STROMAR

STROMAR

PRIIMEK IN IME:__________________________________

DIGITALNA OBDELAVA SIGNALOV I

Datum: 1. 6. 2005

Kratka navodila:

- *Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.*
- *Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte* ***oba*** *lista.*
- *Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.*
- *Čas trajanja izpita: 60 min*

točke

1. Podajte BIBO definicijo stabilnosti sistemov. Pod kakšnimi pogoji je kavzalen sistem BIBO stabilen? Izpeljite, kakšna mora biti lega koeficientov a_1 in a_2 stabilnega sistema 2. reda v kompleksni ravnini! __________

2. Podajte postopek za izračun DFT in izpeljite Goertzlov algoritem za njegov izračun. __________

3. Podajte posebnost odziva filtrov s končnim impulznim odzivom in linearnim faznim potekom ter naštejte in opišite vse 4 tipe tovrstnih filtrov! __________

4. Hitri Fourierov transform; izpeljite algoritem za decimacijo po času in narišite potek računanja za N=8! __________

5. Podajte izraz za izračun funkcije srednje kvadratne napake adaptivnega filtra, ter na njegovi podlagi izpeljite optimalni utežni vektor. Ali utežni vektor v resnici računamo po navedeni metodi in zakaj? __________

SKUPAJ __________

OCENA __________

PRIIMEK IN IME:________________________________

Digitalna obdelava signalov I

Datum: 1. 9. 2005

Kratka navodila:

- Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.
- Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte oba lista.
- Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.
- Čas trajanja izpita: 60 min

točke

1. Imamo sistem s prenosno funkcijo $H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\left[1-e^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1-e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]}{\left[1-0.9e^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1-0.9e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]}$. Mejna frekvenca sistema f_0 znaša 50 Hz, frekvenca vzorčenja pa je enaka 1kHz. Za ustrezno normirano frekvenco ω_0 določite:
   a. Prenosno funkcijo in lego korenov v prostoru Z.
   b. Narišite strukturo in koeficiente sistema v obliki Direktne strukture I
   c. Ocenite frekvenčni odziv sistema na frekvenčni osi od 0 - 500 Hz. Kako imenujemo takšen sistem?

   ____

2. Podajte BIBO definicijo stabilnosti sistemov. Pod kakšnimi pogoji je kavzalen sistem BIBO stabilen? Izpeljite, kakšna mora biti lega koeficientov a_1 in a_2 stabilnega sistema 2. reda v kompleksni ravnini!

   ____

3. Hitri Fourierov transform; izpeljite algoritem za decimacijo po času in narišite potek računanja za N=8! Pojasnite, zakaj je algoritem FFT hitrejši od uporabe osnovnega izraza za DFT!

   ____

4. Narišite lego polov in ničel prenosne funkcije $H(z)=\frac{z^{-1}}{2-z^{-1}}$!
   Analitično določite odziv $h[n]$ in narišite njegov potek za $0 \le n \le 5$ ob predpostavki, da je ta od 0 različen. Kakšno je v tem primeru področje konvergence?

   ____

5. Rekonstrukcija pasovno omejenega signala iz vzorcev: podajte matematični postopek, idealno rekonstrukcijsko funkcijo ter skicirajte potek rekonstrukcije!

   ____

SKUPAJ ____________

OCENA ____________

PRIIMEK IN IME:_________________________________

Digitalna obdelava signalov I

Datum: 9. 2. 2006

Kratka navodila:

- Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.
- Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte oba lista.
- Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.
- Čas trajanja izpita: 60 min

točke

1. S postopkom frekvenčnega vzorčenja smo načrtali nizkopasovna filtra z impulznima odzivoma
   h1 = [0.0718 0.1533 0.2200 0.2458 0.2200 0.1533 0.0718], ω_c = 0.25 in
   h2 = [-0.0974 -0.0000 0.3154 0.5000 0.3154 -0.0000 -0.0974], ω_c = 0.5.
   Izračunajte koeficiente pasovno prepustnega filtra s končnim impulznim odzivom z mejnima frekvencama ω_{c1} = 0.25 in ω_{c2} = 0.5! ______________

2. Okenske funkcije:
   - Podajte zvezo med omejenim oknom opazovanja diskretnega signala in njegovim frekvenčnim spektrom.
   - Opišite Bartlett-ovo okno, podajte razloge za njegovo uporabo, spektralne lastnosti ter ga primerjajte s pravokotnim oknom.

   ____

3. Izračunajte koeficiente filtra *a* in *b* z neskončnim impulznim odzivom za dušenje frekvence 50 Hz. Vzorčna frekvenca naj bo f_0=1 kHz, $|p_{1,2}|$=0,9. ______________

4. Stabilnost diskretnih sistemov:
   - Podajte definicijo stabilnosti diskretnih sistemov.
   - Na podlagi potrebnega in zadostnega pogoja za stabilnost diskretnega sistema določite področje konvergence stabilnega sistema.
   - Na podlagi podanega POK podajte lego korenov kavzalnega linearnega, časovno neodvisnega sistema.

   ____

5. Napišite vse, kar veste o povezavi prostora Z in Fourierove transformacije! ______________

SKUPAJ ______________

OCENA ______________

PRIIMEK IN IME:________________________________

Digitalna obdelava signalov I

Datum: 13. 9. 2005

Kratka navodila:

- Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.
- Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte oba lista.
- Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.
- Čas trajanja izpita: 60 min

točke

1. Imamo sistem s prenosno funkcijo

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\left[1-1.25e^{-j\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}\right]\left[1-1.25e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}\right]}{\left[1-0.8e^{-j\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}\right]\left[1-0.8e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}\right]}.$$

   Frekvenca vzorčenja je 1kHz.

   a. Določite prenosno funkcijo H(z) in narišite lego korenov v prostoru Z.
   b. Narišite strukturo in koeficiente sistema v obliki Direktne strukture II
   c. Ocenite frekvenčni odziv sistema na frekvenčni osi od 0 - 500 Hz. Kako imenujemo takšen sistem?

   ____

2. Stabilnost sistemov: podajte BIBO kriterij stabilnosti in na njegovi podlagi določite, kdaj so kavzalni sistemi z racionalno prenosno funkcijo H(z) stabilni!

   ____

3. Hitri Fourierov transform; izpeljite algoritem za decimacijo po času in narišite potek računanja za N=8! Pojasnite, zakaj je algoritem FFT hitrejši od uporabe osnovnega izraza za DFT!

   ____

4. Analiza napak kvantizacije signala:
   a. Na primeru 3 bitnega kvantizatorja predstavite idealno karakteristiko kvantizatorja.
   b. Naštejte 4 značilne sistemske napake realnih kvantizatorjev!
   c. Napake skicirajte in pojasnite!

   ____

5. Vzorčenje časovno zveznih signalov: podajte matematično definicijo postopka vzorčenja v časovnem in frekvenčnem prostoru ter skicirajte vpliv vzorčenja na spekter signala. Pod kakšnim pogojem in kako lahko iz vzorcev brez popačenj restavriramo izvirni analogni signal?

   ____

SKUPAJ ____________

OCENA ____________

PRIIMEK IN IME:___________________________________

DIGITALNA OBDELAVA SIGNALOV I

Datum: 20. 6. 2005

Kratka navodila:

- *Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.*
- *Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte **oba** lista.*
- *Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.*
- *Čas trajanja izpita: 60 min*

točke

1. Podajte BIBO definicijo stabilnosti sistemov. Pod kakšnimi pogoji je kavzalen sistem BIBO stabilen? Izpeljite, kakšna mora biti lega koeficientov a_1 in a_2 stabilnega sistema 2. reda v kompleksni ravnini! ______________

2. Pojasnite možnosti za praktično realizacijo idealnih filtrov s prenosno karakteristiko $H(\omega) = \begin{cases} 1; |\omega| \le \omega_c \\ 0; \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$! Katere 3 zahteve morajo izpolnjevati realni frekvenčno selektivni filtri? ______________

3. Imamo sistem, ki ga določa diferenčna enačba
$$y[n] = \frac{y[n-1]}{2} + x[n] - \frac{x[n-4]}{16}$$
   a. Določite prenosno funkcijo sistema $H(z)$ in podajte optimalno realizacijo sistema v obliki Direktne strukture II (s čimmanjšim številom elementov).
   b. Presodite, če sistem lahko realiziramo kot sistem brez povratne vezave (FIR). Podajte ustrezno rešitev (koeficiente b), če ta obstaja! ______________

4. Hitri Fourierov transform; izpeljite algoritem za decimacijo po času in narišite potek računanja za N=8! Pojasnite, zakaj je algoritem FFT hitrejši od uporabe osnovnega izraza za DFT! ______________

5. Podajte vpliv oknjenja na spektralne lastnosti signala. Predstavite lastnosti Bartlettovega okna. ______________

SKUPAJ ______________

OCENA ______________

PRIIMEK IN IME: Turkovič Klemen

DIGITALNA OBDELAVA SIGNALOV (Bo)

Datum: 31. 8. 2011

Kratka navodila:

- *Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.*
- *Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte **oba** lista.*
- *Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.*
- *Čas trajanja izpita: 60 min*

točke

1. Imamo diskretni sistem, ki ga določa prenosna funkcija

$$H[z]=\frac{(z-1)(z+1)}{z^2}$$

   a. Narišite lego korenov sistema v ravnini z! Ali je sistem stabilen?
   b. Zapišite diferenčno enačbo, podajte koeficiente *b* in *a* sistema ter skicirajte izvedbo v obliki Direktne strukture I.
   c. Izračunajte odziv sistema na vhodni signal $x=[1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5]$!

∅

2. Vzorčenje.
   Imamo signal s pozitivnim delom zveznega spektra

$$X[f]=\begin{cases}1-\frac{f}{1000\,Hz}; & 0\le f\le 1000\,Hz\\ 0; & drugje\end{cases}.$$

- Na prvi graf skicirajte spekter zveznega signala na intervalu *-4kHz<f<4kHz*!
- Signal vzorčimo s frekvenco 2000Hz. Na drugi graf narišite spekter vzorčenega signala! Ali pogoji vzorčenja ustrezajo Nyquistovem-u kriteriju?
- Primerjajte oba spektra ter pojasnite v čem se razlikujeta. Na podlagi odgovora definirajte idealno frekvenčno karakteristiko D/A pretvornika!

10

3. Hitri Fourierov transform; nakažite izpeljavo algoritma za decimacijo po času ter podrobno narišite potek računanja za N=8.

5

4. Zapišite definiciji transformacije Z in Fourierove transformacije za časovno diskretne signale! Podajte povezavo med obema transformac

5. Filtriranje v frekvenčnem prostoru s prekrivno-shranjevalno metodo; pojasnite idejo ter skicirajte postopek.

5

SKUPAJ 40

OCENA

PRIIMEK IN IME:__________________________________

DIGITALNA OBDELAVA SIGNALOV

Datum: 11. 02. 2004

Kratka navodila:

- *Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.*
- *Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte **oba** lista.*
- *Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.*
- *Čas trajanja izpita: 60 min*

točke

1. Stabilnost kavzalnih, časovno neodvisnih sistemov. Podajte kriterij stabilnosti glede na odziv sistema na impulz enote h[n]. Kakšna je lega korenov (polov in ničel) stabilnih kavzalnih sistemov? __________

2. Zapišite algoritem diskretne Fourierove transformacije in izračunajte DFT konstantnega signala,
   $x = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ __________

3. Izračunajte odziv linearnega časovno neodvisnega sistema z impulznim odzivom h[0] = 1, h[1] = 2, h[2] = -1} na vhodni signal x[0] = 1, x[1] = 2, x[2] = 3, x[3] = 1. Napišite koeficiente filtra b in a ustreznega filtra! __________

4. Skicirajte 4 periode analognega sinusnega signala ter na isti sliki označite vzorce diskretnega signala x(k)=sin(1.75π k), k=0,1,...,4. Na primeru pojasnite teorem o vzorčenju! Podajte frekvenco signala in frekvenco vzorčenja! Ali primer ustreza 2. Nyquistovemu kriteriju? __________

5. Kvantizacija signala. Skicirajte sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov. Skicirajte prenosno karakteristiko enoličnega kvantizatorja s konstantnim korakom. Podajte število kvantizacijskih nivojev, korak kvantizatorja Δ in tabelo binarnih simbolov za 3 bitni kvantizator. Kvantizator razpoznava pozitivne in negativne signale, $|x_{max}|$ = 2V. __________

SKUPAJ __________

OCENA __________

DIGITALNA OBDELAVA SIGNALOV

Datum: 04. 02. 2011

Kratka navodila:

- *Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.*
- *Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte oba lista.*
- *Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.*
- *Čas trajanja izpita: 60 min*

točke

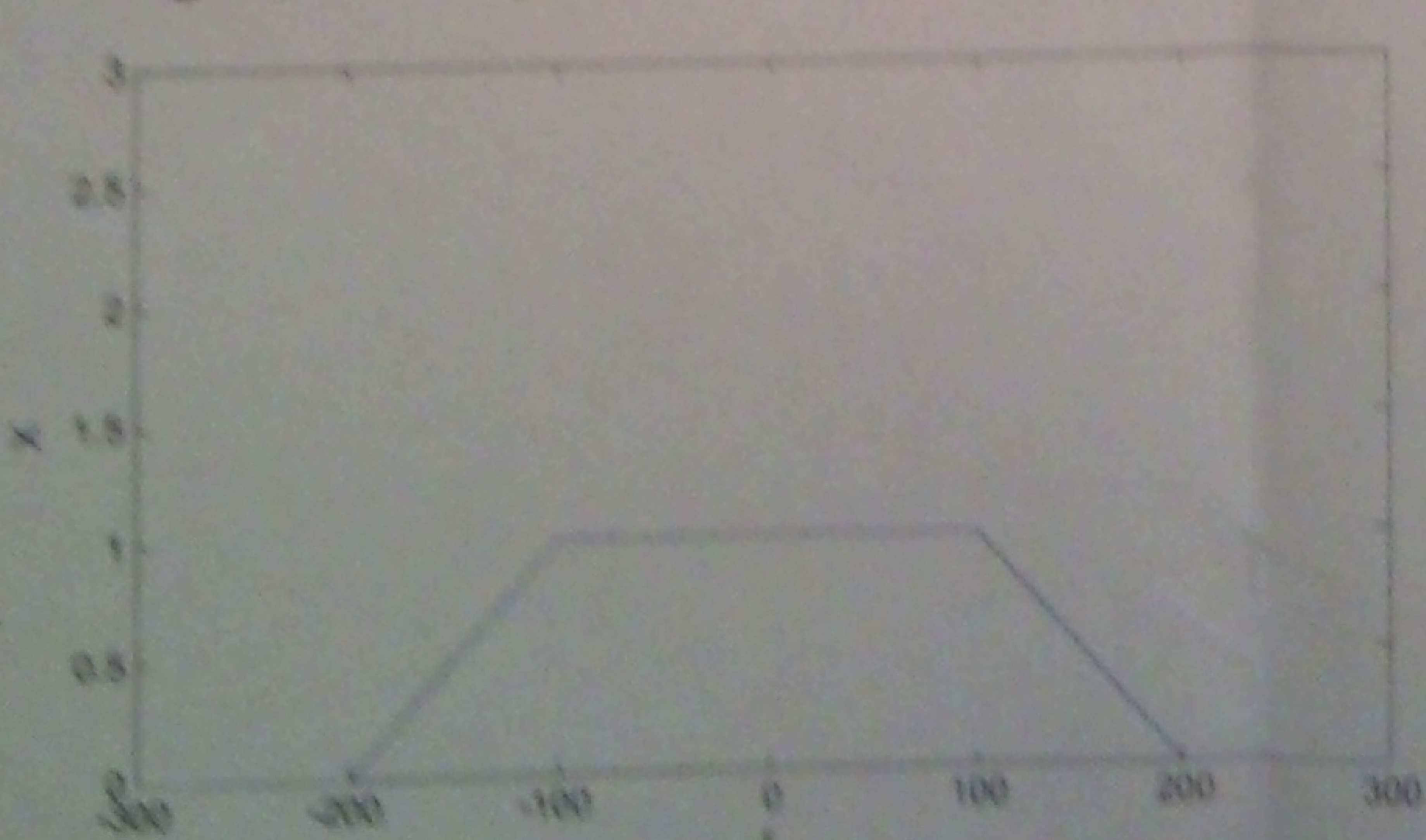
1. Izračunajte odziv filtra z impulznim odzivom h(n) = {1, -1} na vhodni signal x(n) = {1, -1, [redacted] -1, 1}! Narišite realizacijo filtra v obliki Direktne strukture I.

2. Izpeljite (nakažite bistvene korake!) ter skicirajte sistem za izračun FFT z decimacijo po času za N=8.

3. Stabilnost kavzalnih, časovno neodvisnih sistemov. Kakšen je odziv sistema na impulz enote h[n] glede na stabilnost sistema. Kakšna je lega korenov (polov in ničel) stabilnih kavzalnih sistemov?

4. Imamo fazor $x[n] = e^{\frac{j\pi n}{2}}$.
   - Narišite in z indeksom n označite VSE vrednosti diskretnega signala $x[n]$ za $0 \le n \le 8$ v kompleksni ravnini!
   - Narišite časovni potek signala $\frac{x - x^*}{2}$ za $0 \le n \le 8$

5. Vzorčenje.
   Imamo signal, katerega spekter predstavlja graf



Signal vzorčimo s frekvenco 200Hz. Narišite spekter vzorčenega signala! Ali pogoji vzorčenja ustrezajo Nyquistovem-u kriteriju? Primerjajte oba spektra ter pojasnite v čem se razlikujeta. Na podlagi rezultata opišite Nyquistov teorem o vzorčenju!

TF

PRIIMEK IN IME: ____________________

DIGITALNA OBDELAVA SIGNALOV (STARI VSS)

Datum: 30. 06. 2011

Kratka navodila:

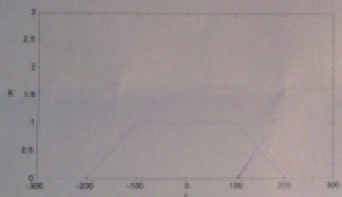
- *Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.*
- *Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte **oba** lista.*
- *Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.*
- *Čas trajanja izpita: 60 min*

točke

1. Imamo linearen časovno neodvisen sistem, ki ga predstavlja diferenčna enačba $y(n)+0.81y(n-2)=x(n)+x(n-2)$.
   - Narišite direktno strukturo II filtra in podajte koeficiente b in a!
   - Določite prenosno funkcijo $H(z)$
   - Narišite korene sistema v ravnini Z.
   - Skicirajte frekvenčno karakteristiko filtra za $f_s=40kHz$!

15

2. Teorem vzorčenja. Fourierov spekter signala predstavlja slika. Skicirajte spekter vzorčenega signala, če je frekvenca vzorčenja enaka 300 Hz. Razložite, če smo v tem primeru zadostili pogojem 2. Nyquistovega kriterija!



500

7,5

3. Stabilnost diskretnih sistemov:
   - Podajte definicijo stabilnosti diskretnih sistemov.
   - Na podlagi potrebnega in zadostnega pogoja za stabilnost diskretnega sistema določite področje konvergence stabilnega sistema.
   - Na podlagi podanega POK podajte lego korenov kavzalnega linearnega, časovno neodvisnega sistema.

20

4. Imamo signal $x[n]=e^{\frac{j\pi n}{8}}$. Skicirajte dogajanje v kompleksni ravnini kot tudi časovni potek realne komponente signala $\vec{x}[n]$ za prvih 8 vzorcev.

20

5. Transformacija Z.
   - Podajte definicijo transformacije Z.
   - Kakšen je običajen postopek za izračun transformacije/inverzne transformacije Z?
   - Podajte zvezo med transformacijo Z in Fourierovo transformacijo

15

SKUPAJ ____________

OCENA ____________

PRIIMEK IN IME:______________________________

DIGITALNA OBDELAVA SIGNALOV (NOVI Bo VSS)

Datum: 30. 06. 2011

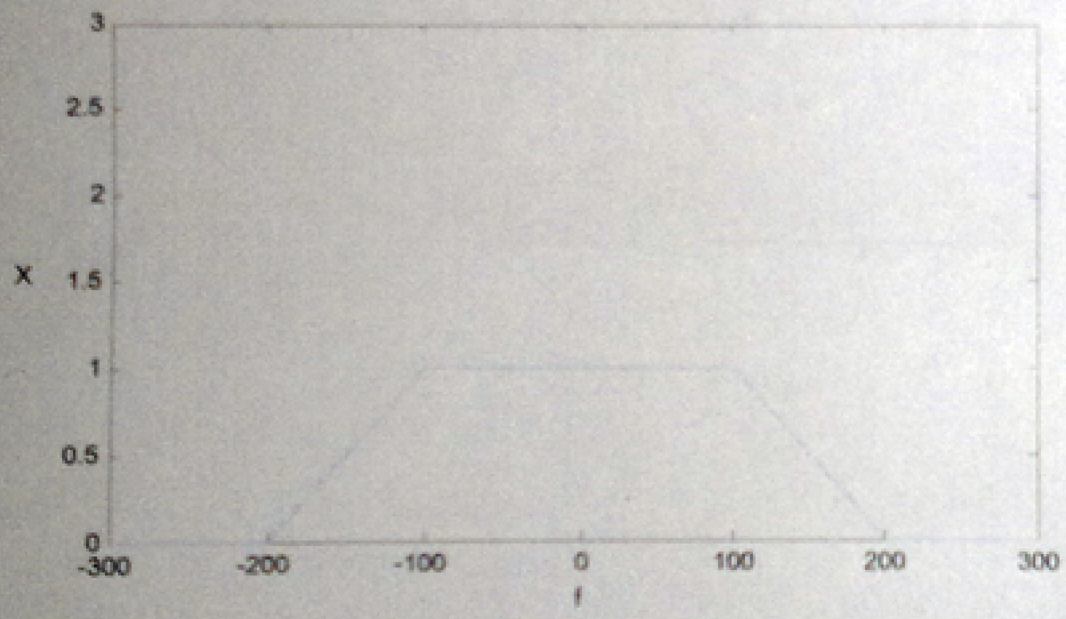
Kratka navodila:

- *Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.*
- *Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte **oba** lista.*
- *Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.*
- *Čas trajanja izpita: 60 min*

toč

1. Imamo linearen časovno neodvisen sistem, ki ga predstavlja diferenčna enačba $y(n)+0.81y(n-2)=x(n)+x(n-2)$.
   - Narišite direktno strukturo II filtra in podajte koeficiente b in a!
   - Določite prenosno funkcijo $H(z)$
   - Narišite korene sistema v ravnini Z.
   - Skicirajte frekvenčno karakteristiko filtra za f_s=40kHz!

2. Teorem vzorčenja. Fourierov spekter signala predstavlja slika. Skicirajte spekter vzorčenega signala, če je frekvenca vzorčenja enaka 300 Hz. Razložite, če smo v tem primeru zadostili pogojem 2. Nyquistovega kriterija!



3. Zapišite postopek za izračun diskretne Fourierove transformacije. Podajte postopek v obliki množenja s transformacijsko matriko in izračunajte DFT konstantnega signala

$$x = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$

4. Imamo signal $\vec{x}[n]=e^{\frac{j\pi n}{8}}$. Skicirajte dogajanje v kompleksni ravnini kot tudi časovni potek realne komponente signala $\vec{x}[n]$ za prvih 8 vzorcev.

5. Transformacija Z.
   - Podajte definicijo transformacije Z.
   - Kakšen je običajen postopek za izračun transformacije/inverzne transformacije Z?
   - Podajte zvezo med transformacijo Z in Fourierovo transformacijo

SKUPAJ ______

OCENA ______

PRIIMEK IN IME:___________________________________

DIGITALNA OBDELAVA SIGNALOV

Datum: 01. 09. 2004

Kratka navodila:

- *Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.*
- *Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte **oba** lista.*
- *Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.*
- *Čas trajanja izpita: 60 min*

točke

1. Imamo diskretni signal, ki ga predstavlja rotirajoči fazor $\vec{x}[n] = 5e^{j\pi}e^{j\pi n/4}$. Skicirajte fazor in potek projekcije signala na realno os za prvih 8 vzorcev. _____________

2. Diskretna Fourierova transformacija
   - Podajte formulo za izračun DFT!
   - Izračunajte DFT signala x[0]=1, x[1]=-1, x[2]=1, x[3]=-1!

   ____

3. Imamo filter s prenosno funkcijo $H(z) = \dfrac{1 - 0{,}2z^{-1} - 0{,}08^{-2}}{1 + 0{,}5z^{-2}}$.

   Določite:
   - diferenčno enačbo takšnega sistema
   - realizacijo v obliki direktne strukture I.

   ____

4. Na nekaj značilnih primerih prikažite vpliv lege korenov prenosne funkcije diskretnega sistema z neskončnim odzivom na časovno obnašanje sistema! _____________

5. Kvantizacija signala. Skicirajte sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov. Skicirajte prenosno karakteristiko enoličnega kvantizatorja s konstantnim korakom. Podajte število kvantizacijskih nivojev, korak kvantizatorja Δ in tabelo binarnih simbolov za 3 bitni kvantizator. Kvantizator razpoznava pozitivne in negativne signale, X_{max} = 4V. _____________

SKUPAJ _____________

OCENA _____________

PRIIMEK IN IME:______________________________

Digitalna obdelava signalov

Datum: 20. 09. 2005

Kratka navodila:

- Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.
- Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte oba lista.
- Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.
- Čas trajanja izpita: 60 min

točke

1. Imamo sistem s prenosno funkcijo $H(z)=\frac{[z-j][z+j]}{[z-0.9j][z+0.9j]}$.
    a. Določite koeficiente *a* in *b* pričujočega sistema.
    b. Narišite strukturo sistema v obliki Direktne strukture I
    c. Frekvenca vzorčenja znaša 200Hz. Ocenite amplitudni odziv sistema. Kako imenujemo takšen sistem in kolikšna je njegova značilna frekvenca?

____

2. Vzorčenje in rekonstrukcija signalov.
    a. Podajte matematično funkcijo, s katero ponazorimo postopek vzorčenja.
    b. Pojasnite vpliv vzorčenja na spekter signala (skica).
    c. Podajte kriterij za izbiro vzorčne frekvence.
    d. Kakšen je matematični postopek za rekonstrukcijo vzorčenih signalov (podajte rešitev v frekvenčnem ter v časovnem prostoru)?

____

3. Imamo sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov s 3 bitnim kvantizatorjem. Kvantizator razpoznava samo pozitivne in negativne signale z maksimalno vrednostjo U_{max}=4 V.
    a. Skicirajte sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov.
    b. Skicirajte prenosno karakteristiko enoličnega kvantizatorja s konstantnim korakom, ki ustreza navedeni specifikaciji.
    c. Podajte število kvantizacijskih nivojev, korak kvantizatorja Δ in tabelo binarnih simbolov.

____

4. Diskretna Fourierova transformacija:
    a. Podajte izraz za izračun diskretne in inverzne diskretne Fourierove transformacije!
    b. Izračunajte DFT signala x(0)=1, x(1)=-1, x(2)=1, x(3)=-1

____

5. Določite odziv linearnega časovno neodvisnega sistema z impulznim odzivom h(n) = {1,2,1,-1} na vhodni signal x(n) = {1,2,3,1}.

____

SKUPAJ ___________

OCENA ___________

20-01-05

1.

2 c)

če je c 100Hz 200Hz.

5

$h(n) = \{1, 2, 1, -1\}$ na vhodni signal $x(n) = \{1, 2, 3, 1\}$

$y(t) = x * h = \sum x(k)\, h(n-k) = \sum h(k)\, x(n-k)$

$x \rightarrow \boxed{h} \rightarrow y$

vhod								
1 :	1	2	1	-1				
2 :		2	4	2	-2			
3 :			3	6	3	-3		
1				1	2	1	-1	
	1	4	8	8	3	-2	-1	

Zračunaj

$a_1 = 1$
$b = h$

PRIIMEK IN IME:____________________________

DIGITALNA OBDELAVA SIGNALOV

Datum: 20. 9. 2011

Kratka navodila:

- *Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.*
- *Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte **oba** lista.*
- *Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.*
- *Čas trajanja izpita: 60 min*

točke

1. DFT
   a) Podajte izraz za izračun diskretne Fourierove transformacije!
   b) Na tej osnovi določite transformacijsko matriko W, s pomočjo katere bomo s pomočjo množenja matrika-vektor $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ izračunali Fourierovo transformacijo $\mathbf{X} = [X(0), X(1), \ldots]^T$ signala $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \ldots]^T$ za N=4.
   c) Z množenjem z dobljeno matriko izračunajte Fourierovo transformacijo signala $x = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$!

