to DIF.E. zapišemo kot linearno dif. enačbo, pri čemer naredimo najmanjšo možno napako? To imenujemo LINEARIZACIJA, pri tem naredimo cca 5% napako (v našem primeru)

ZAPIŠEMO: $L \ddot{\theta} - g \theta = 0; \quad (\sin \theta \approx \theta; \quad \theta > 3^\circ)$

Zgled 2 (horizijska vzmet)



$$\sum \tau_z = I \cdot \alpha_z; \quad \alpha_z = \frac{d^2 f}{dt^2}$$

$$I = m \cdot r^2; \quad \tau_z = 0$$

$$\Rightarrow m r^2 \frac{d^2 f}{dt^2} = k \cdot f + f \dot{f} + f \dot{f}^2 \quad (\text{ker imamo dva ležaja})$$

$$\Rightarrow m r^2 \ddot{f} - k \cdot f - 2f \dot{f} = 0$$

$$\Rightarrow m r^2 \ddot{f} - 2f \dot{f} - k f = 0;$$

$$f(0); \dot{f}(0); f(t); t \geq 0$$

PRIMER MODELIRANJA SISTEMA (STUDENT)

→ Letalo leti skozi puščeni vihar in pesek se lepi na letalo (prema sorazmernosti hitrosti, s koeficientom α) - hitreje gre letalo, več peska se zlika nanj.

Masa letala se spreminja (s koeficientom φ) zaradi porabe goriva.

Premo-sorazmerno z maso (s koeficientom β) se spreminja hitrost letala (težje je letalo počasneje se giblje)

Na hitrost letala vplivata (s koeficientom γ) še zračni upor in veter.

m ... masa ; v ... hitrost

$$\frac{dm}{dt} = \alpha \cdot v - \varphi \quad (\text{sprememba mase})$$

$$\frac{dv}{dt} = -\beta \cdot m - \gamma \cdot v$$

4.) Zgled iz biomedicine:

HEMANSOV MODEL ... modeliranje bitja srca:

x_1 ... dolžina mišičnega vlakna

x_2 ... napetost vlakna

x_3 ... elektrokemični proces, ki obravnava bitje srca

• Model sestavljajo 3 dif. enačbe, ki vsebujejo x_1, x_2 in x_3 :

$$1.) \quad \dot{x}_1(t) = \frac{2}{\epsilon} x_1 - \frac{1}{\epsilon} x_2 - \frac{1}{\epsilon} x_3$$

$$2.) \quad \dot{x}_2(t) = -2x_1 - 2x_2$$

$$3.) \quad \dot{x}_3(t) = -x_2$$

5.) Zgled s področja ekosistema (Lotka - Volterra)

$L(t)$... kako se število lisic s časom spreminja ... $\frac{dL}{dt}$

$Z(t)$... št. zajcev v odvisnosti od časa ... $\frac{dZ}{dt}$

a, b, c, d ... koeficienti

$$\frac{dZ}{dt} = a \cdot Z - b L Z$$

→ Enačba plena

... večji kot je produkt lisic in zajcev, manj je zajcev

več je zajcev večji prirastek

$\frac{dL}{dt} = -cL + d \cdot Z \cdot L$... enačba plenilca ... več je lisic manj je hrane,
... produkt $\rightarrow$ št. ulovljenih zajcev

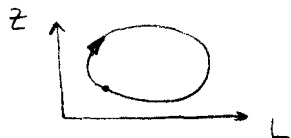
• Če imamo produkt dveh spremenljivk ($L \cdot Z$) gre za nelinearen sistem.

$\rightarrow$ Zanimamo nas ravnolično stanje: $\frac{dZ}{dt} = 0$ in $\frac{dL}{dt} = 0$

$$\Rightarrow a \cdot \bar{Z} - b \bar{L} \bar{Z} = 0 \quad ; \quad -c \bar{L} + d \bar{L} \bar{Z} = 0$$

$$\bar{L} = a/b \quad ; \quad \bar{Z} = c/d$$

V praksi so poiskali vrednost konstant $\rightarrow a = 0.03$; $b = 0.001$ $\left\{ \begin{array}{l} \bar{L} = 30 \\ \bar{Z} = 450 \end{array} \right.$
Rezultat v nekem časovnem obdobju: $c = 0.9$; $d = 0.0002$



... ko je št. lisic majhno, začne št. zajcev naraščati; ko je veliko zajcev, začne št. lisic naraščati...

$\rightarrow$ AKEL

6. Richardson-ov model oboroževalne tekme

... imamo dve strani, ki sta v konfliktu. V primeru zoperstavljanja ene strani, je druga pripravljena na napad. Ti dve strani poimenjujemo a in b . X ... stanje oboroženosti.

$\rightarrow X_a(t)$, $X_b(t)$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dX_a(t)}{dt} = -bX_a + a \cdot X_b + g \\ \frac{dX_b(t)}{dt} = -dX_b + c \cdot X_a + h \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nehomogeni linearni dif.} \\ \text{enačbi 1. reda} \end{array}$$

- konstanti g in h ... vzbujaanje $\rightarrow$ sovražno do nasprotnika ... z določeno amplitudo
- konstante a, b, c, d ... finance, št. prebosti naroda, ...

$\rightarrow$ Ravnolično stanje: ... odvisno je tudi od vzbujaanja

$$-b \bar{X}_a + a \bar{X}_b + g = 0 \quad ; \quad -d \bar{X}_b + c \bar{X}_a + h = 0$$

Richardson je ta model preiskoval na primeru iz 1. svetovne vojne.
 Hotel je ugotoviti vrednost koeficientov $a, b, c, d \dots$
 Ugotovil je da sta dve strani v neravnotežnem stanju (sledice
 je bila vojna)

$X_b = 0$... stran b se razoroži
 $\Rightarrow \frac{dx_a}{dt} = -b\bar{x}_a + g$; $\frac{dx_b}{dt} = c \cdot x_a + h$
 ... vidimo, da neki koeficienti ostanejo ... torej $\frac{dx_a}{dt}$ in $\frac{dx_b}{dt} \neq 0$
 ... še vedno obstaja prijetnost za spopad (sovrništvo do nasprotnik,
 strah pred nasprotnikovo oborožitvijo ...)

7.) Samuelson-ov investicijski model

→ Področje gospodarstva, ekonomije

→ Povezava med kapitalom in investicijama
 $K(t)$ $\swarrow$ $\searrow$ $I(t)$

→ K_e (ravnovesno stanje - da je neko podjetje stabilno)

$$k(t) = K(t) - K_e$$

→ Povezava med $k(t)$ in $I(t)$:

$$\frac{dk(t)}{dt} = I(t)$$

→ presežek kapitala
 pogoltnjeje investicije

→ $k(t) > 0 \Rightarrow$ dovolj kapitala

→ $k(t) < 0 \Rightarrow$ premalo kapitala

SPREMEMBA INVESTICIJ:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -m \cdot k(t) - n I(t)$$

→ Če smo že veliko
 investirali,
 začnejo investicije
 padati

a)

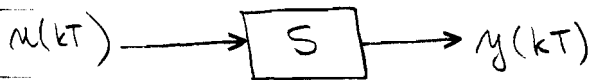
$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^n u}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Začetni pogoji: $y(0), y'(0) \dots y^{(n-1)}(0)$

b) $\dot{x}_1 = \dots, x_1(0)$; $\dot{x}_2 = \dots, x_2(0)$; $\dot{x}_3 = \dots, x_3(0)$

b) DISKREJNI SISTEMI

Pri matematičnem modeliranju bomo diskretne sisteme opisovali z diferencialnimi enačbami:



$T \dots$ (ratično)

$k = 0, 1, 2, \dots$

pišemo: $u[k]$, $y[k]$

ZGLEDI:

1. Model amortizacije ... kredit, ki ga moramo odplačevati

~ Vzamemo kredit v vrednosti T

~ $R \dots$ letna obrestna mera $\rightarrow r = R/12$

~ $F \dots$ mesečni obrok

} SISTEM

→ Zanima nas koliko smo vsak mesec odplačali banki:

$y[k]$

$T \dots$ perioda

$y[0] = T \dots$ posojilo

$$y[k+1] = y[k] + r \cdot y[k] - F$$

dolg naslednji mesec

dolg ta mesec

obrozi na dolg

mesečni obrok ... konstanta

2) Samuelson-ov model narodnega dohodka:

Narodni dohodek $\leftrightarrow$ bruto domači proizvod (BDP)

↑ odvisen od zapravljanja v državi, investicij...

$T \dots$ perioda (3 mesece) ... na tri mesece se računa BDP

$y[k]$; $k = 0, 1, 2, \dots$ BDP v nekem časovnem obdobju

↑ potrošniki ↑ investicije podjetij ↑ izdatki države

$y[k] = C[k] + i[k] + M[k]$... od tega je odvisen BDP

a) Kaj vpliva na potrošnje prebivalstva? Ko BDP pada, potrošnja prebivalstva pada: To lahko zapišemo:

(manjši je BDP, manj ljudi je zaposleno) $\rightarrow c[k] = a \cdot (y[k] - y[k-1])$ ali $\rightarrow$

$$c[k] = a \cdot y[k-1] \quad \text{... ljudi zaposleni v odvisnosti od}$$

Vzamemo to enačbo

... konstanta; BDP (če je bil visok, bodo ljudi več zaposlili)

b) Od česa so odvisne investicije podjetij? Od tega koliko ljudi je zaposleno:

$$i[k] = b \cdot (c[k] - c[k-1])$$

$$\Rightarrow \underline{i[k] = b \cdot (a \cdot c[k-1] - a \cdot c[k-2])} = \\ = \underline{a \cdot b \cdot y[k-1] - a \cdot b \cdot y[k-2]}$$

c) Predpostavimo, da država zaposluje konstantno: $u[k] = U$

$$\Rightarrow y[k] = a y[k-1] + a \cdot b \cdot y[k-1] - a \cdot b \cdot y[k-2] + u[k]$$

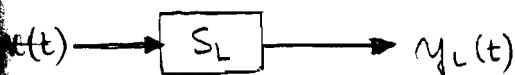
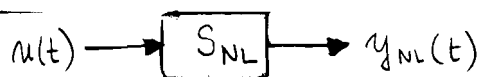
$$\Rightarrow \boxed{y[k] = a(b+1) y[k-1] - a b y[k-2] + u[k]}$$

lin., nehomogena, čas. nepr. diferencialna enačba 2. reda

II.4. Linearizacija nelinearnih sistemov

Ali linearizacija je poiskati linearni model sistema. Odziv, ki ga dobimo na osnovi analize linearnega modela, naj bi bil čim bolj podoben odzivu nelinearnega modela.

Kakšen sistem je bolj ali manj nelinearen:



Znamo je, da se odziva linearnega in nelinearnega modela ne bosta popolnoma ujela. Pri določenih pogojih (razbujanje, začetna stanja) se bosta odziva močno razlikovala. Pričakujemo pa, da v splošnem obstaja množica razbujanj in rač. stanj, pri katerih bosta odziva nelinearnega in linearnega modela podobna.

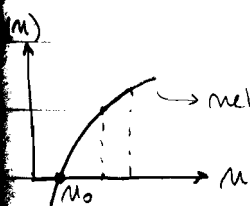
$$y_L(t) \approx y_{NL}(t)$$

Npr.: Nibalo → predpostavili smo linearnost: $\sin \theta \approx \theta$



Vežje → predpostavimo, da so L, R, C linearni elementi;

V resnici njihove karakteristike niso linearne ...

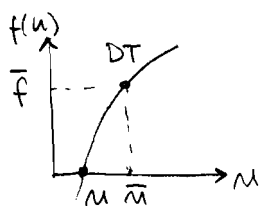


→ neline. karakteristika; če vzamemo samo nek odsek pa lahko rečemo, da je funkcija na tem odseku linearne.

Vzemimo nelinearno funkcijo ene same spr. u ($f(u)$). Npr. primer

čim bolj linearizacija bomo izvedli okoli nekega delovnega točka

(operating point), ki je neka posebno določena točka na nelinearni karakteristiki:



DT je določena z $\bar{u}$ in $\bar{f}$

$u = \bar{u} + \hat{u}$... koliko stran gremo od DT

$$\Rightarrow u(t) = \bar{u} + \hat{u}(t)$$

$\bar{u}$... nominalna vrednost spr. u

$\hat{u}(t)$... momentalna vrednost, spr.

Podobno kot spr. u , lahko tudi funkcijo f razbijemo na dva dele:

$$f(u) = \bar{f} + \hat{f}(u)$$

Ker $\bar{u}$ in $\bar{f}$ določata DT na krivulji, lahko $\bar{f}$ zapišemo:

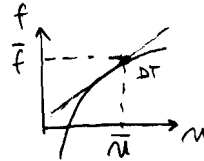
$$\bar{f} = f(\bar{u}).$$

→ Dva postopka linearizacije: grafični postopek in postopek s Taylorjevo vrsto.

a) Grafični postopek:

-Tangenta na krivuljo v DT $(\bar{u}, \bar{f})$ je kar dobra aproksimacija nelin. krivulje, če le u ni preveč različna od $\bar{u}$ in je ukrivljenost krivulje $f(u)$ v bližini DT majhna.

Naklon tangente $k = \frac{df}{du} / u = \bar{u}$

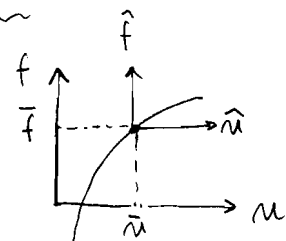


$$f = \bar{f} + \hat{f} = \bar{f} + \underbrace{k(u - \bar{u})}_{\hat{f}}$$

$$f - \bar{f} = k(u - \bar{u})$$

$$\Rightarrow \hat{f} = k \cdot \hat{u}$$

$$\Rightarrow \hat{u} = u - \bar{u} \quad \text{in} \quad \hat{f} = f - \bar{f}$$



→ INKREMENTALNI VREDNOSTI: $\hat{u}$ in $\hat{f}$ sta linearno porazani.

Natančnost linearne aproksimacije je odvisna od ukrivljenosti funkcije $f(u)$ v okolici DT in od oddaljenosti od DT.

Linearizirani model bo dobra aproksimacija za hite vrednosti spr. u , za katere je premica blizu originalni krivulji,

če je nelinearni element del večjega sistema ne moremo v naprej pravi razpore spr. u , za katere bo aproksimacija s premico zadovoljiva

b) LINEARIZACIJA S POMOČJO TAYLERJEVE VRSTE:

Če imamo funkcijo $f(u)$, ki je prva in ima vse odvode v DT ($u = \bar{u}$), potem lahko funkcijo $f(u)$ izrazimo v obliki potenčne vrste dobijane po Taylorjevem obrazcu.

$$f(u) = f(\bar{u}) + \left. \frac{df}{du} \right|_{u=\bar{u}} (u - \bar{u}) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{du^2} \right|_{u=\bar{u}} (u - \bar{u})^2 + \dots$$

$\frac{df}{du}$ v DT je naklon tangente na krivuljo v DT

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=\bar{u}} = k$$

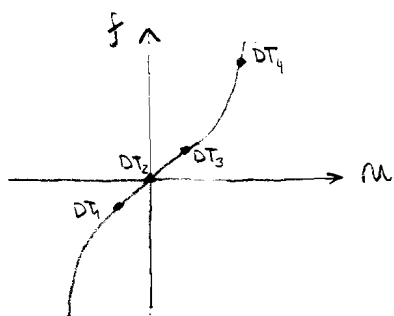
$$\Rightarrow f(u) \approx f(\bar{u}) + \left. \frac{df}{du} \right|_{u=\bar{u}} (u - \bar{u}) = f(\bar{u}) + k \hat{u} = \bar{f} + k \hat{u}$$

$$\Rightarrow f = \bar{f} + \hat{f} = \bar{f} + k \hat{u} \rightarrow \hat{f} = k \hat{u}$$

Natančnost aproksimacije je odvisna od prispevkov višjih členov pr. vrsti, ki smo jih zanemarili.

$$f(u) \rightarrow \text{d.t.} \rightarrow k \rightarrow \hat{f} = k \hat{u} \quad (f = ku, f = |u| \cdot u)$$

1. ZGLED:



$$\bar{u}_1 = -1$$

$$\bar{f}_1 = -1$$

$$\bar{u}_2 = 0$$

$$\bar{f}_2 = 0$$

$$\bar{u}_3 = 1$$

$$\bar{f}_3 = 1$$

$$\bar{u}_4 = 2$$

$$\bar{f}_4 = 4$$

$$f(u) = \begin{cases} u^2 & ; u > 0 \\ -u^2 & ; u < 0 \end{cases}$$

$$k = \frac{df}{du}$$

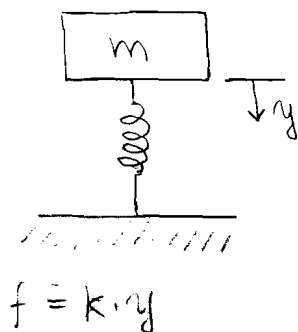
$$(u = \bar{u} + \hat{u} \Rightarrow \hat{u} = u - \bar{u})$$

$$\Rightarrow k = \begin{cases} 2\bar{u} & ; u > 0 \\ -2\bar{u} & ; u < 0 \end{cases} \Rightarrow k = 2|\bar{u}| \quad \forall \text{ za vsak } u$$

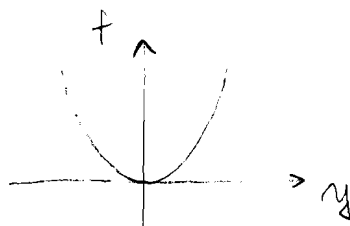
$$\hat{f} = k \hat{u} = 2|\bar{u}| \hat{u} = 2|\bar{u}| (\bar{u} - \bar{u}) \Rightarrow \hat{f} = 2|\bar{u}| \hat{u}$$

! dobili smo linearen izraz ↗

2. ZGLED: Imamo sistem v začetnem stanju:



$$f = cy^2 \quad ; \quad \sum F_i = m \cdot a = m\ddot{y}$$



~ Na telo delujeta sila teže in sila vzmeti:

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{y} = m \cdot g - f_v \Rightarrow m \ddot{y} + f_v = m \cdot g$$

$$\Rightarrow \boxed{m \cdot \ddot{y} + y^2 = m \cdot g}$$

Želimo narediti neko linearizacijo:

$$f_v \approx \bar{f}_v + \left. \frac{df_v}{dy} \right|_{y=\bar{y}} (y - \bar{y})$$

Delovna točka, če mi podamo,

je najbolje da si za DT zberemo RAVNOTEŽNO STANJE:

$$m \cdot a = m \cdot \ddot{y} = 0 \quad ; \quad m \cdot g = f_v = y^2 \quad ; \quad \bar{y} = \sqrt{m \cdot g}$$

$$\Rightarrow f_v = \bar{f}_v + \left. \frac{df_v}{dy} \right|_{y=\bar{y}} (\underbrace{y - \bar{y}}_{\hat{y}}) \Rightarrow f_v = m \cdot g + \left. \frac{df_v}{dy} \right|_{y=\bar{y}} (y - \bar{y})$$

$$\rightarrow f_v \text{ v delovni točki?} \quad \dots \quad f_v = m \cdot g + 2y \Big|_{y=\bar{y}} (y - \bar{y})$$

$$\Rightarrow f_v = m \cdot g + 2\sqrt{m \cdot g} (y - \bar{y})$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{y} + mg + 2\sqrt{mg} (y - \bar{y}) = mg \quad \rightarrow \quad m \ddot{y} + 2\sqrt{mg} \cdot \hat{y} = 0$$

upoštevamo: $y = \bar{y} + \hat{y}$ in dobimo: $m(\bar{y} + \hat{y}) = m \ddot{\hat{y}}$

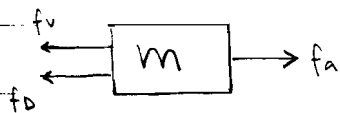
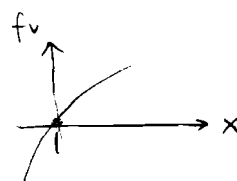
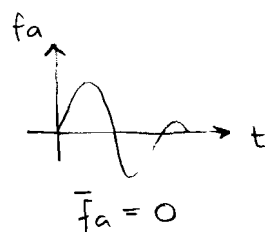
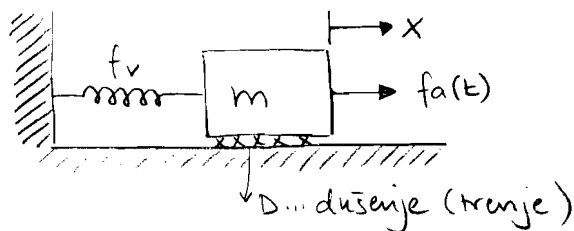
Dobili smo lin. dif. enačbo 2. reda:

$$m \ddot{\hat{y}} + 2\sqrt{mg} \hat{y} = 0$$

k

$$m(\bar{y} + \hat{y})'' = m \cdot \ddot{\hat{y}}$$

3. ZGLED: Priročno je tudi vzbujaње:



$$\sum F_i = m \cdot a$$

$$m \cdot a = m \cdot \ddot{x} = -f_v - f_b + f_a$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} + f_v + b \cdot \dot{x} = f_a$$

