

STROMAR⁵

DIGITALNA KRMILJA IN TEORIJA REGULACIJ

3

Zapiski avditornih vaj

ME

Šolsko leto 2009 / 2010
Izvajalec David Nedeljkovič

Avtor dokumenta Blaž Potočnik
Skeniranje Aleš Berkopec



UREJANJE DOKUMENTA

VERZIJA	01.01
DATUM	13.03.2010

OPOMBE

--

TEORIJA REGULACIJ AVDITORNE VAJE

**Blaž Potočnik
2009/2010**

VAJA A-1

Izračunajte prenosno funkcijo za sistem, ki ga popisuje diferencialna enačba

$$\dot{y}(t) + ky(t) = u(t) = e^{st}$$

Kakšen je odziv sistema na vhodni signal $u(t) = e^{st}$? Ugotovite tudi frekvenčni odziv, konkretno za vhodni signal $u(t) = A \sin(\omega t + \gamma)$!

• Zapis pripadajoče prenosne funkcije

$$y(t) = u(t) \cdot F(s) ; \text{ če je } u(t) = e^{st}$$

$$y(t) = e^{st} \cdot F(s)$$

$$\dot{y}(t) = s \cdot e^{st} \cdot F(s) \longrightarrow \text{Vstavimo v D.E.}$$

Dobimo:

$$s \cdot e^{st} \cdot F(s) + k \cdot e^{st} \cdot F(s) = e^{st}$$

$$(s+k) e^{st} \cdot F(s) = e^{st} \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s+k}$$

• ugotovimo odziv na vzbujanje

$$y(t) = e^{st} \cdot F(s)$$

$$y(t) = e^{st} \cdot \frac{1}{s+k}$$

- frekvenčni odziv

$$s = j\omega$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + k} = \frac{1}{k + j\omega} \cdot \frac{k - j\omega}{k - j\omega}$$

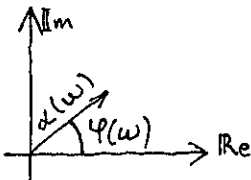
$$= \frac{k - j\omega}{k^2 + \omega^2}$$

$$\alpha = |F(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(F(j\omega)) + \operatorname{Im}^2(F(j\omega))}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{k}{k^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{k^2 + \omega^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{k^2 + \omega^2}}$$

- fazni kot



$$\varphi(\omega) = \operatorname{atg}\left[\frac{\operatorname{Im}[F(j\omega)]}{\operatorname{Re}[F(j\omega)]}\right] = \operatorname{atg}\left[-\frac{\omega}{k}\right]$$

- izhodni signal

$$y(t) = \alpha(\omega) \cdot A \cdot \sin(\omega t + \gamma + \varphi(\omega))$$

$$= \sqrt{\frac{1}{k^2 + \omega^2}} \cdot A \cdot \sin\left[\omega t + \gamma + \operatorname{atg}\left(-\frac{\omega}{k}\right)\right]$$

kjer je γ začetni premik

VAJA A-2

Za podano diferencialno enačbo zapišite prenosno funkcijo $F(s) = X(s)/Y(s)$ in določite $x(t = \infty)$, če sistem vzbujamo z enotino stopnico. Upoštevajte, da velja:

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

$$a) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\left(2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) + 25x = 9y$$

$$b) \quad 2x + 3y = \frac{dx}{dt}$$

$$a) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\left[2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right] + 25x = 9y \quad / \mathcal{L}$$

$$\bullet \quad s^2 X(s) + 3(2 \cdot s \cdot X(s) - s Y(s)) + 25 X(s) = 9 Y(s)$$

$$s^2 X(s) + 6s X(s) - 3s Y(s) + 25 X(s) = 9 Y(s)$$

$$X(s) [s^2 + 6s + 25] = Y(s) [3s + 9]$$

$$F(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{3s + 9}{s^2 + 6s + 25}$$

$$X(s) = Y(s) \cdot F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{3s + 9}{s^2 + 6s + 25}$$

$$\bullet \quad X(t = \infty):$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{3s + 9}{s^2 + 6s + 25} \right] = \frac{9}{25}$$

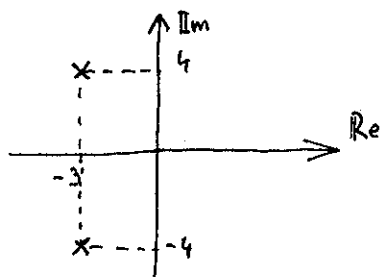
Preveriti je potrebno, ali je izrek o končni vrednosti funkcije veljaven.