____

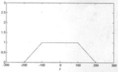
2. Imamo signal $\bar{x}[n] = e^{\frac{j\pi n}{4}} + e^{-\frac{j\pi n}{4}}$. Skicirajte dogajanje v kompleksni ravnini kot tudi časovni potek realne in imaginarne vrednosti signala $\bar{x}[n]$ za prvih 8 vzorcev. Kakšno funkcijo prepoznate v rezultatu?

____

3. S skicami ključnih 9 primerov prikažite vpliv lege korenov (kateri so bistveni?) signala v prostoru Z na njegov časovni potek!

____

4. Vzorčenje. Imamo signal (enote v Hz):



- Signal vzorčimo s frekvenco f_s=*400Hz*. Na graf narišite spekter vzorčenega signala na področju *-1kHz<f<1kHz*! Ali pogoji vzorčenja ustrezajo Nyquistovem-u kriteriju?
- Primerjajte oba spektra ter pojasnite v čem se razlikujeta. Na podlagi odgovora definirajte idealno frekvenčno karakteristiko D/A pretvornika! Kakšen bi moral biti časovni odziv D/A pretvornika? Komentirajte izvedljivost!

____

5. Imamo sistem, ki ga določa prenosna funkcija
$$H[z] = \frac{(z-1)(z+1)}{z^2}$$
   a. Narišite lego korenov sistema v ravnini z! Ali je sistem stabilen?
   b. Podajte koeficiente b in a sistema ter skicirajte strukturi filtra (Direktna struktura I).

____

SKUPAJ __________

OCENA __________

DOS - IZPITI

31. 8. 2004

$$e^{j\omega} = z \qquad e^{-j\omega} = z^{-1}$$

1. $$H(e^{j\omega}) = \frac{\left[1 - e^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1 - e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]}{\left[1 - 0{,}9e^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1 + 0{,}9e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]} \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4}$$

a)

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})(1 - z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})}{(1 - 0{,}9z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})(1 + 0{,}9\cdot z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})} = \frac{1 - z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} - z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}} + z^{-2}}{1 - 0{,}9z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} - 0{,}9z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}} + 0{,}81z^{-2}}$$

$$= \frac{1 - z^{-1}\left(e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{\pi}{4}}\right) + z^{-2}}{1 - 0{,}9z^{-1}\left(e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{\pi}{4}}\right) + 0{,}81z^{-2}} = \frac{1 + (2)\cos\frac{\pi}{4} z^{-1} + z^{-2}}{1 - (1{,}8)\cos\frac{\pi}{4} z^{-1} + 0{,}81z^{-2}}$$

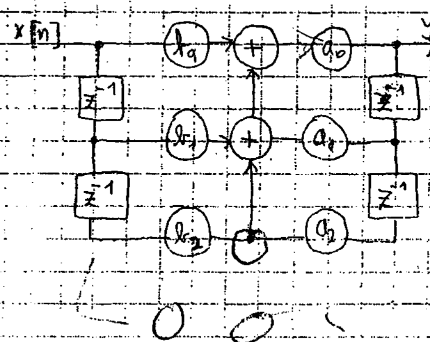
b)

v števcu so b-ji, v imenovalcu pa koeficienti a.

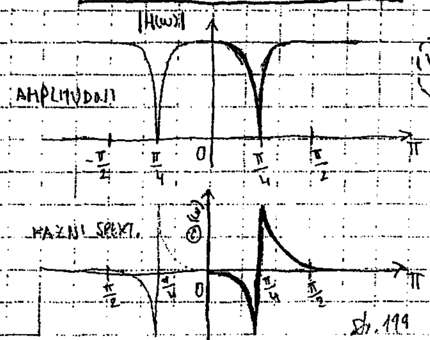
$b_0 = 1, \; b_1 = -\cos\frac{\pi}{4}, \; b_2 = 1$

$a_0 = 1, \; a_1 = -0{,}9\cos\frac{\pi}{4}, \; a_2 = 0{,}81$

c) DIREKTNA STRUKTURA I



d) $$H(z) = \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$



str. 199

Filter z ZAREZO:

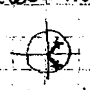
ničle na 1 poli pa 0,9

VSEPASOVNO:

ničle > 1
poli < 1

OSTALI

RESONATOR (dušen nihajni krog)



ničla = 0
poli < 1

če bi bili poli na 1 bi bil OSCILATOR

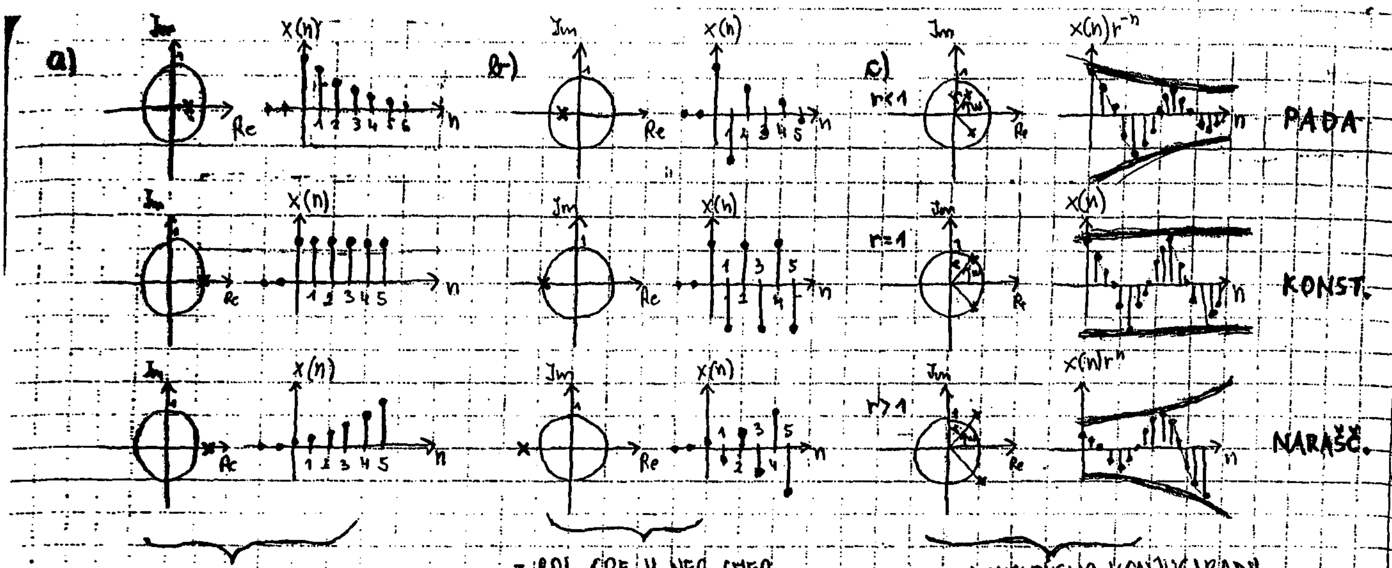
2. Obnašanje signala je odvisno od področja lege polov. Lahko ležijo zunaj, znotraj ali na enotinem krogu.

- SIGNAL Z ENIM POLOM JE REALEN EKSPONENTNI SIGNAL: $\boxed{x(n) = a^n \cdot u(n) \Leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}}$

  NIČLA: $z_1 = 0$ POL: $p_1 = a$ POK $|z| > |a|$

  če je pol negativen ni krajun izmenjovanje signala
- KAVZALNI SISTEMI Z DVOJNIM POLOM SO STABILNI ČE ZA $a < 1$, ZA $a = 1$ POSTANE NESTABILEN. OBLIKA DVOJNEGA POLA: $x(n) = n \cdot a^n \cdot u(n)$ TAKIM SE IZOGIBAMO
- V PRIMERU PARA KONJUGIRANO KOMPLEKSNIH POLOV, PA VEMO, DA IMAMO OPRAVKA Z EKSPONENTNO UTEŽENIM KOSINUSOIDNIM SIGNALOM.
  - ↳ razdalja $|z| = r$ polov določa ovojnico kosi. sign. $|z|$ z realno osjo pa relat. fr. ω
- AMPLITUDA SIGNALA UPADA, ČE JE $r < 1$, NARAŠČA, ČE JE $r > 1$, KONST., ČE JE $r = 1$
- NIČLE PRAV TAKO VPLIVAJO NA OBNAŠANJE SISTEMA, VENDAR NE TAKO MOČNO, KOT POLI. NIČLE IMAJO PREDVSEM VPLIV NA FAZO TRENUTNEGA SIGNALA.

a) **b)** **c)**



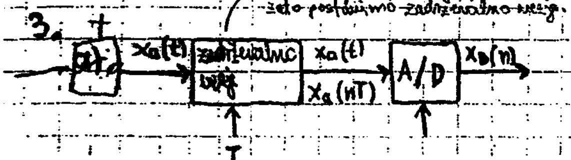
- POL V POZ. SMERI $a>0$

- POL GRE V NEG. SMER ZATO SE SIGNAL IZMENJUJE (+/-) $a<0$

- KOMPLEKSNO KONJUGIRANI POLI. KOSINUSOID
- RAZDALJA POLOV (r) DOLOČA ENOTNICO

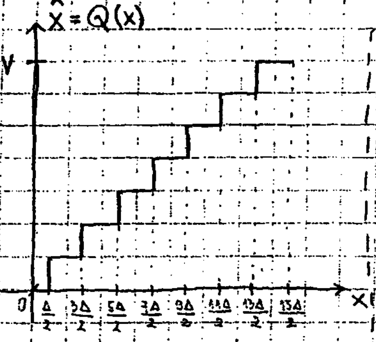
3.

zajemanje signala ni idealno in lahko traja več časa, kot pričakovano zato postavimo zadrževalno vezje.



zajeti - merični signal lahko razdelimo od 1024 nivojev (10-bitni A/D) do 65536 nivojev (16-bitni A/D)

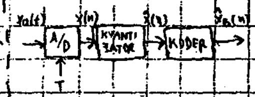
b)



KVANTIZATOR JE NELINEAREN SISTEM, KI PRETVARJA VHODNE VZORCE $x[n]$ V KONČNI NIZ V NAPREJ PREDPISANIH SIMB.

$$\boxed{\hat{x}[n] = Q(x[n])}$$

$\hat{x}(n)$ je kvantizirana predst. $x(n)$. GOVORIMO O ENOLIČNI KVANTIZACIJI S KONST. KORAK.



c) 3-bitni kvantizator ($b=3$)

$$\Delta = \frac{X_{max} - X_{min}}{N-1} = \frac{7V - 0V}{8-1} = \frac{7V}{7} = \underline{1V} \text{ (korak ali stopnica)}$$

$$N = 2^b = 2^3 = \underline{8} \text{ (št. nivojev)}$$

KORAK ZA POZ. SIGNALE:

$$\boxed{\Delta = \frac{U_{max}}{N-1}}$$

KORAK ZA POZ. IN NEG. SIGN.:

$$\boxed{\Delta = \frac{U_{max}}{2^{b-1}}} \quad = \frac{7}{2^2} = \frac{7}{4} = 1\tfrac{3}{4}$$

TABELA:

simbol	vhodna vrednost
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

4.

helor. vrtež po cos

$$\boxed{\mathcal{F}: X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}}$$

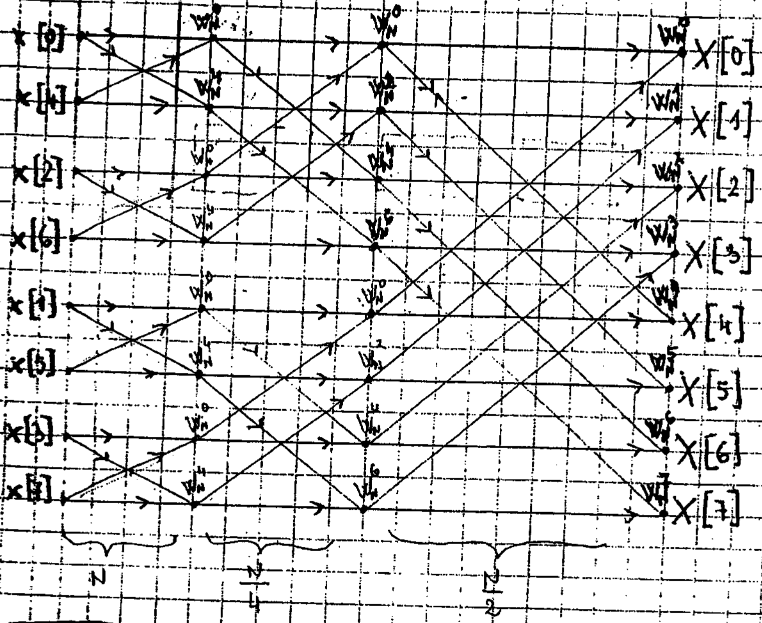
$$\boxed{\mathcal{Z}: X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\omega n}}$$

$$\boxed{z^{-1} = r \cdot e^{-j\omega}} \qquad z^{-n} = r^{-n} \cdot e^{-j\omega n}$$

Fourierova transformacija je pri $r=1$ enaka transformaciji Z. $\quad r=1 \Rightarrow \mathcal{Z} = \mathcal{F}$

5. ALGORITEM za hitri izračun DISKRETNE F.T. z decimacijo po času za 8 vzorcev.

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}}$$



FFT je hitrejši zato, ker osnovno računanje DFT razstavimo na nize dolžine N in manjše diskretne FT. Ločimo dva tipa algoritmov:

1. DECIMACIJA PO ČASU, kjer niz $x(n)$ razstavimo v zaporedne manjše nize
2. DECIMACIJA PO FREKV., kjer koeficiente DFT $X(k)$ razst. v zap. manjše nize

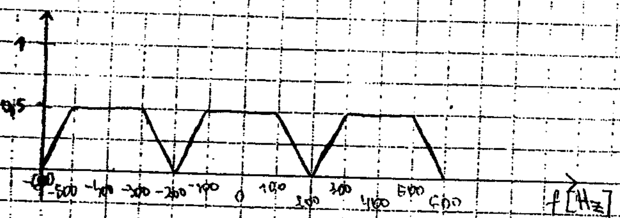
Ti algoritmi izkoriščajo periodičnosti in simetričnosti DFT lastnosti

$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$ (periodičnost)

$W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$ (simetričnost)

13.6.2007

1.



signal je mogoče določiti iz vzorcev, če je le-ta frekvenčno omejen in če je frekv. vzorčenja 2x večja od frekvence signala.

$\omega_{vz} = 2\omega_m$

Ta pogoj je izpolnjen.

2. $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ mat. funkc.

$x[0] = 2\cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{4}\right) = 2$

$x[1] = 2\cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{4}\right) = 2\cos\frac{\pi}{4}$

$x[2] = 2\cos\left(\frac{\pi 2}{4}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2}$

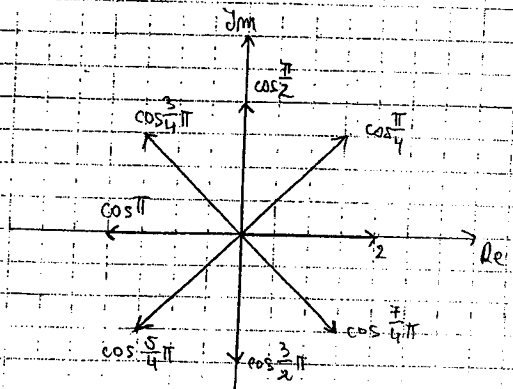
$x[3] = 2\cos\left(\frac{\pi 3}{4}\right) = 2\cos\frac{3}{4}\pi$

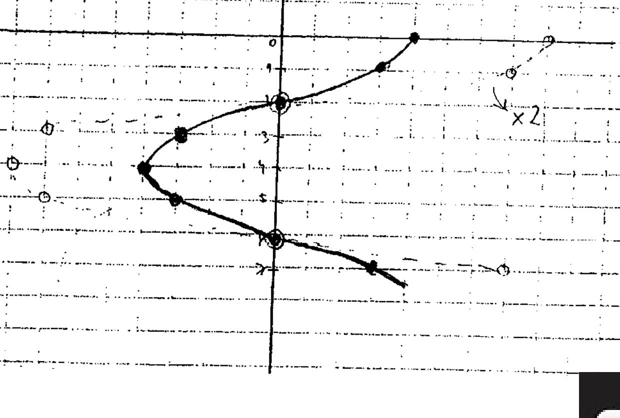
$x[4] = 2\cos\left(\frac{\pi 4}{4}\right) = 2\cos\pi$

$x[5] = 2\cos\left(\frac{\pi 5}{4}\right) = 2\cos\frac{5}{4}\pi$

$x[6] = 2\cos\frac{3}{2}\pi$

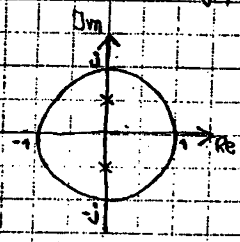
$x[7] = 2\cos\frac{7}{4}\pi$





3. $H(z)=\dfrac{4z^2}{(2z-j)(2z+j)}$ → poli

$\dfrac{(2z-j)}{2}\cdot\dfrac{(2z+j)}{2}=\left(z-\dfrac{j}{2}\right)\left(z+\dfrac{j}{2}\right)$ => pola $-\dfrac{1}{2}j$ in $\dfrac{1}{2}j$

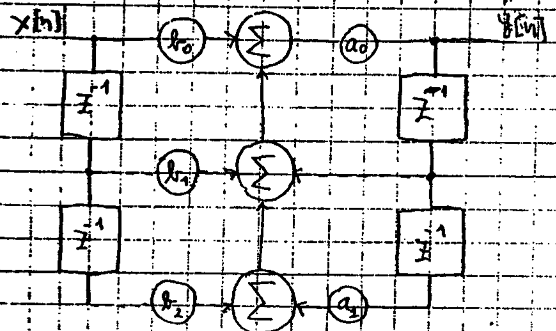


- Sistem je stabilen, ker sta pola < 1
  - ↳ ČE BI BILA POLA NA 1 BI BIL SISTEM MEJNO STABILEN
  - ↳ ČE BI BILA POLA > 1 BI BIL SISTEM NESTABILEN

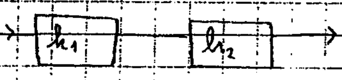
$\boxed{-j^2=1}$ $\boxed{j^2=-1}$ $\boxed{\dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{b}}$

$H(z)=\dfrac{4z^2}{(2z-j)(2z+j)}=\dfrac{4z^2}{4z^2+\cancel{2zj}-\cancel{2zj}-j^2}=\dfrac{4z^2}{4z^2+1}\ \Big/\cdot\dfrac{z^{-2}}{z^{-2}}\Rightarrow\dfrac{4}{4+z^{-2}}\begin{matrix}\to b\\ \to a\end{matrix}$

$b_0=4,\ b_1=0,\ b_2=0\qquad a_0=4,\ a_1=0,\ a_2=1$

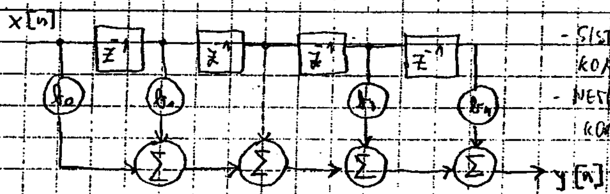


4. $h_1(n)=\{1,-2,1\}$
$h_2(n)=\{1,1,1\}$



ali je sistem stabilen?

h_2 \ h_1	1	-2	1		
1	1	-2	1		
1		1	-2	1	
1			1	-2	1
+	1	-1	0	-1	1
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4



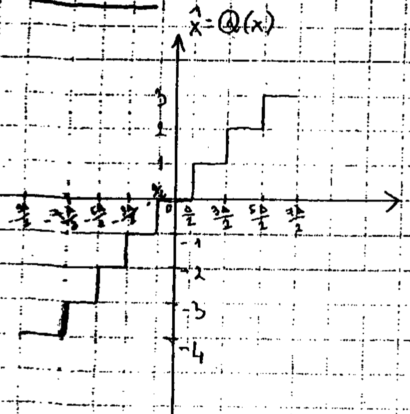
- SISTEM JE STABILEN, KER IMA KONČNI ODZIV.
- NESTABILEN BI BIL, ČE NE BI IMEL KONČNEGA ODZIVA.

$y[n]=x(n)-x(n-1)+x(n-3)+x(n-4)$

5. $b=3$
$V_{max}=4V$

$N=2^b=2^3=\underline{\underline{8}}$ Nivojev

MAX POZ. NAP = 3V, MAX NEG. NAP = -4V



BINARNI SIMBOLI $X_B(n)$			NAP. $\hat{X}(n)$
0	1	1	3
0	1	0	2
0	0	1	1
0	0	0	0
1	1	1	-1
1	1	0	-2
1	0	1	-3
1	0	0	-4

-1 ⇒ 1 = 001
110 + 1
111

1)

14.4.2008

1. $h(n) = \{-1, 2, -1\}$ na vhodni signal $x(n) = \{1, 2, 1\}$

$x(n) \backslash h(n)$	-1	2	-1		
1	-1	2	-1		
2		-2	4	-2	
1			-1	2	-1
⊕	-1	0	2	0	-1
	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4

ODZIV FILTRA

$y(n) = -x(n) + 2x(n-2) - x(n-4)$

2. Pri sistemu FFT z decimacijo po času za N=8 skušamo razstaviti ~~vstopno izhodni~~ niz $x(n)$ v vedno manjše in manjše podnize.

- velikost niza je $N = 2^m$, pri tem računamo posebej izhodne nize členov z SODIM indeksom in posebej z LIHIM indeksom.

~~X(k) razstavimo na dva enaka dela z indeksi od 0 do $\frac{N}{2}-1$.~~

↳ $\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}}$ $\quad \underline{k = 0, 1, \dots, N-1}$

~~SODI ...~~

- vzamimo vsak niz posebej:

$$X(k) = \sum_{\substack{n=\text{SOD} \\ \parallel \\ 2r}} x(n) W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=\text{LIH} \\ \parallel \\ 2r+1}} x(n) W_N^{nk}$$

$$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{\frac{N}{2}}$$

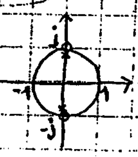
$$\boxed{X(k)} = \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_{\frac{N}{2}}^{rk}}_{\text{DFT transform SODIH elementov}} + W_N^k \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) \cdot W_{\frac{N}{2}}^{rk}}_{\text{DFT transform lihih elementov}} = \boxed{G(k) + W_N^k H(k)}$$

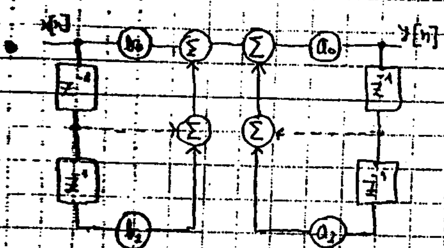
- po dobljeni formuli izračunamo izhode $x(k) \to X(0), X(1), X(2), \dots$ in naredimo decimacijo po času z dvema $\frac{N}{2}$ TOČKOVNO DFT.
- Nadaljujemo tako, da $\frac{N}{2}$-točk. DFT nadomestimo z $\frac{N}{4}$-točk. DFT, kjer zopet računamo SODO in LIHO stran
- Nazadnje v blok $\frac{N}{4}$ dodamo še bloke z 2 točkovnimi DFT in dobimo celotno rešitev.

3. $H_1[z] = \frac{[z-j]}{[z-0{,}9j]}$ $H_2[z] = \frac{[z+j]}{[z+0{,}9j]}$ $z^2 + \cancel{jz} - \cancel{jz} - j^2$ $-j^2 = 1$ $(j)^2 = -1$

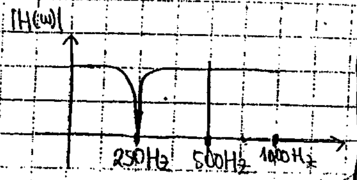
$z^2 \cdot z^{-2} = z^{2-2} = 1$

- $H_1[z] \cdot H_2[z] = \frac{[z-j][z+j]}{[z-0{,}9j][z+0{,}9j]} = \frac{z^2+1}{z^2+0{,}81} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} \Rightarrow \frac{1+z^{-2}}{1+0{,}81z^{-2}}$ $\to b$: $b_0=1, b_1=0, b_2=1$; $\to a$: $a_0=1, a_1=0, a_2=0{,}81$
- poli: $-0{,}9j,\ 0{,}9j$ nule: $-j, j$

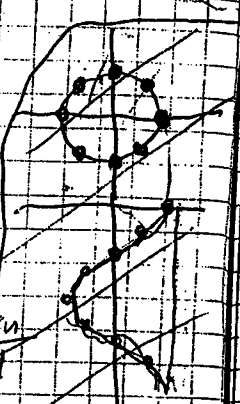




ali lakše napišemo posamezno?