Dif. enačba 2. reda

$$f_a \rightarrow \bar{f}_a, \quad x \rightarrow \bar{x}$$

$$\Rightarrow m \ddot{\bar{x}} + f_v(\bar{x}) + b \dot{\bar{x}} = \bar{f}_a = 0; \quad \dot{\bar{x}} = \ddot{\bar{x}} = 0; \quad \underline{f_v(\bar{x}) = \bar{f}_v = 0}; \quad \underline{\bar{x} = 0}$$

$$x = \bar{x} + \hat{x}; \quad f = \bar{f} + \hat{f}$$

$$\Rightarrow m(\ddot{\bar{x}} + \ddot{\hat{x}}) + f_v(\bar{x}) + b(\dot{\bar{x}} + \dot{\hat{x}}) = \bar{f}_a - \hat{f}_a; \quad \dot{\bar{x}} = 0, \quad \ddot{\bar{x}} = 0; \quad \bar{f}_a = 0$$

$$\Rightarrow m \ddot{\hat{x}} + f_v(\bar{x}) + b \dot{\hat{x}} = \hat{f}_a + \bar{f}_a$$

$$\Rightarrow f_v(x) = f_v(\bar{x}) + \left. \frac{df_v}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})$$

$$\Rightarrow m \ddot{\hat{x}} + f_v(\bar{x}) + \left. \frac{df_v}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) + b \dot{\hat{x}} = \hat{f}_a + \bar{f}_a$$

Dobimo:

$$\Rightarrow m \ddot{\hat{x}} + k \hat{x} + b \dot{\hat{x}} = \hat{f}_a$$

ali je dobili vse zapisano z

$$x = \bar{x} + \hat{x}$$

$$x = \bar{x} + \hat{x} = \hat{x} \quad \checkmark$$

III. Prevedba diferencialnih ali diferenčnih enačb višjega reda v sistem diferencialnih (diferenčnih) enačb 1. reda

1. Zvezni sistem $\rightarrow$ diferencialne enačbe

a) • SPLOŠNA ENAČBA, ki povezuje vzbujanje in odziv pri zveznih sistemih:

$$\frac{dy}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

• Za rešitev te splošne enačbe potrebujemo n začetnih pogojev
 $y(0)$; $y'(0)$, ..., $y^{(n-1)}(0)$; $y(t)$... rešitev $t \geq 0$

b) $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 u \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n u \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0) \\ &\downarrow \\ &x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \\ &t \geq 0 \end{aligned}$$

Zapis v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{X} = AX + BU} \quad X = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T; \ t \geq 0$$

2. Diskretni sistem $\rightarrow$ diferencne enačbe

$$a) \quad y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + \dots + a_1y[k+1] + a_0y[k] = b_nu[k+1] + \dots + b_0u[k]$$

$$y[0], y[1], \dots, y[n-1] ; \quad y[k], k \geq n$$

$$b) \quad x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$x_1[k+1] = a_{11}x_1[k] + \dots + a_{1n}x_n[k] + b_1u[k]$$

$$x_2[k+1] = a_{21}x_1[k] + \dots + a_{2n}x_n[k] + b_2u[k]$$

$$\vdots$$

$$x_n[k+1] = a_{n1}x_1[k] + \dots + a_{nn}x_n[k] + b_nu[k]$$

$$x_1[0], x_2[0], \dots, x_n[0]$$

$$x_1[k], \dots, x_n[k] ; \quad k \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ \vdots \\ x_n[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ \vdots \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u[k]$$

III.1. SISTEM Z ENIM VHODOM IN ENIM IZHODOM

~ gre pa sisteme, kjer ni odziva na vhodnega signala.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u$$

$$y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$$

$$\xrightarrow{\quad} \dot{x} = Ax + Bu ; \quad x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{y}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n = y^{(n-1)}$$

$$\dot{x}_n = y^{(n)} = -a_0y - a_1\dot{y} - \dots - a_{n-1}y^{(n-1)} + b_0u$$

namesto vseh teh y -ov pr. lahko pišemo:

$$\dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + b_0u$$

Matricna oblika:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \cdot u$$

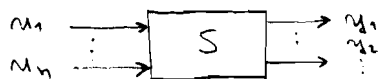
Primer:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 5y = 5u(t)$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y_1 = x_1 \quad ; \quad y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad y = Cx$$

III.2. SISTEM Z VEČINI VHODI IN IZHODI:



$$\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \frac{d^2u_1}{dt^2}, \dots = 0$$

ZGLED

SISTEM OPISUJETA ENAČBI:

(red je vedno odvisen od odvodov)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 &= 4u_1 - 2u_2 \\ \ddot{y}_2 + y_2 &= 5u_2 - \dot{y}_1 \end{aligned} \right\} \text{SISTEM JE 4. reda!}$$

potrebujemo: x_1, x_2, x_3, x_4

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \dots, \dot{x}_2 = \dots$$

$$\Rightarrow x_1 = y_1 \quad ; \quad \boxed{x_2 = \dot{x}_1} = \dot{y}_1 \quad ; \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}_1$$

$$x_2 = y_2 \quad ; \quad \boxed{x_4 = \dot{x}_3} = \dot{y}_2 \quad ; \quad \dot{x}_4 = \ddot{y}_2$$

izrazimo z x-1!

$$\rightarrow \ddot{y}_1 = -3\dot{y}_1 - 2y_2 + 4u_1 = \dot{x}_2$$

$$\rightarrow \ddot{y}_2 = -\dot{y}_1 - y_2 + 5u_2 = \dot{x}_4$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -3x_2 - 2x_3 + 4u_1 \\ \dot{x}_4 &= -x_2 - x_3 + 5u_2 \end{aligned}}$$

V matrični obliki:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

III.3. Primer, ko imamo tudi vzbujanje: (1 vhod in 1 izhod):

Dif. e. I. reda:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Potrebujemo: $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dots \\ \dot{x}_2 &= \dots \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \dots \end{aligned} \right\}$$

$$y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = u$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{y} \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n = y^{(n-1)} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_n = y^{(n)} = -a_0 y - a_1 \dot{y} - \dots - a_{n-1} y^{(n-1)} + u$$

$$\Rightarrow \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Kako pa y izrazimo z x -i?

$$y = \dots [x_1 \dots x_n]^T$$

$$y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = u \quad ; \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u \quad (1)$$

$$\dot{y}^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = \dot{u}$$

$$\rightarrow x_1^{(n)} + \dots + a_1 \dot{x}_1 + a_0 x_1 = \dot{u}$$

$$\rightarrow x_2^{(n)} + \dots + a_1 \dot{x}_2 + a_0 x_2 = \ddot{u}$$

$$\ddot{y}^{(n)} + \dots + a_1 \ddot{y} + a_0 \ddot{y} = \ddot{u}$$

$$\rightarrow x_3^{(n)} + \dots + a_1 \dot{x}_3 + a_0 x_3 = \ddot{u}$$

$\vdots$

$$x_{nm}^{(n)} + \dots + a_1 \dot{x}_{nm} + a_0 x_{nm} = u^{(n)}$$

Vstavlja v enačbo

$$\Rightarrow y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m [x_{m+1}^{(n)} + \dots + a_1 \dot{x}_{m+1} + a_0 x_{m+1}] + \dots + b_1 [x_2^{(n)} + \dots + a_1 \dot{x}_2 + a_0 x_2] + b_0 [x_1^{(n)} + \dots + a_1 \dot{x}_1 + a_0 x_1]$$

$$\Rightarrow \underline{y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_m x_{m+1}}$$

V matrični obliki:

$$y = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0] \cdot [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T; \quad m < n$$

III.4. SISTEM modeliramo z eno dif. enačbo višjega reda:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = u / L$$

... in če poznamo n začetnih stanj: $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$

... potem lahko poiščemo $y(t)$ za $t \geq 0$

Za lažje reševanje naredimo Laplace-ovo transformacijo:

$$\Rightarrow s^n Y(s) - (s^{n-1} y(0) + \dots + s \cdot y^{(n-2)}(0) + y^{(n-1)}(0)) +$$

$$+ a_{n-1} s^{n-1} Y(s) - a_{n-1} (\dots) + \dots + a_1 s Y(s) - a_0 y(0) + a_0 Y(s) = U(s)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)}_{Q(s)} Y(s) - \underbrace{(\text{polinomi zaradi začetnih stanj})}_{P(s)} = U(s)$$

$$Q(s) \cdot Y(s) - P(s) = U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{P(s) + U(s)}{Q(s)}$$

$$Q(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$Q(s) = 0$$

$$① \quad M(t) = 0 ; \quad y(0), y'(0), \dots \neq 0$$

$$U(s) = 0 ; \quad P(s) \neq 0$$

$$Y_z(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$② \quad \dot{M}(t) \neq 0 ; \quad y(0) = y'(0) = \dots = 0$$

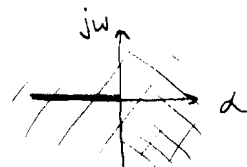
$$U(s) \neq 0 ; \quad P(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_v(s) = \frac{U(s)}{Q(s)}$$

$$③ \quad M(t) \neq 0 ; \quad y(0), \dots \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{P(s) + U(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} + \frac{U(s)}{Q(s)}$$

$$* \quad \boxed{Q(s) = 0} ; \quad s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$



$$s_1, s_2, \dots, s_n ; \quad s_i = \alpha_i + j\omega_i$$



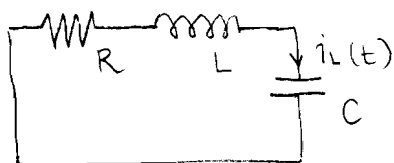
$$Y(s) = \frac{\sim}{Q(s)} = \frac{\sim}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} = \frac{\underline{A_1}}{s-s_1} + \frac{\underline{A_2}}{s-s_2} + \frac{\underline{A_3}}{s-s_3} + \dots + \frac{\underline{A_n}}{s-s_n} \quad / \quad \sim^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_n e^{s_n t}}$$

Kaj pa če imamo sistem, ki je opisan v obliki: $\dot{X} = AX + Bu$

IV. PROSTOR STANJ

PRIMER:



i_L, v_C :

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} + R \cdot i_L + v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} v_C = 0$$

Zanima nas odziv $i_L(t), \dots, (v_C)$

$$v_R + v_L + v_C = 0 ; \quad y(t) = i_L(t)$$

$$\rightarrow R i_L + L \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_L dt' + v_0 = 0 \quad (/) \cdot \frac{d}{dt}$$

$$\rightarrow \underline{L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C} i_L = 0}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

$$x_1 = i_L$$

$$x_2 = v_C$$

- Če vzamemo $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$; $[i_L(t), v_C(t)]$,
temu pravimo STANJE SISTEMA ob času t
- Če vzamemo $[x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]$; $[i_L(0), v_C(0)]$, temu
pravimo STANJE SISTEMA ob času 0 ali ZAČETNO STANJE

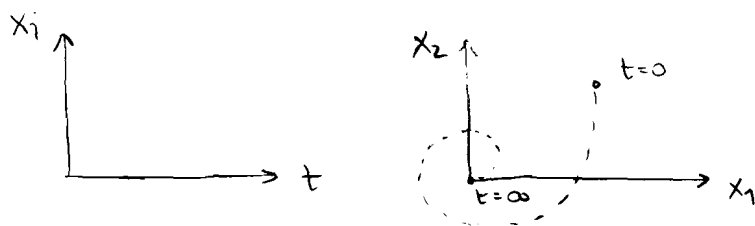
$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dots \\ \dot{x}_2(t) &= \dots \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= \dots \end{aligned} \right\} \text{ enačbe stanja sistema}$$

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$$

↳ vektor stanja sistema

$$x(0) = [x_1(0) \ x_2(0) \ \dots \ x_n(0)]^T$$

↳ vektor začetnega stanja sistema



Stanje sistema lahko predstavimo A točko v prostoru, katerega koordinatne osi predstavljajo posamezne spr. stanj. Ta prostor imenujemo prostor stanj. Z naraščajočim časom t se točka (stanje) giblje od položaja v času 0 do položaja v času ∞ ($t=\infty$) po krivulji, ki jo imenujemo krivulja prostora stanj ali krivulja.

$$\dot{X} = AX \quad \dots \text{ homogena enačba stanja v matrični obliki}$$

↳ cilj je rešiti to enačbo in poiskati $x(t) = [x_1 \ \dots] ^T$

$$\frac{dx}{dt} = ax \rightarrow \frac{dx}{dt} = a \cdot dt / \int \rightarrow x(t) = x(0) \cdot e^{at}$$

$$\dot{X} = AX \rightarrow x(t) = e^{At} \cdot x(0)$$

↳ vektor začetnega stanja

A... osnovna matrika sistema (vedno je kvadratna)

$\Phi(t) = e^{At}$... matrika prehajanja stanj (kvadratna... ($2 \times 2, 3 \times 3, \dots$))

Preslika začetno stanje v kasnejše stanje v določenem trenutku...

$$\Rightarrow x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

Lastnosti matrike prehajanja stanj:

1.) $\Phi(t-t_0) = \Phi(0) = I$

2.) $\Phi(t_2-t_1) \cdot \Phi(t_1-t_0) = \Phi(t_2-t_0)$... lahko delamo različne korake

3.) $\Phi(t_1-t_0) = [\Phi(t_0-t_1)]^{-1}$

Kako določimo matriko prehajanja stanj $\Phi = e^{At}$, če imamo podano matriko A?

① z razvojem v vrsto:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{At} = I + A \cdot t + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{At} \approx I + A \cdot t + \frac{(At)^2}{2!}$$

ZGLED:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2t & -t \\ 2t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 & t^2 \\ -2t^2 & -t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t+t^2 & -t+t^2 \\ 2t-2t^2 & 1-t^2 \end{bmatrix}$$

②.

Kako se menjuje ta način dobljanja e^{At} ?

$$\frac{x(\Delta t) - x(0)}{\Delta t} = A \cdot x(0) \quad ; \quad \frac{x(2\Delta t) - x(\Delta t)}{\Delta t} = A \cdot x(\Delta t)$$

$$x(\Delta t) = x(0) + A \cdot x(0) \cdot \Delta t, \quad x(2\Delta t) = x(\Delta t) + A \cdot x(\Delta t) \cdot \Delta t$$

... Ta način je zanimiv, ker je sistem lahko linearen:

$$\dot{x} = f[x(t)] \quad ; \quad \frac{x(\Delta t) - x(0)}{\Delta t} = f[x(0)]$$

$$x(\Delta t) = x(0) + f[x(0)] \cdot \Delta t$$

③. S pomočjo Laplace-ove transformacije

$$\dot{x} = Ax \quad / \quad \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad s \cdot X(s) - x(0) = A \cdot X(s)$$

$$s \cdot X(s) - A X(s) = x(0)$$

$$(sI - A) \cdot X(s) = x(0) \quad / \quad (sI - A)^{-1}$$

$$\Rightarrow X(s) = x(0) \cdot (sI - A)^{-1} \quad / \quad \mathcal{L}^{-1}$$

$\hookrightarrow$ Rešitev v frekvenčnem prostoru

Če naredimo inverzno Laplaceovo transformacijo dobimo:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1} x(0)] \quad \dots \quad x(t) = e^{At} x(0)$$

$$\Rightarrow \underline{e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1} \cdot x(0)]}$$

ZGLED:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad e^{At} = ?$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s^2 + 2s + 2$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_n = \mathcal{L}^{-1}[A_n] \quad \dots \quad A_n = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} = \frac{(s+1)-1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$\rightarrow a_n = \underline{e^{-t}(\cos t - \sin t)}$$

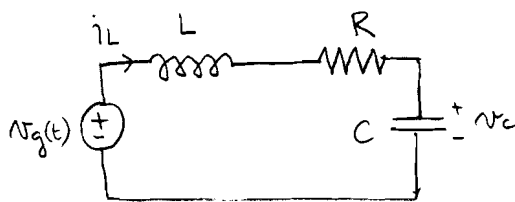
$$\rightarrow e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & -\sin t \\ 2 \sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}; \quad t \geq 0$$

→ to je treba vedno napisat saj je Laplaceova transformacija definirana na int. $t \in [0, \infty)$

Kako izgledajo enačbe stanj, če je prisotno še vzbujanje?

Če vzbujanja ni je enačba stanj: $\dot{X} = AX$

PRIMER:



$$\Rightarrow v_L + v_R + v_C = v_g$$

$$\Rightarrow L \frac{di_L}{dt} + R i_L + v_C = v_g$$

$$\Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L + \frac{1}{L} v_C = \frac{v_g}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} (v_g - v_C) - \frac{R}{L} i_L$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_L \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L$$

ti dve enačbi zapišemo v matrični obliki in dobimo:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_g$$

$$\Rightarrow \dot{X} = A \cdot X + B \cdot u$$

→ Nehomogena enačba stanja v matrični obliki.

Rešitev te enačbe ($\dot{X} = AX + Bu$):

$$X(t) = \underbrace{e^{At} \cdot X(0)}_{\text{odziv na začetno stanje}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau}_{\text{odziv na vzbujanje}}$$

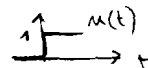
še bolj splošno lahko rešitev zapišemo (če začetno stanje ni enako 0) : ↑ ali pa v nekem trenutku t_0

$$\underline{x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau}$$

Da določimo $x(t)$ v nekem trenutku $t \geq t_0$, moramo poznati: matriki A in B , $x(t_0)$... vektor začetnega stanja in vzbujanje $u(\tau)$

ZGLED:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vzbujanje pa je enolna skopnica 

že prej smo izračunali, da je $e^{At} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & -\sin t \\ 2 \sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow x_z(t) = e^{At} \cdot x(0) = e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \cos t - 3 \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix} \quad \dots \text{odziv na začetno stanje, } x_z(t)$$

$$\Rightarrow x_v(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau =$$

↑ 1... stopnica!

$$= \int_0^t e^{-(t-\tau)} \begin{bmatrix} \cos(t-\tau) - \sin(t-\tau) & -\sin(t-\tau) \\ 2 \sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) + \sin(t-\tau) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{-(t-\tau)} \begin{bmatrix} \cos(t-\tau) - \sin(t-\tau) \\ 2 \sin(t-\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

... vidimo, že računamo v časovnem prostoru, se ne moremo izogniti odvodom in integralom!

Uvedemo novo spr.: $z = t - \tau$; $dz = -d\tau$

$$= - \int_t^0 e^{-z} \begin{bmatrix} \cos z - \sin z \\ 2 \sin z \end{bmatrix} dz = \dots \Rightarrow x_v(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cdot \sin t \\ e^{-t} (-\sin t - \cos t) \end{bmatrix} \Big|_{t \geq 0}$$

... in dobili smo odziv na vzbujanje ...

... če želimo celoten rezultat moramo sešteati odziv na zač. stanje in odziv na vzbujanje

$$\dot{x} = Ax + Bu / \mathcal{L}$$

$$\rightarrow sX(s) - x(0) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$$

$$\rightarrow (sI - A) X(s) = x(0) + B \cdot U(s)$$

$$\rightarrow X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} x(0)}_{X_z(s)} + \underbrace{(sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)}_{X_v(s)}$$

... Odziv na začetno stanje in na vzbujanje v frekvenčnem prostoru ...

ZGLED ... Za $A, B, x(0)$ in $u(t)$ imamo enake podatke kot pri prejšnjem zgledu ... Določiti je treba $X(s)$!