Poli so ničle imenovalca izraza

$$\frac{3s + 9}{s^2 + 6s + 25}$$

$$s^2 + 6s + 25 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = \boxed{-3 \pm 4i}$$



Ker sta oba pola levo od Im osi, vemo, da je izračun veljaven

• $x(t) = ?$

$$X(s) = \frac{1}{s} \frac{3s + 9}{s^2 + 6s + 25} \quad / \mathcal{L}^{-1}$$

$$X(s) = \frac{3}{s^2 + 6s + 25} + \frac{9}{s(s^2 + 6s + 25)}$$

$$X(t) = 3 \left[\frac{1}{\omega} \cdot e^{-3t} \cdot \sin(\omega t) \right] +$$

$$+ 9 \cdot \frac{1}{25} \left[1 - (\cos(\omega t) + \frac{3}{\omega} \cdot \sin(\omega t)) \cdot e^{-3t} \right] =$$

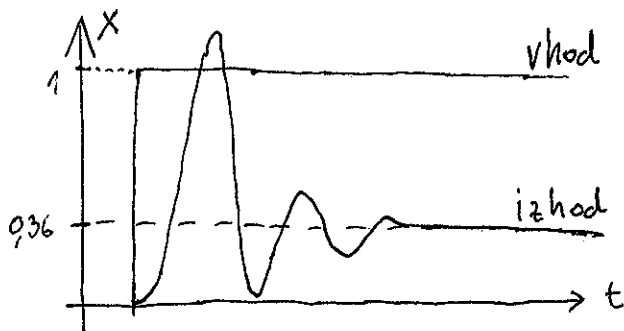
$$= \left[\frac{3}{4} e^{-3t} \sin(4t) \right] + \frac{9}{25} - \frac{9}{25} \left[\cos(4t) e^{-3t} \right] -$$

$$- \frac{27}{100} \left[\sin(4t) \cdot e^{-3t} \right] =$$

$$= e^{-3t} \left[\frac{3}{4} \cdot \sin(4t) - \frac{9}{25} \cos(4t) - \frac{27}{100} \sin(4t) \right] + \frac{9}{25}$$

$$\omega = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$x(t = \infty) = 0,36$$



$$b) \cdot 2x + 3y = \frac{dx}{dt} \quad / \mathcal{L}$$

$$2X(s) + 3Y(s) = sX(s)$$

$$Y(s) \cdot 3 = X(s)(s-2)$$

$$\frac{3}{s-2} = \frac{X(s)}{Y(s)} = F(s)$$

$$X(s) = Y(s)F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{3}{s-2}$$

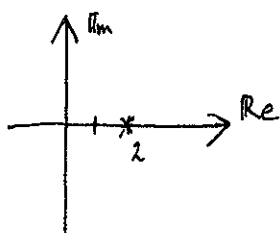
• $X(t = \infty)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{3}{s-2} \right] = -\frac{3}{2}$$

Preverimo

$$s-2=0$$

$$s=2$$



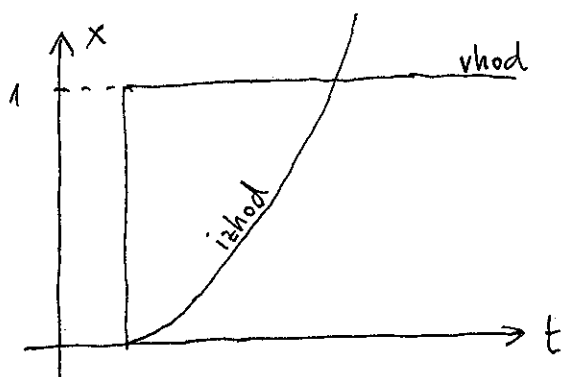
Izračun ni pravilen, ker je pol na realnem delu kompleksne ravnine.

