STROMAR

STROMAR

9. Frekvenčno selektivna sita

Obravnava LČN sit

Zahteva po **kavzalnosti** omejuje načrtovanje sit (idealno sito je nekavzalno -> neizvedljivo)

Pogoj za kavzalno sito: **Wiener-Paleyev teorem**

- h[n] ima končno energijo (absolutno konvergenten, omeheni koeficienti)
- h[n]=0 ; n<0
- $\int_{-\pi}^{\pi} |ln|H(\omega)||d\omega < \infty$ (izraz integrabilen, izraz končen)

Če je h[n] konvergenten (BIBO stabilnost):

$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$; to pomeni da sta $H_R(\omega)$ in $H_I(\omega)$ v soodvisnosti.

Če je h[n] realen in kavzalen, je H(ω) popolnoma določen s poznavanjem $H_R(\omega)$.

Sledi:

- frekvenčni odziv H(ω) ne more biti nič, razen na nekaterih končnih intervalih na frekvenčni osi
- amplituda H(ω) ni konstantna na končnem frekvenčnem področju, v prehodnem pasu pa ne more preiti iz prepustnega v zaporni pas neskončno hitro
- realni in imaginarni del H(ω) sta soodvisna in ju povezuje **diskretni Hilbertov transform**

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cdot cot\frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda$$

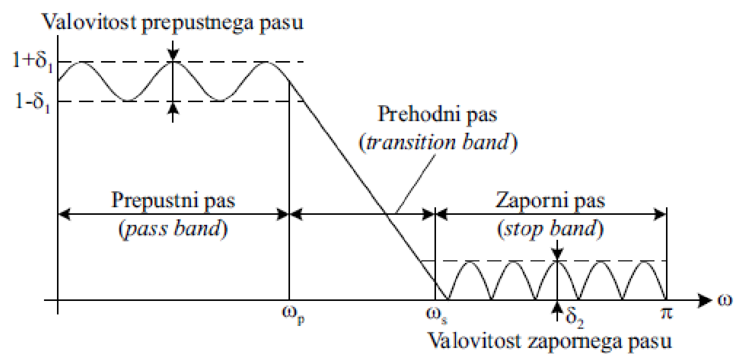
- amplituda in faza v soodvisnosti

Obravnava časovno neodvisnih sistemov:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x[n-k] \longrightarrow H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot e^{-j\omega k}}$$

Popačitev amplitude in faze:

Ker idealnih sit ne moremo imeti imenujemo popačitev amplitude odstopanje od idealne vrednosti amplitude, popačitev faze pa od idealne vrednosti faze. Za analizo popačenja faze kot orodje analize uporabimo zakasnitev ovojnice, oziroma skupinsko zakasnitev.



Realizacija FIR sit z linearno fazo

(IIR sita nimajo linearne faze)

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot e^{-j\omega k} \qquad\qquad h[n] = \begin{cases} b_k, & 0 \le k \le M-1 \\ 0, & \text{drugače} \end{cases}$$

Lastnost linearnega poteka faze dobimo z upoštevanjem simetričnosti koeficientov sita. (soda ali liha simetričnost koeficientov h[n]).

Če zadostimo pogoju: $h[n] = h[M-1-n]$ ima sito linearno fazo.

Simetrični koeficienti:

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{-j\omega \frac{(M-1)}{2}} \qquad \theta(\omega) = \begin{cases} \omega(\frac{M-1}{2}), & \text{za} \quad H_r(\omega) > 0 \\ \pi - \omega(\frac{M-1}{2}), & \text{za} \quad H_r(\omega) < 0 \end{cases}$$

$$H_r(\omega) = h[\frac{M-1}{2}] + 2\sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \cdot \cos(\omega(\frac{M-1}{2} - n)) \qquad \text{za lihe M}$$

oziroma

$$H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] \cdot \cos(\omega(\frac{M-1}{2} - n)) \qquad \text{za sode M}$$

Asimetrični koeficienti: (podobno, le brez cos)

Min. število potrebnih koeficientov:

<table>
<tr><th></th><th>lihi M</th><th>sodi M</th></tr>
<tr><td>Simetričnost</td><td>$\frac{M+1}{2}$</td><td rowspan="2">$\frac{M}{2}$</td></tr>
<tr><td>Asimetričnost</td><td>$\frac{M-1}{2}$</td></tr>
</table>

Antisimetrični odziv ni uporaben za nizkoprepustna sita FIR, simetrični odziv pa vodi k neničelnemu odzivu pri ω = 0. Rešujemo sistem enačb.