$f_{vz} = 1kHz$



$x = e^{\frac{j\pi n}{4}}$

$x(0) = e^0 = 1$

$x(1) = e^{\frac{j\pi 1}{4}}$ $\quad \angle x[n]$

$e^{\frac{j\pi 2}{4}}$

$e^{\frac{j\pi 3}{4}}$

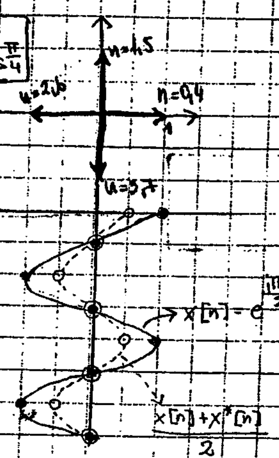
$e^{\frac{j\pi 8}{4}}$

4. $x[n] = e^{\frac{j\pi n}{4}}$, $0 \le n \le 7$ $\boxed{\frac{e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}}$

$x(0) = e^{\frac{j\pi 0}{2}} = 1$
$x(1) = e^{\frac{j\pi 1}{2}}$
$x(2) = e^{\frac{j\pi 2}{2}}$
$x(3) = e^{\frac{j\pi 3}{2}}$
$x(4) = e^{j\pi 2}$
$x(5) = e^{\frac{j\pi 5}{2}}$
$x(6) = e^{j\pi 3}$
$x(7) = e^{\frac{j\pi 7}{2}}$

$\frac{x[n] + x^*[n]}{2} = \frac{e^{\frac{j\pi n}{2}} + e^{-\frac{j\pi n}{2}}}{2} = \cos\frac{\pi n}{2}$

[redacted]

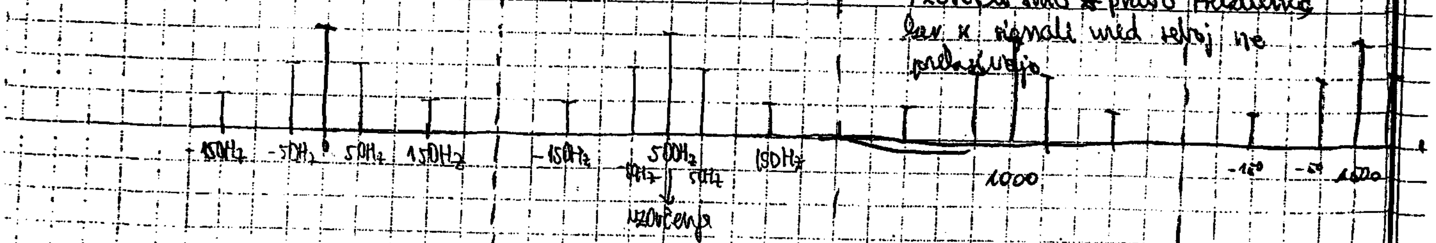


5. $x(t) = \sin(100\pi t) + \frac{1}{3}\sin(300\pi t)$ $\quad -1500Hz \le f \le 1500Hz$ $\quad f_s = 500Hz$

$\omega = 2\pi f$
$\omega = 2\pi 50$
$f = 50Hz$

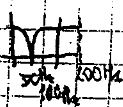
$f = 150Hz$
preslikava

- NYQUISTOV KRITERIJ $f_{vz} = 2 \cdot f$
- vzorčiti moramo z pravo frekvenco kar x signali med seboj ne prekrivajo



20.9.2005

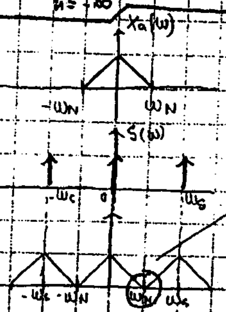
1. $H(z)=\dfrac{[z-j][z+j]}{[z-0{,}9j][z+0{,}9j]}$ a) ✓ b) ✓

c) amplitudni odziv  FILTER Z ZAREZO

2. a) $\boxed{x_{a2}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\,\delta(t-nT)}$

c) $\omega_s = 2\omega_N$

b)



signala se med seboj ne smeta prekrivati.

d) $\boxed{x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot \dfrac{\sin\left[\frac{\pi(t-nT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}}$ cos. prostor

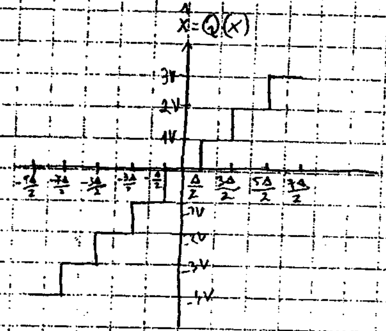
freker

3. A/D a)

$x_a(t)$ → zadrževalnik → $x_a(nT)$ → A/D → $x_B(t)$

T

b)



$b=3$
$U_{max}=4V$

za poz.
$\Delta=\dfrac{U_{max}}{N-1}$

c) $N=2^b=2^3=\underline{8}$ nivojev

$\Delta=\dfrac{U_{max}}{2^{b-1}}=\dfrac{4V}{2^{3-1}}=\dfrac{4V}{4}=\underline{1V}$

$\hat{x}_B(n)$	$\hat{x}(n)$
011	3
010	2
001	1
000	0
111	-1
110	-2
101	-3
100	-4

4. a) $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,W_N^{kn}$ $k=0,1,\dots,N-1$ $x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cdot W_N^{-kn}$ $n=0,1,\dots,N-1$

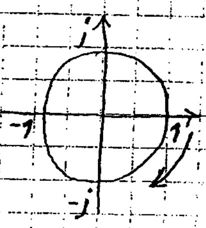
$W_N^{kn}=e^{-j\frac{\pi}{2}kn}$ 4

b) $x(0)=1$, $x(1)=-1$, $x(2)=1$, $x(3)=-1$ $\Big\}\ x=[1,-1,1,-1]$

n=0 n=1 n=2 n=3

$X(0)=1\cdot1+-1\cdot1+1\cdot1+-1\cdot1=0$
$X(1)=1\cdot1+-1\cdot(-j)+1\cdot(-1)+-1\cdot j=0$
$X(2)=1\cdot1+-1\cdot(-1)+1\cdot1+-1\cdot(-1)=0$
$X(3)=1\cdot1+-1\cdot j+1\cdot(-1)+-1\cdot(-j)=0$

→ 6 v tem primeru 4



5. $h(n)=\{1,2,1,-1\}$

$x(n)=\{1,2,3,1\}$

- odziv sistema:

$y(n)=x(n)+4x(n-1)+8x(n-2)+8x(n-3)+3x(n-4)-2x(n-5)-x(n-6)$

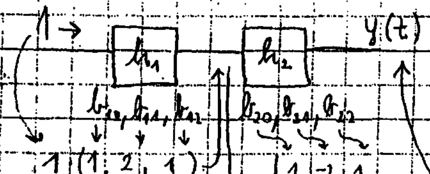
x(n) \ h(n)	1	2	1	-1			
1	1	2	1	-1			
2		2	4	2	-2		
3			3	6	3	-3	
1				1	2	1	-1
	1	4	8	8	3	-2	-1

$x \rightarrow \boxed{h} \rightarrow y$

$\boxed{y(t)=\sum x(k)\cdot h(n-k)=\sum h(k)\,x(n-k)}$

16.6.2005

1. $h_{10}=1, h_{11}=2, h_{12}=1$
$h_{20}=1, h_{21}=-2, h_{22}=1$



	1	(1, 2, 1)			
		1	-2	1	
1	1	-2	1		
2		2	-4	2	
1			1	-2	1
	1	0	-2	0	1

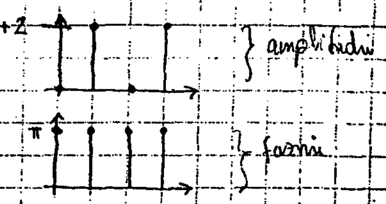
2. $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$

$W_N^{kn} = e^{j\frac{2}{\pi}kn}$

$x = [-1\ 0\ 1\ 0]$

n=0 n=1 n=2 n=3

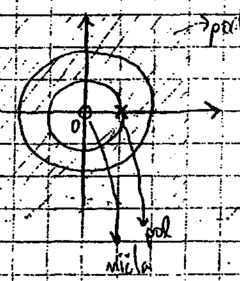
$X(0) = -1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 0$
$X(1) = -1\cdot 1 + 0\cdot(-j) + 1\cdot(-1) + 0\cdot(j) = -2$
$X(2) = -1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) = 0$
$X(3) = -1\cdot 1 + 0\cdot(j) + 1\cdot(-1) + 0\cdot(-j) = -2$



3. $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ pri POK $|z| > 1/2$

ničla = 0
pol

$a^n \cdot u[n] \xrightarrow[\text{iz tabele}]{\text{transform}} \frac{1}{1-az^{-1}}$ POK $|z| > |a|$



4. STABILNOST

$h(n)=0 \quad n<0$

Ker POK ne more vsebovati polov, sledi, da je kavzalni linearni, časovno nespremenljiv sistem BIBO stabilen, če in samo če leže poli ~~B~~ znotraj enotskega kroga.
poli < 1

DODATEK:

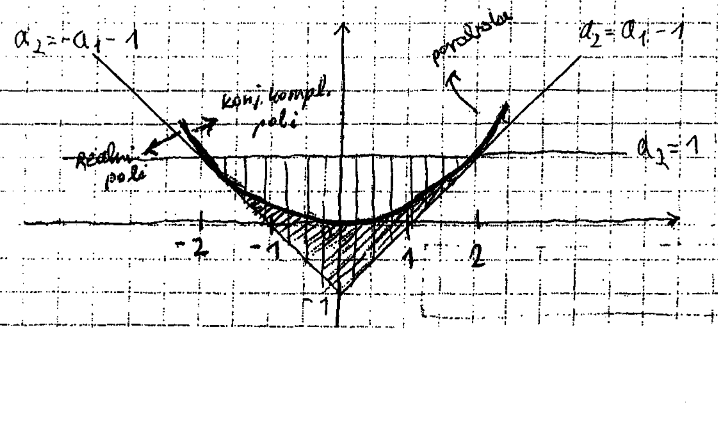
STABILNOST SISTEMA 2. REDA (2 pola)

- Oba pola p_1 in p_2 morata biti znotraj enotskega kroga, da bo sistem stabilen

POGOJA: $|a_2| = |p_1 \cdot p_2| = |p_1|\cdot|p_2| < 1$

$|a_1| = 1 + a_2$

- SISTEM JE STABILEN, ČE TOČKI a_1 IN a_2 LEŽITA ZNOTRAJ TRIKOTNIKA STABILNOSTI

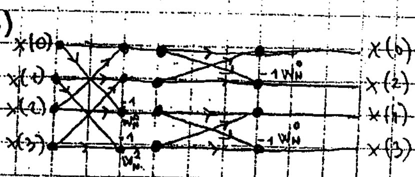


5. a) $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$ $\quad k=0,1,\dots,N-1$

$g(n) = x(n) + x(n+\frac{N}{2})$

$h(n) = x(n) - x(n+\frac{N}{2})$

b)



c) Z algoritmom FFT računamo hitreje zato ker niz $X(k)$ razdelimo v manjše podnize in tako pridemo hitreje do celovite rešitve.

1.9.2004

1. $x[n] = 5e^{j\pi} e^{\frac{j\pi n}{4}}$

$x(0) = 5e^{j\pi} e^{\frac{j\pi 0}{4}} = 5e^{j\pi}$

$x(1) = 5e^{j\pi} e^{\frac{j\pi 1}{4}} = 5e^{j\pi + \frac{j\pi}{4}} = 5e^{j\frac{5}{4}\pi}$

$x(2) = 5e^{j\pi + j\frac{\pi}{2}} = 5e^{j\frac{3}{2}\pi}$

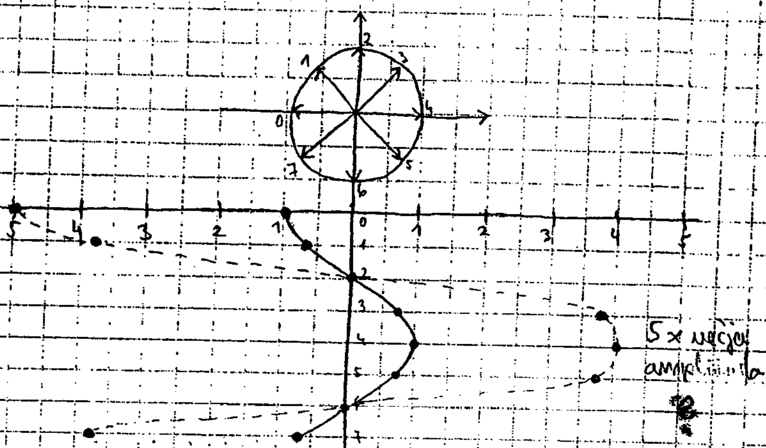
$x(3) = 5e^{j\pi + j\frac{3\pi}{4}} = 5e^{j\frac{7}{4}\pi}$

$x(4) = 5e^{j\pi + j\pi} = 5e^{j2\pi}$

$x(5) = 5e^{j\pi + j\frac{5}{4}\pi} = 5e^{j\frac{9}{4}\pi}$

$x(6) = 5e^{j\pi + j\frac{3\pi}{2}} = 5e^{j\frac{5}{2}\pi}$

$x(7) = 5e^{j\pi + j\frac{7\pi}{4}} = 5e^{j\frac{11}{4}\pi}$



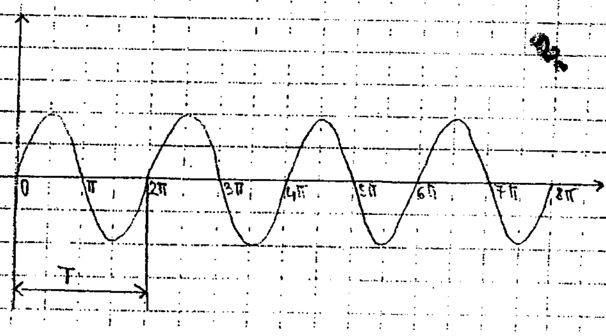
3. $H(z) = \dfrac{1-0{,}2z^{-1}-0{,}08z^{-2}}{1+0{,}5z^{-2}} \neq \dfrac{-155{,}25-0{,}2z^{-1}}{1+0{,}5z^{-2}} \begin{array}{l}\to b \\ \to a\end{array}$ $\quad b_0=-155{,}25,\ b_1=-0{,}2,\ b_2=0$ $\quad a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=0{,}5$

$\frac{X}{Y} \times \frac{a}{b}$ $\quad y(0)+0{,}5y(2) = -155{,}25x(0) - 0{,}2x(1)$

11.2.2004

4. $x[k] = \sin(1{,}75\pi k)$, $k=0,1,2,3,4$

- skiciraj 4 periode analognega SIN SIGN.
- označi vzorce
- Ali pri tem pojavnite teorem o vzorčenju
- položite frekv. signala in frekv. vzorčenja
- ali primer ustreza 2. NYQUISTOVEM KRIT.?



$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$

$x[0] = \sin(1{,}75\pi \cdot 0)$

$x(1) = \sin(1{,}75\pi \cdot 1)$

$x(2) = \sin(1{,}75\pi \cdot 2)$

$x(3) = \sin(1{,}75\pi \cdot 3)$

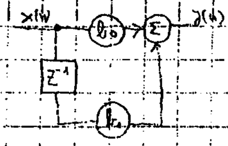
$x(4) = \sin(1{,}75\pi \cdot 4)$

21.8.2008

1. Imamo linearno časovno neodvisen sistem s časovnim odzivom $h(0)=-1$ in $h(1)=1$.
   - DOLOČITE KOEFICIENTA FILTRA b in a IN NARIŠITE DIREKTNO STRUKTURO!
   - IZRAČUNAJTE ODZIV FILTRA NA SIGNAL $x(0)=x(1)=x(2)=1,\ x(3)=x(4)=x(5)=0$
   - NA PODLAGI DOBLJENEGA ODZIVA S POJASNILOM OCENITE, ČE FILTER PREPUŠČA NIZKE ALI VISOKE FREKV.!

$h(0)=-1 \quad a_0=0,\ a_1=0$

$h(1)=1 \quad b_0=1,\ b_1=1$



$h(n)=\{-1,1\}$

$x(n)=\{1,1,1,0,0,0\}$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & -1 & 1 & & & & \\
1 & -1 & 1 & & & & \\
1 & & -1 & 1 & & & \\
1 & & & -1 & 1 & & \\
0 & & & & 0 & 0 & \\
0 & & & & & 0 & 0 \\
\hline
 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

2.

$x(t)=\cos(100\pi t)$

$f_{vz}=50Hz$

prvih 10 vzorcev

$x(0)=\cos(100\pi 0)$

$x(1)=\cos(100\pi 1)$

$x(2)=\cos(100\pi 2)$

$x(3)=\cos(100\pi 3)$

$x(4)=\cos(100\pi 4)$

$x(5)=\cos(100\pi 5)$

$x(6)=\cos(100\pi 6)$

$x(7)=\cos(100\pi 7)$

$x(8)=\cos(100\pi 8)$

$x(9)=\cos(100\pi 9)$

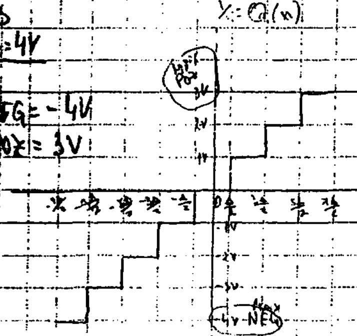
3. $b=3$

$U_{max}=4V$

MAX NEG $=-4V$

MAX POZ $=3V$

$\hat{x}=Q(n)$



$N=2^b=2^3=8$ nivojev

$\Delta=\dfrac{U_{max}}{2^{b-1}}=\dfrac{4V}{4}=\underline{1V}$

$\hat{x}_B(n)$	$\hat{x}(n)$
011	3V
010	2V
001	1V
000	0
111	-1V
110	-2V
101	-3V
100	-4V

4.

$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot e^{-j\omega n}$ $\qquad X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot r^{-n}\cdot e^{-j\omega n}$

če je $r=1$ bosta transformaciji enaki

$f=Z$

$H(\omega)=\dfrac{1}{1+e^{-2j\omega}} \Rightarrow H(z)=\dfrac{1}{1+z^{-2}}$

$z^{-n}=e^{-j\omega n}$

$z^{n}=e^{j\omega n}$

$\boxed{3.7.2009}$

2. $\vec{x}[n] = e^{j\frac{\pi n}{4}} - e^{-j\frac{\pi n}{4}}$

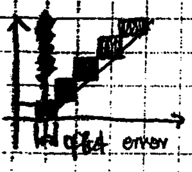
- prvih 8 vzorcev (SKICA)
- Kakšno funkc. prepoznate v rezultatu?

3. Izračunajte transformacijsko matriko W Fourierove transformacije za N=4.
Po matričnem postopku izračunajte Fourierovo transformacijo signala $x = \{1, 0, -1, 0\}$!

4.

12.2.2009

1. napaka odmika:

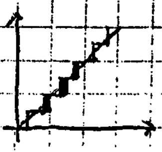


- ko se prvi prehod ne izvrši točno

napaka dobitka:

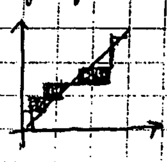
- razlika v vrednosti pri prvem in zadnjem prehodu ni enaka

napaka zaradi nelinearnosti:



- nastopi, ko razlike med predhodnimi vrednostmi niso enake ali enakomerno spreminjajoče

izgubljene kode:



- če je ta napaka dovolj velika lahko preskočimo eno ali več kod.

2. $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

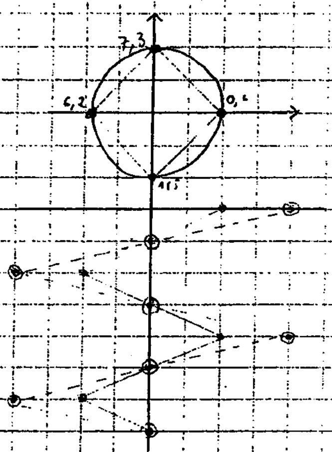
$x(0) = 2\cos(0) = 2; 1$ $x(5) = 2\cos(\pi 5/2)$

$x(1) = 2\cos(\pi 1/2)$ $x(6) = 2\cos(\pi 6/2)$

$x(2) = 2\cos(\pi 2/2)$ $x(7) = 2\cos(\pi 7/2)$

$x(3) = 2\cos(\pi 3/2)$

$x(4) = 2\cos(\pi 4/2)$



koliko jih potrebujemo?

odg:

Zapišite matematično funkcijo:

sinus?

3. $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}$

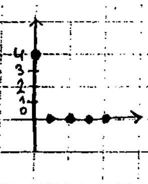
$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$

$x(0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \boxed{4}$

$x(1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-j) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot j = \boxed{0}$

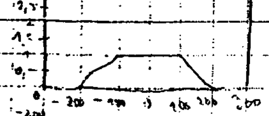
$x(2) = 1 \cdot 1 + (1 \cdot (-1)) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = \boxed{0}$

$x(3) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot j + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-j) = \boxed{0}$

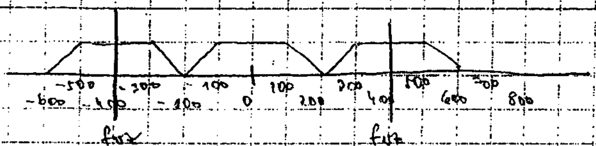


4. $f_{vz} = 400\,Hz$

Skicirajte spekter vzorčenega signala, če je $f_{vz} = 400\,Hz$



SLIKA NARISANA NA ROKU



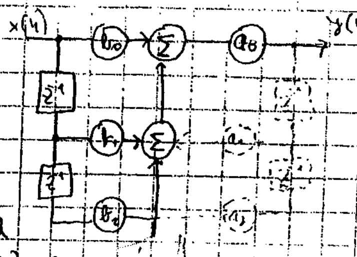
Zadostili smo 2. Nyquistovemu kriteriju, ker je $f_{vz} = 2 \cdot f_{signala}$

5. $y(n) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)$

$a_0 = 1 \quad b_0 = 1$

$a_1 = 0 \quad b_1 = -2$

$a_2 = 0 \quad b_2 = 1$



Določite odziv sistema na vhodni signal

$x(0)=1,\ x(1)=1,\ x(2)=1,\ x(3)=-1,\ x(4)=-1,\ x(5)=-1$

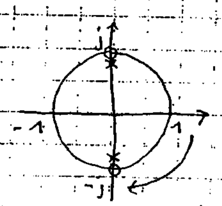
$x(n) = \{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$

$x(n)$ ↓ \ $h(n)$ →	$b_0 = 1$	$b_1 = -2$	$b_2 = 1$					
1	1	-2	1					
1		1	-2	1				
1			1	-2	1			
-1				-1	2	-1		
-1					-1	2	-1	
-1						-1	2	-1
$y(t)$ →	1	-1	0	-2	2	0	1	-1

16.6.2008

1.

$$H(z) = \frac{\left(z - e^{j\pi/2}\right)\left(z - e^{-j\pi/2}\right)}{\left(z - 0{,}9e^{j\pi/2}\right)\left(z - 0{,}9e^{-j\pi/2}\right)} =$$



$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$

$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

sistem je stabilen, ker so poli < 1

$$= \frac{(z-j)(z+j)}{(z-j0{,}9)(z+j0{,}9)} = \frac{z^2 + \cancel{jz} - \cancel{jz} - j^2}{z^2 + \cancel{j0{,}9z} - \cancel{j0{,}9z} - j^2 0{,}81} = \frac{z^2+1}{z^2+0{,}81} \begin{matrix} :z^2 \\ :z^2 \end{matrix} \Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{0{,}81}{z^2}} = \frac{1+z^{-2}}{1+0{,}81z^{-2}}$$

ničle: $-j, j$

poli: $-0{,}9j, 0{,}9j$

DIFERENČNA ENAČBA:

$y(n) + 0{,}81y(n-2) = x(n) + x(n-1)$

$a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0{,}81$

$b_0 = 1 \quad b_1 = 0 \quad b_2 = 1$

2.

$$X[f] = \begin{cases} 1kHz - |f|; & |f| \le 1kHz \\ 0; & \text{drugje} \end{cases} \quad ; \ \omega = 2\pi f$$

$f_{vz} = 3kHz$

27.8.2005

1.

	1	-2	1			
1	1	-2	1			
-1		-1	2	-1		
1			1	-2	1	
-1				-1	2	-1
	1	-3	4	-4	3	-1

	-1	3	-1			
1	-1	3	-1			
-1		1	-3	1		
1			-1	3	-1	
-1				1	-3	1
	-1	4	-5	5	-4	1

2.

$$x[n] = e^{j\frac{\pi n}{4}} + e^{-j\frac{\pi n}{4}}$$ prvih 8 vzorcev

$$= 2 \cdot \cos\frac{\pi n}{4}$$

$x(0) = 2 \cos(0) = 2 \cdot 1$

$x(1) = 2\cos\left(\frac{\pi 1}{4}\right)$

$x(2) = 2\cos\left(\frac{\pi 2}{4}\right)$

$x(3) = 2\cos\left(\frac{\pi 3}{4}\right)$

$x(4) = 2\cos\left(\frac{\pi 4}{4}\right)$

$x(5) = 2\cos\left(\frac{\pi 5}{4}\right)$

$x(6) = 2\cos\left(\frac{\pi 6}{4}\right)$

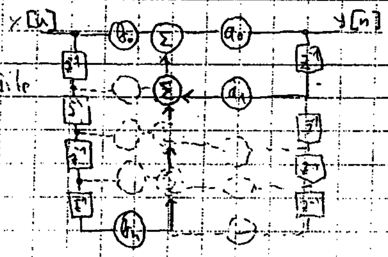
$x(7) = 2\cos\left(\frac{\pi 7}{4}\right)$

3. $y[n] = y[n-1] + x[n] - x[n-4]$

$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0$

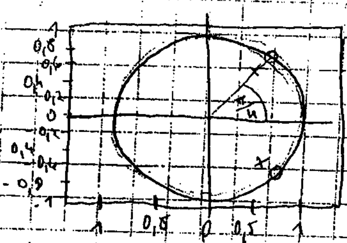
$b_0 = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0,\ b_4 = -1$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-4}}$$



S pomočjo inverzne Z transf. izračunajte in narišite časovni odziv sistema na impulz enote h(n)!

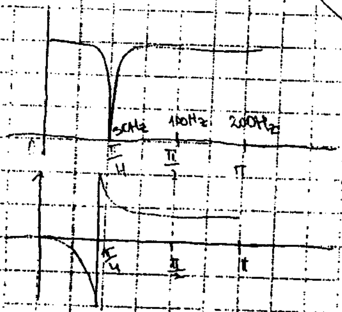
4. Imamo dig. filter. Lega polov in ničel so na sliki:



Narišite amplitudno in fazno karakteristiko filtra v frekvenčnem prostoru, če je znač. frekv. filtra enaka 50Hz! Na skici označite vse potrebne vrednosti! Kako takšen filter imenujemo? Kolikšna je f_{vz}?

f_{vz} = ~~400Hz~~ = 200Hz

imenujemo ga FILTER Z ZAREZO



$n=-2 \quad n=-1 \quad n=0$

$-2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad -1 \quad 4$

$n=1 \quad n=2 \quad n=3$

$$X(z) = -2 \cdot z^{+2} + 1 \cdot z^{-1} + 3 \cdot 1 + 2 \cdot z^{1} - 1 \cdot z^{2} + 4 \cdot z^{3}$$

$z = 1 \cdot e^{j\omega}$

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}}$$

VH. SIG. (SNEZAN) → [ ] → ANALOGNI IZH. SIG.

ANALOG. OBD. SIGN.

ANALOG. VHOD → | A/D PRETV. | → | DIG. SIG. PROC. | → | D/A PRETV. | → ANAL. SIG.

DIG. OBD. SIGN.

→ omogoča • REKONFIGURABILNOST
• FLEKSIBILNOST (PROGSIRA.)

- ~~osnovni~~ DOS →

~~v PREJEMNIKU (DEKODIRNIKU):~~

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ → NI NAPAKE

~~če ... to ... $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ → to pomeni napako ... popravilo~~

~~→ ... napake~~

→ Večina signalov je ANALOGNIH (ZVEZNIH). Če ga želimo obdelati, ga moramo pretvoriti v DIGITALNO obliko, zato DOS.

- signali (GOVOR, SLIKA)
  - matematični zapis signala ⇒ $s(t) = 4t + 0{,}5$ → odvisen od časa
  - izvor signala je kombinacija dražljajev
  - DIG. OBDELAVA JE CENEJŠA, KOT ANALOGNA

če damo signal na vhod sistema, na izhodu dobimo KONVOLUCIJA vhoda in prenosne funkc. SISTEMA (npr. FILTER)

VHOD → [ ] → IZHOD

|—— PROCES ——→|

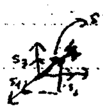
⊕ - PRI DIG. OBD. LAHKO SIGNAL ENOSTAVNO REKONFIGURIRAMO, PRI ČEMER JE TO PRI ANALOG. OBD. TEŽJE, KER TO POMENI SPREMEMBO VEZIJ, TESTIRANJE IN VERIFIKACIJO PRAVILNEGA DELOVANJA.

⊕ - PREDNOST DIG. JE NATANČNOST OBDELAVE

⊖ - SLABOST DIG. JE HITROST OBDELAVE IN VZORČENJA

Razvrstitev signalov

- če je več izvorov (EKG, radar) zapišemo signal z vektorjem → $s(t)\begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix}$ ⇒

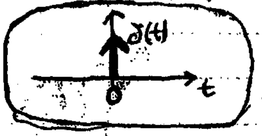


Vrste osnovnih signalov

- S KONČNO ENERGIJO ($2e^{-t}$, e^{-t})
  ||
  APERIODIČNI IMAJO KONČNO ENERGIJO $+\infty$
- S KONČNO MOČJO (stopnica $u(t)$)
  ||
  PERIODIČNI SIGNALI IMAJO (POVPREČNO MOČ IN) KONČNO $-\infty$ do $+\infty$
- Z OMEJENO RASTJO ($-t$, e^{t})

- Zanimiva oblika APERIODIČNEGA SIGNALA je $\delta(t)$ → ima ∞ amplitudo in širino, katere vrednosti limitira k nič.

infinitezimalno kratek impulz v času 0 z ∞ ampl. in ploščino enako 1.



DELTA FUNKCIJA
ENOTIN IMPULZ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Signale lahko razvrstimo tudi po njihovem poznavanju: če poznamo potek so DETERMINISTIČNI, drugače so pa NAKLJUČNI.