Izreka ne moremo uporabiti.

• $x(t) = ?$

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{3}{s-2}$$

$$x(t) = \frac{3}{2} [e^{2t} - 1]$$



VAJA A-3

Rešite ($y(x) = ?$) nehomogeno diferencialno enačbo

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 4x + 8 \quad \text{z začetnima pogojevma } y(0) = 6 \text{ in } y'(0) = 0$$

a) na klasičen način

b) z uporabo Laplaceove transformacije

$$a) \quad y'' + 3y' + 2y = 4x + 8$$

• homogeni del

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

uporaba nastavka $y = e^{\lambda x}$; odvajamo in dobimo

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{ter} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

dalje

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

• partikularni del

$$y_p = Ax + B$$

$$y_p' = A, \quad y_p'' = 0$$

Vstavimo v D.E.

$$3A + 2Ax + 2B = 4x + 8$$

$$2A = 4 \rightarrow A = 2, \quad 3A + 2B = 8 \rightarrow 2B = 2 \rightarrow B = 1$$

$$y_p = 2x + 1$$

$$y = y_h + y_p$$
$$= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 2x + 1$$

$$y' = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} + 2$$

$$y'(0) = 0 \quad y(0) = 6$$

$$-C_1 - 2C_2 + 2 = 0$$

$$C_1 + C_2 + 1 = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 5 \\ -C_1 - 2C_2 = -2 \end{array} \right\} \oplus$$

$$-C_2 = 3 \rightarrow C_2 = -3$$

$$C_1 = 5 + 3 \rightarrow C_1 = 8$$

$$\boxed{y(x) = 8e^{-x} - 3e^{-2x} + 2x + 1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 4x + 8$$

b) uporaba \mathcal{L} transformacije

$$s^2 Y(s) - 6s + 3s Y(s) - 3 \cdot 6 + 2Y(s) = \frac{4}{s^2} + \frac{8}{s}$$

$$Y(s)(s^2 - 3s + 2) - 6s - 18 = (4/s^2) + (8/s)$$

$$Y(s) = \frac{6s^3 + 18s^2 + 8s + 4}{(s^2 + 3s + 2) \cdot s^2} \quad / \mathcal{L}^{-1}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{Cs + D}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{A(s+2)s^2 + B(s+1)s^2 + Cs^3 + 3Cs^2}{(s^2 + 3s + 2)s^2} + \frac{Ds^2 + 3Ds + 2D}{(s^2 + 3s + 2)s^2}$$

$$Y(s) = \frac{6s^3 + 18s^2 + 8s + 4}{(s^2 + 3s + 2)s^2}$$

$$\begin{array}{l} A+B+C=6 \quad 2A+B+3C+D=18 \\ 2C+3D=8 \quad 2D=4 \end{array}$$

$$\hookrightarrow D=2, C=1, A=8, B=-3$$

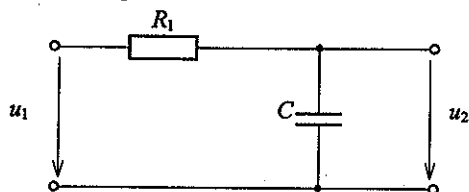
$$y(x) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{8}{s+1} + \frac{-3}{s+2} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} \right]$$

$$y(x) = 8e^{-x} - 3e^{-2x} + 1 + 2x$$

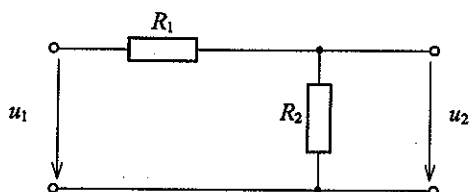
VAJA A-4

K četveropolom zapišite prenosno funkcijo $F(s) = u_2(s)/u_1(s)$ in skicirajte potek prehodne funkcije.