Projektiranje sit z metodo razvrščanja polov in ničel v ravnini Z

Tam kjer želimo poudariti frekvence postavimo pol (v bližino enotinega kroga), tam kjer jih želimo zadušiti pa postavimo ničlo. Za stabilnost sita, morajo biti vsi poli znotraj kroga enote. Za doseganje realnih koeficientov sita moramo pri kompleksnih polih in ničlah upoštevati še njihov konjugirano kompleksni par.

$$H(z)|_{r=1} = H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k}}|_{r=1} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - z_k \cdot z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k \cdot z^{-1})}|_{r=1}$$

$$|H(\omega_0)| = 1. \; *$$

* absolutna vrednost amplitudnega frekvenčnega poteka

Običajno N >= M – to pomeni da imamo več polov kot ničel.

Transformacija nizkega v visoko sito

(ko imamo znano strukturo nizkega sita in želimo na osnovi frekvenčnega premika narediti visoko sito)

Z **zrcaljenjem** polov in ničel okoli vertikalne osi (**imaginarna os**) v ravnini Z, dobimo iz nizkega visoko in iz visokega nizko sito.

$$H_{hp}(\omega) = H_{lp}(\omega - \pi)$$

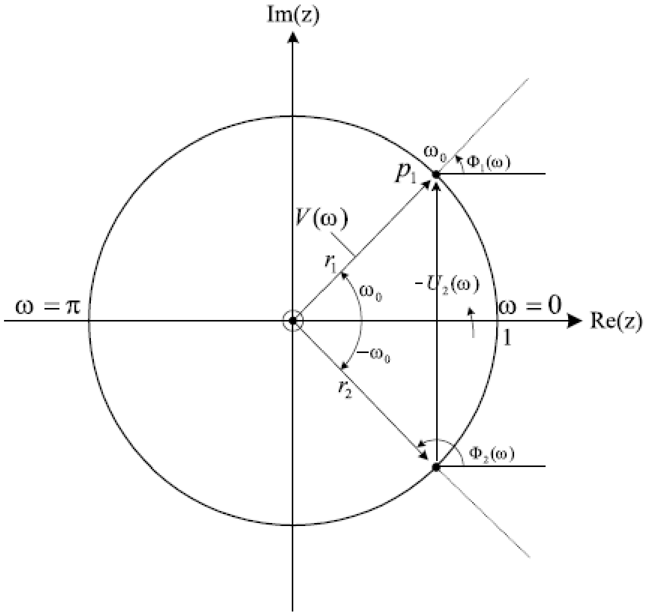
Impulzni odziv nizkega sita se pretvori v impulzni odziv visokega sita tako, da **lihim koeficientom** niza {h|n|} **spremenimo predznak**.

$$H_{hp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M}(-1)^k b_k \cdot e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k a_k \cdot e^{-j\omega k}}$$

Tipična sita

(digitalni resonator, sito z zarezo, vsepasovno sito)

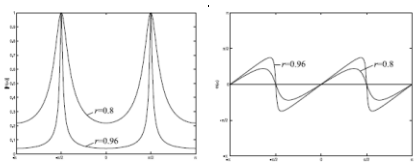
- **digitalni resonator**



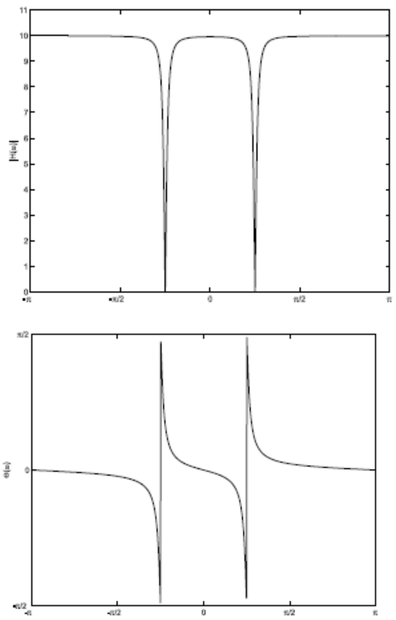
Tipično ozkopasovno sito s konjugirano kompleksnimi poli