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} ;$$

$$x(0) = [2 \ 1]^T$$

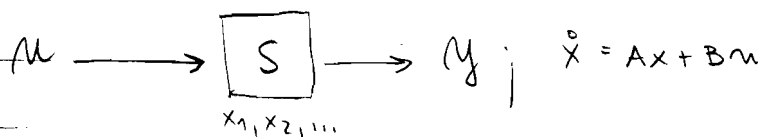
$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$X_z(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} 2s-1 \\ s+6 \end{bmatrix} \quad \dots \text{odziv na zač. st.} / \mathcal{L}^{-1}$$

$$X_v(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2) \cdot s} \begin{bmatrix} s \\ 2 \end{bmatrix} \quad \dots \text{odziv na vzb.} / \mathcal{L}^{-1}$$

dobimo
rešitev
✓
časovni
prostor

Lažje je delati z Laplace-om kot z integrali v časovnem prostoru,
vendar pa je slabost v tem, da je treba znati poiskati
inverzno Laplaceovo transformacijo ...

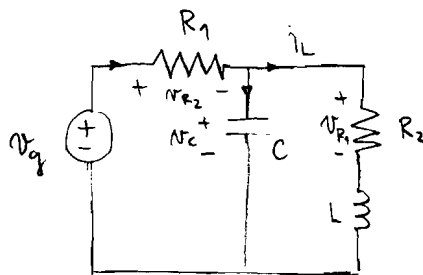


$$y = [y_1 \ y_2 \ \dots]^T \quad y \neq 0$$

$$y = Cx + Du$$

... enačba, ki povezuje
vzbujanje in odziv

ZGLED:



$$u = [v_g]$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} ; \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{R1} \\ v_{R2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow i_{R1} = i_C + i_L$$

$$\Rightarrow C \frac{dv_C}{dt} = i_{R1} - i_L$$



$$\Rightarrow v_{R1} + v_C - v_g = 0$$

$$\Rightarrow v_{R1} = -v_C + v_g = R_1 i_{R1}$$

$$\Rightarrow i_{R1} = -\frac{1}{R_1} v_C + \frac{1}{R_1} v_g$$

$$\Rightarrow \frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{1}{R_1 C} v_C + \frac{1}{R_1 C} v_g \quad \dots \text{dobili smo 1. dif. enačbo}$$

$$v_{R2} + v_L - v_C = 0$$

$$v_L = -v_{R2} + v_C \Rightarrow L \frac{di_L}{dt} = -R_2 i_L + v_C \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{R_2}{L} i_L + \frac{1}{L} v_C$$

↪ 2. dif. enačba

⇒ V matrični obliki:

$$\dot{x} = Ax + Bu \longrightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} -R_2/L & 1/L \\ -1/C & -1/R_1 C \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/R_1 C \end{bmatrix} v_g$$

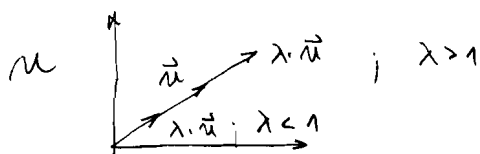
$$\text{ODZIV: } v_{R1} = -v_C + v_g ; \quad v_{R2} = R_2 i_L$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_g \quad \dots \quad y = Cx + Du$$

$$y = g(x, u)$$

... Iščemo način, kako bi najlažje (določili) matriko prehajanja stanj
 e^{At} ... videli smo $\tilde{x}$, katere so lastnosti Laplace-ove Transf in integriranj...

4. S pomočjo lastnih vektorjev in lastnih vrednosti matrike A



$\lambda \cdot \vec{u}$... smer vektorja

$\vec{u}$ bo enaka

λ pa določa dolžino vektorja

$$A \cdot \vec{u}$$

$$\rightarrow A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$$

λ mora biti lastna vrednost matrike A in lastni vektor matrike A , da ta enačba sploh drži!!!

$$A \cdot \vec{u} - \lambda \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow (A - \lambda I) \cdot \vec{u} = 0$$

$g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$... to je značilna/karakteristična enačba matrike A ! To je polinomska enačba

→ glej nazaj
($\det = g(\lambda) \dots$)

$$g(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots \text{ lastne vrednosti matrike } A$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} \rightarrow \\ A \cdot u_1 = \lambda_1 u_1 \\ A \cdot u_2 = \lambda_2 u_2 \\ \vdots \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{array} \text{ ... vsakemu lastnemu vektorju pripadajo lastne vrednosti.}$$

Če po dimenzije matrike A $n \times n$, bomo z rešitvijo enačbe $g(\lambda) = 0$ dobili n lastnih vrednosti. Vsaki lastni vrednosti pripade en linearno neodvisni lastni vektor.

ŽGLED:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow g(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = 3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

$$g(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$$

lastni vrednosti →

• lastna vektorja: 1.) $A u_1 = \lambda_1 u_1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3u_{11} + 4u_{12} &= 5u_{11} \rightarrow 2u_{12} = u_{11} & ; & \quad u_{12} = 1 \\ 2u_{11} + u_{12} &= 5u_{12} \rightarrow 2u_{11} = 4u_{12} & ; & \quad u_{11} = 2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 3u_{11} + 4u_{12} &= 5u_{11} \\ 2u_{11} + u_{12} &= 5u_{12} \end{aligned}} \right\} u_1 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

2.) $A u_2 = \lambda_2 u_2$

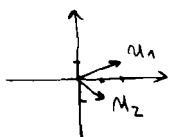
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix}$$

$$3u_{21} + 4u_{22} = -u_{21}$$

$$\Rightarrow u_{22} = -u_{21}$$

$$\Rightarrow u_{22} = 1 \quad ; \quad u_{21} = -1$$

$$u_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$



Cayley - Hamilton - ov postopek (določanja matrike prehajanja stanj s pomočjo lastnih vrednosti) matrike A izrazimo

~ Omejimo se na funkcije, ki jih lahko določimo s potenco matrike...

$$f(A) = k_0 I + k_1 A + k_2 A^2 + \dots + k_n A^n + \dots$$

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \dots$$

$$\cos A = I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \dots$$

$$\sinh A = A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \dots$$

Če vstavimo matriko A v postopek, potem imamo različno enačbo $g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$. Če zamenjamo λ z A dobimo:

$$g(A) = |A - AI| = 0 \Rightarrow |A - A| = 0$$

Cayley-Hamiltonov teorem pravi: Vsaka kvadratna matrika zadošči svoji značilni enačbi.

$$A_{n \times n}; \quad g(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$\lambda \rightarrow A$$

$$g(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

$$\hookrightarrow A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I$$

$$\downarrow$$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = -a_{n-1}A^n - \dots - a_1A^2 - a_0A$$

$$\rightarrow A^{n+1} = -a_{n-1}[-a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I] - \dots - a_1A^2 - a_0A$$

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$$

$$\Rightarrow f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$$

$$\dots A_{2 \times 2} \rightarrow e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

$$A \rightarrow \lambda \quad \dots \quad e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda^k$$

$$e^{\lambda_1 t} = \sum_k \alpha_k \lambda_1^k$$

$$e^{\lambda_2 t} = \sum_k \alpha_k \lambda_2^k$$

$$\vdots$$

$$e^{\lambda_n t} = \sum_k \alpha_k \lambda_n^k$$

dobimo sistem enačb, s katerim lahko izračunamo vrednost α

(če je A dimenzije 2×2 dobimo 2 enačbi z neznanki)

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow +3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$$

$$(2^{-1}[(SI - A)^{-1}];$$

$$\det(SI - A)$$

$$S^2 + 3S + 2 = 0; \quad s_1, s_2)$$

zapišemo:

$$e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A; \quad \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$$

$$e^{-t} = d_0 - d_1 \quad \rightarrow \quad d_1 = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$e^{-2t} = d_0 - 2d_1 \quad \rightarrow \quad d_2 = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$e^{At} = (2e^t - e^{-2t}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Kaj pa če imamo kompleksne lastne vrednosti?

ZGLED:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$g(\lambda) = +\lambda^2 + 2\lambda + 2 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -1 + j, \quad \lambda_2 = -1 - j$$

$$\begin{aligned} \rightarrow e^{At} &= d_0 I + d_1 A & e^{(-1+j)t} &= d_0 + d_1(-1+j) \\ e^{\lambda t} &= \lambda_0 + d_1 \lambda & e^{(-1-j)t} &= d_0 + d_1(-1-j) \end{aligned}$$

$$\rightarrow e^{(-1+j)t} - e^{(-1-j)t} = (-1+j)d_1 + (1+j)d_1 = 2jd_1$$

$$\rightarrow d_1 = \frac{e^{(-1+j)t} - e^{(-1-j)t}}{2j} = \frac{e^{-t}(e^{jt} - e^{-jt})}{2j} = e^{-t} \cdot \sin t$$

$$d_0 = e^{-t}(\sin t + \cos t) \quad \dots \text{vstavimo } d_0 \text{ in } d_1 \text{ in dobimo:}$$

$$e^{At} = e^{-t}(\sin t + \cos t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + e^{-t} \cdot \sin t \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dots \quad e^{At} = \begin{bmatrix} -\sin t \cos t & -\sin t \\ 2 \sin t & \sin t + \cos t \end{bmatrix}$$

Kaj pa če imamo večkratne lastne vrednosti?

ZGLED:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$g(\lambda) = 2\lambda + \lambda^2 + 1 = 0 \quad \dots \quad (\lambda+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

$$\begin{cases} e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda \\ e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1 \end{cases} \quad \Bigg/ \quad \frac{d}{dx}$$

$$t \cdot e^{\lambda t} = \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = e^{-t} + t e^{-t}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} -t e^{-t} + e^{-t} & -t e^{-t} \\ t e^{-t} & t e^{-t} + e^{-t} \end{bmatrix}$$

Kakšna bi morale biti matrika A , da bi bilo najlažje dobiti e^{At} ?

$$a) \quad A = D = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \dots \quad A \text{ bi morala biti diagonalna matrika}$$

$$\dots \quad g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & & \\ & a_{22}-\lambda & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22}, \dots \quad ; \quad g(\lambda) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) \dots (a_{nn}-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow$ mi namu treba računati korenov (λ), zato je vse skupaj lažje...

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$$

$\hookrightarrow$ lastne vrednosti na diagonali A

$$A^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & f(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & f(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

$x_1, \dots, x_n$ sistem

- Ali lahko izberemo spremenljivke stajajo tako, da bo matrika A diagonalna matrika? V splošnem ne!
- Druga možnost pa je, da se vprašamo ali lahko matriko A prestikamo tako, da dobimo diag. matriko (diagonalizacija)

$$A \rightarrow D \rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

D ... diagonalna matrika ...

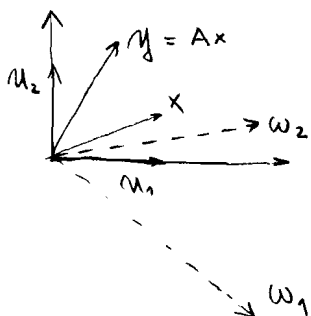
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

5) Določanje e^{At} s pomočjo diagonalizacije osnovne matrike A

* pogledimo si najprej linearne preslikave:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

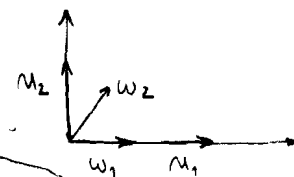
$$y = A \cdot x ; U = [u_1 \ u_2]^T$$



$$y^{(u)} = A \cdot x^{(u)}$$

$$w = [w_1 \ w_2]^T$$

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 \\ w_2 &= \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 \end{aligned} \right\}$$



Sprememba baze je linearna preslikava u -ja v w

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{v matrični obliki}$$

$$w = \Gamma \cdot u$$

$$w = \Gamma \cdot u$$

$$y^{(u)}, x^{(u)} ; y^{(w)}, x^{(w)}$$

$$\begin{aligned} y &= y^{(u)} = y_1^{(u)} u_1 + y_2^{(u)} u_2 \\ y &= y^{(w)} = y_1^{(w)} w_1 + y_2^{(w)} w_2 = \\ &= y_1^{(w)} (\alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2) + \\ & \quad y_2^{(w)} (\alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2) \end{aligned}$$

$$\rightarrow y = y^{(\omega)} = (y_1^{(\omega)} \alpha_1 + y_2^{(\omega)} \alpha_2) u_1 + (y_1^{(\omega)} \beta_1 + y_2^{(\omega)} \beta_2) u_2$$

$$\left. \begin{aligned} y_1^{(u)} &= \alpha_1 y_1^{(\omega)} + \alpha_2 y_2^{(\omega)} \\ y_2^{(u)} &= \beta_1 y_1^{(\omega)} + \beta_2 y_2^{(\omega)} \end{aligned} \right\} y^{(u)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \cdot y^{(\omega)}$$

$$T = T^T$$

$$\boxed{y^{(u)} = T \cdot y^{(\omega)}} \quad \text{in} \quad \boxed{x^{(u)} = T \cdot x^{(\omega)}} \quad \dots \text{za } x \text{ bi raje izbrali na enak način kot za } y$$

$$y^{(\omega)} = T^{-1} y^{(u)} \quad \text{in} \quad x^{(\omega)} = T^{-1} x^{(u)}$$

$$y^{(u)} = A \cdot x^{(u)} \rightarrow T \cdot y^{(\omega)} = A \cdot T \cdot x^{(\omega)} \rightarrow \boxed{y^{(\omega)} = T^{-1} A \cdot T \cdot x^{(\omega)}}$$

Kakšno bazo vektorskega prostora izbrati, da bo ta produkt $(T^{-1} \cdot A \cdot T)$ diagonalna matrika?

$$? \quad T^{-1} \cdot A \cdot T \rightarrow \text{diag}, \quad A \rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$$

Če je $A_{3 \times 3}$ (matrika A dimenzije 3×3), lahko zapišemo tri enačbe:

$$A \cdot u = \lambda u$$

$\Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} A \cdot u_1 &= \lambda_1 u_1 \\ A \cdot u_2 &= \lambda_2 u_2 \\ A \cdot u_3 &= \lambda_3 u_3 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

Lasni vektorji sestavljajo bazo vektorskega prostora!

$$A \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}}_{\text{veliki lambda}} \Rightarrow A \cdot \Theta = \Theta \cdot \text{diag}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{diag} = \Theta^{-1} A \cdot \Theta}$$

$$\Rightarrow \Lambda = \Theta^{-1} A \cdot \Theta$$

$$A = \Theta \Lambda \Theta^{-1}$$

$$e^{At} = \Theta \cdot e^{\Lambda t} \cdot \Theta^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \Lambda = \Theta^{-1} A \Theta \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \longleftarrow & e^{\Lambda t} \\ e^{At} = \Theta e^{\Lambda t} \Theta^{-1} & & \end{array}$$

! Lastne vektorje dobimo iz:

$$A u = \lambda \cdot u$$

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow q(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$q(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \underline{5}, \lambda_2 = \underline{-1}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \Lambda = \Theta^{-1} A \cdot \Theta$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(u_1 in u_2 ... lastne vektorja smo dobili že prejšnjič za ta primer!)

$$\Rightarrow \Theta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ; \quad \Theta^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \dots \Rightarrow e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

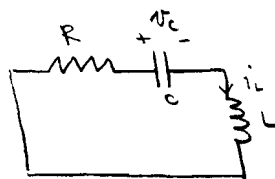
$$\dots e^{At} = \Theta e^{\Lambda t} \Theta^{-1}$$

• Vprašanje je, kaj se zgodi, če imamo večkratne lastne vrednosti?

Primer, s katerim pokažemo, da je težko izbrati take spr. staj, da dobimo matriko A, ki bo diagonalna...

ZGLED:

Imamo preprosto vezje:



$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = AX$$

$$R=5, \quad L=1, \quad C=1/6$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow g(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\tilde{X}} = \Lambda \tilde{X}$$

$$\Lambda = \Theta^{-1} A \cdot \Theta$$

$$\dot{\tilde{X}} = \Theta^{-1} A \cdot \Theta \cdot \tilde{X} \quad / \cdot \Theta$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Theta \dot{\tilde{X}}}_{\text{...}} = A \Theta \tilde{X}$$

Vprašamo se, katere spr.

staj bi morali izbrati,

da bi bila A diagonalna?

$$\rightarrow X = \Theta \tilde{X}$$

$$\tilde{X} = \Theta^{-1} X$$

$$\Theta = [u_1 : u_2]$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} ; \quad \Theta^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 2i_L + v_c \\ \tilde{x}_2 &= -3i_L - v_c \end{aligned} \right\}$$

ta bi morali izbrati spr. staj,

da bi bila A diagonalna. To pa je nesmiselno

delat, zato gremo po drugi poti: $\rightarrow$ Diagonaliziramo matriko A !

DOLOČANJE LASTNIH VEKTORJEV:

$$\Lambda = \Theta^{-1} \cdot A \cdot \Theta$$

$$e^{\Lambda t} = \Theta \cdot e^{\Lambda t} \Theta^{-1}$$

$$\Theta = [\mu_1 \mid \mu_2 \mid \dots \mid \mu_n]$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$$

$$A \cdot \mu_i = \lambda_i \mu_i \rightarrow \mu_i$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

→ PRIMER večkratnih lastnih vrednosti

$\lambda_i = \lambda_j \dots$ PROBLEM je določiti μ_i ... pogledajmo si, kako to rešujemo.

$$\textcircled{1} \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$$

$A_{n \times n}$

$$g(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu}$$

$$g(\mu) = \mu^n + a_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + a_1 \mu + a_0$$

$$\Rightarrow f(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda - \mu} [(\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) - (\mu^n + \dots + a_1 \mu + a_0)]$$

$$\Rightarrow f(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda - \mu} [\lambda^n - \mu^n + \dots + a_1(\lambda - \mu)]$$

$$\Rightarrow f(\lambda, \mu) = (\lambda^n - \mu^n)/(\lambda - \mu) + a_{n-1}(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1})/(\lambda - \mu) + \dots + a_1$$

naredimo zamenjavo: $\lambda \rightarrow \lambda I$ in $\mu \rightarrow A$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu) \cdot f(\lambda, \mu) = g(\lambda) - g(\mu)$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A) \cdot f(\lambda I, A) = g(\lambda I) - g(A)$$

Značilnost teh ključov je, da se šteje in imenovanje delita brez ostankov!

$$(\lambda I - A) \cdot \underbrace{f(\lambda I, A)}_{C(\lambda)} = g(\lambda I)$$

$$\Rightarrow g(\lambda I) = (\lambda I - A) \cdot C(\lambda)$$

$$g(\lambda) \cdot I = (\lambda I - A) \cdot C(\lambda)$$

$$\lambda = \lambda_i$$

$$g(\lambda_i) I = (\lambda_i I - A) \cdot C(\lambda_i)$$

$g(\lambda_i) \dots$ značilna enačba

$$g(\lambda_i) = 0$$

$$(\lambda_i I - A) \cdot C(\lambda_i) = 0$$

tu se skrivajo lastni vektorji

$$C(\lambda_i) \rightarrow u_i$$

$$A u_i = \lambda_i u_i \quad ; \quad A \cdot u_i - \lambda_i u_i = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$(A - \lambda_i I) \cdot u_i = 0$$

Ker vsaki lastni vrednosti ustreza en vektor, so stolpci matrike $C(\lambda_i)$ linearno odvisni.

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\dots$ dve lastni vrednosti $\dots$ dva lastna vektorja

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 =$$

$$= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda - \mu} [(\lambda^2 - 4\lambda + 3) - (\mu^2 - 4\mu + 3)] =$$

$$= \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu} - 4 \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \mu}$$

$$f(\lambda, \mu) = \lambda + \mu - 4 = (\lambda - 4) + \mu \quad ; \quad \lambda \rightarrow I\lambda \quad \text{in} \quad \mu \rightarrow A$$

$$\Rightarrow C(\lambda) = f(\lambda I, A) = (\lambda - 4)I + A$$

$$\Rightarrow C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 4 + 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 4 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$C(\lambda_1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e^{At} = \Theta e^{\Lambda t} \Theta^{-1}$$

$$\hookrightarrow \underline{u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \quad \underline{u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

www.stromar.si

$\Rightarrow$ alternativni način določanja lastnih vektorjev in

pride še posebej prav, ko imamo večkratne lastne vrednosti!