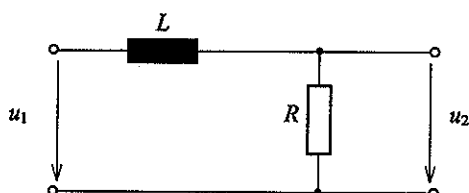
a) Na strani 2



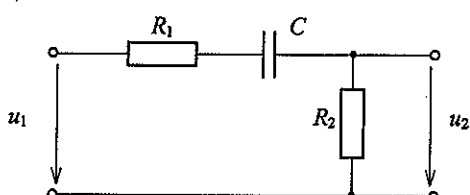
b) Na strani 3



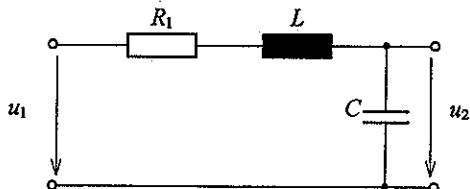
c) Na strani 3

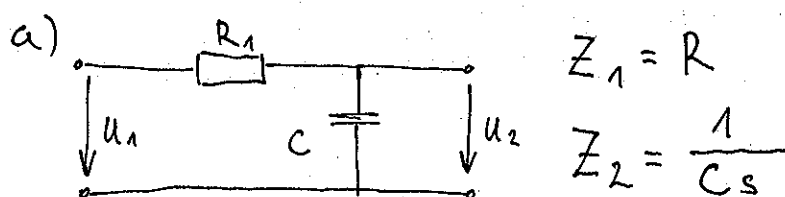


d) Na strani 4



e) Na strani 5





$$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(1/Cs)}{R + (1/Cs)}$$

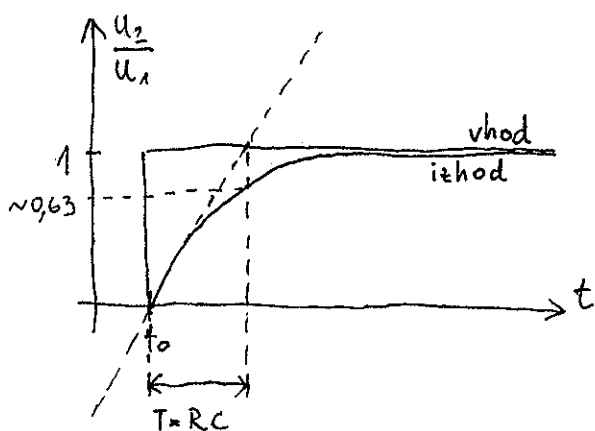
$$= \frac{1}{RCs + 1} = \boxed{\frac{1}{1 + sRC}}$$

To je sistem prvega reda.

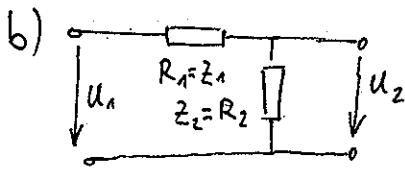
$$F_1(s) = \frac{k}{1 + sT}, \text{ kjer je } k \text{ atenuacija in } T \text{ časovna konstanta.}$$

V danem primeru je $k=1$ in $T=RC$.