↓ periodični

VRSTE:

→ PERIODIČNI/APERIODIČNI
- signali ... v času ...
- vsi fizikalni signali so aperiodični

→ ENERGIJSKI/MOČNOSTNI
- energijski imajo končno energijo in moč enako nič
- vsi energijski so APERIODIČNI
- močnostni imajo ∞ energijo in končno povpr. moč. V naravi jih ni

→ NAKLJ./DETERMINIST.
- od naklj. poznamo potek v preteklosti, ne pa v prihodnosti, uvrščamo jih med MOČNOSTNE.
- INFO se nahaja samo v naklj. sign.
- DETERM. → za njih poznamo celoten potek, lahko so PER/APER. Opišemo jih z MAT. FUNKC.

modulacija = množenje

ČAS KONV. ⇒ FT konvolucije dveh funkcij $x_1(t)$ in $x_2(t)$ je produkt FT teh funkcij.

$$x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(\omega)\,X_2(\omega)$$

FREKV. KONV. ⇒ $x_1(t)\,x_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

kompleksna predstavitev signalov

$s(t) = x_a(t) = s_r(t) + j s_i(t)$ — IMAGINARNI DEL

TEOREM O ČAS. PREMIKU ⇒ $x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$

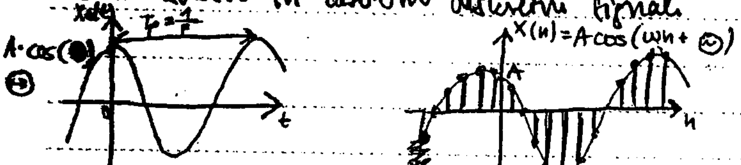
TEOREM O FREKV. PREMIKU ⇒ $x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$

Eulerjeva enačba

$$X = A\cdot e^{j\varphi} = \sum_k A_k \cdot e^{j\varphi_k} = \sum_k X_k$$

signal je vsota posameznih amplitud in faz ⇒ vsota kompleksnih števil

časovno zvezni in časovno diskretni signali

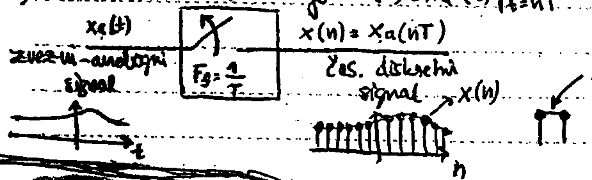


ČASOVNO ZVEZEN SIGNAL — ČASOVNO DISKRETEN SIGNAL

VZORČENJE

vzorčenje časovno zveznih signalov

(period.) enakomerno vzorčenje $x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$ — interval vzorčenja — $-\infty < n < \infty$



- $F_s = \frac{1}{T}$ (frekvenca vzorčenja) POVE ŠT. VZORCEV NA ENOTO ČASA
- $x(n)$ … vrednost analog-zvez signala v času nT
- $t = nT = \frac{n}{F_s}$ $\qquad f = \frac{F}{F_s}$

$F_{max} = \frac{F_s}{2}$ maksimalna frekvenca, ki jo lahko še opazujemo

idealno vzorčenje

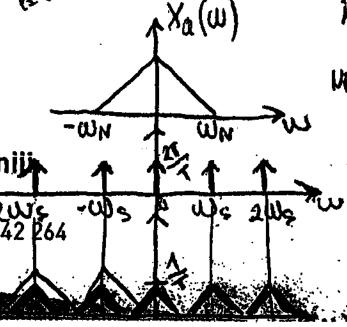
dobiš tako, da zmnožiš OBNOVNI ZVEZNI SIGNAL s nizom UTEŽOVIH FUNKCIJ $\delta(t)$

$x_{vz}(t) = x_a(t)\cdot s(t)$ $\qquad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

$X_{vz}(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(\omega) * S(\omega)$ $\qquad S(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_{vz})$

$X_{vz}(\omega) = \ldots \sum_k \ldots(\omega - k\omega_{vz})$

KO JE $\omega_{vz} - \omega_N > \omega_N$
$\omega_{vz} > 2\omega_N$
NE PRIHAJA DO PREKRIVANJ KOPIJ fr. spektrov



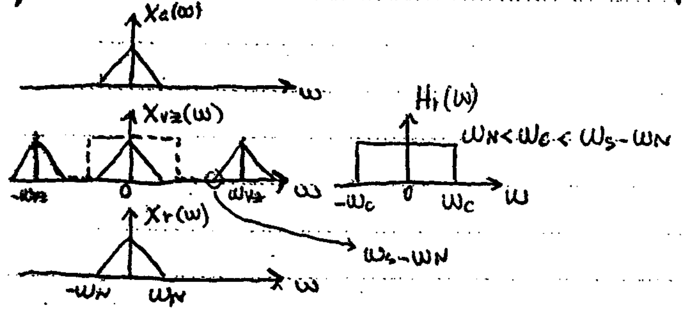
- Nyquistov teorem o vzorčenju
- imamo $x_a(t)$ frekv. omejen signal
- $x_a(t)$ je določen z vzorci: $x[n] = x_a(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

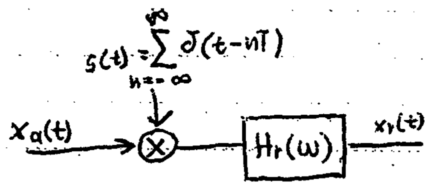
$\Omega_{VZ} = \frac{2\pi}{T} = 2\Omega_N$, če je frekv. vzorčenja enaka 2x frekvenci Nyquista, potem lahko signal rekonstruiramo (spektri se ne prekrivajo).

SIGNAL $x_a(t)$ JE MOGOČE DOLOČITI IZ NJEGOVIH VZORCEV $x_a(nT)$, ČE JE SIGNAL FREKVENČNO OMEJEN IN JE FREKV. VZORČENJA VSAJ 2X VEČJA (VIŠJA) OD ZGORNJE MEJE FREKV. SIGNALA.

~~Rekonstrukcija pasovno omejenega signala iz vzorcev~~

- Osnovni (nevzorčeni) signal lahko rekonstruiramo iz vzorčenega signala tako, da vzorčenemu signalu z NIZKIM SITOM odrežemo vse frekvence nad frekvenco $\frac{\omega_{VZ}}{2}$.





Rekonstrukcija pasovno omejenega signala iz vzorcev
Časovno zvezen in fr. pasovno omejen signal lahko rekonstruiramo iz ZNANIH VZORCEV SIGNALA

- Na osnovi poznanih vzorcev zapišemo vzorčen signal v obliki:

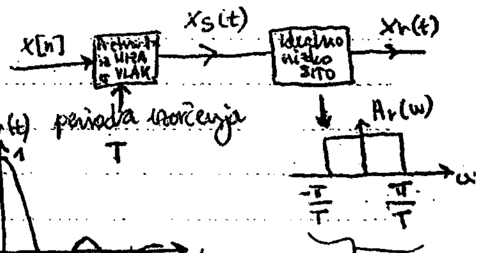
VLAK IMPULZOV PELJEMO NA VHOD SITA

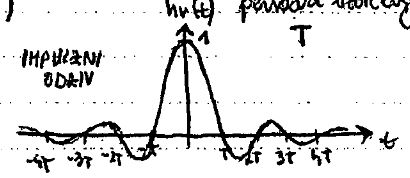
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT)$$

interpolacijski odziv
$H_r(\omega)$ ... frekv. odziv
$\omega_c = \frac{\pi}{T}$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h_r(t - nT)$$

INTERPOLACIJSKA FUNKCIJA $\boxed{h_r(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}}$ →





frekv. odziv idealnega nizkega sita

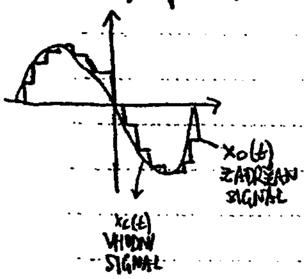
KVANTIZACIJA SIGNALA

V praksi je kvantizacija ZVEZNEGA V DISKRETNI SIGNAL omejena s končno dolžino binarne besede, s katero predstavimo zvezni signal. Takšno pretvorbo realiziramo z A/D pretvornikom, katerega dolžina besede je 10-16 bitov (1024 do 65536 nivojev).

$x_a(t)$ → zadrževalno vezje → $x_a(t)$ ($x_a(nT)$) → A/D → $x_B(n)$ } potek A/D transformacije

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot h_0(t-nT)$$

Zadrževalna vezja signal $x_a(t)$ vzorčijo v zelo kratkem času, nakar drži vrednost zajetega signala vse do naslednjega zajetega signala in do čim natančneje.



$s(t)=\sum\delta(t-nT)$

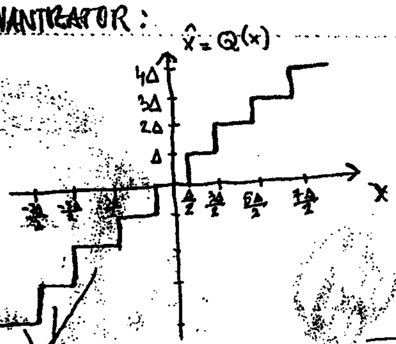
$x_c(t)$ → ⊗ → $x_s(t)$ → zadrževalno vezje → $x_0(t)$ } vzorčenje signala z zadrževalnikom

$x_a(t)$ → A/D (T) → $x(n)$ → kvantizator → $\hat{x}(n)$ → koder → $\hat{x}_B(n)$ } vzorčenje + kvantizacija; ENOLIČNA KVANT. S KONST. KORAKOM

pretvorba vhodnih vzorcev v niz simbolov, ki so vnaprej predpisani

KVANTIZATOR:

$\hat{x} = Q(x)$



} razpoznava POZ. in NEG. SIGNALE

LIN. KVANTIZATOR:

stopnica ← $\Delta = (X_{max} - X_{min})/(N-1)$

največja in najmanjša vrednost $x(n)$.

št. kvant. nivojev ⇒ $N = 2^{B}$ → št. bitov na besedo

Kvantizacijskih nivojev je 2^{B+1}

število bitov $B+1$

$$\Delta = \frac{2X_{max}}{2^{B+1}} = \frac{X_{max}}{2^{B}}$$

diskretna Fourierjeva transformacija

DFT in decimacija po času

- čisto krajši čas računanja, če računanje razbijemo na niz manjših DFT računanj.

$$\boxed{W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot kn}}$$

- DECIMACIJA PO ČASU: niz $x(n)$ se razstavi na manjše nize. $\boxed{N = 2^m}$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W_N^{nk} \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

$n = 2r$ (SODE)

$n = 2r+1$ (LIHE)

$$X(k) = \sum_{n=SOD} x(n)\cdot W_N^{nk} + \sum_{n=LIH} x(n)\cdot W_N^{nk}$$

$$X(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)\cdot W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)\cdot W_N^{(2r+1)k} = \sum_{-\|-} x(2r)(W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{-\|-} x(r+1)(W_N^2)^{rk}$$

$$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}} = W_{\frac{N}{2}}$$

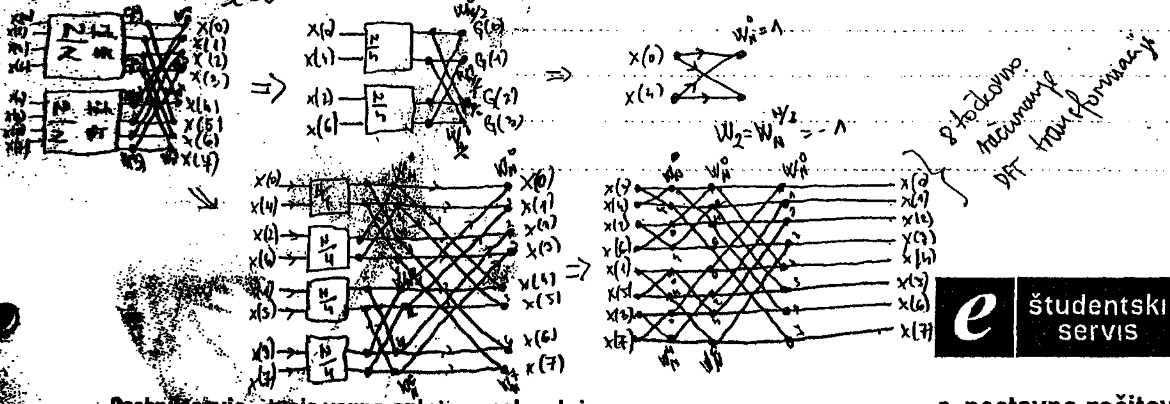
$$X(k) = \underbrace{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)\cdot W_{\frac{N}{2}}^{rk}}_{G(k)} + W_N^k \underbrace{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)\cdot W_{\frac{N}{2}}^{rk}}_{H(k)} = \underbrace{G(k)}_{SODI} + W_N^k \underbrace{H(k)}_{LIHI}$$

$$X(0) = G(0) + W_N^{k=0} H(0) \quad X(1) = G(1) + W_N^{k=1} H(1) \quad X(2) = G(2) + W_N^{k=2} H(2)$$

$$G(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(r)\cdot W_{\frac{N}{2}}^{rk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l)\cdot W_{\frac{N}{2}}^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l+1)\, W_{\frac{N}{2}}^{(2l+1)k} =$$

$$G(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l)\cdot W_{\frac{N}{4}}^{lk} + W_{\frac{N}{2}}^{k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l+1)\, W_{\frac{N}{4}}^{lk}$$

$$H(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l)\cdot W_{\frac{N}{4}}^{lk} + -\|-$$



čestejemo najprej po prvi polovici, potem pa še po drugi.

odštejemo prvo polovico/vita od druge in rezultat zmnožimo z W_N^n (vhodnega)

SODA → $\boxed{g(n) = x(n) + x(n + \frac{N}{2})}$

LIHA → $\boxed{h(n) = x(n) - x(n + \frac{N}{2})}$

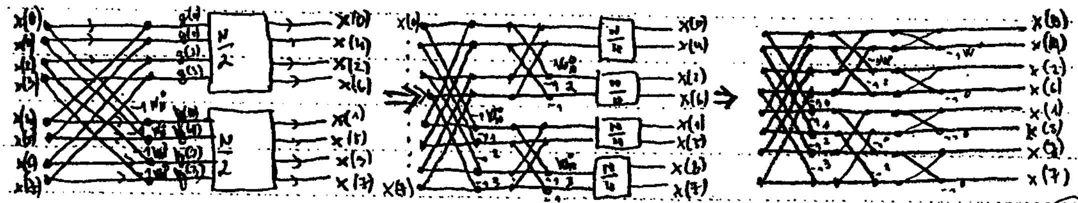
$g(0) = x(0) + x(0 + \frac{8}{2})$ $\quad h(0) = x(0) - x(0 + \frac{8}{2}) \cdot W_N^0$

$g(1) = x(1) + x(1 + \frac{8}{2})$ $\quad h(1) = x(1) - x(1 + \frac{8}{2}) \cdot W_N^1$

$g(2) = x(2) + x(2 + \frac{8}{2})$ $\quad h(2) = x(2) - x(2 + \frac{8}{2}) \cdot W_N^2$

$g(3) = x(3) + x(3 + \frac{8}{2})$ $\quad h(3) = x(3) - x(3 + \frac{8}{2}) \cdot W_N^3$

računanje DFT z decimacijo po frekvenci v enem koraku N = 8



decimacija po frekvenci za N = 8

METODE RAČUNANJA

DFT igra pomembno vlogo pri analizi in sintezi sistemov za obdelavo časovno diskretnih signalov. Metode hitrega računanja DFT se v literaturi imenujejo algoritmi hitre FFT. (Fast Four. Tra...) ALGORITMI za hitro računanje DFT, izkoriščajo lastnosti DFT ⇒ PERIODIČNOST in SIMETRIČNOST

$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$

$W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$

KOMPLEKSNA PREDSTAVITEV SIGNALOV

$s(t) = x_a(t) = s_r(t) + j s_i(t)$

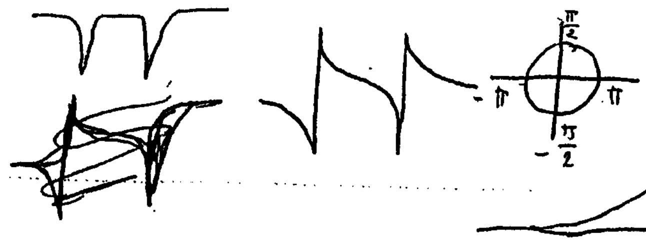
$s(t) = x_a(t) = \underbrace{\boxed{X} e^{j\omega_0 t}}_{\text{ROTIRAJOČI FAZOR}} = \boxed{A \cdot e^{j\phi}} \cdot e^{j\omega_0 t} = A \cdot e^{j(\omega_0 t + \phi)}$

če je poz. se vrti v obratni smeri urinega kazalca, če je neg. pa v smeri urinega kazalca

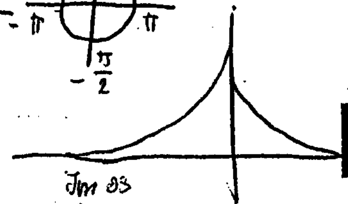
$x_a(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) + j \sin(\omega_0 t + \phi)$

ROTIRAJOČI FAZOR OPRAVI CELOTNO POT 2π RADIANOV, KO OPRAVI CELO POT ROTACIJE, ČAS ENE ROTACIJE JE T_0

$\omega_0 T_0 = 2\pi f_0 \cdot T_0 = 2\pi \rightarrow T_0 = \frac{1}{f_0}$

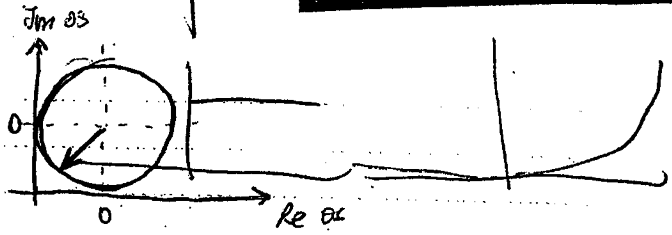


$z^2 \cdot z^{-2} = z^{2-2} = z^0 = z =$



$\tilde{x}_a(t) = e^{j(t-\frac{\pi}{4})}, \quad t = \frac{3}{2}\pi$

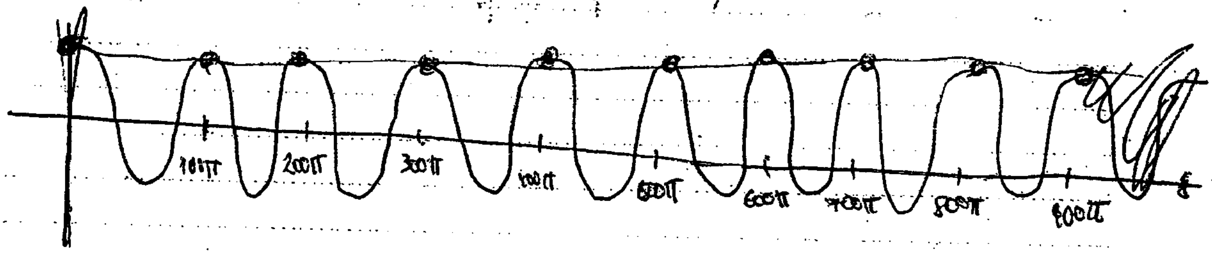
$\tilde{x}_a(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$



$$H(z) = \frac{(z-j)(z+j)}{(z-0{,}9j)(z+0{,}9j)} = \frac{z^2 \cancel{+jz} \cancel{-jz} - j^2}{z^2 \cancel{+0{,}9jz} \cancel{-0{,}9jz} - 0{,}81j^2} = \frac{z^2+1 \cdot z^{-2}}{z^2+0{,}81 \cdot z^{-2}} = \frac{1+z^{-2}}{1+0{,}81z^{-2}} =$$

$b_0 = 1, \; b_1 = 0, \; b_2 = 1$

$a_0 = 1, \; a_1 = 0, \; a_2 = 0{,}81$



$2\cos\frac{\pi n}{4}$

$1 - \frac{\omega}{1000\,\text{rad}\,s^{-1}}; \quad 0 \le \omega \le 1000\,\text{rad}\,s^{-1}$

$1 - \frac{\pi f}{\frac{1000}{2\pi}}$

	n=0	n=1	n=2	n=3
x(0)=	1	0	−1	0
x(1)=	1	0	−1	0
x(2)=	1	0	−1	0
x(3)=	1	0	−1	0

$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{500}{\pi}\,\text{Hz}$

$\omega = 1000\,\text{Hz}$

$1\,\text{rad}\,s^{-1} = \frac{1}{2\pi}\,\text{Hz} \qquad 1 - \frac{3\pi f}{500}$

$1000\,\text{rad}\,s^{-1} = \frac{1000}{2\pi}\,\text{Hz} = \frac{500}{\pi}\,\text{Hz} \qquad \frac{500 - 3\pi f}{500}$

ω

$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$

$W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W^{(kn)})^*$

$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$ (periodičnost)

$W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$ (simetričnost)

$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk}$

1. Nyquistov kriterij

Signal $x_a(t)$ je možno določiti (rekonstruirati) iz njegovih vzorcev, če je ta omejen in če je frekvenca vzorčenja 2x večja od $\underset{max}{/}$ frekvence signala. $f_{vz} \geq 2 \times f_{sig}$

2. FFT... zakaj hitrejši od DFT (manjše $\overset{niz}{\text{DFT}}$ računanj)

Zato, ker ~~signal~~ $\overset{niz}{\sum} x(n)$ razdelimo na manjše podnize in tako hitreje pridemo do celovite rešitve. V tem primeru izkoristimo lastnosti periodičnosti in simetričnosti DFT

$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$ (PER.) $\quad W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$ (SIM.)

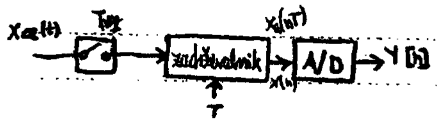
3. Algoritem za decimacijo po času in frekvenci!

$k = 0, 1, \dots, N-1$

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, W_N^{nk}}$$

$W_N^{nk} =$ $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

4. A/D pretvorba



$s(t) = \sum \delta(t - nT)$

$N = 2^B$

$\Delta = \frac{U_{max}}{2^{B-1}}$ (POZ/NEG.)

$\Delta = \frac{U_{max}}{N-1}$ (POZ.)

pretvori $x(n)$ VHODNE SIGNALE v ~~niz~~ končni niz v ~~β~~ že znanih podprtane signale $\hat{x}_n = Q[x(n)]$

a)

5. Bilinearna transformacija → preslikava med s in z. Rabimo za razvijanje v VISOKA in PASOVNA digitalna sita

b)

Eulerjeva transformacija

$\mathcal{F}$: $\quad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$

$\mathcal{Z}$: $\quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}\ [x(n) \cdot \Pi^{-n}] \cdot e^{-j\omega n}$

$\boxed{z^{-1} = \Pi \cdot e^{-j\omega}}$

$\boxed{z^{-n} = \Pi^{n} \cdot e^{-j\omega n}}$

če je $\Pi = 1$ sta $\mathcal{F} = \mathcal{Z}$

6. LČN SISTEM

$$y(k) = x * h = \sum x(k) \cdot h(n-k) = \sum h(k)\, x(n-k)$$

$$x_{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) \qquad h_r = \frac{\sin(\frac{\pi}{T}t)}{\frac{\pi}{T}t}$$

$$x_a(nT)\, h_r(t-nT)$$

7. Matematična funkcija za postopek vzorčenja!

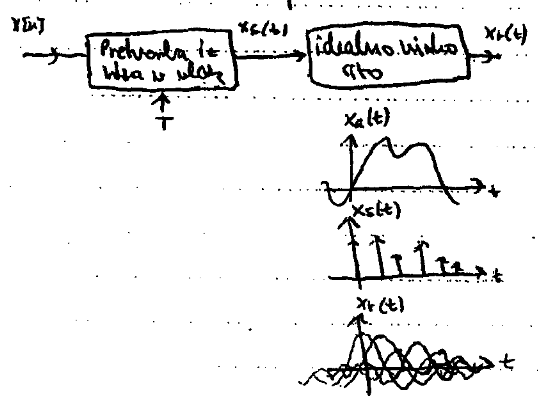
$$x_{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)\cdot \delta(t-nT)$$

8. Matematični postopek za rekonstrukcijo vzorčnih signalov (v filter in čas. postopke)

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi(t-nT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}$$

1. $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot\delta(t-nT)$
2. $x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot h_r(t-nT)$
3. $x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot \frac{\left[\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$ — premaknjeni prispevki

$$h_r = \frac{\sin(\frac{\pi}{T}t)}{\frac{\pi}{T}t}$$



9. DFT formula za
- podajte / izračun: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W_N^{kn}$ $\quad W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

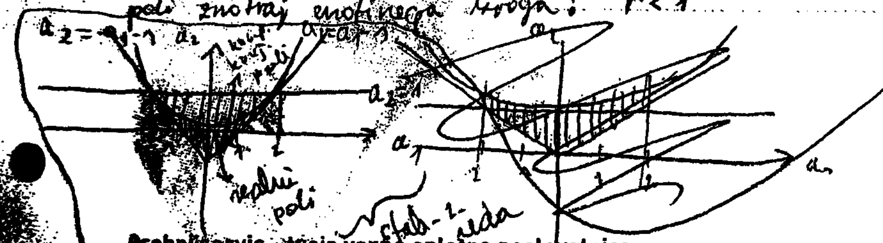
10. Stabilnost sistema

Stabilnost lahko določimo v odvisnosti od VHODNO IZHODNEGA obnašanja sistema.
- če je VHOD OMEJEN, MORA BITI TUDI IZHOD OMEJEN, da bi bil sistem STABILEN
  ne presega neke amplitude

BIBO (Bounded Input Bounded Output): sistem je stabilen, če vsak omejen vhodni niz x[n] povzroči omejen izhodni niz y[n]

~~[illegible]~~
$|y[n]| \leq B_y \leq \infty$
$|x[n]| \leq B_x \leq \infty$

Stabilnost KAVZALNEGA, ČAS. NEODVISNEGA SISTEMA:
- področje konvergence kavz. niza je ZUNAJ ENOTINEGA KROGA
↳ zato POK ne more vsebovati polov H(z) in je zato tak sistem stabilen, le če ležijo poli znotraj enotinega kroga! $r < 1$

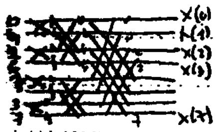


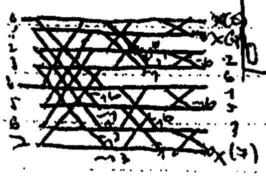
Ge 1 0	1	0
Au 0	0 0	1 0
Se 0 1	1	1
Gh 1	1 0	0 1

$$f(x) = kx + n \quad k \quad x$$

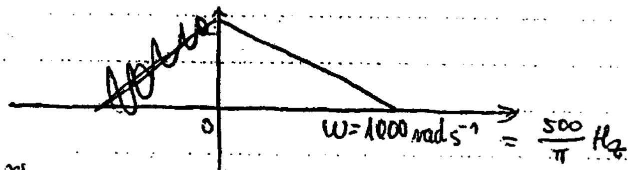
$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} - \frac{1}{1000\,\text{rad}\,s^{-1}} \quad w$$

$$x(w) = \begin{cases} 1 - \dfrac{w}{1000\,\text{rad}\,s^{-1}}; & 0 \le w \le 1000\,\text{rad}\,s^{-1} \\ 0; & \text{drugje} \end{cases}$$

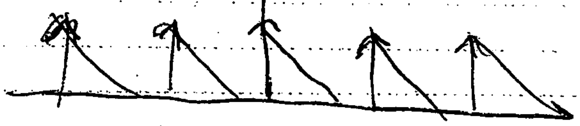




$$\frac{w}{1000\,\text{rad}\,s^{-1}} = 1$$



$2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$



$$\boxed{X(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-jwn}}$$

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-jwn}}$$

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot e^{-j\omega n}$$ F.T.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot r^{-n}\cdot e^{-j\omega n}$$