PRIMER $\rightarrow$ Določanje lastnih vrednosti v primeru večkratnih lastnih vrednosti:

$$A_{n \times n} \quad ; \quad g(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$$g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

$$g(\lambda) = \dots (\lambda - \lambda_i)^m \dots$$

$$(\lambda I - A) \cdot C(\lambda) = g(\lambda) \cdot I \quad / \text{odvajamo}$$

$$(\lambda I - A) \cdot C'(\lambda) + C(\lambda) = g'(\lambda) I \quad / \text{odvajamo}$$

$$(\lambda I - A) \cdot C''(\lambda) + 2C'(\lambda) = g''(\lambda) I \quad / \text{odvajamo}$$

$\vdots$

$$(\lambda I - A) C^{(m-1)}(\lambda) + (m-1)C^{(m-2)}(\lambda) = g^{(m-1)}(\lambda) \cdot I$$

$$(\lambda - \lambda_i)^m, \quad g(\lambda)$$

$$g^{(j-1)}(\lambda_i) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$\Rightarrow g(\lambda) = (\lambda - \lambda_i) \dots (\lambda - \lambda_i)^m \dots (\lambda - \lambda_n) \quad ; \quad \lambda = \lambda_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A - \lambda_i I) \cdot C(\lambda_i) = 0 \\ (A - \lambda_i I) \cdot C'(\lambda_i) = C(\lambda_i) \quad / \cdot (A - \lambda_i I) \\ (A - \lambda_i I) \cdot C''(\lambda_i) = 2 \cdot C'(\lambda_i) \\ \vdots \\ (A - \lambda_i I) \cdot C^{(m-1)}(\lambda_i) = (m-1) C^{(m-2)}(\lambda_i) \end{array} \right.$$

$$(A - \lambda_i I)^2 \cdot C'(\lambda_i) = (A - \lambda_i I) \cdot C(\lambda_i) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C(\lambda_i) \quad (A - \lambda_i I) \cdot C(\lambda_i) = 0 \\ C'(\lambda_i) \quad (A - \lambda_i I)^2 \cdot C'(\lambda_i) = 0 \\ \vdots \quad (A - \lambda_i I)^3 \cdot C''(\lambda_i) = 0 \\ \vdots \\ (A - \lambda_i I)^m \cdot C^{(m-1)}(\lambda_i) = 0 \end{array} \right.$$

$$A u_i = \lambda_i u_i$$

$$(A - \lambda_i I) u_i = 0$$

Če imamo m -kratno lastno vrednost, moramo začeti s m enačbami. m enačb, da im lastnih vektorjev, ki jih imenujemo posplošeni lastni vektorji.

Postopek: določimo $C(\lambda)$ in $C(\lambda_i)$ in poišči zbiranje neodvisnih lastnih vektorjev v matrike $C(\lambda_i)$. Npr: če je $C(\lambda_i)$ matrika 3×3 potem lahko poiščemo največ 3 lastnih vektorjev, lahko pa tudi manj (odvisno). Če it matrike $C(\lambda_i)$ ne moreš poiskati vseh lastnih vektorjev, preloži $C'(\lambda_i)$ in ponovi postopek...

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow g(\lambda) = (2-\lambda)^2(3-\lambda) + 2 + 2 - (3-\lambda) - 2(2-\lambda) - 2(2-\lambda) = \\ = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda + 5 = 0$$

$$g(\lambda) = (\lambda-5)(\lambda-1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu} = \frac{\lambda^3 - \mu^3}{\lambda - \mu} - 7 \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu} + 11 = \\ = (\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) - 7(\lambda + \mu) + 11 = \\ = \underbrace{(\lambda^2 - 7\lambda + 11)}_{\lambda I} + \underbrace{(\lambda\mu + \mu^2 - 7\mu)}_{\mu \rightarrow A}$$

$$f(\lambda, \mu) = (\lambda^2 - 7\lambda + 11) \cdot I + A^2 - 7A + \lambda A$$

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 5\lambda + 4 & 2\lambda - 2 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 2\lambda - 2 & \lambda^2 - 5\lambda + 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow C(\lambda_1) = C(5) = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(\lambda_2 = \lambda_3) = C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \text{iz te matrice ne moremo}$$

izločiti nobenega lastnega

vektorja, zato moramo odvežat $\rightarrow$ d

$$C'(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda - 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2\lambda - 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2\lambda - 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C'(1) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \dots \text{ali to sedaj lahko izrazimo s kakšno}$$

linearno kombinacijo? DA...

$$u_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Theta = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [u_1 : u_2 : u_3]$$

$$J = \Theta^{-1} A \Theta ; \quad J \dots \text{Jordanova kanonična forma,}$$

$$\left. \begin{array}{l} J = \Lambda \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \\ J \neq \Lambda \quad \lambda_i = \lambda_j \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{lahko je diagonalna ali pa ne,} \\ n \text{ primerov, da imamo večkratno lastno r.} \end{array}$$

dobimo:

$$J = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad J = \Lambda$$

→ v primeru, ko imamo večkratne lastne vrednosti...

ko dobimo, da Jordanova kanonična forma ni diagonalna...

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - \lambda + 3 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$$

$$f(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda - \mu} [(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - (\mu^2 - 4\mu + 4)]$$

$$f(\lambda, \mu) = (\lambda^2 - \mu^2) / (\lambda - \mu) - 4(\lambda - \mu) / (\lambda - \mu) = \lambda + \mu - 4$$

$$C(\lambda) = f(\lambda I, A) = (\lambda - 4)I + A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$C(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad C'(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Theta^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad J = \Theta^{-1} A \cdot \Theta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J \neq \Lambda$$

↳ zakaj je sedaj drugače?

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 & \lambda_5 \end{bmatrix}$$

Naj ima matrike A lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_5$. λ_2 naj ima večkratno algebrastost λ_3 , λ_3 pa večkratno algebrastost λ_2 .

Lastni vektorji, ki pripadeta λ_3 smo izločili iz ene matrike, lastni vektorje, ki pripadajo λ_2 , pa smo dočili iz treh matrik.

→ Jordanova kanonična forma

ALTERNATIVNI POSTOPEK DOLOČANJA MATRIKE J

↳ Oblike Jordanske kanonične formule nam povedo tem, kako se bo sistem obnašal.

$$J = \Theta^{-1} A \cdot \Theta$$

$\Theta = [u_1 | u_2 | \dots]$... pri tem postopku ne bomo dobili lastnih vektorjev

$$J \rightarrow e^{Jt} \rightarrow e^{At}$$

$$A, g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots$$

$$\lambda_i \dots (\lambda - \lambda_i)^m$$

$$[A - \lambda_i I]^k \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

Za vsako vrednost k -je poiščemo rang matrike $\text{rang}_k = r_k$ → št. neodvisnih stolpcov in vrstic...

$$r_k = \text{rang } [A - \lambda_i I]^k \quad \hookrightarrow [A - \lambda_i I]^k$$

$r_0, r_1, \dots, r^m \dots$ Segre → iz tega dobimo Ferrer-jev diagram

Segre-jeva značilnica

$$[r_0 - r_1, r_1 - r_2, \dots, r_{m-1} - r_m]$$

Ne določanju rangov^{ne} končamo, dokler dva zaporedna ranga nista enaka.

PRIMER:

$$A_{6 \times 6} \quad ; \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 1$$

$$\begin{array}{l} [A - \lambda_i I]^k \\ [A - \lambda]^k \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} \lambda_i = 1 \\ k = 0, 1, \dots, 5 \end{array}$$

$$r_0 - r_1 = 4$$

$$r_1 - r_2 = 0$$

$$r_0 = 6, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 1$$

$$r_4 = 1$$

$$\Rightarrow [2 \ 2 \ 1]$$

$$\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ * & \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \rightarrow J = \Theta^{-1} A \Theta \quad ; \quad J = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad ; \quad e^{At} = \Theta e^{\Lambda t} \Theta^{-1}$$

$$J \neq \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \lambda_1 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = ?$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = e^{\begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}} = e^{\begin{bmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}} \cdot e^{\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \text{c}$$

$$\Rightarrow e^{Jt} = e^{\Lambda t} \cdot e^c \quad ; \quad e^c = I + c + \frac{c^2}{2!} + \dots \quad ; \quad c^2 = 0 \quad ; \quad c^3 = 0 \dots$$

$$\Rightarrow \underline{e^c = I + c} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad e^{Jt} = e^{\Lambda t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t \cdot e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}}$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t \cdot e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \quad \text{Vidimo da je to enako} \quad \frac{d}{d\lambda} \cdot e^{\lambda t} = t e^{\lambda t}$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \lambda_1 & 1 \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_1 t} \\ & e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ 0 & & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{S} \rightarrow \dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t) = e^{At} \cdot x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B u(\tau) d\tau$$

$$e^{At} = ?$$

$$x(t)$$

ZGLD:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \Theta e^{Jt} \Theta^{-1} \quad ; \quad J = \Theta^{-1} A \Theta$$

$$q(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$$\Theta = [\mu_1; \mu_2; \mu_3] \quad ; \quad f(\lambda, \mu) = \frac{q(\lambda) - q(\mu)}{\lambda - \mu} = \frac{(-1-\lambda)^3 - (-1-\mu)^3}{\lambda - \mu}$$

$$\begin{aligned} (-1-\lambda)^3 &= -1 - 3\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3 \Rightarrow f(\lambda, \mu) = \frac{(\lambda - \mu)^3}{\lambda - \mu} + 3 \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu} + 3 \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \mu} = \\ &= \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu + 3 = \\ &= (\lambda^2 + 3\lambda + 3) + (\mu^2 + 3\mu + 3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C(\lambda) = f(\lambda I, A) = (\lambda^2 + 3\lambda + 3)I + (A^2 + (\lambda + 3)A)$$

$$\Rightarrow C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 1 & 0 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{bmatrix} \quad \text{... Vstavimo za } \lambda = -1$$

$$\Rightarrow C(-1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mu_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C'(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda + 2 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda + 1 \end{bmatrix} \rightarrow C'(-1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mu_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C''(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \mu_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Theta^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \Theta^{-1} A \Theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{Jt} = \Theta^{-1} e^{At} \Theta \quad ; \quad e^{At} = \Theta \cdot e^{Jt} \cdot \Theta^{-1}$$

Alternativni postopek določanja matrike J:

$m=3 \dots \lambda$ je n-kratna ničla $\rightarrow [A - \lambda I]^k \quad ; \quad k=0,1,2,3$

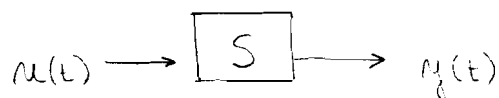
$$[A + I]^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow r_0 = 3 ; \quad [A + I]^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow r_1 = 2$$

$$[A + I]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow r_2 = 1 ; \quad [A + I]^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow r_3 = 0$$

$\rightarrow$ segre $\rightarrow [1 \ 1 \ 1]$

$$\frac{\begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix}}{3}$$

V. PRENOSNA FUNKCIJA



$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^n u}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u / \mathcal{L}$$

NE UPOŠTEVAMO ZAČETNIH STANJ!...

$$\Rightarrow a_n s^n Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_n s^m U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

$$\Rightarrow (a_n s^n + \dots + a_0) Y(s) = (b_n s^m + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$\rightarrow Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

$$H(s) = K \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\dots(s-z_m)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\dots(s-s_n)}$$

K ... statično gain
 $z_1, \dots, z_m$... ničle ; $s_1, \dots, s_n$... poli

PRIMER:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u'(t) + 2u(t) \quad / \quad \mathcal{L}$$

$$H(s) = ?$$

$$s^2 Y(s) + 3s Y(s) + 2Y(s) = s U(s) + 2U(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2) Y(s) = (s + 2) U(s)$$

$$\rightarrow H(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+2)} \Rightarrow z_1 = -3 ; s_1 = -1 ; s_2 = -2 \quad (1)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right] = \underline{2e^{-t} - e^{-2t}} ; t \geq 0$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$\rightarrow (sI - A) \cdot X(s) = B U(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)$$

$$\rightarrow Y(s) = C (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) + D \cdot U(s) = U(s) \cdot (C (sI - A)^{-1} B + D)$$

$$H(s) = Y(s) \cdot U(s)^{-1} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \text{in ko imamo en vhod in en izhod...}$$

$$\rightarrow H(s) = Y(s) \cdot U(s)^{-1} = C (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

$$\dots y = Cx ; D = 0 \Rightarrow \underline{H(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B}$$

PRIMER: $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$; $y = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 1 \end{bmatrix} x$

A B C

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & s-3 \end{bmatrix} \rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det} \cdot \begin{bmatrix} (s-1)(s-3) & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s-3) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)(s-2) \end{bmatrix}$$

$$\det = (s+1)(s-2)(s-3)$$

$$\Rightarrow (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} ; \quad H(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B = [6 \ -6 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

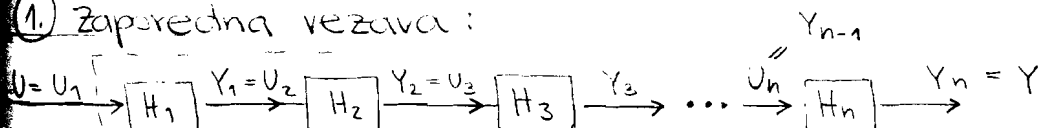
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} [6 \ -6 \ 1] = \frac{6}{s+1} - \frac{6}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

$$\Rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \underline{6e^{-t} - 6e^{-2t} + e^{-3t}} ; \quad t \geq 0$$

$$u(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y(t) ; \quad \dot{x} = Ax + Bu ; \quad y = Cx ; \quad \tilde{x} = Tx$$

$$x(t) \quad H(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B \quad \boxed{\tilde{H}(s) = H(s)} !$$

-2 ① Zaporedna vezava:

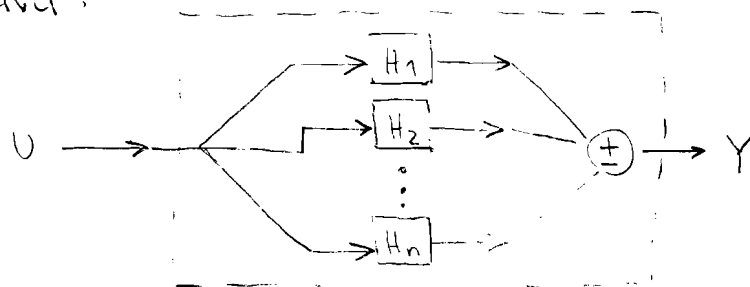


$$Y_i = H_i \cdot U_i$$

$$Y = Y_n = H_n \cdot U_n = H_n \cdot Y_{n-1} = H_n \cdot H_{n-1} \cdot U_{n-1} = \dots = H_n \cdot H_{n-1} \cdot \dots \cdot H_1 \cdot U_1 = U$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = H_n(s) \cdots H_2(s) \cdot H_1(s)}$$

② Vzporedna vezava:



$$H(s) = ?$$

$$Y(s) = \pm Y_1(s) \pm Y_2(s) \dots \pm Y_n(s)$$

$$Y(s) = \pm H_1(s) U_1 \pm H_2(s) U_2 \pm \dots \pm H_n(s) U_n$$

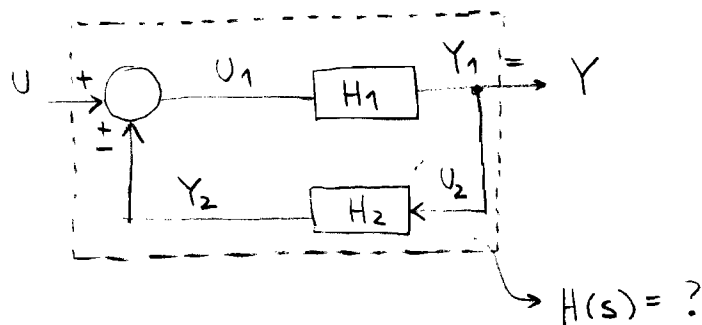
$$Y(s) = (\pm H_1(s) \pm H_2(s) \pm \dots \pm H_n(s)) \cdot U(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = H_n(s) \pm \dots \pm H_2(s) \pm H_1(s)}$$

1.) zaporedna

2.) vzporedna

③ SISTEM S POVRATNO ZANKO (pozitivno, negativno)



$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

$$\underline{Y} = Y_1 = H_1 \cdot U_1 = H_1 (U \pm Y_2) = H_1 (U \pm H_2 U_2) = \\ = \underline{H_1 (U \pm H_2 Y)}$$

$$Y = H_1 U \pm H_1 H_2 Y$$

$$Y \mp H_1 H_2 Y = H_1 U$$

$$\Rightarrow (I \mp H_1 H_2) Y = H_1 U$$

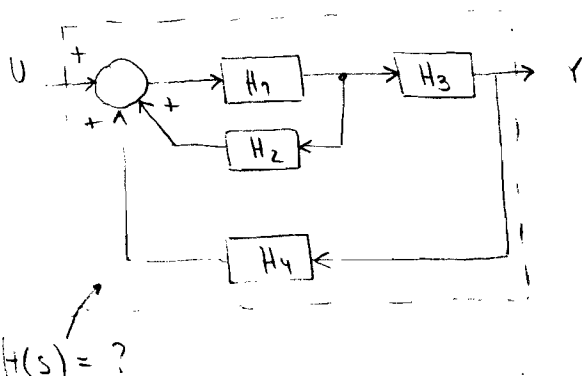
$$Y = (I \mp H_1 H_2)^{-1} H_1 \cdot U$$

$$\Rightarrow H_S = (I \mp H_1(s) H_2(s))^{-1} H_1(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{H_1}{1 \mp H_1 H_2} \quad ; \quad H_2 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{H(s) = (I \mp H_1)^{-1} \cdot H_1}$$

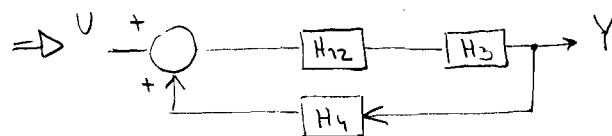
ZGLED: Imamo sistem:



→ Imamo dve pozitivni povratni zanki

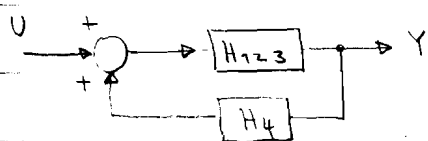
• zanima nas, kakšna je prenosna funkcija...

1.) Združimo H_1 in H_2 in dobimo H_{12} :



$$H_{12} = (I - H_1 H_2)^{-1} \cdot H_1$$

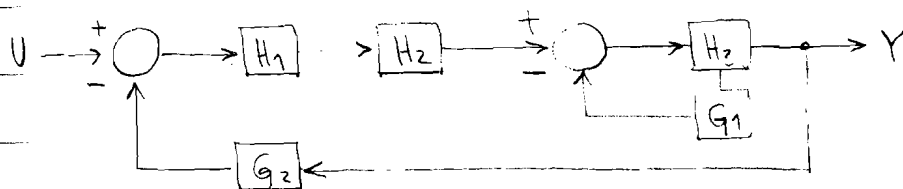
2.) Združimo H_{12} in H_3 in dobimo H_{123} :



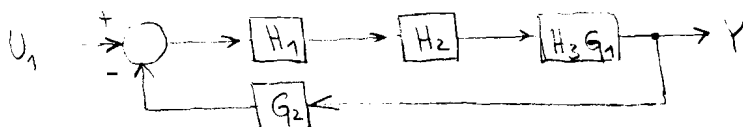
$$H_{123} = H_3 (I - H_1 H_2)^{-1} H_1$$

$$\Rightarrow H(s) = H_{123} = [I - H_3 (I - H_1 H_2)^{-1} H_1 H_4]^{-1} \cdot [H_3 (I - H_1 H_2)^{-1} \cdot H_1]$$

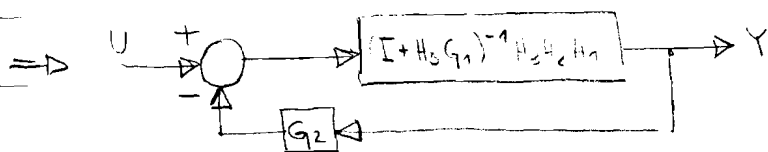
2. ZGLED: Imamo sistem:



- Združimo H_3 in G_1 :



$$H_3 G_1 = (I + H_3 G_1)^{-1} \cdot H_3$$



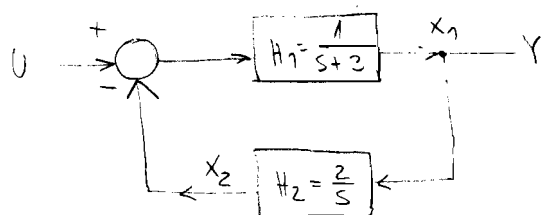
$$\Rightarrow H(s) = [I + (I + H_3 G_1)^{-1} \cdot H_3 \cdot H_2 \cdot H_1 \cdot G_1]^{-1} \cdot (I + H_3 G_1)^{-1} H_3 H_2 H_1$$

Prejemo izraza izračuna kot produkt dveh polinomov...