Imamo člen prvega reda



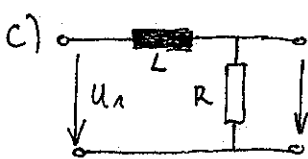
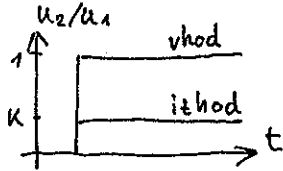
Za sisteme prvega reda velja, da zavzame izhodni signal v času ene časovne konstante 63% končne vrednosti.



$$F(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$K = R_2 / (R_1 + R_2)$$

to je proporcionalni člen



$$Z_1 = sL, \quad Z_2 = R$$

$$F(s) = \frac{R}{R + sL} \quad / \cdot R \quad / \cdot R$$

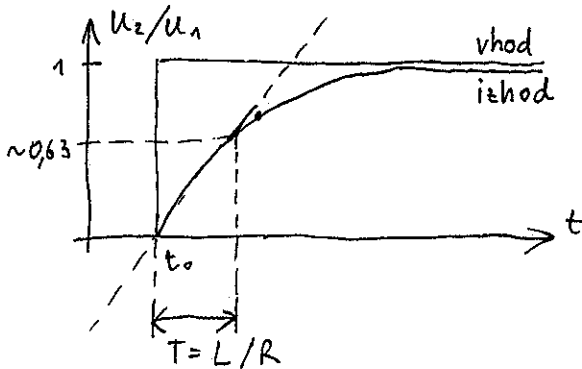
$$F(s) = \frac{1}{1 + sL/R}$$

To je člen prvega reda!

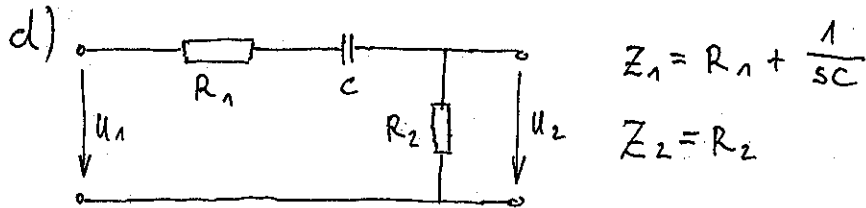
$$F_1(s) = \frac{K}{1 + sT}$$

V danem primeru velja

$$K = 1, \quad T = L/R$$



Podobno, kot v primeru a)



$$F(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{sC} + R_2} = \frac{sR_2C}{1 + s(R_1 + R_2) \cdot C}$$

Gre za realni diferencialni člen
s prenosno funkcijo

$$F_D(s) = \frac{sT_D}{1 + sT_D'}, \quad T_D' \text{ je parazitna časovna konstanta.}$$

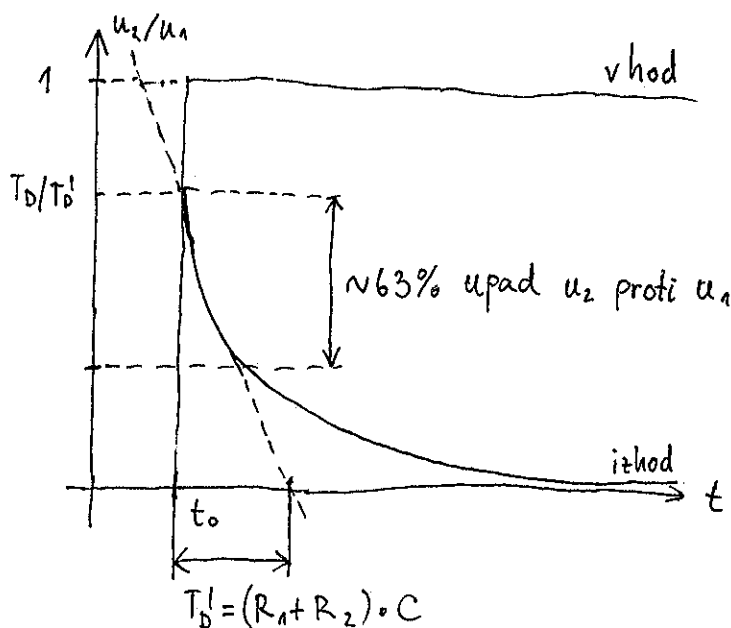
Idealni dif. člen:

$$F_D(s) = sT_D, \quad \text{kjer } T_D' = 0$$

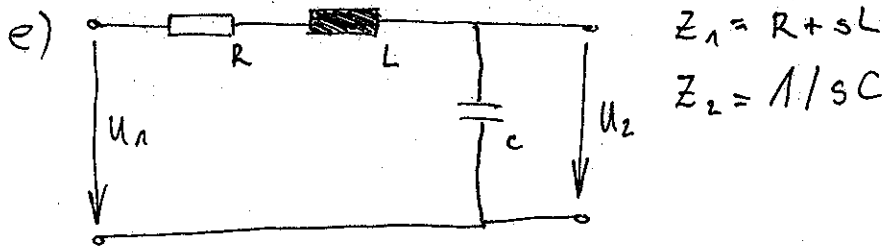
V danem primeru

$$T_D = R_2 \cdot C \quad \text{in} \quad T_D' = (R_1 + R_2) \cdot C$$

Blokovni simbol:



$$\frac{T_D}{T_D'} = \frac{R_2 \cdot C}{(R_1 + R_2) \cdot C}$$



$$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1/sC}{R + sL + (1/sC)} = \frac{1/sC}{s(R + sL)C + 1} = \frac{1}{s^2 RC + sLC + 1}$$

To pa je člen drugega reda.

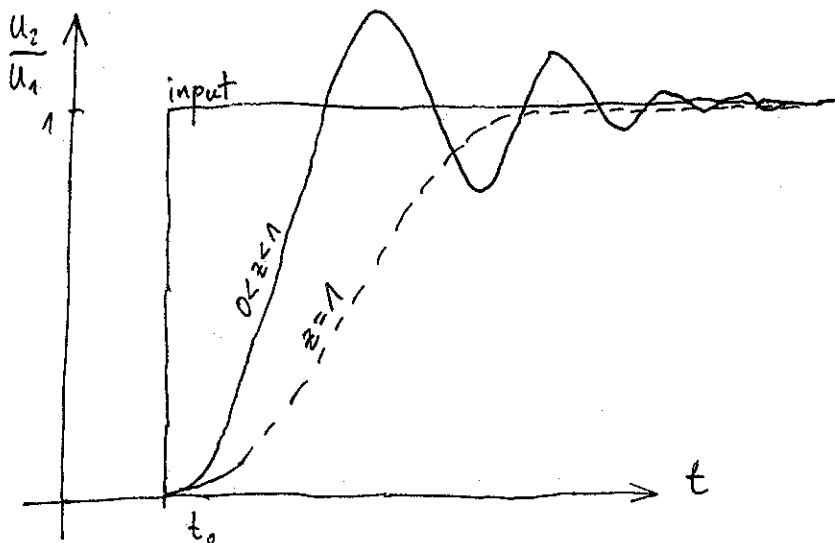
$$F(s) = \frac{K}{1 + 2zT + T^2 s^2}$$

V danem primeru:

$$K = 1, \quad 2zT = RC, \quad T^2 = L$$

Vkolikor:

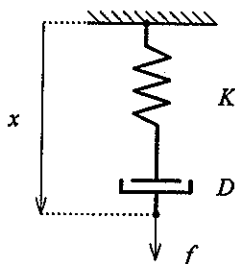
- $0 < z < 1$ dobimo prenikaj
- $z = 0$ nihanje je nedušeno
- $z = 1$ ni prenikanja



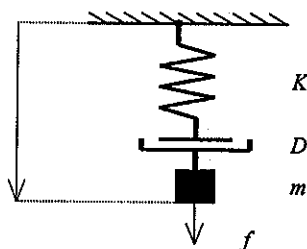
VAJA A-5

Zapišite prenosno funkcijo $F(s) = x(s)/f(s)$ za naslednje mehanske sisteme:

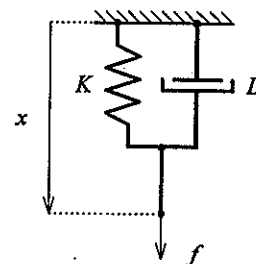
a)