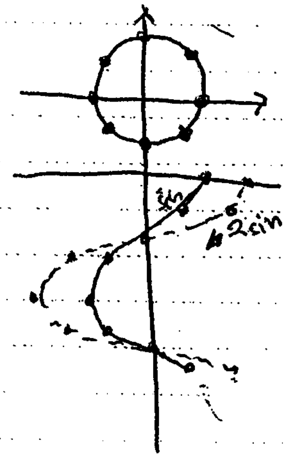
Transformacija Z. Če je $r=1$, sta transformaciji enaki

$z^2+jz-jz-j^2 \quad z^2+1=0 \quad z^2=-1 \quad z=\sqrt{-1}$

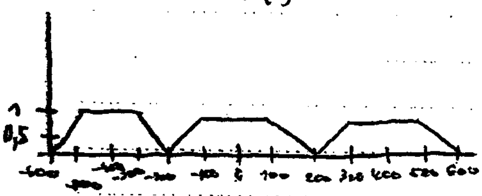
$z^2\cdot z^{-2}=z^{2-2=0}=z^0=1$

$$x[n]=e^{j\frac{\pi n}{4}}-e^{-j\frac{\pi n}{4}}=-2\cdot\sin\frac{\pi n}{4}$$

$x(0)=-2\sin\left(\frac{\pi 0}{4}\right)=0$
$x(1)=-2\sin\left(\frac{\pi 1}{4}\right)$
$x(2)=-2\sin\left(\frac{\pi 2}{4}\right)$
$x(3)=-2\sin\left(\frac{\pi 3}{4}\right)$
$x(4)=-2\sin\left(\frac{\pi 4}{4}\right)$
$x(5)=-2\sin\left(\frac{\pi 5}{4}\right)$
$x(6)=-2\sin\left(\frac{\pi 6}{4}\right)$
$x(7)=-2\sin\left(\frac{\pi 7}{4}\right)$



prepoznam funkcijo kosinus



eno zaostali

$4z^2=0$
$z^2=0$ (ničla)

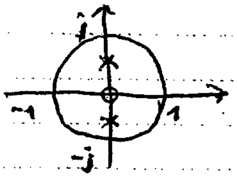
$$H[z]=\frac{4z^2}{(2z-j)(2z+j)}=\frac{4z^2}{4z^2+j2z-j2z-j^2}=$$

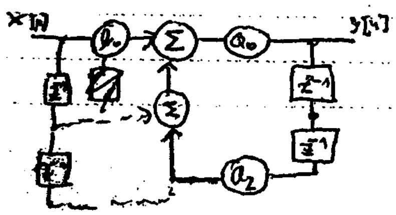
ničle: 0
poli: $\pm\frac{1}{2}j$

$$=\frac{4z^2}{4z^2+1}\cdot\frac{z^{-2}}{z^{-2}}=\frac{4}{4+z^{-2}}$$

$b_0=4,\ b_1=0,\ b_2=0$
$a_0=4,\ a_1=0,\ a_2=1$

sistem je stabilen



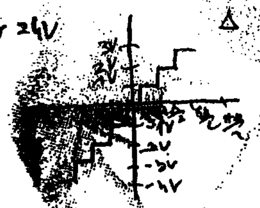


	1	−2	1		
1	1	−1	1		
1		1	−2	1	
1			1	−2	1
	1	−1	0	−1	1
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4

$x[n]-x[n-1]-x[n-3]+x[n-4]$

$k=3$
4,6
KVANT. +/-
$N=2^{l}=8$
$V_{max}=4V$

$$\Delta=\frac{V_{max}}{2^{l-1}}=\frac{4V}{2^2}=\frac{4V}{4}=1V\ \text{(korak)}$$



$$5 e^{j\pi} e^{j\frac{\pi n}{4}} = 5 e^{j\pi + \frac{j\pi n}{4}} = 5 e^{\frac{j4\pi + j\pi n}{4}} = 5 e^{\frac{j(4\pi + \pi n)}{4}}$$

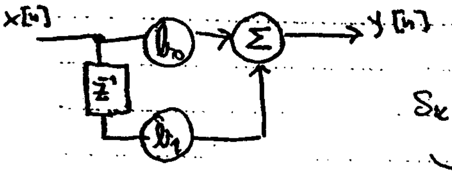
$$\boxed{z^{-n} = e^{-j\omega n}}$$

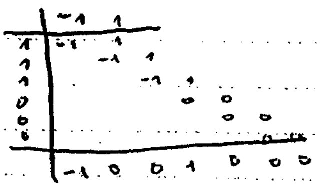
0 0 3 12 0 18

23 , 27

$e^{-2j\omega}$ $\quad e^{-j\omega} = z^{-1}$

$h(0) = -1$, $h(1) = 1$ $\qquad x[n] = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$





vsota $h(k) < \infty$ ✓

$$S_k = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty}$$

SISTEM JE STABILEN

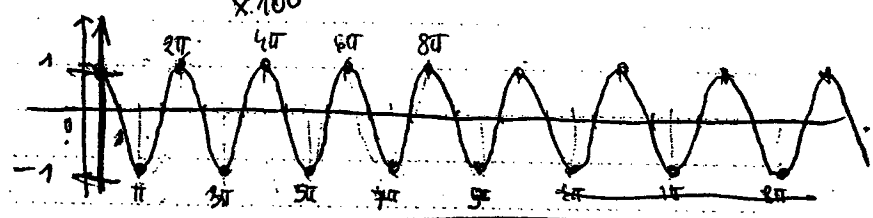
izhod bo omejen, če impulz. odziv sistema zadošča temu pogoju in takrat bo sistem stabilen

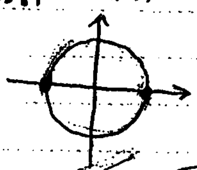
$2\pi f \Rightarrow f = 50 Hz$

$x(t) = \cos(100\pi t)$

$f_{vz} = 50 Hz$
100x

$x(0) = \cos \pi 0 = 1$	$x(5) = \cos \pi 5$
$x(1) = \cos \pi 1$	$x(6) = \cos \pi 6$
$x(2) = \cos \pi 2$	$x(7) = \cos \pi 7$
$x(3) = \cos \pi 3$	$x(8) = \cos \pi 8$
$x(4) = \cos \pi 4$	$x(9) = \cos \pi 9$



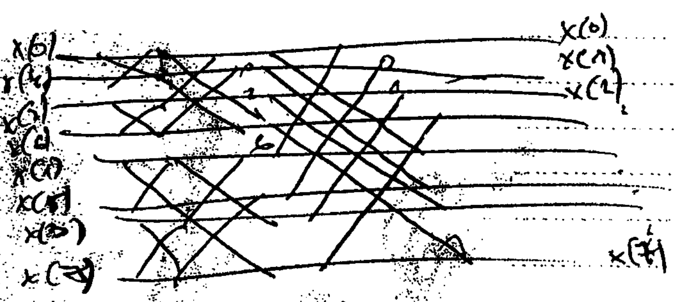


$$H(z) = \frac{1}{1 + z^{-1}}$$

$$\mathcal{F}: \boxed{X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}}$$

$$\mathcal{Z}: X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\omega n}$$

če je $r = 1$, potem $\mathcal{F} = \mathcal{Z}$



$x(1) = 8$

$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$ PER.

$W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$ SIM.

DFT: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$

Za FFT moramo niz x(n) razdeliti v manjše podnize, torej na podnize DFT računamo. Delimo na LIHE in SODE.

$X(k) = \sum_{n=SOD} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=LIH} x(n) W_N^{nk}$

Za sode uporabimo $2r = n$

Za lihe uporabimo $2r+1 = n$

$\sum_{n=SOD} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{n=LIH} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k}$

$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$ $\qquad W_N^{kn} = e^{-j\frac{\pi}{2}kn}$

$\Downarrow$

$X(k) = G(k) + W_N^k H(k) \Rightarrow$

zopet razdelimo na SODE in LIHE

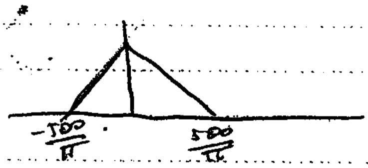
na SODE in LIHE — na SODE in LIHE $\Rightarrow \Rightarrow$

$\frac{e^{j\frac{\pi n}{2}} + e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{2} = \cos\frac{\pi n}{2}$

50K 150Hz

ω (rad/s)

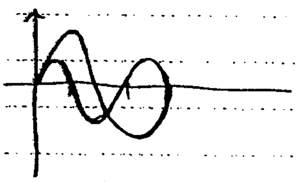
f (Hz)

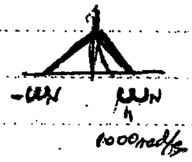


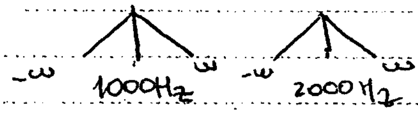
ω = 1000 rad/s

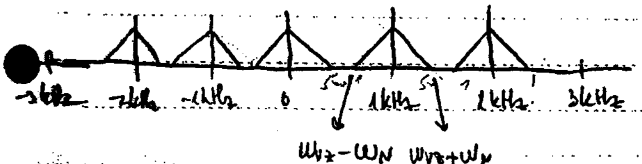
ω = 2πf = 1000 rad/s

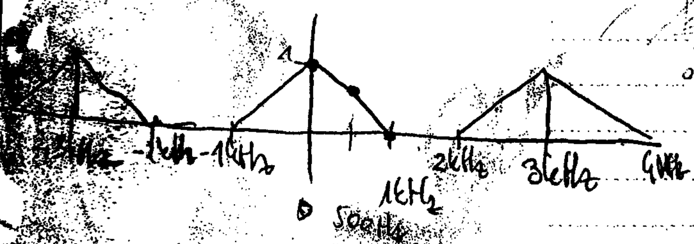
$f = \frac{1000 \text{ rad/s}}{2\pi}$

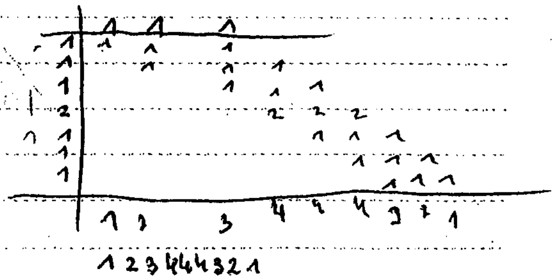












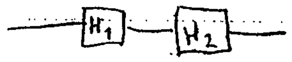
$\omega = 2\,rad/s = 2\pi f$ $\quad 1-\sin\left(\frac{1}{\pi}\right)$

Z:

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot r^{-n}\cdot e^{j\omega n}$ $\quad f = \frac{2\,rad/s}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$ $\quad$ 2 2 0

$e^{j\frac{\pi n}{4}} - e^{-j\frac{\pi n}{4}} = 2\sin\frac{\pi n}{4}$

0: $e^{\frac{j\pi 0}{2}} = 1$	0: 1	0: $2\sin 0 = 0$
1: $e^{\frac{j\pi}{4}}$	1: $e^{-j\frac{\pi}{4}}$	1: $2\sin\frac{\pi}{4}$
2: $e^{\frac{j\pi 2}{4}}$	2: $e^{-\frac{j\pi 2}{4}}$	2: $2\sin\frac{2\pi}{4}$
3: $e^{\frac{j\pi 3}{4}}$	3: $e^{-\frac{j\pi 3}{4}}$	3: $2\sin\frac{3\pi}{4}$



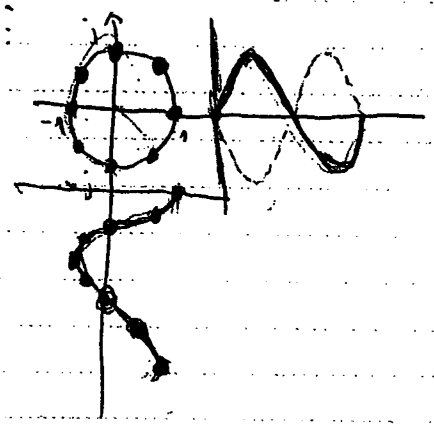
$a_{10} = 1 \quad a_{20} = 1$

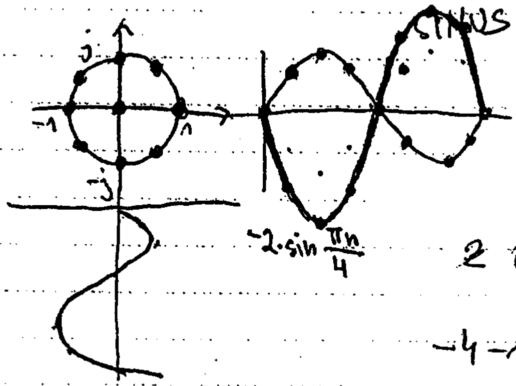
$b_{10} = 1, b_{11} = 2 \quad b_{20} = 1, b_{21} = -2$

$b_{12} = 1 \quad b_{22} = 1$

-1, 1, 2, 1

-2 -1 0 1



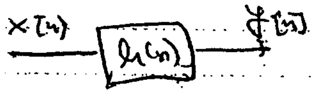


$-2\sin\frac{\pi n}{4}$

2 0

-4 -1 0 -1 = -6

-2 -2 + 3



konv.

$y[n] = h(n) * x(n)$

-1·1 -2·2 -1·3 1·4

-1 -4 -3 4

-4

$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot h(n_0-k)$

0 -1·2 0 2·4

-2 8

$h(n) = \{1, 2, 1, -1\}$ ($n=0$)

$x(n) = \{1, 4, 3, 4\}$ ($k=0$)

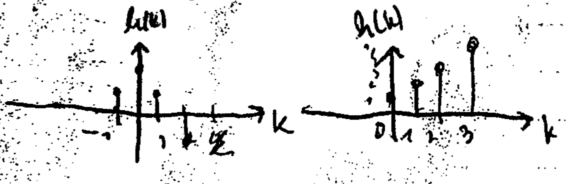
$y(0) = x(k)\cdot h(0-k) =$

2·(-1) 0 -1·2 0 = -4

$y(1) = \sum x(k)\cdot h(1-k)$

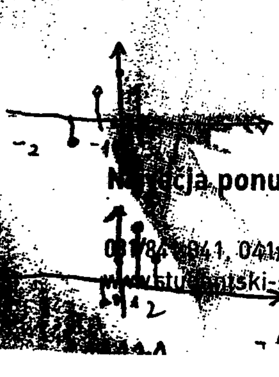
$\sum x(k)\cdot h(2-k)$

$\sum x(k)\cdot h(3-k)$



$r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)$

$r_{xy} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot y(n-l)$



$r_{yx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} y(n)\cdot x(n-l)$

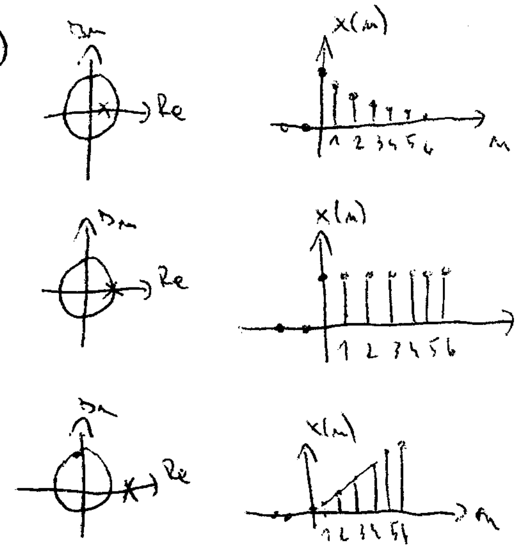
$r_{xy}(l) = x(l) * y(-l)$

-1, 0

1.) Vpliv lege korenov prenosne funkcije diskretnega sistema z neskončnim odzivom na časovno obnašanje sistema!

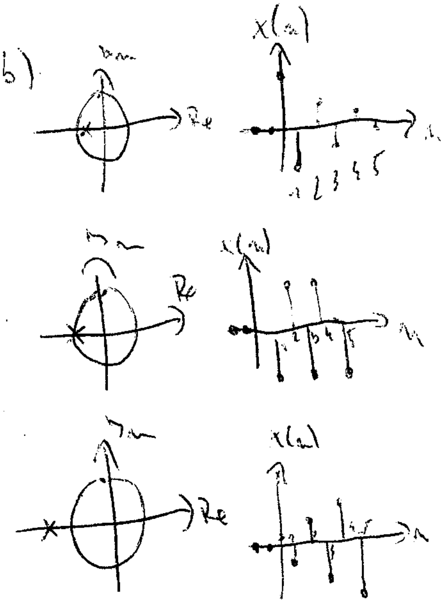
Obnašanje signala je odvisno od področja lege polov. Lahko ležijo, zunaj znotraj ali na enotnem krogu.

a)



- Pol v (+) smeri $a > 0$

b)

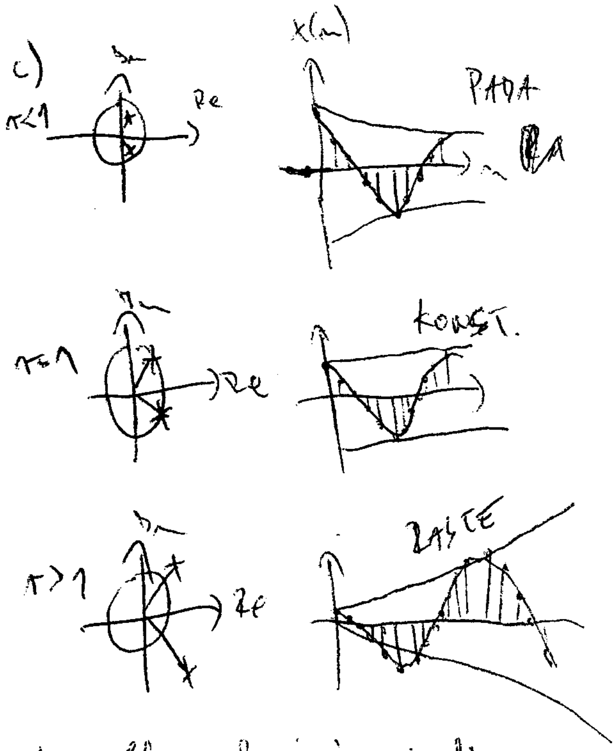


- pol gre v (−) smer

Zato se signal izmenjuje (+/−)

$a < 0$

c)



kompleksno konjugirani poli

Razdalja polov (r) določa ovojnico

2.) Povezava Z in Fourierove transformacije

$$\mathcal{F}: \; X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

$$Z: \; X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\omega n}$$

Fourierova transformacija je pri $r = 1$ enaka transformaciji Z.

$r = 1 \longrightarrow Z = \mathcal{F}$

3.) Zakaj je algoritem FFT hitrejši od uporabe osnovnega izraza za DFT!

FFT je hitrejši zato, ker osnovno računanje DFT razstavimo na nize dolžine N in manjše diskretne FT. Ločimo dva tipa algoritmov:

1.) Decimacija po času, kjer niz $x(n)$ razstavimo ~~v~~ v zaporedne manjše nize

2.) Decimacija po frekvenci, kjer koeficiente DFT $X(k)$ razst. v zap. manjše nize

~~Lastnost~~.

Ti algoritmi izkoriščajo lastnosti periodičnosti in simetričnosti DFT.

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} \quad (\text{periodičnost})$$

$$W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^* \quad (\text{simetričnost})$$

4.) Izraz za izračun Diskretne Fourierove Transformacije in inverzne DFT:

DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Inverzna DFT:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-kn} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

) Stabilnost kavzalnih časovno neodvisnih sistemov

$h(n) = 0 \quad n < 0$

Ker POK ne more vsebovati polov, sledi da je kavzalni linearni časovno neodvisen sistem BIBO stabilen, če in samo če leže poli znotraj enote kroga. poli < 1

6.) Zakaj s FFT računamo hitreje kot neposredno ~~p~~ kot z DFT.

Z algoritmom FFT računamo hitreje, ~~ker~~ zato ker niz $x(k)$ razdelimo v manjše podnize in tako pridemo hitreje do celotne rešitve.

8.) Kvantizator:

Kvantizator je nelinearen sistem, ki pretvarja vhodne vzorce $x[n]$ v končni niz vnaprej predpisanih simbolov

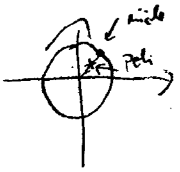
$$\hat{x}[n] = Q(x[n])$$

) Vrste filtrov:

)
Filter z zarezo

Ničle = 1

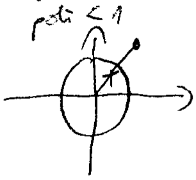
Poli < 1



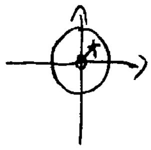
b) Vsepasovno sito

Ničle > 1

poli < 1



)
Resonator



Ničle = 0

Poli < 1

Če pa so poli enako 1 je oscilator

1. Fourierov transform: (povezava z časovnega prostora) in fourierove transformacije.

$$\mathcal{F}: \; X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \qquad z^{-1} = r \cdot e^{-j\omega}$$

$$\mathcal{Z}: \; X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\omega n} \qquad z^{-n} = r^{-n} \cdot e^{-j\omega n}$$

$r = 1 \longmapsto \mathcal{Z} = \mathcal{F}$ fourierov transform je pri $r = 1$ enaka transformaciji $\mathcal{Z}$.

---

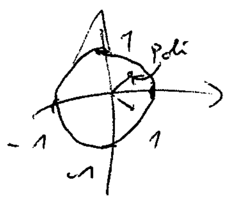
2. Kdaj je sist. stabilen, nestabilen in delno stabilen

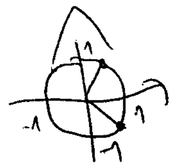
Stabilnost sistema:

$h(n) = 0 \quad n < 0$

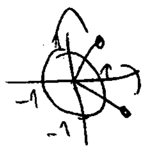
$|y(n)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k)\right|$

Ker POK ne vsebuje polov sledi, da je razsoben linearni časovno neodvisen sistem BIBO stabilen če in samo če ležijo poli znotraj enotskega kroga
poli < 1





delno stabilen



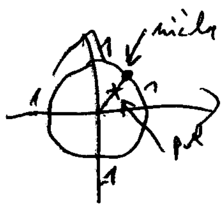
nestabilen

3. Vrste filtrov

Filter z zarezo

Niče = 1

Poli < 1

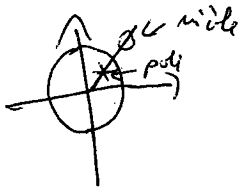


~~Vseprepustno sito~~

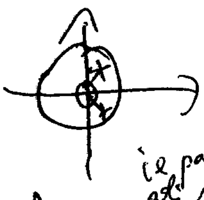
Vseprepustno sito

niče > 1

poli < 1



Resonator



niče = 0

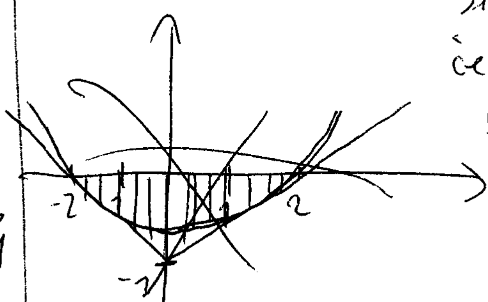
poli < 1

če pa so poli na 1 pa je oscilator

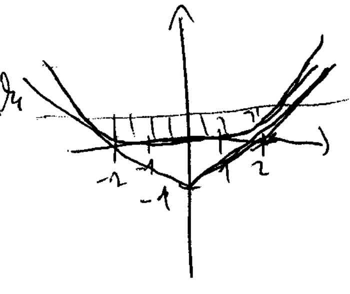
4. formula za transf. Z:

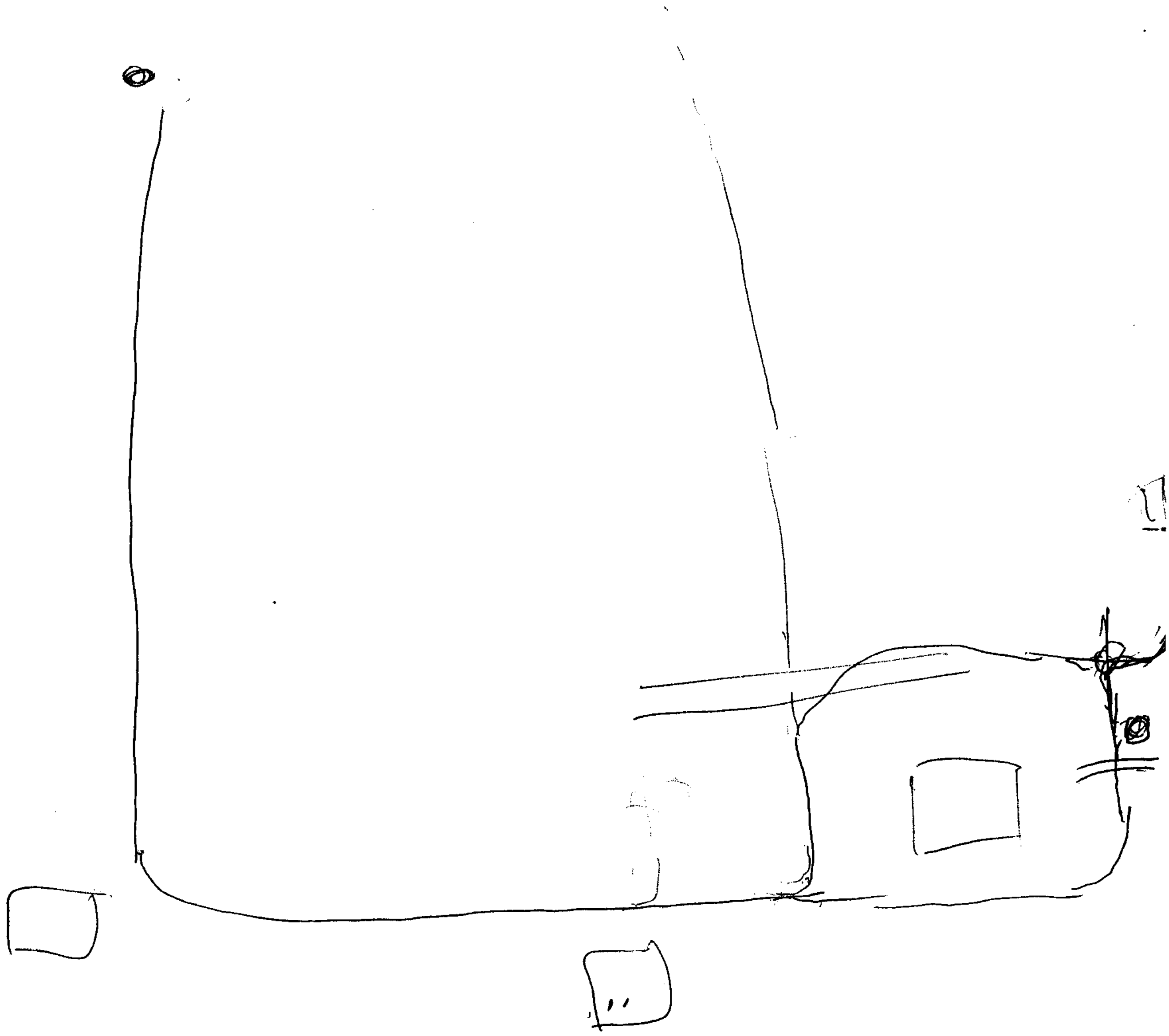
$X(z) = Z[x(n)]$

5. kdaj je sist. stabilen:

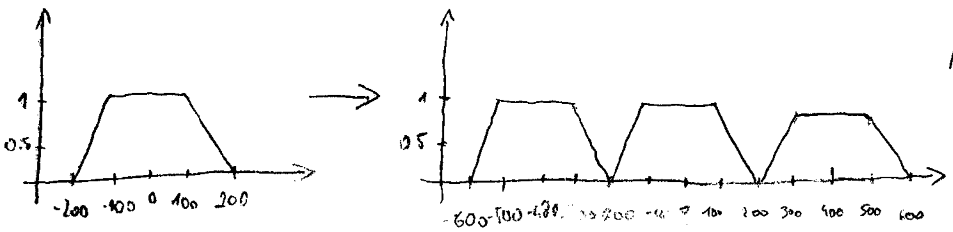


Sistem je stabilen če točka a_1 in a_2 ležita znotraj trikotnika stabilnosti





DOS) Teorem vzorčenja. Fourierov spekter signala predstavlja slika. Skicirajte spekter vz. signala, če je frekv. vzorčenja znaša 400 Hz. Razložite če smo v tem primeru zadostili pogojem 2. Nyquistovega kriterija.