Npr: Imamo sistem modeliran z diferencialnimi enačbami 1. reda:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX + Du \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Zanima nas, ali lahko, če imamo podatno shemo,} \\ \text{pridemo do nekega takega sistema enačb...} \end{array} \right\}$$

Poglejmo si na primeru...



= prenosna funkcija ... sistem 1. reda:

X_1 in X_2 ... sta spremenjiški stanji...

(...če se slučajno zgodi, da je prenosna funkcija sistema višjega reda:

$$\text{npr: } H = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{(s+s_1)(s+s_2)} = \frac{A}{s+s_1} + \frac{B}{s+s_2}$$

$$\dot{X} = AX + Bu \quad \text{...}$$

$$\rightarrow sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$\Rightarrow X_1(s) =$$

$$sX_2(s) =$$

$$X_1 = H_1(U - X_2) = \frac{1}{s+3} (U - X_2) \quad ; \quad (s+3)X_1 = U - X_2$$

$$\Rightarrow sX_1 = -3X_1 - X_2 + U \quad \text{... dobili smo 1. enačbo...}$$

$$X_2 = H_2 \cdot X_1 = \frac{2}{s} \cdot X_1 \quad \rightarrow \quad sX_2 = 2X_1$$

$$\Rightarrow \dot{X} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

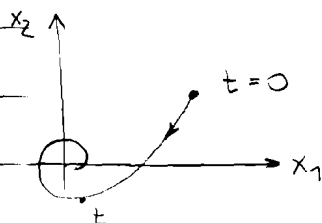
$$Y = X_1$$

$$y = [1 \ 0] X$$

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

... zdaj imamo poiskati prenosno funkcijo nekega sistema pri različnih vezavah...

VI. STANJA RAVNOTEŽJA



$u(t) = 0$ ni vzbujanja $x(t) = e^{At} \cdot x(0)$

$u(t) \neq 0$ vzbujanje

$\rightarrow x(t) = e^{At} \cdot x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau$

V vsakem trenutku

imamo neko stanje ...

Med stanji, ki jih lahko razume nek sistem so potrebaj važne njegova ravnotežna stanja. DEFINICIJA $\Rightarrow$

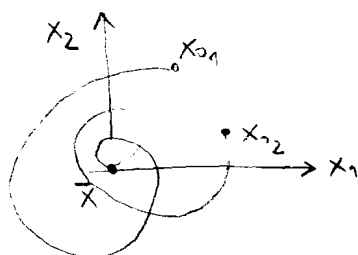
Ravn. stanje je stanje, ki se ne spremeni, če sistem prepustimo samemu sebi. Ravnotežno stanje je tamo, kjer ni več sprememb

Preizkusimo nek lin. sistem, kjer ni vzbujanja: $u(t) = 0$:

$\Rightarrow$ V ravnotežnem stanju smo takrat, ko so odvodi enaki 0!

$\dot{x} = Ax$; $\dot{x} = 0 \Rightarrow A\bar{x} = 0 \rightarrow \bar{x} = 0$ ravn. stanje...

Ravn. stanje lin. sistemov je eno samo in se nahaja v izhodišču prostora stanj!



Zanima nas tudi po kateri tirnici pridemo do ravnotežnega stanja!

Fazni portret = ravnotežna stanja + tirnice v okolici ravnotežnih stanj!

Kaj določa obliko tirnice? $\Rightarrow$ Matrika prehajanja stanj. V njej nastopajo lastne vrednosti ... torej one $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ določajo obliko tirnice

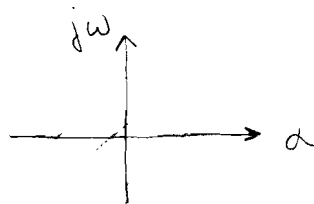
Vzemimo primer sistema 2. reda:

$$\dot{x} = Ax \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow g(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (a \cdot d - b \cdot c) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left((a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)} \right)$$



Ravnokotna st. linearnih sistemov se med seboj razlikujejo glede na potek tirnic. Glede na to jih razvrščamo po:

1.) SREDIŠČA ali CENTRE

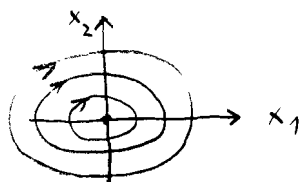
2.) ŽARIŠČA

3.) VOZLIŠČA

4.) SEDLA

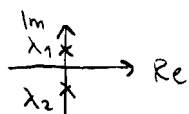
1.) SREDIŠČA:

Ravn. st. središče ponazarja točka, ki jo tirnice popolnoma obkrožajo

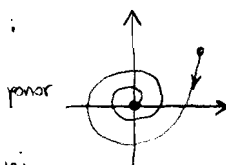


lastni vrednosti λ_1 in λ_2 ležita na imaginarni osi

$\Rightarrow$ sta čisto imaginarni $\Rightarrow$ nedušeno nihanje

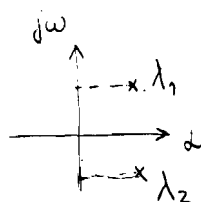
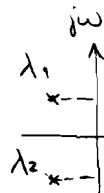


2.) Ravnokotno st. ŽARIŠČE ponazarja točka, ki je izvor ali ponor tirnic, ki imajo obliko spirale:

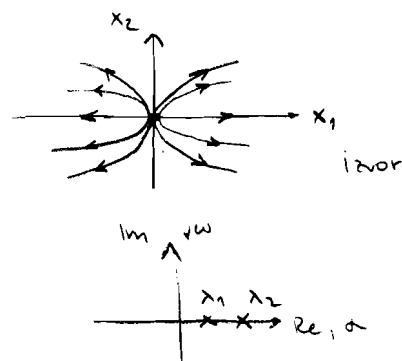
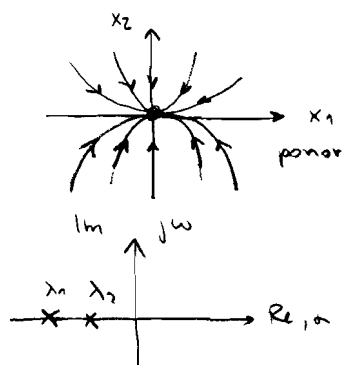


lastni vrednosti ležita na levi/desni

strani ... sta konjugirano kompleksni...

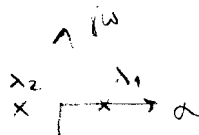
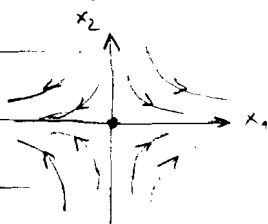


3.) Ravn. st. VOZLIŠČE ponazarja točka, ki je izvor ali ponor
linij katrinskih oblik.



lastni vrednosti sta realni !!!

4.) Ravn. st. SEDLO ponazarja točka, kateri se linije najprej
približujejo potem pa od nje oddaljujejo.



(Domača stran: lit.fe.uni-lj.si ... Domača naloga - sedaj poročilo do
1. tedna in novem letu!)

PRIMER ZA VZBUJANJE:

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$\dot{X} = 0 \quad \text{... ravn. stanje}$$

$$A\bar{X} + Bu = 0$$

$$\bar{X} = -A^{-1}B \cdot u$$

$$\bar{X} = 0$$

$$u = 0$$

Če je $\dot{x} = f(x, u)$ nelinearna dif. enačba ; $u = 0$

$$\dot{x} = f(x) ; \quad \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n)$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

Nelinearni sistemi imajo v splošnem več ravnotežnih stanj:

$$\dot{x} = 0 \quad ; \quad f(\bar{x}) = 0$$

$\bar{x}' \quad \bar{x} \quad \bar{x}$

Poglejmo si dva primera:

1.)

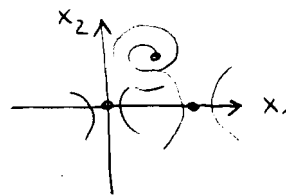
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - x_1^2 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_1x_2 \end{cases} \quad \text{nelinearen sistem dif. enačb}$$

ravn. stanja: $\dot{x}_1 = 0 \quad ; \quad \dot{x}_2 = 0$

$$\begin{aligned} 5\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2 - \bar{x}_1\bar{x}_2 &= 0 \quad \rightarrow \quad \bar{x}_1(5 - \bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0 \\ -2\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 &= 0 \quad \rightarrow \quad \bar{x}_2(-2 + \bar{x}_1) = 0 \end{aligned}$$

RAVN. STANJA:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \bar{x}_1 &= 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \\ \textcircled{2} \quad \bar{x}_2 &= 0, \quad \bar{x}_1 = 5 \\ \textcircled{3} \quad \bar{x}_1 &= 2, \quad \bar{x}_2 = 3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sistem ima} \\ 3 \text{ ravn. stanja} \end{array}$$



2.) $\dot{x}_1 = -13x_1 + x_1^2 + x_1x_2 + 3$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$$

$$\rightarrow -13\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 + 3 = 0$$

$$-3\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0$$

$$\bar{x}_2 = 3\bar{x}_1$$

$$-13\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_1^2 + 3 = 0$$

$$4\bar{x}_1^2 - 13\bar{x}_1 + 3 = 0$$

$$\bar{x}_1 = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{8}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{13 \pm 11}{8}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{1,1} &= 3, & \bar{x}_{2,1} &= 9 \\ \bar{x}_{1,2} &= \frac{1}{4}, & \bar{x}_{2,2} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

VII. Stabilnost, vodljivost in spoznavnost linearnih sistemov

$$\dot{x} = Ax \quad ; \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x \quad ; \quad g(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad-bc) = 0$$

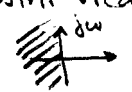
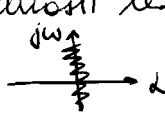
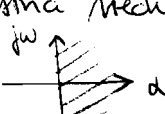
$\downarrow$
 λ_1, λ_2

$$A \rightarrow \lambda_1, \lambda_2$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$$\bar{x} = 0 \quad a + \Delta a$$

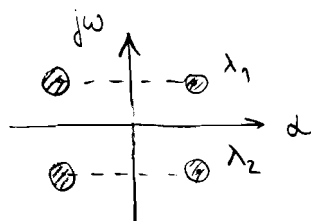
Ravnatežno stanje $\bar{x}$ je:

- 1.) ASIMPTOTIČNO STABILNO, če sta realni vrednosti lastnih vrednosti negativni: $\text{Re}[\lambda_1] < 0$, $\text{Re}[\lambda_2] < 0$ (lastni vrednosti sta na levi strani kompleksne ravnine)  $\lambda_{1,2} = \pm g \cdot j \rightarrow \lambda_{1,2} = r \pm sj$
- 2.) STABILNO, vendar ne asimptotično stabilno, če sta realne dele lastnih vrednosti enaka nič. (lastni vrednosti ležita na imaginarni osi) $\text{Re}[\lambda_1] = 0$ in $\text{Re}[\lambda_2] = 0 \rightarrow$ 
- 3.) NESTABILNO, če ima katerikoli lastna vrednost pozitiven realni del $\text{Re}[\lambda_1] > 0$ in/ali $\text{Re}[\lambda_2] > 0$ 

Majhne spremembe osnovne matrice A se bodo odražale v majhnih spremembah lastnih vrednosti:

$$a \pm \Delta a \quad ; \quad b \pm \Delta b$$

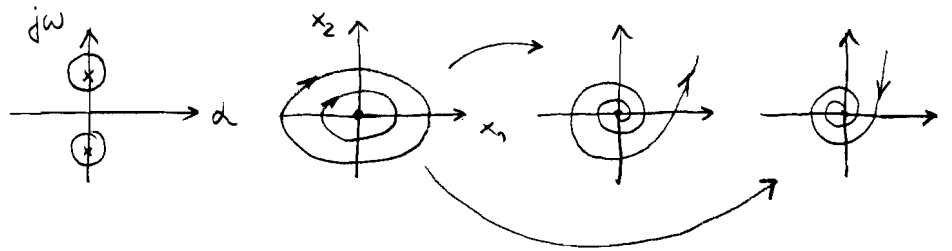
$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $\lambda_1 \pm \Delta \lambda_1 \quad \lambda_2 \pm \Delta \lambda_2$



Asimptotično stabilno ravnatežno stanje ostane asimptotično stabilno in nestabilno ravnatežno stanje ostane nestabilno

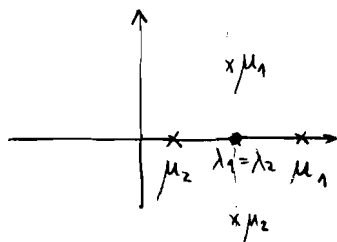
2. točka (STABILNO...) je edini primer, v katerem majhne spremembe elementov matrice A vplivajo na stabilnost.

Čiste imaginarne lastne vrednosti $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ se spreminjajo v konjugirano kompleksne lastne vrednosti $\lambda_{1,2} = r \pm sj$, kjer je r pozitivna oz. negativna vrednost. Posledično se stabilno središče spremeni v karščič, ki je bodisi nestabilno (izvor) ali asimptotično stabilno (senor).



* Ali obstaja še kakšen primer, ko se zaradi majhnih sprememb elementov matrike A spremeni tip ali stabilnost rovn. stanja?

DA. Poglejmo primer, ko se spremeni tip, ne pa tudi stabilnost rovn. stanja.

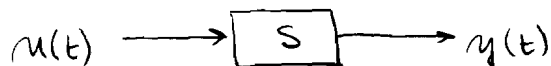


Predpostavimo, da smo z uvažanimi stanja modelirali realni linearni sistem. Halo je mogoče, da lahko koeficiente a, b, c, d eksaktno določimo.

Naj bo $\dot{x} = \begin{bmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{bmatrix} x$ merjeni matrični model.

Če so koeficienti a, b, c, d dovolj blizu koeficientom a^*, b^*, c^*, d^* je izhodišče asimptotično stabilno ka a, b, c, d , če je asimptotično stabilno ka a^*, b^*, c^*, d^* in nestabilno ka a, b, c, d , če je nestabilno ka a^*, b^*, c^*, d^* .

VODLJIVOST lin. sistemov:



$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad g(\lambda) = |A - \lambda I| \rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \rightarrow e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

$$\lambda_i; i=1,2,\dots,n \quad ; \quad e^{\lambda_i t}; i=1,2,\dots,n$$

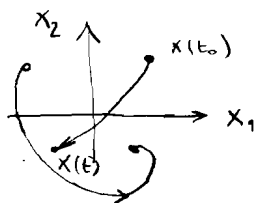
↳ spekter načinov
ali lastnih izrazov!

M-lastnih vrednosti ustreza M-matrnici sistema

- Zveni sistem je vodljiv, če ga je možno s primernim vhodnim signalom $u(t)$ prevesti v končen čas iz kateregakoli začetnega stanja $x(t_0)$ v poljubno končno stanje $x(t)$ (iz kateregakoli stanja v kateregakoli stanje) $x(t_0) \rightarrow x(t)$

• Naloga si želimo vodljive sisteme!

- Sistem je vodljiv, če so vsi načini dostopni našim akcijam oz. "speki" z vhodnim signalom.



$$e^{\lambda_i t}, i=1,2,\dots,n$$

$$e^{At}$$

$$\text{rang } M = n$$

$$u(t)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\text{rang } M < n$$

test za vodljivost sistema!

$$M = [B \mid A \cdot B \mid A^2 \cdot B \mid \dots \mid A^{n-1} \cdot B]$$

sistem ni vodljiv!

- Sistem je vodljiv, če in samo če so vektorji $B, A \cdot B, A^2 \cdot B, \dots$

linearno neodvisni

$$\text{npr. } A_{2 \times 2} \Rightarrow M = [B \mid AB]$$

PRIMER:

$$\text{Ali je sistem } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ vodljiv?}$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rang } M < 3 \Rightarrow \text{sistem ni vodljiv!} \\ (\text{rang } M = 2 < 3)$$

2) PRIMER:

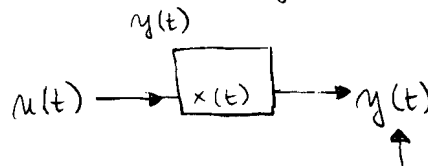
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang } M = 3$$

$\Rightarrow$ sistem je vodljiv!

SPozNAVNOST:

- Zvečni sistem je spoznaven, če je možno določiti njegovo stanje na osnovi končno dolgega opazovanja njegovega izhodnega signala.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$



$$\dot{x} = Ax + Bu \rightarrow x(t)$$

$$y = Cx + Du$$

$$e^{\lambda_i t}; i=1, 2, \dots, n$$

Če preizkusi različne sisteme niso vsebovani v $y(t)$ in to pomeni, da ne vidimo vhodni signal, potem niso spoznavni oz. niso "speti" z izhodnim signalom.

Test spoznavnosti:

stolpce matrice N sestavimo: $N = [C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T]$

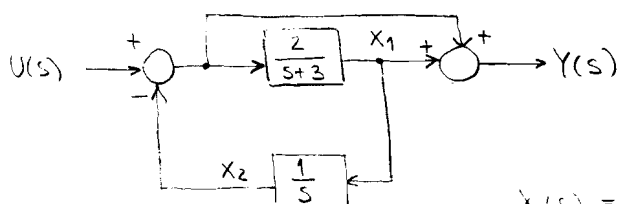
rang $N = n$... sistem je spoznaven

$\text{rang } N < n$... sistem ni spoznaven

PRIMER: Ali je sistem spoznaven? $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A^T$; $C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang } N < 3 \text{ ... sistem ni spoznaven!}$$

ZGLED: Ali je sistem stabilen, spoznaven?



$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

$$X_1(s) = \frac{2}{s+3} (U(s) - X_2(s))$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s} X_1(s)$$

$$\Rightarrow -X_1(s) + 3X_1(s) = 2U(s) - 2X_2(s)$$

$$sX_2(s) = X_1(s) / s^{-1}$$

$$\Rightarrow -X_1(s) = 2U(s) - 3X_1(s) - 2X_2(s) / s^{-1}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = 2u(t) - 3x_1(t) - 2x_2(t)$$

v matrični obliki: $\dot{X} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$

$$Y(s) = X_1(s) + U(s) - X_2(s) / s^{-1} \rightarrow y(t) = x_1(t) + u(t) - x_2(t)$$

$$\rightarrow \underline{y = [1 \ -1] x + [1] u}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu ; \quad \dot{x} = 0 \rightarrow Ax + Bu = 0 \rightarrow \bar{x} = -A^{-1} \cdot Bu$$

$$q(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\lambda(3-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$$

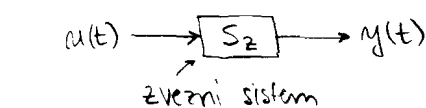
* realni lastni vr: $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = -2 \rightarrow$ sistem je stabilen
ker lastni vrednosti ležita na levi strani

• Ravnolično stanje je VOZLIŠČE in je ponor

$$M = [B \mid AB] = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ; \quad \text{rang } M = 2 \rightarrow \text{sistem je vodljiv}$$

$$N = [C^T \mid A^T C^T] = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rang } N = 2 \rightarrow \text{sistem je spopnoven!}$$

VIII. DISKRETNİ SISTEMI



$$u(t) = 0, \quad t < 0$$

$$u(t) = 1, \quad t \geq 0$$



$$u[kT] \triangleq u[k] = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

kT je diskretna časovna spremenljivka. Ker je T fiksna pozitivna konstanta, bomo uporabljali samo k , da omogočimo diskretni časovni trenutek.

$$k \triangleq kT \quad f[kT] \triangleq f[k]$$

VIII.1. MODELIRANJE Z DIFERENČNO ENAČBO

(Uporabiti bomo dve vrsti diferenčnih enačb).

Linearne, časovno nespremenljive diskretne sisteme modeliramo z linearnimi diferenčnimi enačbami s konstantnimi koeficienti. Pri tem lahko uporabimo dva zapisa: 1.) ČASOVNO PREHITEVAJOČ in 2.) ČASOVNO ZAKASNjen

$$\textcircled{1} \quad y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + \dots + a_1y[k+1] + a_0y[k] = b_nu[k+n] + \dots + c_0u[k]$$

... Potrebujemo še n -začetnih pogojev = n -zaporednih odzivov: $y[0], y[1], \dots, y[n-1]$
 $y[k_0], y[k_0+1], \dots, y[k_0+n-1]$ $k_0 = 0 \rightarrow$ (najpogostejše $t=0$)

~ Rešitev: iščemo $y[k]$ za $k=1, 2, \dots$ oz. $k \geq n$ oz. $k = k_0 + n$

Ta zapis je v skladu s splošno matematično konjugo linearnih diferenčnih enačb s konstantnimi koeficienti. Takšen zapis dobimo tudi po diskretizaciji linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti. Takšen zapis uporabljamo tudi pri numeričnem reševanju diferencialnih enačb. Pomembno je tudi, da zapis R enačbami stavi, dobimo iz te oblike diferenčne enačbe.

$$+ b_1 u[k-(m-1)]$$

$$y[k] + a_{n-1} y[k-1] + \dots + a_1 y[k-(n-1)] + a_0 y[k-n] = b_m u[k] + \dots + b_0 u[k-m]$$

~ začetni pogoji (n neposrednih vrednosti odzivov):

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-n]$$

~ iščemo: $y[k]$ za $k \geq 0$, za $k < 0$ pa imamo že zajeto pri začetnih pogojih.