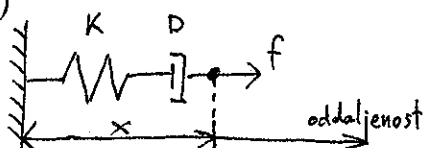
b)



c)



a)



$$\text{vzmet: } k \cdot x_k = f_k$$

$$\text{dušilka: } D \cdot \dot{x}_D = f_D$$

$$\text{sila } f = f_D = f_k$$

$$\text{raztezek } x = x_k + x_D$$

$$f = f_D = D \dot{x}_D = f_k = K x_k \quad / \mathcal{L}$$

$$f_k(s) = K \cdot x_k(s)$$

$$f_D(s) = D \cdot s \cdot x_D(s)$$

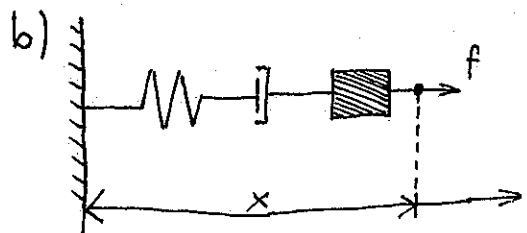
$$x(s) = x_k(s) + x_D(s) \quad f(s) = f_D(s) = f_k(s)$$

$$x(s) = \frac{f_k(s)}{K} + \frac{f_D(s)}{D \cdot s} = \frac{f(s)}{K} + \frac{f(s)}{D \cdot s} =$$

$$= f(s) \left[\frac{1}{K} + \frac{1}{D \cdot s} \right]$$

$$F(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \underbrace{\frac{1}{K}}_P + \underbrace{\frac{1}{D \cdot s}}_I$$

Imamo sistem, ki se obnaša kot PI člen.



$$F(s) = \frac{X(s)}{f(s)}$$

$$f_D = D \cdot \dot{x}_D \quad / \mathcal{L}$$

$$f_K = K \cdot x_K \quad / \mathcal{L}$$

$$f_D = D \cdot s \cdot X_D(s)$$

$$f_K = K \cdot X_K(s)$$

$$f_D = f_K$$

$$X = X_K + X_D \quad / \mathcal{L}$$

$$m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$f - m \ddot{x} = f_D = f_K$$

$$f - m \ddot{x} = D \dot{x}_D = K \cdot x_K \quad / \mathcal{L}$$

$$f(s) - m s^2 X(s) = D s X_D(s) = K \cdot X_K(s)$$

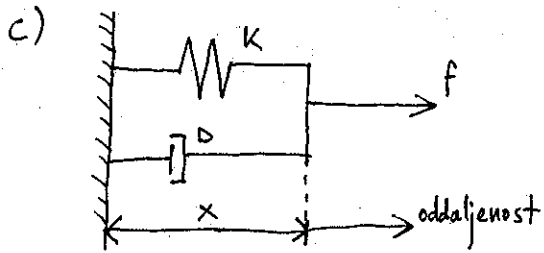
$$X(s) = \frac{f(s) - m \cdot s^2 X(s)}{K} + \frac{f(s) - m s^2 X(s)}{D \cdot s}$$

$$X(s) \left[1 + \frac{m s^2}{K} + \frac{m s}{D} \right] = f(s) \left[\frac{1}{K} + \frac{1}{D \cdot s} \right]$$

$$F(s) = \frac{X(s)}{f(s)} = \frac{\frac{1}{K} + \frac{1}{D \cdot s}}{1 + \frac{m}{D} \cdot s + \frac{m}{K} \cdot s^2} =$$

$$= \frac{D \cdot s + K}{K \cdot D \cdot s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m}{D} \cdot s + \frac{m}{K} \cdot s^2}$$

$$F(s) = \frac{K + D s}{\left[1 + \frac{m}{D} \cdot s + \frac{m}{K} \cdot s^2 \right] K \cdot D \cdot s}$$



$$f_D = D \cdot \dot{x}_D$$

$$f_K = K \cdot x_K$$

$$x = x_D = x_K$$

$$f = f_D + f_K$$

$$f = K \cdot x_K + D \cdot \dot{x}_D \quad / \mathcal{L}$$

$$f(s) = K \cdot x(s) + D \cdot s \cdot x(s)$$

$$f(s) = x(s) [K + Ds]$$

$$F(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \frac{1}{K + Ds} = \boxed{\frac{\frac{1}{K}}{1 + s \cdot \frac{D}{K}}}$$

Tak zapis je pomemben, da razberemo s čim imamo opravka.