Da v tem primeru smo zadostili pogoju 2. Nyquistovega kriterija, saj se signali ne prekrivajo.

S pomočjo vsote dveh fazorjev želimo generirati signal $\hat{x}(n)=2\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$. Zapišite ustrezno matematično funkcijo in skicirajte dogajanje za prvih 8 vzorcev.

$\hat{X}(n)=2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$;

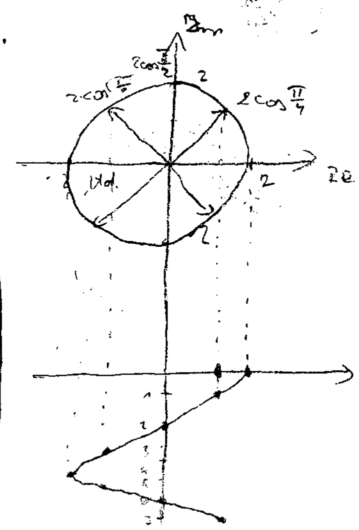
$n=0: \hat{x}(n)=2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot 0}{4}\right)=2$

$n=1: \hat{x}(n)=2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}$

$n=2: \hat{x}(n)=2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot 2}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}$

$n=3: \hat{x}(n)=2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot 3}{4}\right)=2\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

do $n=7$.



Imamo sistem, ki ga določa prenosna funkcija.

$$H[z]=\frac{4z^2}{(2z-j)(2z+j)} \longleftarrow \text{POLI}$$

a) Narišite lego korenov sistema v ravnini z! Ali je sistem stabilen, mejno stabilen ali nestabilen.

b) Izračunajte koeficiente a in b ter skicirajte izvedbo v obliki direktne strukture.

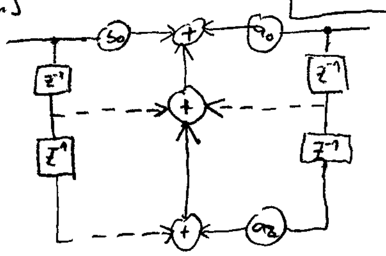
$$\frac{(2z-j)(2z+j)}{2\quad 2}=\frac{2z-j}{2}\cdot\frac{2z+j}{2}=\left(z-\frac{j}{2}\right)\cdot\left(z+\frac{j}{2}\right)$$

pola $-\frac{1}{2}j$ in $\frac{1}{2}j$; $H(z)=\frac{4z^2}{(2z-j)(2z+j)}=\frac{4z^2}{4z^2+j2z-j2z-j^2}=$

$=\frac{4z^2}{4z^2+1}\Big/\frac{z^2}{z^2}\rightarrow\frac{4}{4+z^{-2}}-a$ $\quad x[n]$

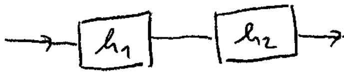
b) $b_0=4; b_1=0; b_2=0$

$a_0=4; a_1=0; a_2=1$

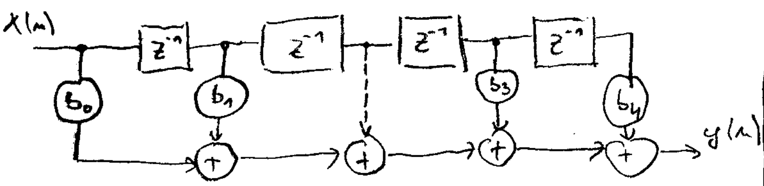


Določite odziv zaporedno vezanih (?) časovno neodvisnih sistemov z impulznima odzivoma $h_1(n)=\{1,-2,1\}$ in $h_2=\{1,1,1\}$. Podajte še diferenčno enačbo sistema in narišite skupno blokovno shemo sistema v obliki Direktne strukture. Ali je sistem stabilen?

h_2 \ h_1	1	-2	1		
1	1	-2	1		
1		1	-2	1	
1			1	-2	1
+	1	-1	0	-1	1
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4



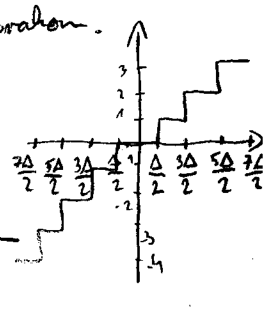
* Sistem je stabilen, ker ima končni odziv. Nestabilen bi bil če rabi imel končnega odziva.



$$y(n)=x(n)-x(n-1)-x(n-3)+x(n-4)$$

Imamo 3-bitni sistem (2 bita + predznak) za A/D pretvorbo signalov. Kvantizator razpoznava ⊕ in ⊖ signale. Max napetost je 4V.

a) Skicirajte prenosno karakteristiko enolične kvantizatorja s konst. korakom.



b) Podajte št. kvant. nivojev, max ⊕ in ⊖ nap. kvant. in tabelo bin. simbolov.

$$\Delta=\frac{U_{max}}{2^{b-1}}=\frac{4V}{4}=1V$$

$N=2^b=2^3=8$ št. nivojev

max ⊕ = 3V max ⊖ = -4V

BIN	$\hat{x}(n)$
011	3
010	2
001	1
000	0
111	-1
110	-2
101	-3
100	-4

Imamo sistem s prenosno funkcijo $H(e^{j\omega}) = \dfrac{[1-e^{-j(\omega-\omega_0)}][1-e^{j(\omega+\omega_0)}]}{[1-0{,}9\, e^{-j(\omega-\omega_0)}][1-0{,}9e^{-j(\omega+\omega_0)}]}$

Normirana mejna frekvenca je enaka $\Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

a) Podajte prenosno funkcijo v prostoru z

b) Določite koeficienta a in b

c) Narišite strukturo sistema v obliki Direktne strukture

d) Ocenite amplitudni odziv sistema. Kako imenujemo takšen sistem?

$\boxed{e^{j\omega} = z}$ $\boxed{e^{-j\omega} = z^{-1}}$ $\omega_0 = 4$

$\boxed{e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4}}$

$\boxed{e^{-2}\cdot e^{2} = e^{0} = 1}$ $\boxed{z^{-1}\cdot z^{-1} = z^{-2}}$

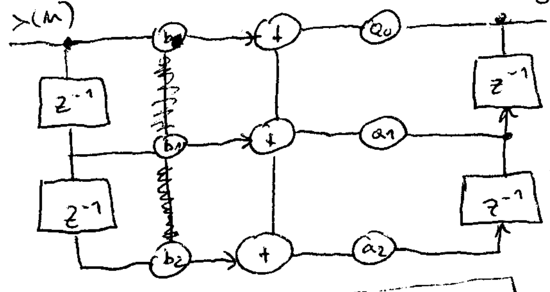
a) $$H(z) = \frac{(1-z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})(1-z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})}{(1-0{,}9\cdot z^{-1}\cdot e^{j\pi/4})(1-0{,}9\cdot z^{-1}\cdot e^{-j\pi/4})} = \frac{1-z^{-1}\cdot e^{-j\pi/4} - z^{-1}\cdot e^{j\pi/4} + z^{-2}}{1-0{,}9z^{-1}\cdot e^{-j\pi/4} - 0{,}9z^{-1}\cdot e^{j\pi/4} + 0{,}81\, z^{-2}} =$$

$$= \frac{1-z^{-1}(e^{-j\pi/4} + e^{j\pi/4}) + z^{-2}}{1-0{,}9z^{-1}(e^{-j\pi/4} + e^{j\pi/4}) + 0{,}81\cdot z^{-2}} = \frac{1-2\cos\pi/4\, z^{-1} + z^{-2}}{1-0{,}9\cos\pi/4\cdot z^{-1} + 0{,}81\cdot z^{-2}} \begin{matrix}\to b\\ \to a\end{matrix}$$

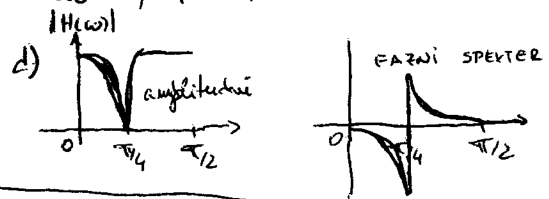
b) $b_0 = 1,\ b_1 = -\cos\pi/4,\ b_2 = 1$

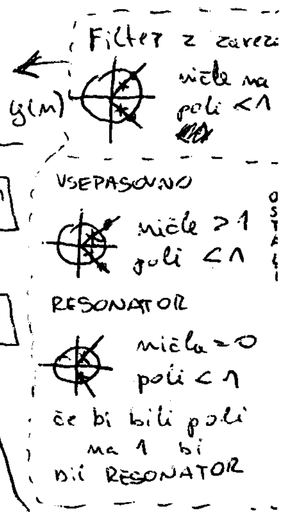
$a_0 = 1,\ a_1 = -0{,}9\cdot\cos\pi/4,\ a_2 = 0{,}81$

c)

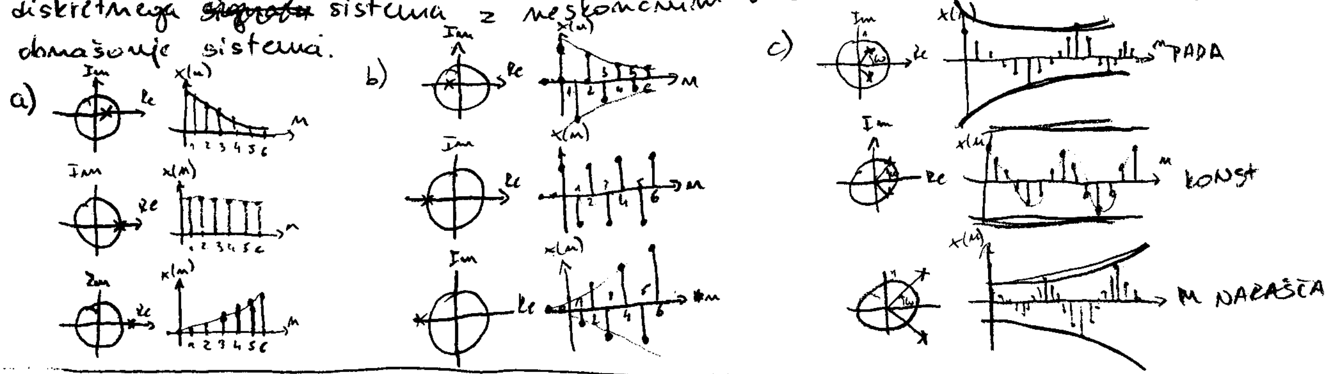


d)





2) Na nekaj značilnih primerih prikažite lege korenov prenosne funkcije diskretnega ~~signala~~ sistema z neskončnim odzivom na časovno obnašanje sistema.



3.) 3-bitni kvantizator (b=3)

$\Delta = \dfrac{X_{max} - X_{min}}{N-1} = \dfrac{7V - 0V}{8-1} = \dfrac{7V}{7} = 1V$ (korak)

$N = 2^b = 2^3 = 8$ (št nivojev

KORAK ZA + SIGNALE
$\Delta = \dfrac{U_{max}}{N-1}$

KORAK ZA + in − SIGNALE
$\Delta = \dfrac{U_{max}}{2^{b-1}}$

4) Nariši vse, kar veš o povezavi prostora Z in Fourierjeve transformacije!

$\mathcal{F}:\ X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{-j\omega n}$

$\mathcal{Z}:\ X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot z^{-n} - \sum x(n)\cdot r^{-n}\cdot e^{-j\omega n}$

$\boxed{z^{-1} = r\cdot e^{-j\omega}}$ $z^{-n} = r^{-n}\cdot e^{-j\omega n}$

Fourierova transformacija je pri r=1 enaka transformaciji Z $r=1 \Rightarrow Z = \mathcal{F}$

PRIIMEK IN IME: ____________________

DIGITALNA OBDELAVA SIGNALOV

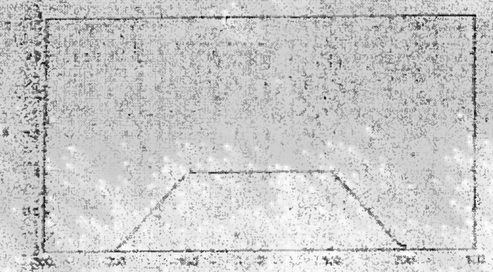
Datum: 18. 06. 2007

Kratka navodila:

- Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.
- Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte oba lista.
- Odgovore in izpeljave se kazujejo z ustrezno oceno.
- Čas pisanja izpita: 60 min

točke

1. Teorem vzorčenja. Fourierov spekter signala predstavlja slika. Skicirajte spekter vzorčenega signala, če je frekvenca vzorčenja enaka 400 Hz. Razložite, če smo v tem primeru zadostili pogojem 2. Nyquistovega kriterija!



2. S pomočjo vsote dveh fazorjev želimo generirati signal $x[n] = 2\cos(\pi n/4)$ Zapišite ustrezno matematično funkcijo in skicirajte dogajanje za prvih 8 vzorcev.

3. Imamo sistem, ki ga določa prenosna funkcija

$$H[z] = \frac{4z^2}{(2z-j)(2z+j)}$$

- Narišite lego korenov sistema v ravnini z! Ali je sistem stabilen, mejno stabilen ali nestabilen?
- Izračunajte koeficiente b in a sistema ter skicirajte izvedbo v obliki Direktne strukture I.

4. Določite odziv zaporedno vezanih linearnih časovno neodvisnih sistemov z impulznima odzivoma $h_1(n) = \{1,-2,1\}$ in $h_2(n) = \{1,1,1\}$. Podajte še diferenčno enačbo sistema in narišite skupno blokovno shemo sistema v obliki Direktne strukture I. Ali je podani sistem stabilen?

5. Imamo 3 bitni sistem (2 bita + predznak!) za analogno/digitalno pretvorbo signalov. Kvantizator razpoznava pozitivne in negativne signale. Maksimalna napetost kvantizatorja je $V_{max}=4V$.
   - Skicirajte prenosno karakteristiko enoličnega kvantizatorja s konstantnim korakom.
   - Podajte število kvantizacijskih nivojev, maksimalni pozitivno in negativno napetost kvantizatorja in tabelo binarnih simbolov/napetosti (uporabite dvojiški komplement).

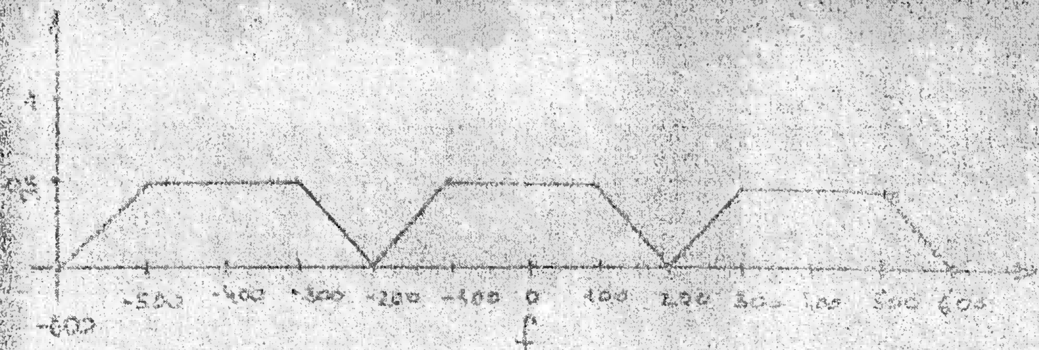
SKUPAJ ____________

OCENA ____________

TEFT DOS (8.6.20..)

Ja sem to rešila kot sem, če kdo ve kako drugače naj pove ...
Pa pejmo

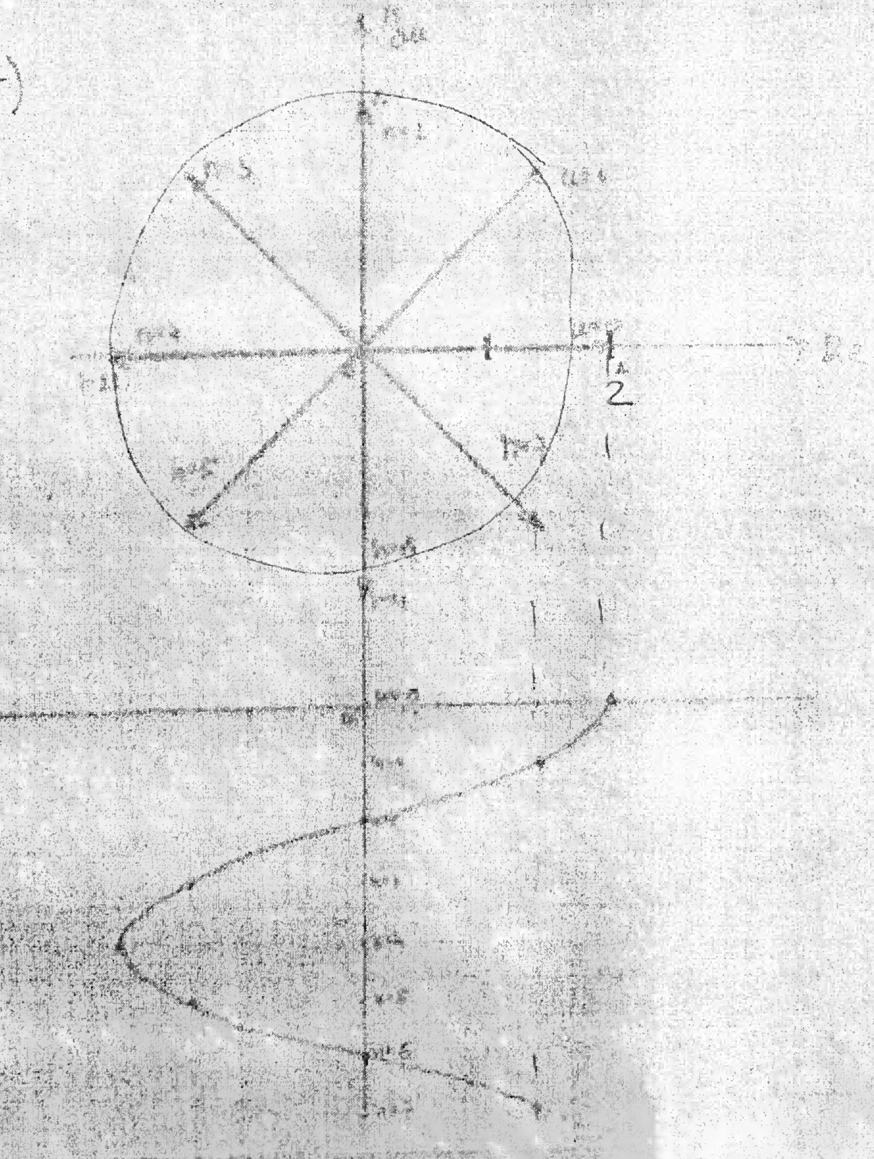
(1)



Odg: Da, v tem primeru smo zadostili pogoju z Nyquistovega kriterija, saj se signali ne prekrivajo.

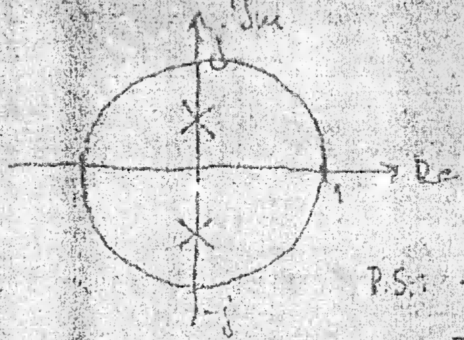
(2) $x[n] = 2\cos(\pi \frac{n}{4})$

$n=0: \ 2\cos(\pi \frac{0}{4}) = 2$
$n=1: \ 2\cos \frac{\pi}{4}$
$n=2: \ 2\cos \frac{2\pi}{4} = 2\cos \frac{\pi}{2}$
$n=3: \ 2\cos \frac{3\pi}{4}$
$n=4: \ 2\cos \pi$
$n=5: \ 2\cos \frac{5\pi}{4}$
$n=6: \ 2\cos \frac{6\pi}{4}$
$n=7: \ 2\cos \frac{7\pi}{4}$



(3) $H(z) = \dfrac{4z^2}{(2z-j)(2z+j)}$ → pol. 18. 9. 200

$$\frac{(2z-j)(2z+j)}{2 \cdot 2} = \frac{(2z-j)}{2}\,\frac{(2z+j)}{2} = \left(z - \frac{j}{2}\right)\left(z + \frac{j}{2}\right) \to \text{pola (x)}$$



<u>Sistem je stabilen, ker sta pola < 1</u>

P.S.: → če bi bila pola na 1, bi bil sistem mejno stabilen
→ če bi bila pa pola > 1 pa bi bil sistem nestabilen

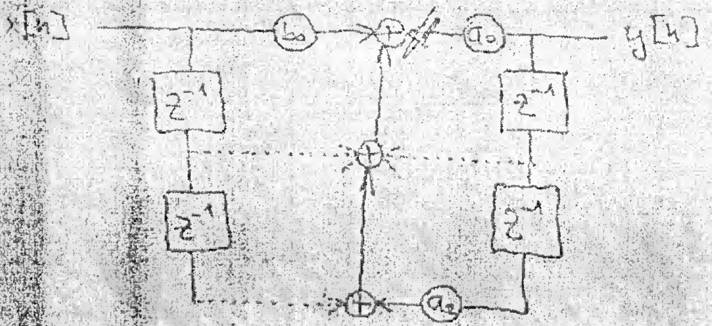
→ koeficienti & Direktna struktura I

$$H(z) = \frac{4z^2}{(2z-j)(2z+j)} = \frac{4z^2}{4z^2 - 2zj + \cancel{2zj} - j^2} = \frac{4z^2}{4z^2+1} \Big/ \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}}$$

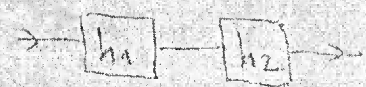
$$= \frac{4}{4 + z^{-2}} \begin{array}{l} \to b \\ \to a \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -j^2 = 1 \\ j^2 = -1 \end{array}}$$

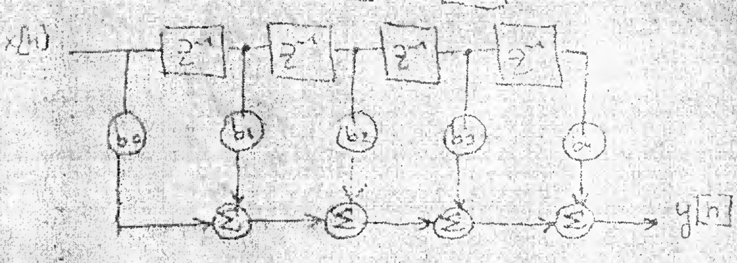
$b_0 = 4$, $b_1 = \emptyset$, $b_2 = \emptyset$; $a_0 = 4$, $a_1 = \emptyset$, $a_2 = 1$



(4) $h_1 = \{1, -2, 1\}$ $h_2 = \{1, 1, 1\}$



$h_2 \backslash h_1$	1	-2	1		
1	1	-2	1		
1		1	-2	1	
1			1	-2	1
$h_1 * h_2$	1	-1	0	-1	1
	↓	↓		↓	↓
	b_0	b_1		b_3	b_4



$y(n) - y(n-1) - y(n-3) + y(n-4)$

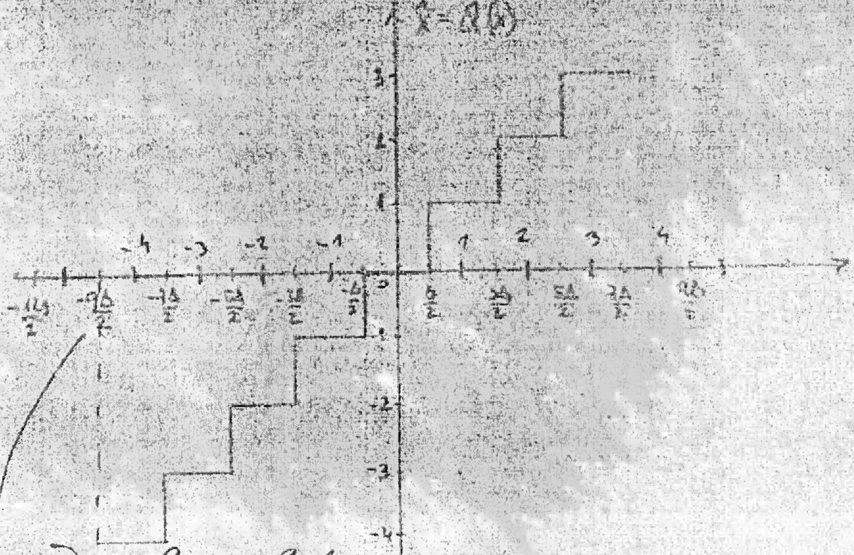
⑤ $b=3$

$V_{max}=4V$

$$\Delta=\frac{V_{max}}{2^{b-1}}=\frac{4V}{2^2}=\frac{4}{4}=\underline{1V}$$

$\hat{x}_B(n)$	$\hat{x}(n)$
0 1 1	3
0 1 0	2
0 0 1	1
0 0 0	0
1 1 1	−1
1 1 0	−2
1 0 1	−3
1 0 0	−4

y



$$-\frac{9\Delta}{2}=-\frac{9\cdot 1}{2}=-4{,}5$$

št. kvantizacijskih nivojev: $N=2^b=2^3=8$

Max. pozitivna in neg. nap.: $+3V$ in $-4V$

TEOR[illegible]A

(1) [illegible]

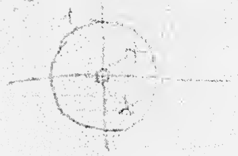
(b) [illegible]

[illegible]

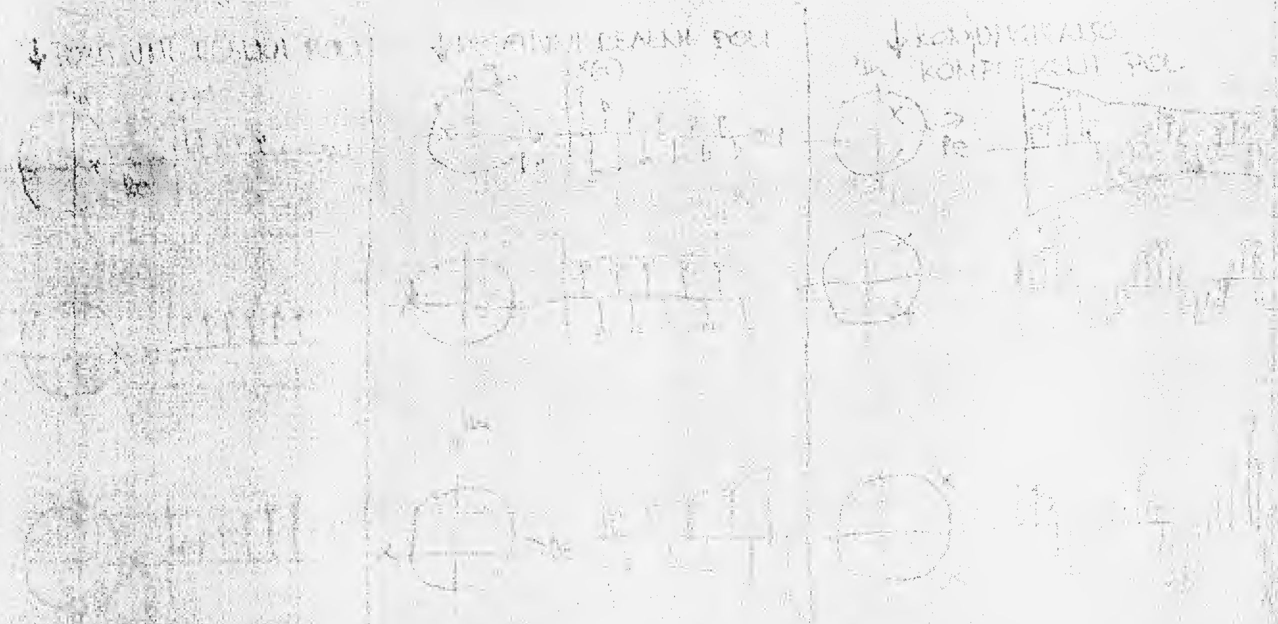
[illegible]

[illegible] ~~kružnica~~ [illegible] kruga (ako je [illegible] < 1)

[illegible] oscilator !!