~ Ta zapis je bolj inženirsko orientiran; uporablja se npr. pri linearnih digitalnih filterih.

PRIMER:

$$y[k+2] - 3y[k+1] + 2y[k] = u[k+1]$$

$$y[0] = 0$$

$$y[1] = -4$$

$$u[k] = 3^k u^*[k] \dots \text{s tem signalom vzbujamo}$$

$$u^*[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

→ dve začetni stanji, ki ji potrebujemo

$$y[k] - 3y[k-1] + 2y[k-2] = u[k-1]$$

$$y[-1], y[-2]$$

~ moramo še določiti

k postavimo na -1:

$k = -1$ (iz 1. enačbe dobimo:)

$$y[1] - 3y[0] + 2y[-1] = u[0] = 1$$

$$2y[-1] = -y[-1] + 3y[0] + 1$$

$$y[-1] = \frac{1}{2}(4+1) = \frac{5}{2}$$

(drugačen način zapisa - moramo odšteti 2 v vsaki enačbi)

$$k = -2$$

$$\Rightarrow y[0] - 3y[-1] + 2y[-2] = u[-1] = 0$$

$$k_0 = 0$$

$$\Rightarrow 2y[-2] = -y[0] + 3y[-1]$$

$$y[-2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} = \frac{15}{4}$$

$$y[k+1] - 3y[k] + 2y[k-1] = u[k]; \quad y[0], y[-1] = ?$$

$$\Rightarrow y[0] = 0, \quad y[-1] = \frac{5}{2}$$

~ diskretnih sistemih nastopajo diferencialne enačbe, ki jih lahko rešujemo

~ časovnem in frekvenčnem prostoru. Preslikava, ki diferencialne enačbe preslika

~ frekvenčni prostor se imenuje z-preslikava.

* Z-preslikavo uporabljamo pri reševanju diferencialnih enačb podobno kot uporabljamo Laplace-ovo preslikavo za reševanje diferencialnih enačb.

Z-preslikava prevede reševanje linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti v reševanje algebrskih enačb.

Z-PRESLIKAVA:

$$f[k] \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$F[z] = Z[f[k]]$$

$$F[z] = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] \cdot z^{-k}$$

Inverzna preslikava:

$$f[k] = z^{-1}[F[z]]$$

• Lastnosti Z-preslikave:

1.) Linearnost:

$$Z[a_1 f_1[k] + a_2 f_2[k]] = a_1 F_1[z] + a_2 F_2[z]$$

2.) Premaknitev v desno:

$$f[k]; \quad k_0 > 0 \quad \rightarrow \text{enotna stopnica, ... \& njo množimo z } z^{k_0}, \text{ da omejimo na pozitivne } k \text{ -je}$$

$$Z[f[k-k_0] \cdot u[k-k_0]] = \frac{1}{z^{k_0}} F[z] \quad \dots \text{ podobno kot integracija v Laplace}$$

3.) Premaknitev v levo:

$$Z[f[k] \cdot u[k]] = F[z]$$

$$Z[f[k+1] \cdot u[k]] = z F[z] - z f[0] \quad \dots \text{ podobno kot odvajanje pri Laplace}$$

$$Z[f[k+2] \cdot u[k]] = z^2 F[z] - z^2 f[0] - z f[1]$$

$$\text{SPLOŠNO: } Z[f[k+k_0] \cdot u[k]] = z^{k_0} F[z] - z^{k_0} f[0] - z^{(k_0-1)} f[1] - \dots - z f[k_0-1]$$

4.) Skaliranje v frekvenčnem prostoru:

$$Z[a^k \cdot f[k]] = F\left[\frac{z}{a}\right]$$

$$Z[a^{-k} \cdot f[k]] = F[a \cdot z]$$

5.) Konvolucija:

$$Z[f_1[k] * f_2[k]] = F_1[z] \cdot F_2[z]$$

$$\rightarrow f_1[k] * f_2[k] = \sum_{m=0}^{\infty} f_1[m] \cdot f_2[k-m]$$

Tabela preslikav:

$f[k]$	$F[z]$
$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$	1
$M[k]$... enonimpulz	$\frac{z}{z-1}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
k^2	$\frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$
$k \cdot a^k$	$\frac{z \cdot a}{(z-a)^2}$
$\left. \begin{matrix} a^{k-1} & k \geq 0 \\ 0 & k = 0 \end{matrix} \right\}$	$\frac{1}{(z-a)}$

Tako kot pri Laplace-ovi preslikavi je tudi pri z -transformaciji najenostavnejši postopek reševanja uporaba tabele preslikav. Zato moramo funkcijo $F[z]$ najprej razstaviti na enostavne izraze (parcialne ulomke), ki jih nato preslikamo s pomočjo tabel.

Disketni sistem $\xrightarrow[\text{mat. modeliranje}]{} \text{diferenčna enačba}$

$$y[k+n] + a_{n-1} \cdot y[k+n-1] + \dots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = u[k] \quad / \cdot z$$

$y[0], y[1], \dots, y[n-1]$... začetni pogoji

$$z^n Y[z] - \text{začetni pogoji} + a_{n-1} [z^{n-1} Y[z] - \text{začetni pogoji}] + \dots + a_1 [z Y[z] - z y[0]] + a_0 Y[z] = U[z] \quad \dots \text{to nekoliko uredimo:}$$

$$[z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0] Y[z] - [\text{začetni pogoji}] = U[z]$$

$Q[z]$

$P[z]$

$\rightarrow$ značilni oz. karakteristični polinom

$\rightarrow$ polinom

$$\Rightarrow Q[z] \cdot Y[z] = P[z] + U[z]$$

$$\Rightarrow Y[z] = \frac{P[z] + U[z]}{Q[z]}$$

www.stromar.si

$\rightarrow$ značilna oz. karakt. enačba

$$Q[z] = 0 \Rightarrow z_1, z_2, \dots, z_n$$

$$Y[z] = \frac{P[z] + U[z]}{Q[z]} = \frac{P[z]}{Q[z]} + \frac{U[z]}{Q[z]} \quad \left| \quad \begin{array}{l} P[z] \dots \text{odziv na začetno sl.} \\ U[z] \dots \text{odziv na vzbujanje} \end{array} \right.$$

$$Q[z] = 0 \quad ; \quad z_1, z_2, \dots, z_n$$

$$y[k] = ?$$

$$Y[z] = \frac{P[z] + U[z]}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} = \frac{P[z] + U[z]}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)}$$

Razbijemo na parcialne ulomke:

$$Y[z] = \frac{A_1 z}{z-z_1} + \frac{A_2 z}{z-z_2} + \dots + \frac{A_n z}{z-z_n} \quad / \quad z^{-1}$$

$$A_i = (z-z_i) \cdot \frac{Y[z]}{z} \quad / \quad z=z_i$$

$$\Rightarrow \quad \text{cloud} \quad y[k] = \sum_{i=1}^n A_i \cdot z_i^k \quad \left. \begin{array}{l} \text{to lahko zapišemo tudi} \\ k=0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \quad \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{A_i z}{z-z_i} \right] = A_i \cdot z_i^k$$

1.) ZGLED:

$$Y[z] = \frac{z(z-1)}{(z+0.5)(z-0.5)(z+1)} \quad ; \quad y[k] = ?$$

$$\text{koreni so znani: } \begin{array}{ccc} -0.5 & +0.5 & \text{in } -1 \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{array}$$

$$Y[z] \text{ razbijemo na parcialne ulomke: } Y[z] = \frac{A_1 z}{z+0.5} + \frac{A_2 z}{z-0.5} + \frac{A_3 z}{z+1}$$

$$A_1 = 3, \quad A_2 = -1/3, \quad A_3 = -8/3 \Rightarrow y[k] = 3 \cdot (-0.5)^k - 1/3 (0.5)^k - 8/3 (-1)^k$$

2.) ZGLED: $X[z] = \frac{1}{(1-1/2)(1-0.5/z)} \quad ; \quad \text{iščemo } x[k]$

števci in
imenovalec množimo z z^2 : $X[z] = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{z^2}{z-1} + \frac{-z}{z-0.5} \quad / \quad z^{-1}$

$$\Rightarrow x[k] = 2 \cdot 1^k - 0.5^k = \underline{\underline{2 - 0.5^k}} \quad ; \quad k \geq 0$$

3. ZGLED: $x[k+2] = x[k+1] + x[k]$... ta enačba je homogena
- ni vzbujanja!

Imamo dve začetni stanji: $x[0] = 0$ in $x[1] = 1$

Kako bi to rešili numerično?

$x[k] = ?$; $k = 0, 1, 2, \dots$

→ Rešimo analitično:

$$z^2 \cdot X[z] - z^2 x[0] - z x[1] = z \cdot X[z] - z \cdot x[0] + X[z]$$

$$\Rightarrow (z^2 - z - 1) X[z] = z$$

$$\Rightarrow X[z] = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{A_1 \cdot z}{z - z_1} + \frac{A_2 \cdot z}{z - z_2} \quad ; \quad z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow X[z] = \frac{A_1 \cdot z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{A_2 \cdot z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

... pogledamo v tabelo, katana je inverna z-preslikava.

$$\Rightarrow z^{-1}[X[z]] = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} ; k \geq 1$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \frac{z}{1+\sqrt{5}} \rightarrow \text{dobimo: } \left. \begin{aligned} x_1[k] &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \\ x_2[k] &= \dots \end{aligned} \right\} k \geq 1$$

$$\left. \begin{aligned} x_1[k] &= 0 \\ x_2[k] &= 0 \end{aligned} \right\} k = 0$$

4) ZGLED: $y[k+2] - y[k+1] + \frac{1}{4}y[k] = u[k]$

začetni stanji: $y[0] = 1$; $y[1] = 2$

vzbujanje: $u[k] = (-2)^k \cdot u^*[k]$; $u^*[k]$... diskretna enotna stopnica.

- naredimo z preslikavo leve in desne strani:

$$z^2 Y[z] - z^2 y[0] - z y[1] - z Y[z] + z y[0] + \frac{1}{4} Y[z] = \frac{z}{z+2}$$

$$\Rightarrow (z^2 - z + \frac{1}{4}) \cdot Y[z] = z^2 + 2z - z + \frac{z}{z+2} = z^2 + z + \frac{z}{z+2}$$

$$\Rightarrow Y[z] = \frac{z^2+z}{z^2-z+1/4} + \frac{z}{(z+2)(z^2-z+1/4)} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-1}}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Y[z] = \frac{z^2+z}{(z-0.5)^2} + \frac{z}{(z+2)(z-0.5)^2} \xrightarrow{1/z} \text{ in razstavimo še na dva ulomke ...}$$

$$\Rightarrow y[k] = \frac{21}{25} (0.5)^k + \frac{19}{5} k (0.5)^k + \frac{76}{9} (-2)^k ; k \geq 2$$

Diferenčna enačba višjega reda $\rightarrow$ Sistem diferenčnih en. 1. reda:
 V sistem, ki ga opisuje diferenčna enačba n -tega reda, ki za določitev
 stanja diskretnega sistema potrebujemo n spremenljivk npr. n zaporednih
 vrednosti polziva y .

Diferenčna enačba 2. reda:

Npr.: $y[k+2] + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = b_0 u[k]$

$x_1[k], x_2[k]$

$x_1[k] = y[k]$

$x_1[k+1] = x_2[k] = y[k+1]$

$x_2[k+1] = y[k+2] = -a_1 y[k+1] - a_0 y[k] + b_0 u[k]$

$\Rightarrow x_2[k+1] = -a_1 x_2[k] - a_0 x_1[k] + b_0 u[k]$

• Zapišemo v matrični obliki:

enačbe stanj diskretnega sistema:

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}}_A x[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}}_B u[k]$$

$\Rightarrow x[k+1] = A \cdot x[k] + B u[k]$

$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x[k]$

$y[k] = C \cdot x[k] + D u[k]$

$y[k+n] + a_{n-1} y[k+n-1] + \dots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = b_0 \cdot u[k]$

$x_1[k], x_2[k], \dots, x_n[k]$

$x_1[k+1] = \dots$

$x_2[k+1] = \dots$

$x_n[k+1] = \dots$

$x_1[k] = y[k]$

$x_2[k+1] = x_2[k]$

$x_{n-1}[k+1] = x_n[k]$

$\Rightarrow x_n[k+1] = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + b_0 u[k]$

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u[k]$$

$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x[k]$

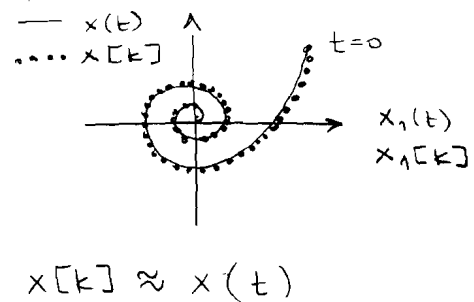
DISKRETIZACIJA ZVEZNIH SISTEMOV

Realni fizični sistemi so zvezni. Zvezne sisteme oz. njihove matematične modele lahko diskretiziramo (zvezni sistem obravnavamo kot diskretni sistem)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k] \\ y[k] &= C_d x[k] + D_d u[k] \end{aligned}$$

A, B, C in D niso enake A_d, B_d, C_d in D_d . Zanima nas, kako določimo matrice diskretnega sistema (A_d, B_d, C_d in D_d), če imamo podane matrice zveznega sistema (A, B, C in D)

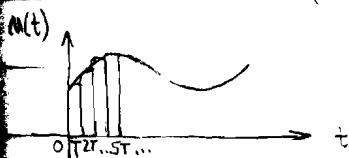
$A, B, C, D \xrightarrow{?} A_d, B_d, C_d, D_d$
(Spoznali bomo dve metodi za določanje A_d, B_d, C_d in D_d ...)



1) Integralna aproksimativna metoda:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot u(\tau) d\tau$$

Predpostavka: Vzbujaње je konstantno med dvema trenutki (vzorčenju). $\Rightarrow u(t) = u(kT)$



$$kT \leq t < (k+1)T \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

kT ... trenutki vzorčenja

zvezni

Prevedeni signal torej aproksimiramo s stopničastim rholodnim signalom

Zanima nas, kako ta aproksimacija vpliva na rešitev.

$t = T$

$$x(T) = e^{AT} x(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B \cdot u(0) d\tau$$

$$\rightarrow x(T) = e^{AT} \cdot x(0) + e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} B \cdot u(\tau) d\tau$$

$$x[kT+T] = A_d \cdot x[kT] + B_d \cdot u[kT]$$

$$k=0$$

$$\Rightarrow x[T] = A_d \cdot x[0] + B_d \cdot u[0]$$

$$\rightarrow x(T) \approx x[T]$$

$$A_d = e^{AT}$$

$$B_d = e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} B \cdot d\tau = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B d\tau = \int_0^T e^{A\sigma} B d\sigma$$

$$T - \tau = \sigma$$

$$\begin{matrix} C_d = C \\ D_d = D \end{matrix}$$

Rezultat integriranja:

$$\Rightarrow B_d = e^{AT} (-e^{-AT} A^{-1} + A^{-1}) \cdot B$$

$$B_d = (A_d - I) A^{-1} \cdot B$$

A_d in B_d smo dobili za časovni interval od 0 do T . Ker je sistem časovno nespremenljiv bi enak rezultat dobili za katerikoli časovni interval.

• Zdaj smo imeli integral 0 - T :

začetno stanje: $x(0)$, vzbujanje: $u(0)$, $x(T) = ?$

• Če bi imeli integral v mejah od T do $2T$:

začetno stanje: $x(T)$, $x(0)$, vzbujanje: $u(T)$; $x(2T) = ?$

naredimo za ta primer { • Če imamo integral v mejah od kT do $(k+1)T$
začetno stanje: $x(kT)$, vzbujanje: $u(kT)$; $x((k+1)T) = ?$

$$\Rightarrow x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow x((k+1)T) = e^{A((k+1)T - kT)} \cdot x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T - \tau)} B \cdot u(kT) d\tau$$

$$\Rightarrow x((k+1)T) = e^{AT} \cdot x(kT) + \left[\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B d\tau \right] u(kT)$$

→ Če bi to primerjali z $x[kT+T] = A_d x[kT] + B_d u[kT]$
 bi dobili: $A_d = e^{AT}$, $B_d = \int_0^T e^{\sigma T} B d\sigma$... vidimo, da
 računamo isto kot prej...

Manjši je T boljša je ta metoda, slabost integralne metode
 je le ta, da moramo početi matrico prehajanja stanj e^{At} .

ZGLED: $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t)$$

Po integralni metodi določimo A_d, B_d . $C_d = C = [1 \ 0]$,

$$T = 0.1$$

$$A \rightarrow e^{At} \dots$$

dobimo: $\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t}e^{-2t} & e^{-t}e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$

$$A_d = e^{AT} = \begin{bmatrix} 2e^{-T}e^{-2T} & e^{-T}e^{-2T} \\ -2e^{-T}+2e^{-2T} & -e^{-T}+2e^{-2T} \end{bmatrix} \dots \text{če vstavimo, da je } T=0.1 \text{ :}$$

tudi dobimo A_d

$$\Rightarrow A_d = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.086 \\ -0.1722 & 0.7326 \end{bmatrix} =$$

vidimo, da je A_d lahko precej drugačen od A .

$$B_d = (A_d - I) \cdot A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.0261 \end{bmatrix}$$

2.) Eulerjev postopek za diskretizacijo

Postopek služi ne preprosti aproksimaciji prvega odvoda vektorskega stanja ob času $k \cdot T$.

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}$$

→ prvotna enačba je $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$

$$\Rightarrow \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T} \approx A \cdot x(kT) + B \cdot u(kT)$$

$$\Rightarrow x((k+1)T) \approx A \cdot T \cdot x(kT) + x(kT) + B \cdot T \cdot u(kT) \approx (I + A \cdot T) \cdot x(kT) + B \cdot T \cdot u(kT)$$

$$\Rightarrow x((k+1)T) = A_d \cdot x(kT) + B_d \cdot u(kT)$$

iz primerjave vidimo:

$$A_d = I + A \cdot T, \quad C_d = C$$

$$B_d = B \cdot T, \quad D_d = D$$

Če primerjamo integralsto in Eulerjevo metodo, vidimo da je Eulerjeva preprostejša,endar manj natančna... Interval T mora biti dovolj majhen, da dobimo zadovoljive rezultate.

...Pri laboratorijski vaji bomo dobili še diskretizacijo za isto režo in bomo preverili po teh metodah... Pole za oddajo: zadnji teden predavanj!

VIII.4. Reševanje enačb stanj v matrični obliki:

$$\dot{X} = Ax + Bu$$

$$x(t) = e^{At} \cdot x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau$$

* Kakšna je rešitev enačbe $x[k+1] = A \cdot x[k] + B \cdot u[k]$?