$$|H(\omega_0)| = \frac{b_0}{|U_1(\omega)| \cdot |U_2(\omega)|}$$

$$\theta(\omega) = 2\omega - \phi_1(\omega) - \phi_2(\omega)$$



- **sito z zarezo**



primer: dve ničli, dva pola

Ravno obratne lastnosti kot pri resonatroju

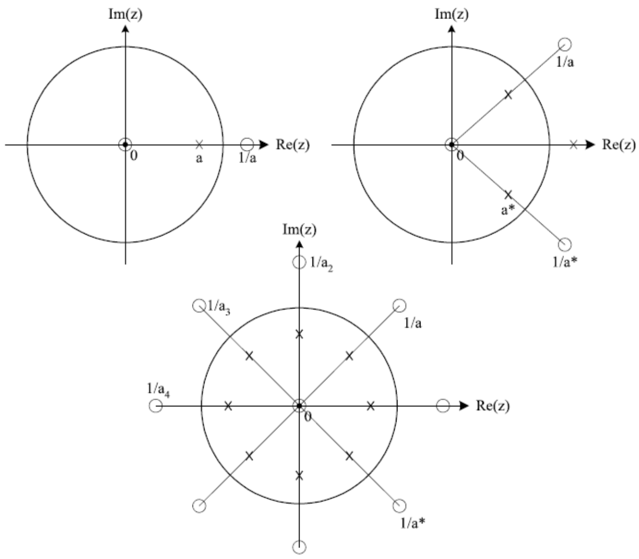
Če vzamemo samo ničle brez polov, dobimo zelo širok spekter, to lahko popravimo z dodajanjem kompleksno konjugiranih parov polov.

Ničla:
na enotnem krogu pri $\omega=\omega_0$

Poli pri:

$$p_{1,2} = r \cdot e^{\pm j\omega_0}.$$

- **vsepasovno sito**



Z zakasnilnim členom $H(z) = z^{-k}$

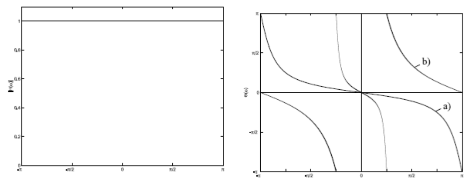
ali

Sito z prenosno funkcijo:

$$H(z) = \frac{z^{-N} A(z^{-1})}{A(z)}$$

$$A(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k} \qquad a_0 = 1$$

Če je *pol* v točki a_k potem je *ničla* v 1/a



10. Načrtovanje digitalnih sit

(enostavno spreminjanje – prilagajanje razmeram, velika zanesljivost delovanja – ni vplivov okolice, ni potrebe po uglaševanju – cenejša izdelava)

Niso primerna za visoke frekvence (zmogljivost)

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$ splošen zapis sistemske funkcije digitalnega sita

FIR	IIR
končni impulzni odziv h(n)	neskončni impulzni odziv h(n)
sistemska funkcija je polinom	sistemska funkcija je racionalna
zahtevnejša izvedba	manj zahtevna izvedba
linearna sprememba faze	ožji prehodni pas
stabilnost	nestabilnost

Aproksimacijski problem

(Idealnega sita ni, poskušamo se karseda dobro približati idealu)
Definiramo ga kot **iskanje sistemske funkcije**, ki se najbolje približa željeni funkciji $H_d(z)$.

Zaradi zmanjševanja problema (merilo odstopanja) navadno definiramo kot **iskanje realne amplitudne karakteristike**, ki se ujema z željeno amplitudno karakteristiko, pri minimalni in karseda linearni fazi. Če je kritična valovitost uporabimo **Čebiševo normo**, v nasprotnem primeru pa **Evklidsko normo**.

FIR sita

(ali nerekurzivna, konvolucijska sita)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)\, x(n-m). \qquad H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k\, z^{-k}$$

Če ima sistemska funkcija pol reda N-1 v koordinatnem izhodišču z-ravnine, le ta nima vpliva na frekvenčno karakteristiko H(ω) -> vedno stabilno.

	Red sita N **lih**	Red sita N **sod**
h(n) **liho** simetričen	$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n)\sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]$ 3 $\Theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}.$	$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n)\sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]$ 4 $\Theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}.$
	preioda 2π, *liha simetričnost glede na ω=0 in ω=π*	preioda 4π, *liha simetričnost glede na ω=0, soda glede na ω=π*
h(n) **sodo** simetričen	$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]$ 1 $\Theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega.$	$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]$ 2 $\Theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega.$
	preioda 2π, *soda simetričnost glede na ω=0 in ω=π*	preioda 4π, *soda simetričnost glede na ω=0, liha glede na ω=π*

Glede uporabe določen tip sit. Tipa 1 in 2 uporabna za nizka sita (zaradi H(*π*)=*0)*, tipa 3 in 4 pa za visoka sita (zaradi H(*0*)=*0).*

Metoda z Fourierovim transformom

Z **inverzim Fourierovim transformom** iz željene frekvenčne karakteristike H(ω) izračunamo impulzni odziv h(n). Ker pa **odziv** navadno tako **ni končen**, moramo rezultat **omejiti z ustrezno okensko funkcijo**. Ker množenje v časovnem pomeni konvolucijo v frekvenčnem, moramo biti pazljivi na širino osnovnega snopa in hitrost upadanja stranskih snopov (od tod različna okna). Pravokotno okno – ko je pomemben relativno ozek osnovni snop, ostala, ko je pomembnejša valovitost in hitrost upadanja.