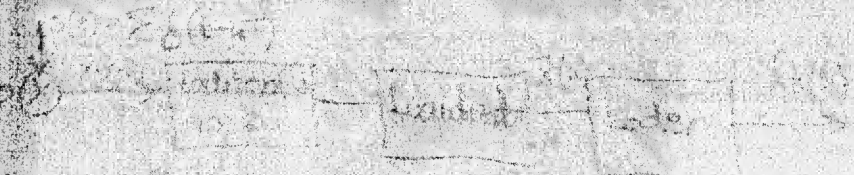


(2) [illegible] funkcije [illegible]



[illegible]

(3) [illegible] prelucrarii digitale [illegible]



[illegible] cuantizare [illegible] pozitive egale [illegible]

[illegible] negative egale [illegible] $N-1$ egale [illegible]

[illegible]

(4) [illegible] transformata Z [illegible] Fourier [illegible] transformata

(a) $X(\omega) = \sum x(n) e^{-j\omega n}$

$X(z) = \sum x(n) z^{-n} = \sum x(n) r^{-n} e^{-j\omega n}$

$z^{-1} = r e^{-j\omega}$

[illegible]

(5) [illegible] FFT [illegible]

$X(k) = \sum x(n) W_N^{kn}$

[illegible] algoritmul FFT [illegible] operatii [illegible] FFT

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(6) Opiši diskretno Fourierovo transformacijo. Napiši formulo za izračun DFT!

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad W_N = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{kn}$$

$$X(\omega) = \sum x(n) e^{-j\omega n}$$

– Podajte izraz za izračun diskretne in inverzne diskretne Fourier. transf. $\Rightarrow x(n) = \frac{1}{2\pi} \int X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$

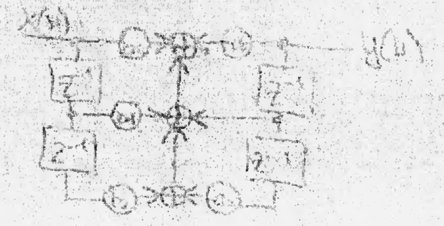
(7) Imamo filter s prenosno funkcijo $H(z) = \frac{1 - 0{,}2z^{-1} - 0{,}08z^{-2}}{1 + 0{,}5z^{-2}}$ → b, → a

* določite diferenčno enačbo takega sistema

$b_0 = 1$, $b_1 = -0{,}2$, $b_2 = -0{,}08$

$a_0 = 1$, $a_1 = \cancel{0}$, $a_2 = 0{,}5$

* direktna struktura! →



$$y(0) + 0{,}5y(1) = x(0) - 0{,}2y(1) - 0{,}08y(2)$$

(8) Stabilnost kavzalnih časovno neodvisnih sistemov. Podajte kriterij stabilnosti glede na odziv sistema na impulz enote h[n]. Kateri je tega kriterij (poloi in ničel) stabilnih kavzalnih sistemov?

(9) Kriterij stabilnosti nam predstavlja BIBO pogoj, pri katerem je sistem stabilen samo, če je izhodni niz omejen za vsak vhodni niz sistema.

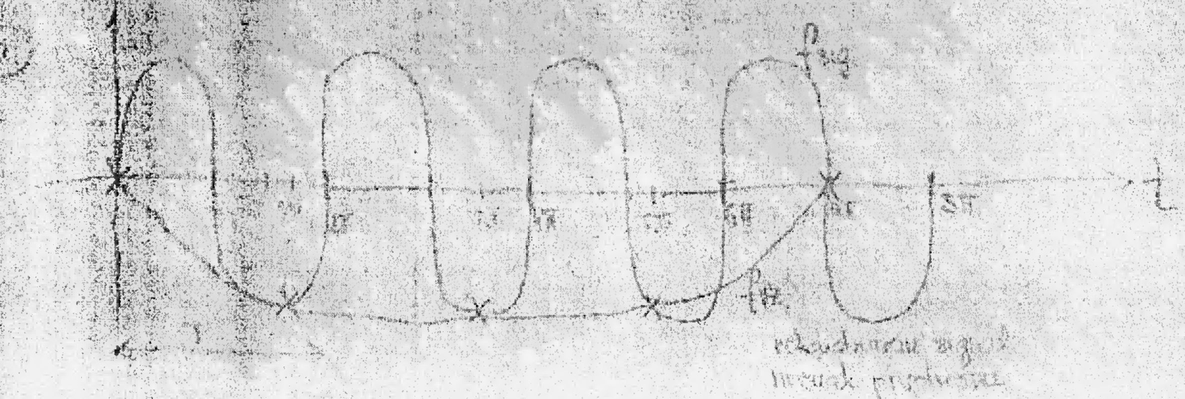
$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k)\right|$$

za ničle ni točno določeno, vendar je za pole nujno da morajo biti znotraj enotinega kroga.

BIBO – bounded input, bounded output

→ str. 160, 161

(9) [illegible] pogoj [illegible] vzorčenja signala [illegible] signal $x(t)=\sin(1{,}75\pi t)$ [illegible]
[illegible] vzorčenja [illegible]
(c) Kolikšna je frekvenca signala in frekvenca vzorčenja?
(d) Ali signal lahko rekonstruiramo?



$x(k)=\sin(1{,}75\pi k)$ za $k=0,1,2,3,4$

$k=0 \rightarrow \; = \emptyset$
$k=1 \rightarrow \; = \sin 1{,}75\pi$
$k=2 \rightarrow \; = \sin 1{,}75\pi \cdot 2$
$k=3 \rightarrow \; = \sin 1{,}75\pi \cdot 3$
$k=4 \rightarrow \; = \sin 1{,}75\pi \cdot 4$

(b) pogoj $f_{vz} \geq 2 f_{sig}$

Frekvenca vzorčenja mora biti 2× večja od f_{sig}. $\boxed{f_{vz} \text{ mora biti 2× večja od } f_{sig}}$

(c) $f_{sig} = 2\pi$
$f_{vz} = 1{,}75\pi$

(d) Ne, ker ni izpolnjen pogoj $f_{vz} \geq 2 f_{sig}$

(10) Izračunajte odziv linearnega časovno nespremenljivega (LČN) sistema z impulznim odzivom $h[0]=1$, $h[1]=2$, $h[2]=-1$ na vhodni signal $x[0]=1$, $x[1]=2$, $x[2]=3$, $x[3]=1$. Napišite konfiguracijo filtra [illegible]

$\boxed{y(n)=x*h=\sum x(k)h(n-k)=\sum h(k)\,x(n-k)}$

1	2	−1	
1	2	−1	
2	4	−2	
3	6	−3	
1	2	−1	
1	4	6	−1

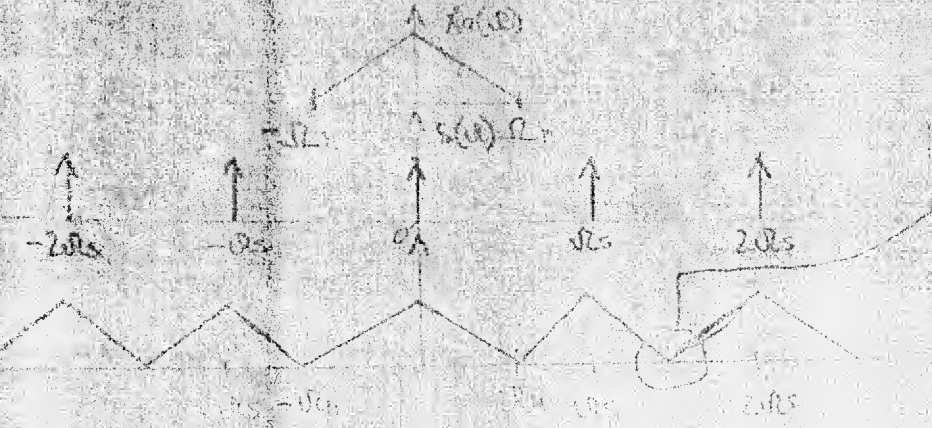
$y(n)=x(0)+2x(1)+3x(2)+x(3)$

(11) Vzorčenje in rekonstrukcija signalov!

a) Podajte matematično funkcijo, s katero ponazorimo princip vzorčenja

$$X_{vz}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(nT)\,\delta(t-nT)$$

b) Popišite vpliv vzorčenja na spekter signala (skica)



c) ... $\Omega_s > 2\Omega_N$

d) Kakšen je matematični postopek za rekonstrukcijo vzorčenih signalov (podajte razlago v časovnem prostoru)

→ Ta matematični postopek nam predstavlja nizko prepustni idealni filter s funkcijo:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi(t-nT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}$$

(12) Določite Z-transformacijo, lego polov in ničel ter območje konvergence funkcije $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

→ $\dfrac{1}{1+\frac{z^{-1}}{2}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2z}}$

$\dfrac{2z}{2z+1}$ ničle: $2z=0$

poli: $2z+1=0$, $2z=-1$, $z=-\frac{1}{2}$

PRIIMEK IN IME ____________________

Digitalna obdelava signalov

Datum: 31. 08. 2005

Kratka navodila:

- Odgovarjajte le na zastavljena vprašanja. Vprašanju neustrezne odgovore štejemo negativno.
- Podpišite se na polo in list z vprašanji. Ob koncu oddajte oba lista.
- Goljufanje pri izpitu se kaznuje z negativno oceno.
- Čas trajanja izpita: 60 min

točke

1. Imamo sistem s prenosno funkcijo $H(e^{j\omega}) = \dfrac{\left[1 - e^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1 - e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]}{\left[1 - 0.9e^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1 - 0.9e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]}$. Normirana mejna frekvenca sistema je enaka $\omega_0 = \pi/4$.
   a. Podajte prenosno funkcijo v prostoru Z.
   b. Določite koeficiente *a* in *b*.
   c. Narišite strukturo sistema v obliki Direktne strukture I
   d. Ocenite amplitudni odziv sistema. Kako imenujemo takšen sistem?

I

2. Na nekaj značilnih primerih prikažite vpliv lege korenov prenosne funkcije diskretnega sistema z neskončnim odzivom na časovno obnašanje sistema! ________

3. Imamo sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov. Kvantizator razpoznava samo pozitivne signale in deluje v napetostnem območju 0 – 7 V. ________
   a. Skicirajte sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov.
   b. Skicirajte prenosno karakteristiko enoličnega kvantizatorja s konstantnim korakom.
   c. Podajte število kvantizacijskih nivojev, korak kvantizatorja Δ in tabelo binarnih simbolov za 3 bitni kvantizator.

4. Napišite vse, kar veste o povezavi prostora Z in Fourierove transformacije! ________

5. Grafično predstavite algoritem za hiter izračun diskretne Fourierove transformacije z decimacijo po času za 8 vzorcev. Pojasnite, zakaj je algoritem FFT hitrejši od uporabe osnovnega izraza za DFT! ________

SKUPAJ ________

OCENA ________

S - izpit 31.08.2005

1.) Imamo sistem s prenosno funkcijo

$$H(e^{j\omega}) = \frac{[1-e^{-j(\omega-\omega_0)}][1-e^{-j(\omega+\omega_0)}]}{[1-0,9e^{-j(\omega-\omega_0)}][1-0,9e^{-j(\omega+\omega_0)}]}$$

NOrmirana mejna

Frekvenca sistema je enaka $\omega_0 = \pi/4$.

a.) Podajte prenosno funkcijo v prostoru Z.

b.) Določite koeficiente a in b.

c.) Narišite strukturo sistema v obliki Direktne strukture I.

d.) Ocenite amplitudni odziv sistema. Kako imenujemo takšen sistem?

a) $$H(z) = \frac{(1-e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1})(1-e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1})}{(1-0,9e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1})(1-0,9e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1})}$$

$\boxed{e^{j\omega}=z}$ $\boxed{e^{-j\omega}=z^{-1}}$ $\boxed{e^{-z}\cdot e^{z}=e^{0}=1}$ $\boxed{z^{-1}\cdot z^{-1}=z^{-2}}$

$$= \frac{1-(e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1})-(e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1})+1\cdot z^{-2}}{1-(0,9e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1})-(0,9e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1})+1\cdot z^{-2}} =$$

$$= \frac{1-2z^{-1}(e^{j\frac{\pi}{4}}+e^{-j\frac{\pi}{4}})+z^{-2}}{1-1,8(e^{j\frac{\pi}{4}}+e^{-j\frac{\pi}{4}})-0,81z^{-2}}$$

$\boxed{e^{j\frac{\pi}{4}}+e^{-j\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}}$

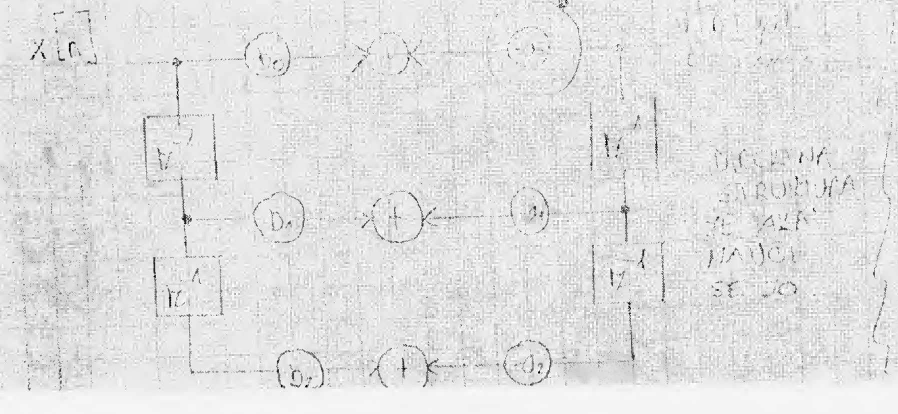
$$= \frac{1+2\cos\frac{\pi}{4}\cdot z^{-1}+z^{-2}}{1-1,8\cos\frac{\pi}{4}z^{-1}+0,81z^{-2}}$$

b.) KOEFICIENTI:

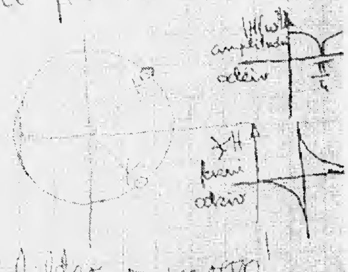
$b_0=1,\ b_1=-2\cos\frac{\pi}{4},\ b_2=1$

$a_0=1,\ b_1=-1,8\cos\frac{\pi}{4},\ b_2=0,81$

c.) Direktna struktura



d.) Ker so ničle na 1, poli pa na 0,9



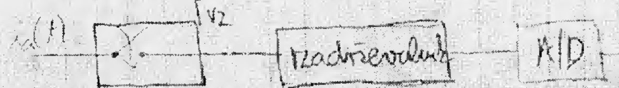
je to filter z zarezo.

2 | Na nekaj značilnih primerih prikažite vpliv lege korenov prenosne funkcije diskretnega sistema z neskončnim odzivom na časovno obnašanje sistema!

pozitivni realni (frekvenca je nič) | konjugirano kompleksni del | realno negativni poli

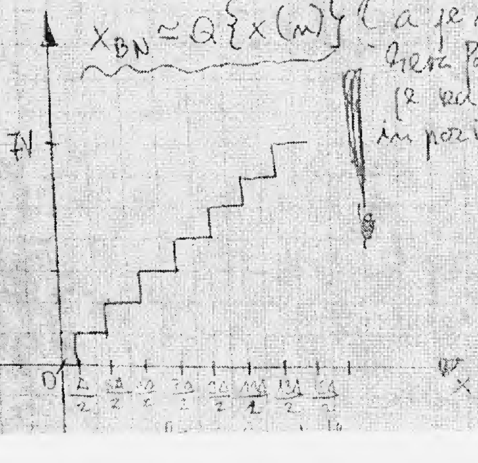
3 | Imamo sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov. Kvantizator razpoznava samo pozitivne signale in deluje v napetostnem območju 0-7V.
a.) Skicirajte sistem za analogno/digitalno pretvorbo signala
b.) Skicirajte prenosno karakteristiko enoličnega kvantizatorja s konstantnim korakom.
c.) Podajte število kvantizacijskih nivojev, korak kvantizatorja Δ in tabelo binarnih simbolov za 3 bitni kvantizator.

a.)



b.)

$X_{BN} = Q\{x(n)\}$ a je vseeno brez formule (2 kv. poz. neg. in poz in neg.)



c.) $U_{MIN} = 0V$
$U_{MAX} = 7V$
$b = 3$
$N = 2^b = 8$ (št. kvant. nivojev)

$\Delta = \frac{U_{MAX}}{N-1} = \frac{7V}{7} = 1V$ (korak kvantizatorja)

ČE KVANTIZATOR PREPOZNAVA POZ. SIGNALE JE $\Delta = \frac{U_{MAX}}{N-1}$

TABELA

Simbol	vhodna vrednost x
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	2
0 1 1	3
1 0 0	4
1 0 1	5
1 1 0	6
1 1 1	7

..., kar veste o povezavi prostora Z in Fourierove transformacije?

$$F: X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$$

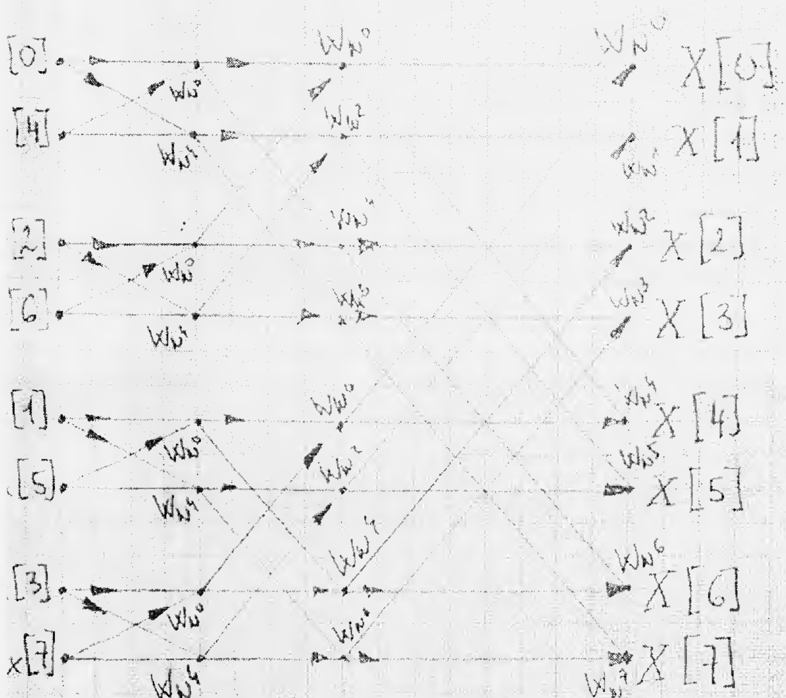
$$z^{-1} = r\cdot e^{-j\omega}$$

$$Z: X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, r^{-n}\cdot e^{-j\omega n}$$

$$r=1 \longrightarrow Z = F$$

Fourierova transformacija je pri r=1 enaka transformaciji Z.

rafično predstavite algoritem za hiter izračun diskretne Fourierove transformacije decimacijo po času za 8 vzorcev. Pojasnite, zakaj je algoritem FFT hitrejši od rabe osnovnega izraza za DFT!



PO ČASU

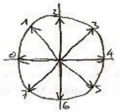
Pri tem postopku zmanjšamo čas računanja, ko računanje razbijemo na niz manjših DFT računanj.

V tem primeru izkoristimo simetričnost in periodičnost kompleksnega eksponenta

$$\boxed{W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k\cdot n}}$$

1. Imamo diskretni signal, ki ga predstavlja rotirajoči fazor $\bar{x}[n] = 5e^{j\pi}e^{j\pi n/4}$ Skicirajte fazor in potek projekcije signala na realno os za prvih 8 vzorcev.

$$\bar{x}[n] = 5e^{j\pi}\cdot e^{j\pi n/4}$$
$$\bar{x}[0] = 5e^{j\pi}\cdot e^{j\frac{\pi\cdot 0}{4}} = 5e^{j\pi}$$
$$\bar{x}[1] = 5e^{j\pi}\cdot e^{j\frac{\pi\cdot 1}{4}} = 5e^{j\pi + j\frac{\pi}{4}} = 5e^{j\frac{5\pi}{4}}$$
$$\bar{x}[2] = 5e^{j\pi}\cdot e^{j\frac{\pi\cdot 2}{4}} = 5e^{j\pi + j\frac{\pi}{2}} = 5e^{j\frac{3\pi}{2}}$$
$$\bar{x}[3] = 5\cdot e^{j\pi}\cdot e^{j\frac{\pi\cdot 3}{4}} = 5e^{j\pi + j\frac{3\pi}{4}} = 5e^{j\frac{7\pi}{4}}$$



3. Imamo filter s prenosno funkcijo $H(z) = \frac{1-0.2z^{-1}-0.08z^{-2}}{1+0.5z^{-2}}$ $\rightarrow b$, $\rightarrow a$
Določite:

- **diferenčno enačbo takšnega sistema**

$b_0 = 1 \quad b_1 = 0.2 \quad b_2 = 0.08$

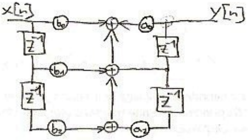
$a_0 = 1. \quad a_2 = 0.5 \quad a_1 = 0$

$$\frac{x}{y} \times \frac{a}{b} \Rightarrow x\cdot b = y\cdot a$$

$$1y(0) + 0.5y(1) = x(0) - 0.2x(1) - 0.08x(2)$$

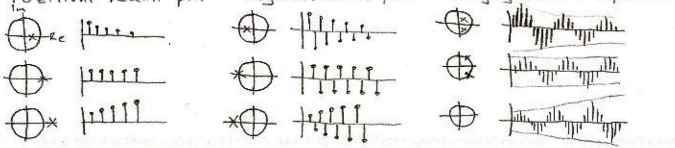
$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N_a-1} a_k\cdot y[n-k] + \sum_{\ell=1}^{N_b-1} b_\ell\cdot x[n-\ell]$$

- **realizacijo v obliki direktne strukture I.**



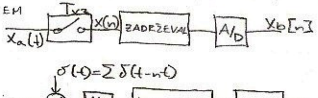
4. Na nekaj značilnih primerih prikažite vpliv lege korenov prenosne funkcije diskretnega sistema z neskončnim odzivom na časovno obnašanje sistema!

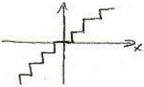
Pozitivni realni poli — Negativni realni poli — Konjugirano kompleksni



5. Kvantizacija signala. Skicirajte sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov. Skicirajte prenosno karakteristiko enoličnega kvantizatorja s konstantnim korakom. Podajte število kvantizacijskih nivojev, korak kvantizatorja Δ in tabelo binarnih simbolov za 3 bitni kvantizator. Kvantizator razpoznava pozitivne in negativne signale, Xmax = 4V.

-SISTEM





011	3
010	2
001	1
000	0
100	-1
101	-2
110	-3
111	-4

korak kvantizatorja: $\Delta = \frac{U_{max}}{2^{b-1}} = \frac{4V}{4} = 1V$

1. Stabilnost kavzalnih, časovno neodvisnih sistemov. Podajte kriterij stabilnosti glede na odziv sistema na impulz enote h[n]. Kakšna je lega korenov (polov in ničel) stabilnih kavzalnih sistemov?

KRITERIJ STABILNOSTI: Kriterij stabilnosti nam predstavlja pogoj, pri katerem je sistem stabilen, samo če je izhodni niz omejen za vsak vhodni niz sistema.

$$|y(n)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k)\cdot x(n-k)\right|$$

Ničle morajo biti znotraj enotinega kroga.

$$W_N = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{kn} = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

2. Zapišite algoritem diskretne Fourierove transformacije in izračunajte DFT konstantnega signala, $x = [1\ 1\ 1\ 1]^T$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W_N^{k\cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

$$x=[1,1,1,1]^T=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

3. Izračunajte odziv linearnega časovno neodvisnega sistema z impulznim odzivom h[0] = 1, h[1] = 2, h[2] = -1} na vhodni signal x[0] = 1, x[1] = 2, x[2] = 3, x[3] = 1. Napišite koeficiente filtra b in a ustreznega filtra!

$h[0]=1 \quad x[0]=1$

$h[1]=2 \quad x[1]=2$

$h[2]=-1 \quad x[2]=3$

$x[3]=1$

x(n) \ h(n)	1	2	-1			
1	1	2	-1			
2		2	4	-2		
3			3	6	-3	
1				1	2	-1
	1	4	6	5	-1	-1

odziv filtra: $y[n]=x(n)+4x(n-1)+6x(n-2)+5x(n-3)-x(n-4)-x(n-5)$

4. Skicirajte 4 periode analognega sinusnega signala ter na isti sliki označite vzorce diskretnega signala x(k)=sin(1.75π k), k=0,1,...,4. Na primeru pojasnite teorem o vzorčenju! Podajte frekvenco signala in frekvenco vzorčenja! Ali primer ustreza 2. Nyquistovemu kriteriju?

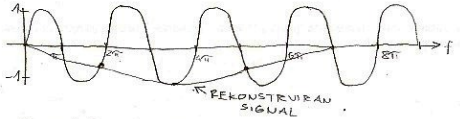
$k(0)=0$

$k(1)=\sin(1.75\pi)$

$k(2)=\sin(3.5\pi)$

$k(3)=\sin(5.25\pi)$

$k(4)=\sin(7\pi)$



Pogoj: $f_{sig} > 2\cdot f_{vz}$ } Nyquist

$f_{sig}=2\pi$

$f_{vz}=1.75\pi$

V našem primeru bi moralo biti $< 0.875\pi$, zato ne ustreza.

1. Imamo filtra s končnim impulznim odzivom, prvega s koeficienti b10=1, b11=2 b12=1 in drugega s koeficienti b20=1, b21=-2 b22=1. Določite odziv zaporedne vezave obeh filtrov na enotin impulz!

$b_{10}=1$

$b_{11}=2$

$b_{12}=1$

$b_{20}=1$

$b_{21}=-2$

$b_{22}=1$

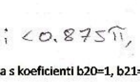
$1 \to x_1(n)\ \boxed{H_1} \longrightarrow \boxed{H_2} \longrightarrow y_1(t)$

$b_{10}\,b_{11}\,b_{12} \qquad b_{20}\,b_{21}\,b_{22}$

	1	-2	1		
1	1	-2	1		
2		2	-4	2	
1			1	-2	1
y(t)	1	0	-2	0	1

2. Podajte izraz za izračun diskretne Fourierove transformacije. Izračunajte DFT signala x=[-1 0 1 0]. Narišite amplitudni in fazni potek izračunanega spektra!