$\rightarrow x[k] = ? \quad k \geq 0$ in začetni pogoji: $x[0]$

* Pogledajmo najprej homogeno enačbo (vzbujanje je enako 0)

$$x[k+1] = A \cdot x[k]$$

$k=0$:

$$x[1] = A \cdot x[0]$$

$k=1$:

$$x[2] = A \cdot x[1] = A^2 x[0]$$

$$x[3] = A \cdot x[2] = A^3 x[0]$$

⋮

$$x[k] = A^k \cdot x[0]$$

; A^k ... matrika prehajanj stanj diskretnih sistemov

* Pogledajmo, če imamo vzbujanje:

$$k=0 \rightarrow x[1] = A x[0] + B u[0]$$

$$k=1 \rightarrow x[2] = A x[1] + B u[1] = A^2 x[0] + A B u[0] + B u[1]$$

$$k=2 \Rightarrow x[3] = A x[2] + B u[2] = A^3 x[0] + A^2 B u[0] + A B u[1] + B u[2]$$

$$\Rightarrow x[k] = A^k \cdot x[0] + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} \cdot B \cdot u[i]$$

→ Splošna rešitev: odziv na začetno stanje in na vhodni signal

$$y[k] = C x[k] + D \cdot u[k]$$

VIII.5 Dobčanje matrike prehajanja stanj A^k

Tudi tukaj imamo tri postopke (kot pri e^{At}):

- 1.) Z-PRESLIKAVA
- 2.) LASTNE VREDNOSTI
- 3.) Z-DIAGONALIZACIJO

$$1.) \quad X[k+1] = A \cdot X[k] + B \cdot u[k] / z$$

$$zX[z] - zX[0] = A \cdot X[z] + B \cdot U[z]$$

$$(zI - A) \cdot X[z] - AX[z] = zX[0] + B \cdot U[z]$$

$$\rightarrow zX[z] - AX[z] = (zI - A)X[z]$$

$$\Rightarrow X[z] = (zI - A)^{-1} \cdot zX[0] + (zI - A)^{-1} B \cdot U[z]$$

$$X[k] = z^{-1} [X[z]]$$

$$A^k = z^{-1} [(zI - A)^{-1} \cdot z] \quad \dots \text{MATRIKA PREHAJANJA STANJ DISKRETNIH SISTEMOV}$$

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad A^k = ?$$

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} z & 1 \\ -0.1 & z-0.7 \end{bmatrix}; \quad (zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.1 & z-0.7 \end{bmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{z^2 - 0.7z + 0.1} \cdot \begin{bmatrix} z-0.7 & 1 \\ -0.1 & z \end{bmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1} \cdot z = \frac{z}{(z-0.2)(z-0.5)} \begin{bmatrix} z-0.7 & 1 \\ -0.1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\dot{A}_{11} = \frac{-2/3z}{z-0.5} + \frac{5/3z}{z-0.2} \quad \dots \text{razbili smo na parcialne ulomke}$$

$$a_{11} = -\frac{2}{3}(0.5)^k + \frac{5}{3} \cdot 0.2^k$$

... tako naredimo še za A_{12} , A_{21} in A_{22} in dobimo A^k ...

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}(0.2)^k - \frac{2}{3}(0.5)^k & -\frac{10}{3} \cdot (0.2)^k + \frac{10}{3} \cdot (0.5)^k \\ \frac{1}{3}(0.2)^k - \frac{1}{3}(0.5)^k & -\frac{2}{3}(0.2)^k + \frac{5}{3}(0.5)^k \end{bmatrix}$$

~~Primer~~ ... domača naloga:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/6 & -5/6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u[k] = (-1)^k \cdot u^*[k]$$

Z Z preslikavo določimo $x[k]$ in A^k !

$$\text{rezultat: } A^k = \begin{bmatrix} -2(-1/2)^k + 3(-1/3)^k & -6(-1/2)^k + 6(-1/3)^k \\ (-1/2)^k - (-1/3)^k & 3(-1/2)^k - 2(-1/3)^k \end{bmatrix}$$

$$x[k] = Z^{-1}[X[z]]$$

$$X[z] = (zI - A)^{-1} \cdot z x[0] + (zI - A)^{-1} B \cdot U[z]$$

1) LASTNE VREDNOSTI:

Če imamo kvadratno matriko A , potem $g(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

pri zveznih sistemih imamo:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i$$

$$e^{\lambda t} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i \rightarrow \alpha_i$$

pri diskretnih sistemih pa velja:

$$A^k = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i$$

$$\lambda^k = \sum \alpha_i \lambda^i \rightarrow \alpha_i$$

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -0.1 & 0.7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 0.7\lambda + 0.1 = 0$$
$$\rightarrow (\lambda - 0.2)(\lambda - 0.5) = 0$$

$$\leadsto \lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 0.5$$

$$\begin{cases} 0.2^k = d_0 + 0.2 d_1 \\ 0.5^k = d_0 + 0.5 d_1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{dve enačbi} \\ \text{dve neznanke} \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow d_0 = \frac{5}{3} \cdot 0.2^k - \frac{2}{3} \cdot 0.5^k$$

$$d_1 = -\frac{10}{3} \cdot 0.2^k + \frac{10}{3} \cdot 0.5^k$$

$$\leadsto A^k = d_0 I + d_1 A$$

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{... s pomočjo lastnih vrednosti določite } A^k$$

$$A^k = d_0 I + d_1 A$$

$$\lambda^k = d_0 + d_1 \lambda$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.5-\lambda & 3 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = -0.5, \lambda_2 = -1$$

$$\begin{cases} (-0.5)^k = d_0 - 0.5 d_1 \\ (-1)^k = d_0 - d_1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{dve enačbi} \\ \text{dve neznanke} \end{array} \right\}$$

• izrazimo d_0 in d_1 in
zapišemo $A^k = d_0 I + d_1 A$

$$\leadsto A^k = \begin{bmatrix} (-0.5)^k & 6(-0.5)^k - 6(-1)^k \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \quad \text{... do enakega rezultata pridemo tudi z z- preslikavo!}$$

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}; \quad A^k = ?$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.5-\lambda & 2 \\ 0 & -0.5-\lambda \end{vmatrix} = (-0.5-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -0.5$$

$$\lambda^k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i \rightarrow \lambda^k = a_0 + a_1 \lambda$$

$$\rightarrow (-0.5)^k = a_0 - 0.5 a_1$$

Odvajamo, ker imamo večkratne lastne vrednosti (kolikokrat moramo odvajati kolikor kratne lastne vrednosti imamo)

$$\rightarrow \frac{d}{d\lambda} \lambda^k = k \cdot \lambda^{k-1} = a_1 \quad \leadsto \quad a_1 = k \cdot (-0.5)^{k-1}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} (-0.5)^k & 2k(-0.5)^{k-1} \\ 0 & (-0.5)^k \end{bmatrix}$$

3.) Diagonalizacija.

zveznih sistemih: $A \leadsto J = \Theta^{-1} A \cdot \Theta \rightarrow e^{Jt} \rightarrow \underbrace{\Theta \cdot e^{Jt} \cdot \Theta^{-1}} = e^{At}$

diskretnih sistemih: $A \leadsto J = \Theta^{-1} A \cdot \Theta \rightarrow J^k \rightarrow \underbrace{\Theta J^k \cdot \Theta^{-1}} = A^k$

Vidimo, da je zelo podobno kot pri zveznih sistemih

VIII.6. Ravnotežna stanja.

→ ko se stanje ne spreminja več

* Pri veznih sistemih:

$\dot{x}(t) = A x(t) + B \cdot u(t)$, ko je $\dot{x}(t) = 0$ je ravnotežno stanje!

$\Rightarrow A \cdot \bar{x} + B \cdot u = 0$... če sistem ni vzbujen je ravnotežno stanje s izhodišču koordinatnega sistema!

* Pri diskretnih sistemih:

$x[k+1] = A x[k] + B \cdot u[k]$, ko je

$x[k+1] = x[k] = \bar{x}$ je ravnotežno stanje

→ pogoj za ravnotežno stanje

$$\bar{x} = A \bar{x} + B u$$

$$\bar{x} - A \bar{x} = B \cdot u$$

$$(I - A) \cdot \bar{x} = B \cdot u$$

$$\Rightarrow \bar{x} = (I - A)^{-1} B \cdot u$$

Linearni diskretni sistemi brez vzbujanja imajo eno ravnotežno stanje, ki je s koordinatnem izhodišču

Ravnotežna stanja razvrstimo na 4 tipe:

1.) center

2.) vozlišče

3.) žarišče

4.) sedlo

} lahko sta izvor ali ponor

Tip ravnotežnega stanja je povezan z lego lastnih vrednosti osnovne matrike A . Tudi tužaj lahko govorimo o FAZNEM PORTRetu.

VIII. 7. Prenosna funkcija diskretnega sistema

$$Y[z] = H[z] \cdot U[z]$$

~ Prenosno funkcijo bomo dobili iz enačb stanj...

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A \cdot x[k] + B \cdot u[k] \\ y[k] &= C \cdot x[k] + D \cdot u[k] \end{aligned} \quad / \quad \mathbb{Z}$$

Prenosna funkcija ni odvisna od začetnega stanja:

$$z \cdot X[z] = A \cdot X[z] + B \cdot U[z]$$

$$(zI - A) \cdot X[z] = B \cdot U[z]$$

$$X[z] = (zI - A)^{-1} \cdot B \cdot U[z]$$

→ vstavimo v $Y[z] = C \cdot X[z] + D \cdot U[z]$

$$\text{md } Y[z] = C(zI - A)^{-1} \cdot B \cdot U[z] + D \cdot U[z] = [C(zI - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot U[z]$$

$$\Rightarrow H[z] = C(zI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Nx kar drži za zvezne sisteme drži tudi za diskretne sisteme (če so pod sistemi razumi zaporedno, se prenosne funkcije množijo, če so razumi vzporedno pa se seštevajo in odštevajo, ali če imamo mešane razlike ...)

Spremenljivke stanj izberemo na izhodih tega bloka (tako kot pri zveznih sistemih).

glavne zveze sistema

STABILNOST ... povezana z ravnoležnim stanjem. Odvisna od lastnih vrednosti oz. od tega, kje ležijo. Če lastne vrednosti ležijo na levi strani kompleksne ravnine.

- Asimptotična stabilnost $\rightarrow$ če sta realni vrednosti lastnih vrednosti negativni...
- nestabilno: $\rightarrow$ če ima katerakoli lastna vrednost pozitiven realni del

VODLJIVOST $\rightarrow$ enako kot pri zveznih sistemih!

$$X[k+1] = AX[k] + Bu[k]$$

$$M = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

$$\text{test: } \text{rang } M = n$$

SPOZNAVNOST $\rightarrow$ enako kot pri zveznih sistemih

A, C

$$N = [C^T \mid AC^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \dots]$$

TEST: $\text{rang } N = n$... sistem je spoznaven; $\text{rang } N \neq n$... ni spoznaven

1. PROBLEM. Leta 2005 je v nekem mestu živelo $x_1[0]$ meščanov in $x_2[0]$ občanov. Demografi predvidevajo, da se bo vsako leto a odstotkov meščanov preselilo v občino in b odstotkov občanov, pa se bo preselilo v mesto. Zapišite mat. model (enačbo stanj in matrični obliko, ki opisuje letno spreminjanje št. meščanov in občanov). $x_1[0] = 40.000$, $x_2[0] = 15.000$

$$\Rightarrow x_1[k+1] = x_1[k] - a x_1[k] + b x_2[k] = (1-a) \cdot x_1[k] + b x_2[k]$$

$$\Rightarrow x_2[k+1] = a x_1[k] + x_2[k] - b x_2[k] = a \cdot x_1[k] + (1-b) \cdot x_2[k]$$

(če bi imeli še prirodek / smrti bi to označili kot neto rasti / upad)
 www.stromar.si

$$\Rightarrow x[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}}_{\text{matrika } A} \cdot x[k]$$

Prvi dve leti je $a = 5\%$, potem 4% , b pa ves čas 3% . Koliko ljudi bo živelo v mestu in koliko v okolici čez štiri leta?

$$X[k] = A^k X[0] ; \quad A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} ; \quad A^k ; A^2$$

$$X[2] = \begin{bmatrix} 37024 \\ 18080 \end{bmatrix} = X$$

$\Downarrow$
 A^2

$$X[k] = A^k X^* [0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.03 \\ 0.04 & 0.97 \end{bmatrix}$$

Diskretni sistem opisuje nehomogena diferenčna enačba 2. reda:

$$y[k+2] - 0.8y[k+1] + a \cdot y[k] = 3 \cdot u[k] ; \quad y[0] = 0, \quad y[1] = 1$$

1.) Poišite značilno enačbo in korenne kvadratne enačbe!

$$\Rightarrow z^2 Y[z] - 0.8z Y[z] + a \cdot Y[z]$$

$$Q[z] = z^2 - 0.8z + a = 0$$

$$z_{1,2} = 0.4 \pm \sqrt{0.16 - a}$$

2.) Pri katerih vrednostih konstante a je sistem stabilen?

$$0.4 \pm \sqrt{0.16 - a} \quad \dots \text{moramo najti tak } a, \text{ da je izraz } 0.4 \pm \sqrt{0.16 - a} \leq 0$$

... Vidimo, da tak a ne obstaja!

3.) Diskretni sistem opišite z enačbami stanj:

$$X[k+1] = A X[k] + B \cdot u[k]$$

$$x_1[k] = y[k]$$

$$x_1[k+1] = x_2[k] = y[k+1]$$

$$x_2[k+1] = y[k+2]$$

$$\Rightarrow x_2[k+1] = 0.8y[k+1] - ay[k] + 3u[k]$$

$$\Rightarrow x[k+1] = 0.8x_2[k] - ax_1[k] + 3u[k]$$

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0.84 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u[k] \quad ; \quad y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

4.) S pomočjo lastnih vrednosti določite odkrivno račeno stanje, če je $a = 0.84$.

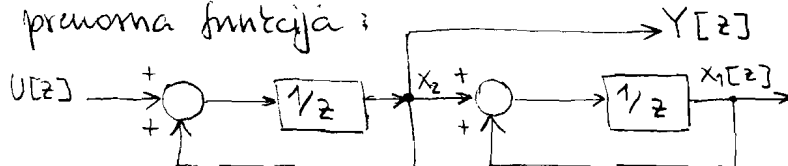
$$x[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x[k] = ? \quad k \geq 0$$

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0.84 & 0.8 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow g(\lambda) = \lambda^2 - 0.8\lambda - 0.84 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 1.4 \quad , \quad \lambda_2 = -0.6$$

$$\text{d.n. } A^k = ? \quad \dots \quad \Rightarrow x[k] = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot (1.4)^k - 0.5 \cdot (-0.6)^k \\ 0.7 \cdot (1.4)^k + 0.3 \cdot (-0.6)^k \end{bmatrix}$$

5.) Dana je prenosna funkcija:



* Naloga zahteva, da sistem opišemo z enačbami stanj: $x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$
Vidimo, da je sistem 2. reda, zato izberemo dve spr. x_1 in x_2 na izhodih...

$$x_1[z] = \frac{1}{z} (x_1[z] + x_2[z]) \quad ; \quad z \cdot x_1 = x_1 + x_2 \quad ; \quad x_1[k+1] = x_1[k] + x_2[k]$$

$$x_2[z] = \frac{1}{z} (x_2[z] + U[z]) \quad \Rightarrow \quad z \cdot x_2 + x_2 \cdot U$$

$$x_2[k+1] = x_2[k] + u[k] \quad \Rightarrow \quad x[k+1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$

* Ali je sistem stabilen? $Y[z] = x_2[z] \Rightarrow y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x[k]$

To bomo ugotavljali na osnovi lastnih vrednosti matrice A

$$g(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \lambda_{12} = 1$$

$$\underline{H[z] = C(zI - A)^{-1} \cdot B}$$

Določite prenosno funkcijo sistema!

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} ; \quad C(zI - A)^{-1} \cdot B = [0 \ 1] \frac{1}{(z-1)^2} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H[z] = \frac{1}{z-1}$$

$y[5]$
Določite odziv, če je začetno stanje in vzbujaanje enoto nič!
Rezultat: $y[5] = 2$... reši doma!

$$x[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x[k+1] = A \cdot x[k]$$

$$x[k] = A^k \cdot x[0]$$

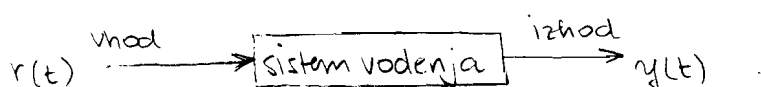
$$y[k] = C \cdot x[k]$$

IX. Sistemi vodenja

Vodenje oz. avtomatska regulacija je ključni del industrijskih procesov kot so procesi, ki vsebujejo regulacijo tlaka, temperature, pretoka, vlažnosti ...

Vodenje je razširjeno tudi v meindustrijskih procesih, kot so elektronika, biomedicina itd.

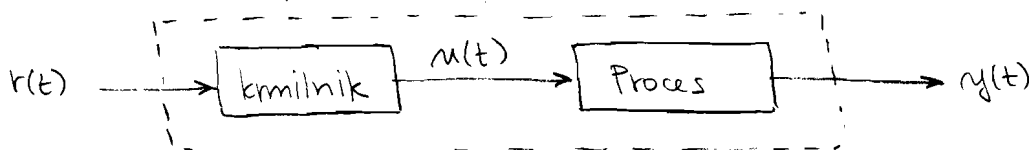
Sistem vodenja lahko predstavimo z osnovno blokno shemo:



$r(t)$ je željena ali referenčna vrednost; $y(t)$ - izhod, pa je regulirana ali krmiljena veličina.

Pogosta zahteva sistemu vodenja je, da se regulirane veličine čim bolj jeme z željeno veličino ne glede na motnje, ki vplivajo na delovanje sistema. Le v najenostavnejših primerih lahko uporabimo odprto ločni sistem vodenja. brez povratne zanke

Sistem vodenja je sestavljen iz dveh podsistemov:

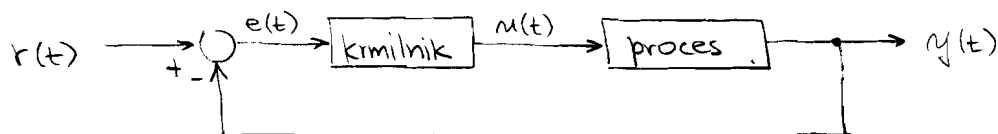


$u(t)$ je krmililna veličina ($y(t)$... krmiljena veličina). Proces je sistem, ki ga krmilimo. Lahko je sestavljen iz katerikoli komponent ali procesov. Referenca $r(t)$ deluje na krmilnik, ki s pomočjo krmilne veličine $u(t)$ zagotavlja, da je krmiljena veličina $y(t)$ v dovoljeni korelaciji z referenčno veličino $r(t)$

Značilni primer je ogrevanje prostora z grelcem in časovnim krmilnikom, ki periodično vklaplja in izklaplja grelec

IX.1. Zaprti zanki sistem vodenja

Zaprti zanki sistem vodenja ali regulacijski sistem je sistem z dodatno vrzno zanko ...

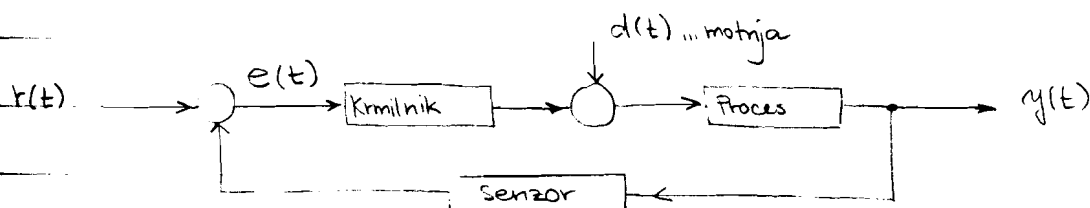


$e(t)$... pogrešek

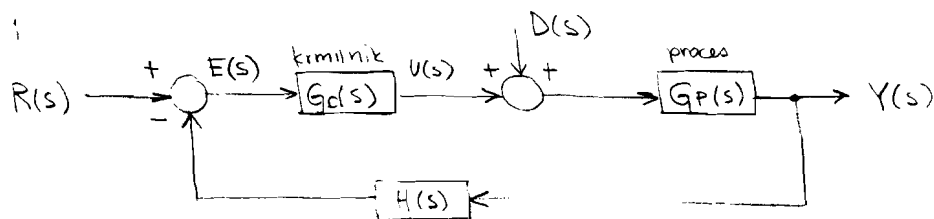
$$e(t) = r(t) - y(t)$$

Da dobimo točnejšo končno veličino $y(t)$, jo primerjamo z referenčno. Krmilnik daje končno veličino $u(t)$ na osnovi pogreške $e(t)$ tako, da ta zmanjšuje pogrešek.

IX.1.1. Zaprti zanki sistem pri motilnem in referenčnem signalu



Frekvenčnem prostoru:



2 ZAHTEVI:

1. $Y(s) \approx R(s)$

in da je $Y(s)$ čim bolj odvisen od $D(s)$

da izhod $y(t)$ nemo sledi spremembi referenčne veličine. Želimo tudi, da bi bile končne veličine $y(t)$ čim bolj občutljive na motnjo $d(t)$.