Metoda frekvenčnega vzorčenja

Podobno kot zgoraj, le da imamo namesto zveznega poteka, diskretne vrednosti (**DFFT**) – hitrejše, manj enačb, kot po teoretičnih enačbah tipa 1,2,3 in 4. Torej želeno karakteristiko najprej vzorčimo in nato z njo delamo naprej. Vendar tak postopek v praksi ni pretirano uporaben, saj med vzorci potrebujemo interpolacijo in tako to ni več problem aproksimacije.

Metoda najmanjših kvadratov

Podobno kot metoda frekvenčnega vzorčenja, le da povečamo število vzorcev (da se izognemo interpolaciji) in za oceno odstopanja od željene vrednosti uporabimo **Evklidsko normo.** (v smislu minimalizacije razlike moči signalov željenega in dobljenega sita pri vzorčenih frekvencah).

IIR sita

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)\, x(n-m) \qquad H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\, z^{-k} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}}$$

Ker je območje konvergence omejeno na zunanjost kroga, lahko zaradi izbire koeficientov pri realnem delovanju taka sita postanejo nestabilna. Načrtujemo jih pogosto z pretvorbo analognih sit.

Butterworthova sita

Konstantno ojačanje v prepustnem pasu brez valovitosti (monotonost povsod)

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}}} \qquad 1-\delta_1 = |H(\Omega_p)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

pri čemer je Ω_p mejna frekvenca prepustnega pasu, ε pa korekcijski faktor ojačanja prepustnega pasu. Sistemska funkcija nima ničel, poli pa ležijo enakomerno razporejeni po levi polovici kroga z radijem r= $\Omega_{p.}$

Red sita izračunamo glede na zahtevo po valovitosti v zapornem pasu.

Čebiševa sita

Tip 1.(enakomerno valovita karakteristika v prepustnem pasu in monotona zunaj njega) in 2.(monotona v prepustnem pasu in valovita zunaj njega)

Tip 1

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$

T_N – Čebišev polinom reda N
Nima ničel, poli na levi polovici elipse

Tip 2

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \left[T_N^2(\Omega_s/\Omega_p)/T_N^2(\Omega_s/\Omega)\right]}$$

Ničle na imaginarni osi, poli na elipsi?

Eliptična sita

(Cauerjeva sita)

Enakomerna valovitost povsod

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{1+\varepsilon^2 U_N(\Omega/\Omega_p)}$$

U_N – Jacobijeva eliptična funkcija reda N
Ima ničle in pole (izpeljava ni obravnavana)

- Če potrebujemo **linearno fazo** – **Butterworthova** sita
- Če potrebujemo **močno dušenje** v zapornem pasu – **Eliptična sita**
- **Čebiševa sita – kompromis**
- \+ kombinacija različnih sit

Impulzna invariantna transformacija

Transformacija sistemske funkcije **analognega sita H(s)** v sistemsko funkcijo **digitalnega sita H(z)**.
Najprej inverzni Laplace H(s) v h(t) nato Z transformacija v H(z). Ker pa je H(s) vedno racionalna funkcija je:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s-p_k} \longrightarrow H(z) = T_s \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{1-e^{p_k T_s} z^{-1}}$$

Uporaba impulzne invariantne transformacije za na£rtovanje digitalnih sit je zaradi prekrivanja frekvenčnega spektra kot posledice vzorčenja smiselna predvsem za nizka sita katerih slabljenje v zapornem področju relativno hitro ali vsaj monotono upada (Butterworthova in Čebiševa sita tipa I).

Bilinearna transformacija

Preslikava med kompleksno s- in z- ravnino.

$$s = \frac{2}{T_s}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

$$\sigma = \frac{2}{T_s}\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega}$$

$$\Omega = \frac{2}{T_s}\frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega}$$

Pri čemer $s = \sigma + j\Omega$ in $z = re^{j\omega}$.
Vse točke v notranjosti enotinega kroga v kompleksni z-ravnin r<1 so slike točk iz levega dela kompleksne s-ravnine s<0, vse točke v zunanjosti pa slike točk iz desnega dela s-ravnine s>0.

Frekvenčne transformacije sit (iz nizkega v visoko, pasovno sito)

Časovno zvezno sito: preslikava sistemske funkcije v **S prostoru**
Časovno diskretna sita: Lahko tudi z uporabo impulzno invariantne metode, a da se izognemo prekrivanju spektra najprej pretvorimo analogno sito v časovno diskretno nato pa ga preslikamo. Transformacija v **Z prostoru**.

Načrtovanje sit: Določimo željeni odziv sita – izberemo tip sita in red N – optimiramo njegove parametre