IZRAZ: $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$



$x=[-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$

$\quad n=0 \quad n=1 \quad n=2 \quad n=3$

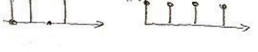
$X[0]=-1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1=0$

$X[1]=-1\cdot 1+0\cdot(-j)+1\cdot(-1)+0\cdot j=-2$

$X[2]=-1\cdot 1+0\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot(-1)=0$

$X[3]=-1\cdot 1+0\cdot j+1\cdot(-1)+0\cdot(-j)=-2$

n=0	n=1	n=2	n=3
1	1	1	1
1	-j	-1	j
1	-1	1	-1
1	+j	-1	-j



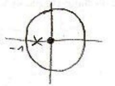
3. Določite in narišite lego polov in ničel ter na sliki označite področje konvergence funkcije $x(n)=(-\frac{1}{2})^n\mu(n)$

$x(n)=(-\frac{1}{2})^n\cdot\mu(n) \Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})z^{-1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2z}}=$

POL $\Rightarrow |z|>|\frac{1}{2}|$

$x(n)=a^n\cdot\mu(n)=\frac{1 \rightarrow \text{ničle}}{1-a\cdot z^{-1} \rightarrow \text{poli}}$ $\quad =\frac{2z}{2z+1}$ $\quad$ ničle: $2z=0$ $\quad$ poli: $2z+1=0$ $\quad z=-\frac{1}{2}$

POL: $|z|>|a|$



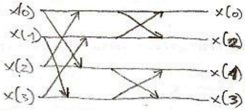
5. Hitri Fourierov transform;
a. podajte algoritem za decimacijo po frekvenci
b. skicirajte potek za N=4!
c. Pojasnite, zakaj z algoritmom FFT računamo hitreje kot neposredno po izrazu, ki definira DFT.

a) $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot W_N^{kn}$

$g(n)=x(n)+x(n+\frac{N}{2})$ SODE

$h(n)=x(n)+x(n+\frac{N}{2})$ LIHE

b)



c) S FFT hitreje računamo, ko X(k) razdelimo na manjše nize, zato lahko hitreje pridemo do rešitve.

1. Imamo sistem s prenosno funkcijo $H(z)=\frac{[z-j][z+j]}{[z-0.9j][z+0.9j]}$
a. Določite koeficiente *a* in *b* pričujočega sistema.
b. Narišite strukturo sistema v obliki Direktne strukture I
c. Frekvenca vzorčenja znaša 200Hz. Ocenite amplitudni odziv sistema. Kako imenujemo takšen sistem in kolikšna je njegova značilna frekvenca?

a) $H(z)=\frac{[z-j][z+j]}{[z-0.9j][z+0.9j]}=$

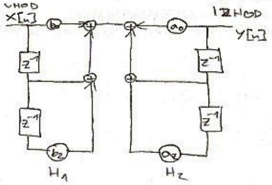
$=\frac{z^2+1}{z^2+0.81}\cdot\frac{z^{-2}}{z^{-2}}=\frac{1+z^{-2}\rightarrow b}{1+0.81z^{-2}\rightarrow a}$

$b_0=1 \quad b_1=0 \quad b_2=1$

$a_0=1 \quad a_1=0 \quad a_2=0.81$

poli: $-0.9j$, $0.9j$ $\quad$ ničle: $+j$, $-j$

b)



2. Vzorčenje in rekonstrukcija signalov.
a. Podajte matematično funkcijo, s katero ponazorimo postopek vzorčenja.
b. Pojasnite vpliv vzorčenja na spekter signala (skica).
c. Podajte kriterij za izbiro vzorčne frekvence.
d. Kakšen je matematični postopek za rekonstrukcijo vzorčenih signalov (podajte rešitev v frekvenčnem ter v časovnem prostoru)?

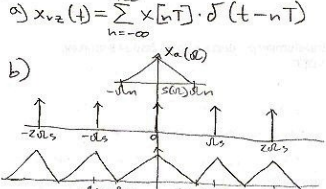
a) $x_{vz}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[nT]\cdot\delta(t-nT)$

c) $f_{sig}>2f_{vz}$

$f_{vz}<\frac{f_{sig}}{2}$

SE NE SMETA PREKRIVAT

b)



d) nizkopasovni idealni filter s funkcijo

$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\cdot\frac{\sin\left[\frac{\pi(t-nT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}$$

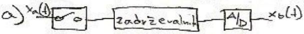
3. Imamo sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov s 3 bitnim kvantizatorjem. Kvantizator razpoznava samo pozitivne in negativne signale z maksimalno vrednostjo Umax=4 V.

a. Skicirajte sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov.

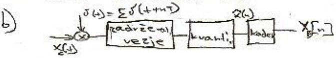
b. Skicirajte prenosno karakteristiko enoličnega kvantizatorja s konstantnim korakom, ki ustreza navedeni specifikaciji.

c. Podajte število kvantizacijskih nivojev, korak kvantizatorja Δ in tabelo binarnih simbolov.

a)



b)



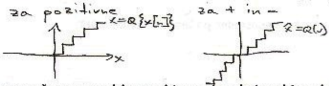
c) korak Δ

$$\Delta = \frac{U_{max}}{2^{b-1}} = \frac{4V}{2^{3-1}} = 1V$$

število kv. nivojev

$$N = 2^b = 2^3 = 8$$

000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7



011	3
010	2
001	1
000	0
111	−1
110	−2
101	−3
100	−4

5. Določite odziv linearnega časovno neodvisnega sistema z impulznim odzivom h(n) = {1,2,1,-1} na vhodni signal x(n) = {1,2,3,1}.

x(n) \ h(n)	1	2	1	−1			
1	1	2	1	−1			
2		2	4	2	−2		
3			3	6	3	−3	
1				1	2	1	−1
	1	4	8	8	3	−2	−1

$$y(n) = x(n) + 4x(n-1) + 8x(n-2) + 8x(n-3) + 3x(n-4) - 2x(n-5) - x(n-6)$$

1. Imamo sistem s prenosno funkcijo

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\left[1-e^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1-e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]}{\left[1-0.9e^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1-0.9e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]}$$

Normirana mejna frekvenca sistema je enaka $\omega_0 = \pi/4$

a. Podajte prenosno funkcijo v prostoru Z.

b. Določite koeficiente *a* in *b*.

c. Narišite strukturo sistema v obliki Direktne strukture I

d. Ocenite amplitudni odziv sistema. Kako imenujemo takšen sistem?

a) $H(e^{j\omega}) \Rightarrow$ z transf.

$$H(z) = \frac{(1-z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})\cdot(1-0.9\cdot z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})}{(1-0.9\cdot z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})(1-0.9\cdot z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})} =$$

$$= \frac{1-z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} - z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}} + z^{-2}}{1-0.9\cdot z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} - 0.9\cdot z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}} + 0.81 z^{-2}} =$$

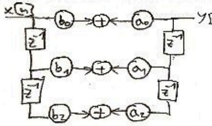
$$= \frac{1-z^{-1}(e^{j\frac{\pi}{4}} - e^{-j\frac{\pi}{4}}) + z^{-2}}{1-0.9z^{-1}(e^{-j\frac{\pi}{4}} - e^{j\frac{\pi}{4}}) + 0.81\cdot z^{-2}} = \frac{1-z^{-1}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + z^{-2}}{1-0.9\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot z^{-1} + 0.81 z^{-2}}\ \boxed{\to b}\ \boxed{\to a}$$

b) koeficienti:

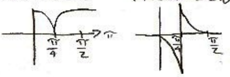
$b_0 = 1 \quad b_1 = \cos\frac{\pi}{4} \quad b_2 = 1$

$a_0 = 1 \quad a_1 = -0.9\cdot\cos\frac{\pi}{4} \quad a_2 = 0.81$

c)



d) AMP. ODZIV FAZNI ODZIV



ničle = 1, poli < 0 } filter z zarezo

4. Napišite vse, kar veste o povezavi prostora Z in Fourierove transformacije!

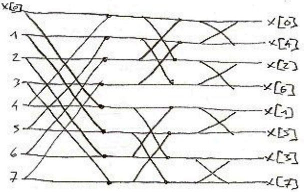
$$FT:\ X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot e^{-j\omega n}$$

$$Z:\ X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot r^{-n}\cdot e^{-j\omega n}$$

FOURIEROVA TRANSFORMACIJA JE PRI $r = 1$ ENAKA TRANSFORM. Z.

$r = 1 \rightarrow F = Z$

5. Grafično predstavite algoritem za hiter izračun diskretne Fourierove transformacije z decimacijo po času za 8 vzorcev. Pojasnite, zakaj je algoritem FFT hitrejši od uporabe osnovnega izraza za DFT!



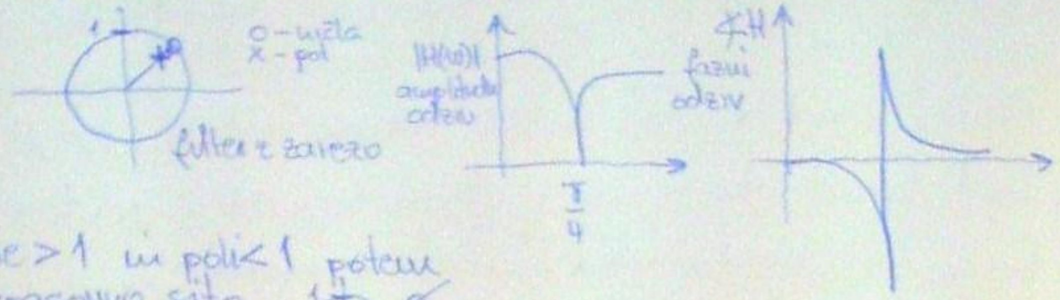
FFT je hitrejši, zato ker osnovno računanje DFT razstavimo na manjše nize dolžine N in manjše DFT. Ločimo transformacijo po času in frekvenci. Ti algoritmi izkoriščajo PERIODIČNOST in SIMETRIČNOST.

DOS IZPIT TEORIJA

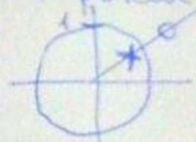
① Imamo sistem s prenosno funkcijo $H(e^{j\omega}) = \frac{(1-e^{-j(\omega-\omega_0)})(\dots)}{(1-0{,}9e^{j\frac{\pi}{4}})(\dots)}$ ničle / poli

- Ocenite amplitudni odziv sistema. Kako imenujemo takšen sistem?

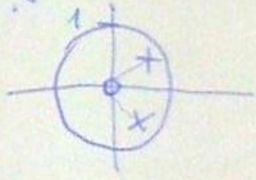
V našem primeru je to filter z zarezo, ker so ničle na 1, poli pa na 0,9



- Če bi bile ničle > 1 in poli < 1 potem bi to bilo vsepasovno sito

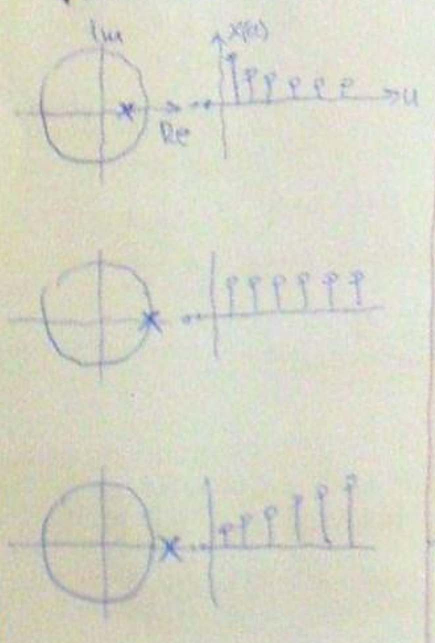


- če pa bi bila ničla = ∅ in pola < 1 bi to bil <u>RESONATOR - dušeni nihajni krog</u> (poli & ničle < 1)
če pa bi bili poli na 1 pa bi bil <u>oscilator</u>.

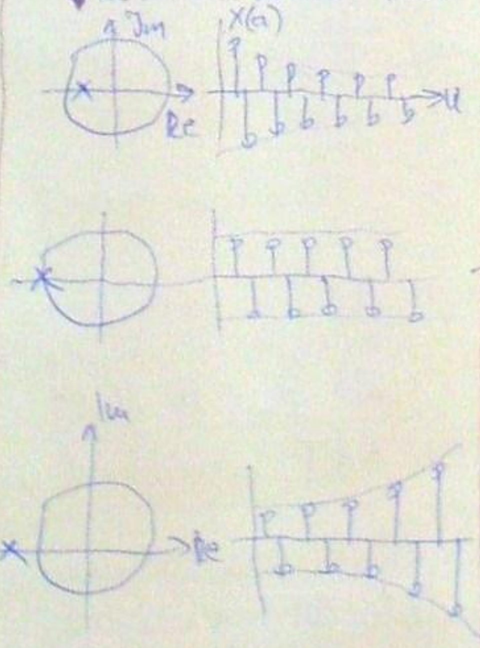


② Vplivi korenov prenosne funkcije diskretnega sistema ....

↓ POZITIVNI REALNI POLI

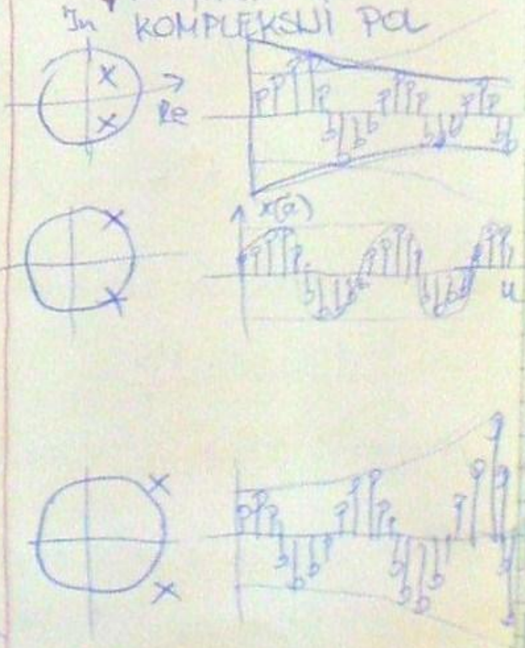


↓ NEGATIVNI REALNI POLI



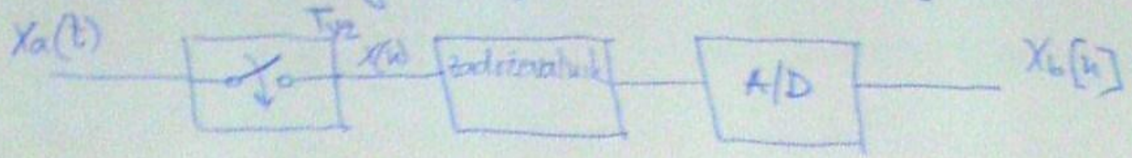
Odziv skače zaradi lihih in sodih potenc

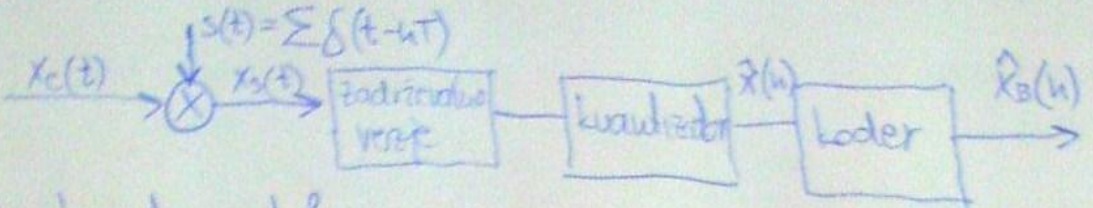
↓ KONJUNGIRANO KOMPLEKSNI POL



Konj. kompl. par nam daje nihanje. Za stabilen sistem morajo biti ničle znotraj enotinega kroga.

(3.) Sistem za analogno digitalno pretvorbo signalov.

Sl.1


Sl.2


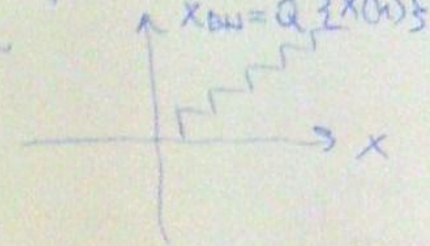
število kvantizacijskih nivojev dobimo tako: $N=2^b=[\text{če je } b=3]=2^3=8$

korak kvantizatorja za pozitivne signale: $\Delta=\frac{U_{MAX}}{N-1}$

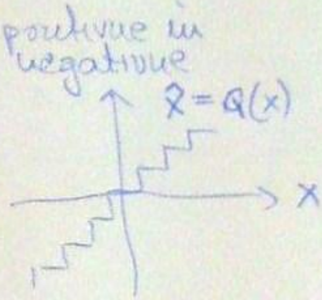
korak kvantizatorja za pozitivne in negativne signale $\rightarrow \Delta=\frac{U_{MAX}}{2^b-1}$

za pozitivne

npc	
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7



za pozitivne in negativne



npc	
011	3
010	2
001	1
000	0
111	-1
110	-2
101	-3
100	-4

(4.) Vse kar veno o povezavi prostora Z in Fourierove transformacije

$$\mathcal{F}: \; X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$\mathcal{Z}: \; X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot r^{-n} \cdot e^{-j\omega n}$$

$$z^{-1}=r\cdot e^{-j\omega r}$$
oz.
$$z^{-n}=r^{-n} e^{-j\omega n}$$

$r=1 \longmapsto \mathcal{Z}=\mathcal{F}$ Fourierova transf. je pri $r=1$ enaka transformaciji $\mathcal{Z}$.

(5.) Algoritem za hiter izračun FT ... po času za N=8.

knjiga str. 115

ALGORITEM ZA DECIMACIJO PO FREKVENCI
$$X(k)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n) W_N^{nk}$$

Pojasnite zakaj je algoritem FFT hitrejši od uporabe osnovnega izraza za DFT

Pri tem postopku zmanjšamo čas računanja, ko računanje razbijemo na niz manjših DFT računanj.

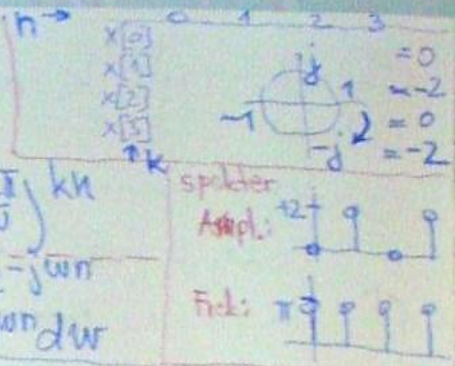
V tem primeru izkoristimo simetričnost in periodičnost kompleksnega eksponenta $W_N^{kn}=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

16.06.07 18:36

(6.) Diskretna Fourierova transformacija.

— Podajte formulo za izračun DFT!

$$\to X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad W_N = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{kn}$$



— Podajte izraz za izrač. diskretne in inverzne diskretne Fourier. transf.

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \Rightarrow x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

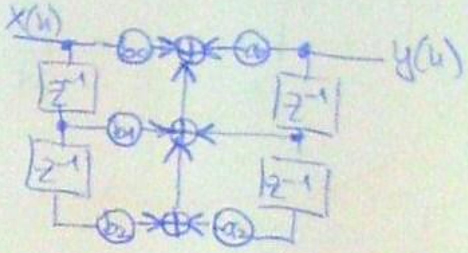
(7.) Imamo filter s prenosno funkcijo $H(z) = \dfrac{1 - 0{,}2z^{-1} - 0{,}08z^{-2}}{1 + 0{,}5z^{-2}}$ $\to b$ $\to a$

- določite diferenčno enačbo takega sistema

$b_0 = 1$, $b_1 = -0{,}2$, $b_2 = -0{,}08$

$a_0 = 1$, $a_1 = \emptyset$, $a_2 = 0{,}5$

- diskretna struktura] $\longrightarrow$



$\frac{x}{y} \times \frac{a}{5}$ $\quad y(0) + 0{,}5y(1) = x(0) - 0{,}2y(1) - 0{,}08y(2)$

(8.) Stabilnost kavzalnih, časovno neodvisnih sistemov. Podajte kriterij stabilnosti glede na odziv sistema na impulz enote $h[n]$. Kakšna je lega korenov (polov in ničel) stabilnih kavzalnih sistemov?

→ Kriterij stabilnosti nam predstavlja BIBO pogoj, pri katerem je sistem stabilen samo, če je izhodni niz omejen za vsak vhodni niz sistema.

$$|y(n)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k) \right|$$

Za ničle ni točno določeno, vendar je za pole nujno da morajo biti znotraj enotinega kroga

BIBO – Bounded Input
–||– Output

preberi si še ⟶ str. 160,161

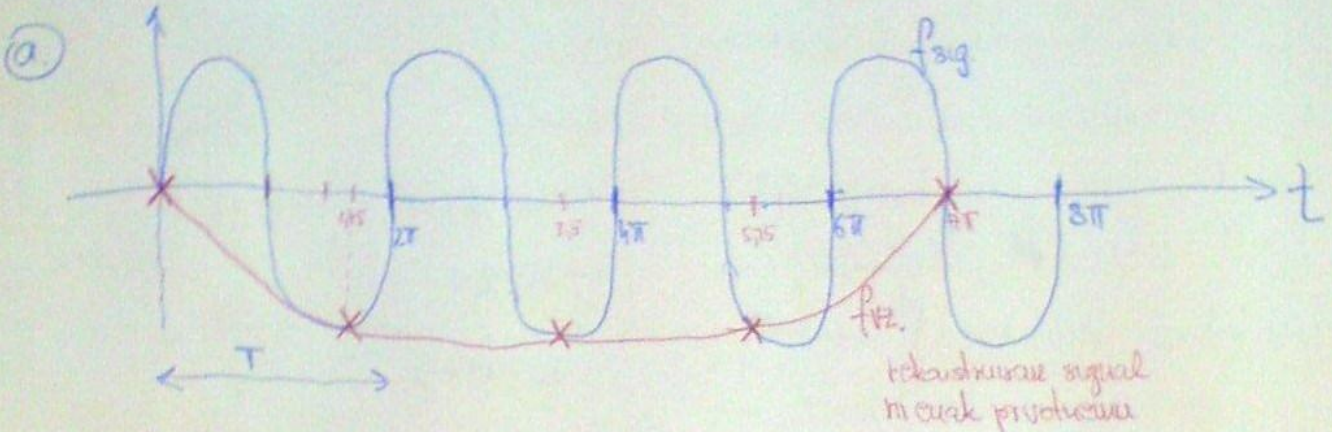
⑨ Skicirajte 4 periode analognega sin. signala, ter na
ⓐ isti sliki označite vzorce diskretnega signala $x(k)=\sin(1{,}75\pi k)$, $k=0,..4$

ⓑ Na primeru pojasnite koncept o vzorčenju!

ⓒ Podajte frek. signala in frek. vzorčenja!

ⓓ Ali primer ustreza 2. Nyquistovemu kriteriju?

ⓐ



$x(k)=\sin(1{,}75\pi k)$ za $k=0,1,2,3,4$

$k=0 \to$	$=\emptyset$	$=\emptyset$
$k=1 \to$	$=\sin 1{,}75\pi$	$=\sin 1{,}75\pi$
$k=2 \to$	$=\sin 1{,}75\pi 2$	$=\sin 3{,}5\pi$
$k=3 \to$	$=\sin 1{,}75\pi 3$	$=\sin 5{,}25\pi$
$k=4 \to$	$=\sin 1{,}75\pi 4$	$=\sin 7\pi$

ⓑ pogoj $f_{sig} \geq 2 f_{vz}$

Max. frek. signala mora biti 2x večja od f_{vz}. oz. $\boxed{f_{vz} \text{ mora biti 2x manjša od } f_{sig}}$ V našem primeru bi to pol bila $f_{vz}=0{,}875\pi$ → potem bi bil signal popolnoma rekonstruiran

ⓒ $f_{sig} = 2\pi$

$f_{vz.} = 1{,}75\pi$

ⓓ Ne, ker ni izpolnjen pogoj $f_{sig} \geq 2 f_{vz}$

---

⑩ Izračunajte odziv linearnega časovno neodvisnega (LČN) sistema z impulznim odzivom $h[0]=1$, $h[1]=2$, $h[2]=-1$ na vh. signal $x[0]=1$, $x[1]=2$, $x[2]=3$, $x[3]=1$. Napišite koeficiente filtra b in a ustreznega filtra.

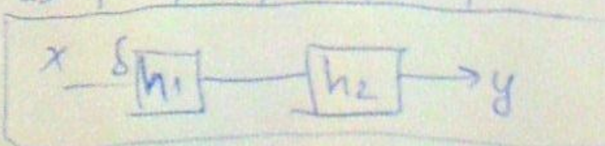
$$\boxed{y(k)=x*h=\sum x(n)h(n-k)=\sum h(k)x(n-k)}$$

$x \backslash h$	1	2	-1			
1	1	2	-1			
2		2	4	-2		
3			3	6	-3	
1				1	2	-1
$y \to$	1	4	6	5	-1	-1

x — a, y — b

$b_0=1, b_1=2, b_2=3, b_3=1$

$a_0=1, a_1=4, a_2=6, a_3=5, a_4=-1, a_5=-1$



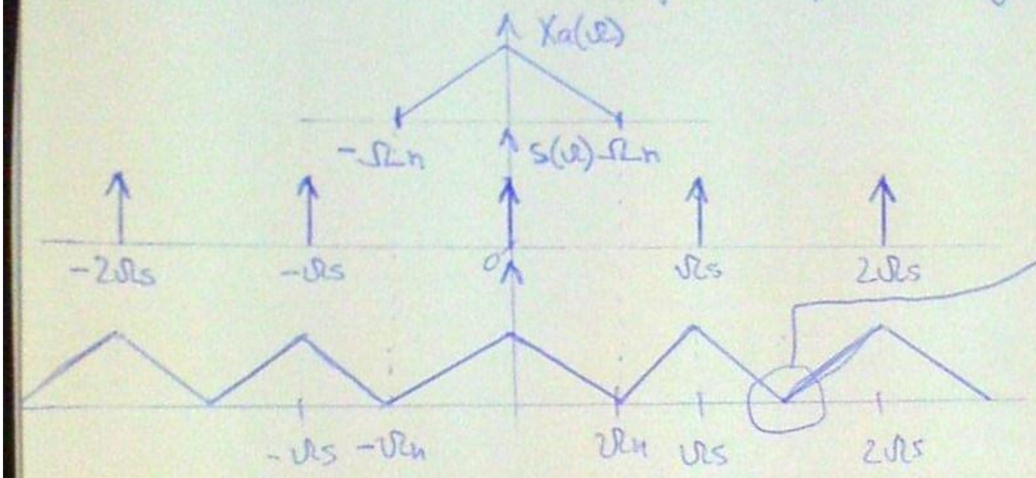
$y(0)+4y(1)+6y(2)+5y(3)-y(4)-y(5)=x(0)+2x(1)+3x(2)+x(3)$

11. Vzorčenje in rekonstrukcija signalov!

a) Podajte matematično funkcijo, s katero ponazorimo postopek vzorčenja

$$X_{vz}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(nT)\,\delta(t-nT)$$

b) Popišite vpliv vzorčenja na spekter signala (skica)



c) Podajte kriterij za izbiro vzorčne frek.

se ne smeta prekrivat da ne pride do ISI

$\Omega_s > 2\Omega_N$

d) Kakšen je matematični postopek za rekonstrukcijo vzorčnih signalov (podajte rešitev v frek. in časovnem prostoru)

→ ta matematični postopek nam predstavlja nizkopasovni idealni filter s funkcijo:

$$X_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi(t-nT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}$$

12. Določite in narišite lego polov in ničel ter na sliki označite področje konvergence funkcije $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$

$$X(z) = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)z^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{z^{-1}}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2z}} \Bigg| \begin{matrix}\cdot 2z \\ \cdot 2z\end{matrix} \quad \boxed{z^{-1} = \frac{1}{z}}$$

tabela str. 149

$$\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$= \frac{2z}{2z+1}$$

ničle: $2z = 0$

poli: $2z+1=0$

$2z = -1$

$z = -\frac{1}{2}$