→ prenaša referenčno veličino na izhod

$T_D(s)$... prenaša $D(s)$ proti izhodu

bošta $T_R(s)$ in $T_D(s)$ dve prenosni funkciji:

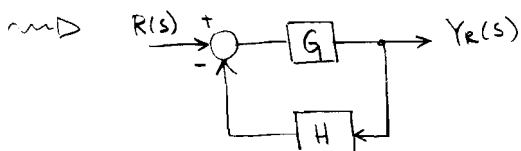
1) $D(s) = 0$: $Y_R(s) = T_R(s) \cdot R(s)$

2) $R(s) = 0$: $Y_D(s) = T_D(s) \cdot D(s)$

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_D(s)$$

Če želimo, da ne $y(t)$ pomembno vpliva $d(t)$, mora biti $T_D(s) = 0$.
 Če izhod $y(t)$ sledi spremembi referenčne veličine, pa mora biti $T_R(s) = 1$.

1.) $D(s) = 0$ → SLEDILNO DELOVANJE

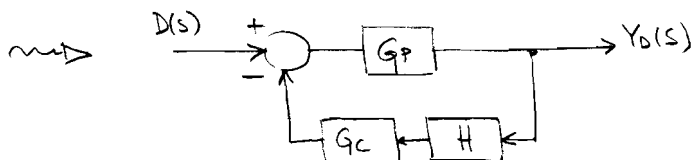
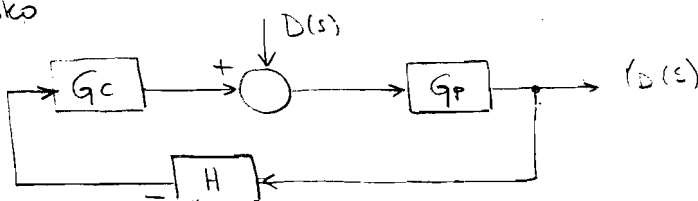


$$T_R(s) = (I + G \cdot H)^{-1} \cdot G = \frac{G}{1 + G \cdot H}$$

$$T_R(s) = \frac{G_P G_C}{1 + G_P G_C H}$$

$$Y_R(s) = T_R(s) \cdot R(s)$$

2.) $R(s) = 0$ → REGULACIJSKO DELOVANJE



$$T_D(s) = \frac{G_P}{1 + G_P G_C H}$$

$$Y_D(s) = T_D(s) \cdot D(s)$$

Obe prenosni funkciji imata enake imenovalke in zato tudi enaki kvadratni enačbi in enake korene. Če torej študiramo stabilnost sistema ali pa preučujemo prehodni pojav sistema, je vseeno, katero funkcijo uporabljamo.

→ da željen signal prenese na izhod

IDEALNO BI BILO: $T_R(s) \approx 1$ in $T_D(s) \approx 0$

→ da čim bolj zadržimo motnjo

$$Y(s) = \underbrace{T_R(s) \cdot R(s)}_{Y_R(s)} + \underbrace{T_D(s) \cdot D(s)}_{Y_D(s)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{G_p}{1 + H G_c G_p} (G_c R(s) + D(s))$$

preveri!

Pogoj, da je $T_R(s) \approx 1 \rightarrow |H \cdot G_c| \gg 1$

$$H(s) = 1$$

(Če želimo, da je prenosna funkcija ^{system} 2. reda ... mora biti polinom v imenovalcu 2. reda)

$$G_p(s) = \frac{K_c}{(s+a)(s+b)}$$

$$\Rightarrow T_R(s) = \frac{G_c \cdot \frac{K_p}{(s+a)(s+b)}}{1 + G_c \cdot \frac{K_p}{(s+a)(s+b)}} =$$

$$T_R(s) = \frac{K_p \cdot G_c}{(s+a)(s+b) + K_p G_c}$$

$$\Rightarrow T_D(s) = \frac{K_p / (s+a)(s+b)}{1 + G_c \frac{K_p}{(s+a)(s+b)}} = \frac{K_p}{(s+a)(s+b) + K_p G_c} = T_D(s)$$

$\mu(t) = K_c \cdot e(t)$ oz. $U(s) = K_c \cdot E(s)$... ^{konstanta} proporcionalni regulator

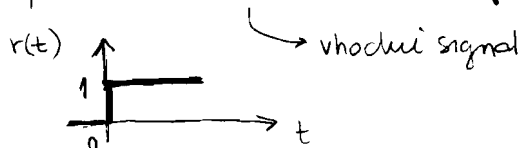
P-regulatorji; $G_c(s) = K_c$

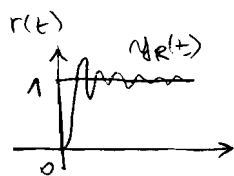
Proporcionalni regulacijski algoritem je temeljni algoritem v industrijskih regulatorjih in rešuje velik del regulacijskih problemov. Njegova osnovna lastnost je, da je regulirne veličine premo sorazmerne s pogreškom

$$(G_c(s) \text{ zamenjamo z } K_c) \rightarrow T_R(s) = \frac{K_p \cdot K_c}{(s+a)(s+b) + K_p K_c} = \frac{K_p \cdot K_c}{s^2 + (a+b)s + (a \cdot b + K_p K_c)}$$

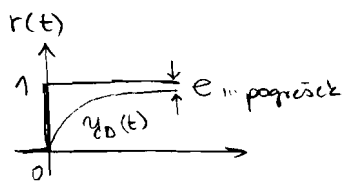
$$T_D(s) = \frac{K_p}{(s+a)(s+b) + K_p K_c} = \frac{K_p}{s^2 + (a+b)s + (a \cdot b + K_p K_c)}$$

Predpostavimo, da je $r(t)$ enotna stopnica $\Rightarrow R(s) = 1/s$





$y_R(t)$



$y_D(t)$

?
Želimo, da prehodni
pojavi čim prej izaveni

1.) $d(t) = 0 \Rightarrow D(s) = 0$

$T_R(s) =$

$Y_R(s) = T_R(s) \cdot R(s) = \frac{K_p \cdot K_c}{s \cdot [(s+a)(s+b) + K_p \cdot K_c]}$... odziv na referenčni signal (enotno stopnjo)

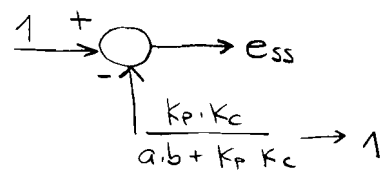
$y_R(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_R(s)\}$

če naredimo inverzni transform
moramo prej narediti parcialne ulomke

Dobimo: $y_{ss} = \frac{K_p \cdot K_c}{a \cdot b + K_p \cdot K_c}$

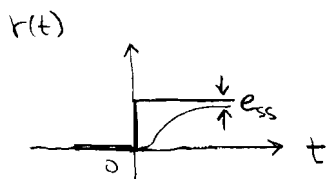
ss... stacionarno stanje

$\Rightarrow e_{ss} = 1 - \frac{K_p \cdot K_c}{a \cdot b + K_p \cdot K_c}$



$e_{ss} = \frac{a \cdot b}{a \cdot b + K_p \cdot K_c} \Rightarrow 0 \Rightarrow K_c = ? \rightarrow K_c \cdot K_p \gg a \cdot b$

Stacionarne napake ni enake 0, vendar jo lahko naredimo majhno
p izbiro glavnega K_c tako, da bo $K_c \cdot K_p \gg a \cdot b$



* Npr. da je vhodni signal $r(t) = t$; $t \geq 0$ in $r(t) = 0$; $t < 0$

$\Rightarrow R(s) = 1/s^2$ in dobimo odziv $Y_R(s) = T_R(s) \cdot R(s) = \frac{K_p \cdot K_c}{s^2 [s^2 + (a+b) \cdot s + (ab + K_p \cdot K_c)]}$

Če $Y_R(s)$ razvijemo na parcialne ulomke dobimo:

$$Y_R(s) = \frac{K_P \cdot K_C / (a \cdot b + K_P \cdot K_C)}{s^2} + \dots$$

... izraz take oblike in

če nato naredimo inverzno Laplace-ovo transformacijo dobimo:

$$y_R(t) = \frac{K_C K_P}{a \cdot b + K_C K_P} \cdot t + \dots$$

Ostali členi so konstante ali pa s časom t izvenijo. Za velike vrednosti t se $r(t)$ približuje premici z naklonom $\frac{K_C K_P}{a \cdot b + K_C K_P}$. Za končne vrednosti $K_C \cdot K_P$ bo naklon $\frac{K_C \cdot K_P}{a \cdot b + K_C K_P}$ manjši od 1 in napake bo naraščale s časom t . Če izberemo za K_C veliko vrednost $K_C \cdot K_P \gg a \cdot b$, potem bo naklon približno 1!

$$K_C \gg 1 \Rightarrow K_C \cdot K_P \gg a \cdot b \Rightarrow \frac{K_C \cdot K_P}{a \cdot b + K_C \cdot K_P} \approx 1$$

Majhne napake bomo dosegali z močnim ojačanjem. Vpliv motenj se na ta način najbolj zmanjša!

$$y_R(t) = y_{pp}(t) + y_{ss}(t)$$

→ zanimal nas stacionarno stanje

$$y_{ss}(t) \approx r(t)$$

$$D(s) \neq 0$$

$$Y_D(s) = T_D(s) \cdot D_D(s) = \frac{K_P}{s^2 + (a+b)s + (a \cdot b + K_C K_P)} \cdot D(s)$$

velja:

$$\begin{cases} H(s) = 1, & G_P(s) = \frac{K_P}{(s+a)(s+b)} \\ R(s) = 1/s, & R(s) = 1/s^2 \end{cases}$$

za $D(s)$ vzamemo enotno stopnico! $D(s) = 1/s$

$$\Rightarrow Y_D(s) = \frac{K_P}{s[s^2 + (a+b)s + (a \cdot b + K_C K_P)]}$$

www.stromar.si

$$\Rightarrow y_D(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_D(s)] = 10 y_{pp}(t) + y_{ss}(t)$$

... rešimo kotene kvadratne enačbe, ki določajo PP in SS?

$$Y_D(s) = \frac{N}{s} + \frac{N}{E} \frac{1}{s} \rightarrow \text{polinom druge stopnje}$$

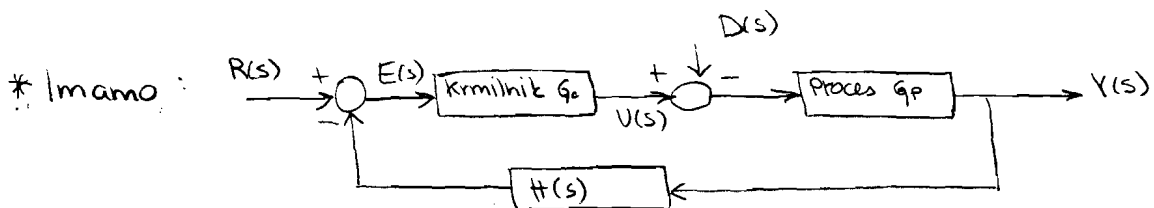
$\downarrow z^{-1}$ $\downarrow z^{-1}$
 y_{ss} y_{pp}

$$\Rightarrow y_{ss} = \frac{K_P}{a \cdot b + K_P K_C} \approx 0 \quad \rightarrow \text{želimo si, da je stacionarno stanje približno 0!}$$

Da to dosežemo mora veljati: $a \cdot b + K_C K_P \gg K_P$

$\rightarrow K_C \gg K_P \rightarrow$ to bi veljalo tudi, če bi za $D(s)$ vzeli kakšno drugo f.

Ugodne nastitke ($T_R(s) \approx 1$ in $T_D(s) \approx 0$) dosežemo z velikim oprežanjem K_C proporcionalnega regulatorja!



$$U(s) = G_C(s) \cdot E(s) \quad u(t) = K_C e(t) \quad \text{P-regulator}$$

konvolucija $\left(\begin{array}{l} G_C(s) = K_C \\ \text{v časovnem prostoru: } u(t) = \int G_C(t-\tau) e(\tau) d\tau \end{array} \right.$

$\rightarrow$ Poleg P-regulatorja obstajajo tudi drugi regulatorji za reševanje regulacijskih problemov:

$$u(t) = K_I \int e(t) dt \quad \rightarrow \text{I-regulator}$$

$$u(t) = K_D \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad \rightarrow \text{D-regulator}$$

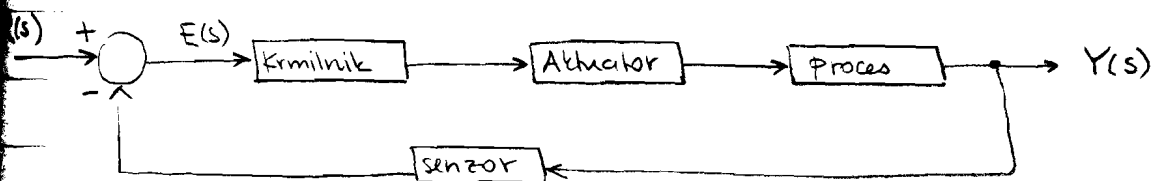
P, I in D-regulator so trije najosnovnejši regulatorji, obstajajo pa še mešanice med temi regulatorji:

npr.: PI - regulator: $u(t) = k_c \cdot e(t) + K_I \cdot \int e(t) dt$

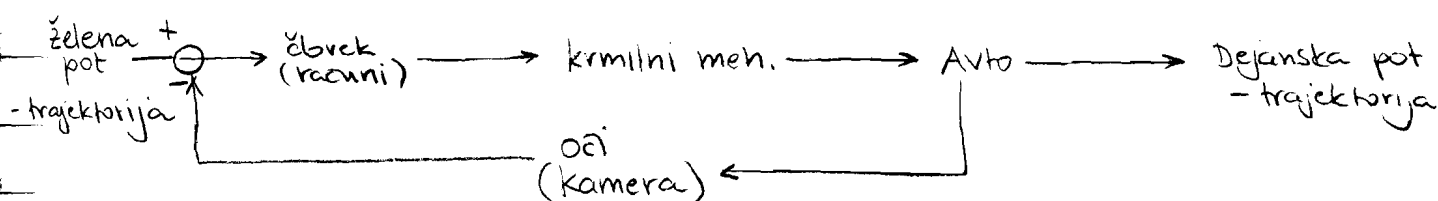
najbolj zapleten pa je PID - regulator:

$$u(t) = k_c e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

Npr.:



Če imamo avto, ki vozi po cesti: BLOKOVNA SHEMA:

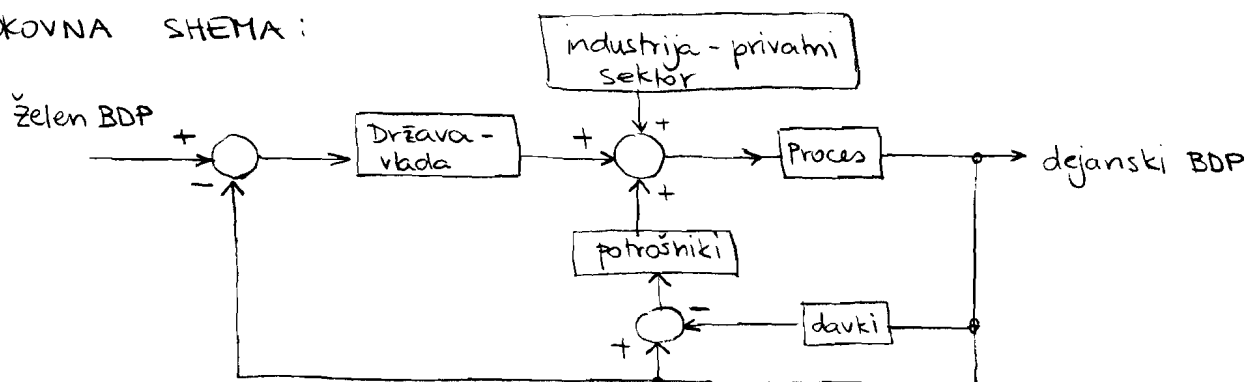


↳ račni namesto človeka in kamera namesto oči, bi imeli za nek avtonomni sistem!

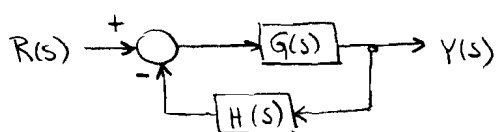
Npr.:

* BDP merimo na tri mesece; če je dvakrat zaporedoma negativen imamo recesijo:

BLOKOVNA SHEMA:

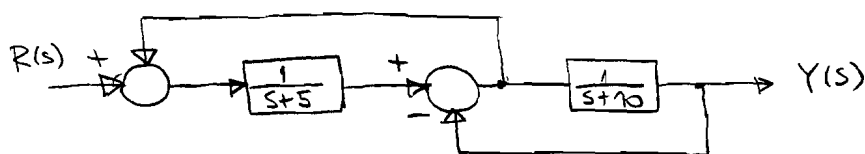


* Imamo preprost sistem z negativno povratno zanko:



$$a) T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

in imamo še en sistem:

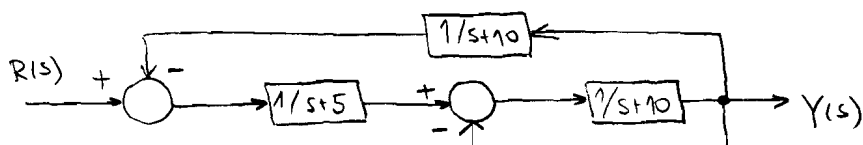


$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

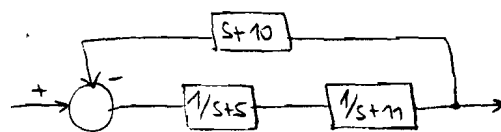
$$Y(s) = T(s) \cdot R(s)$$

- 1.) Določite prenosno funkcijo drugega sistema!
- 2.) Določite prenosni funkciji $G(s)$ in $H(s)$ prvega sistema tako da bo prenosna funkcija tega sistema enaka prenosni funkciji drugega sistema!

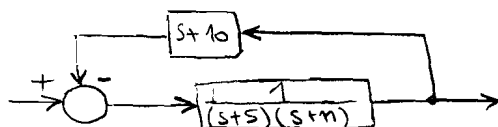
→ Problem je, da se prenosni funkciji drugega sistema prepletata.
Potrebna bo drugača shema:



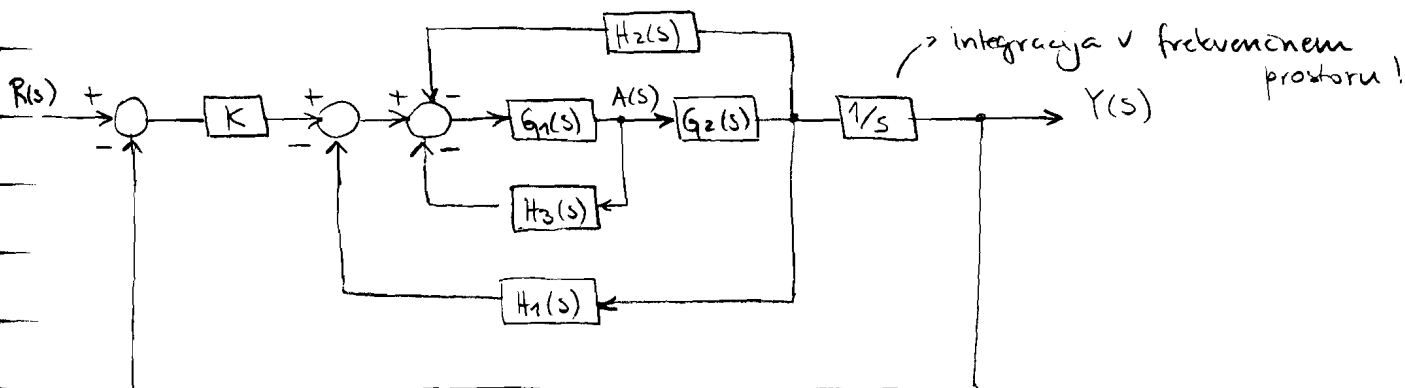
$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{s+10}}{1 + \frac{1}{s+10}} = \frac{1}{s+11}$$



$$\Rightarrow T(s) = \frac{\frac{1}{(s+5)(s+11)}}{1 + \frac{1}{(s+5)(s+11)}} = \frac{1}{(s+5)(s+11) + (s+10)}$$



Leta 1930 je inženir Minorsky z ameriško mornarico razvil nov način krmiljenja ladje. Ta sistem krmiljenja lahko skiciramo z naslednjimi bloki shemo:



1) $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = ?$... D.in. Rezultat : $T(s) = \frac{K \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot 1/s}{1 + G_1 \cdot H_3 + G_1 \cdot G_2 \cdot (H_1 + H_2) + K \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot 1/s}$