Gre za člen prvega reda s prenosno funkcijo

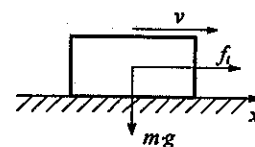
$$F_1 = \frac{K_1}{1 + sT_1}$$

V našem primeru velja

$$K_1 = \frac{1}{K} \quad \text{ter} \quad T_1 = \frac{D}{K}$$

VAJA A-6

Vozilo z maso $m = 10 \text{ kg}$ se premočrtno giblje po ravni površini ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$). Pogonski sistem vozila je sposoben hipoma zagotoviti želeno vrednost vlečne sile f_t , neodvisno od trenutne hitrosti v . Koeficient trenja se spreminja po enačbi $k_f = k_o \cdot v$, kjer je $k_o = 10 \text{ s/m}$, lepenje zanemarimo. Zapišite prenosno funkcijo $F_v(s) = v(s)/f_t(s)$.



$$f_t - f_f = m \cdot a$$

$$f_f = k_f \cdot m \cdot g = k_o \cdot v \cdot m \cdot g$$

$$f_t - k_o \cdot m \cdot g \cdot v = m \cdot a$$

$$f_t - k_o \cdot m \cdot g \cdot v = m \cdot \dot{v} \quad / \int$$

$$f_t(s) - k_o \cdot m \cdot g \cdot v(s) = m \cdot s \cdot v(s)$$

$$f_t(s) = v(s) [m \cdot s + k_o \cdot m \cdot g]$$

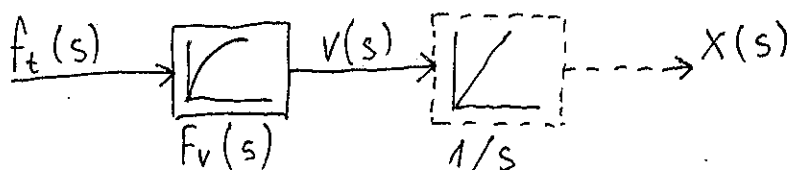
$$F_v(s) = \frac{v(s)}{f_t(s)} = \frac{1}{m \cdot s + k_o \cdot m \cdot g} \quad / : k_o \cdot m \cdot g$$

$$F_v(s) = \frac{1}{k_o \cdot m \cdot g} \frac{1}{1 + s \left(\frac{1}{k_o \cdot g} \right)}$$

To pa je člen I. reda

$$F_1(s) = \frac{k_1}{1 + s T_1}$$

V našem primeru $k_1 = 1/k_o \cdot m \cdot g$ in $T_1 = 1/k_o \cdot g$



Ime in priimek:

Blaž Potočnik

Datum:

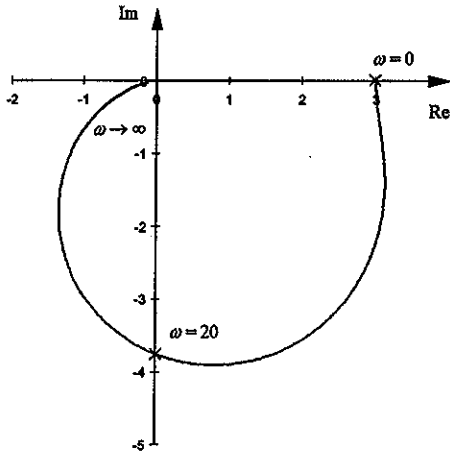
Stran:

1/1

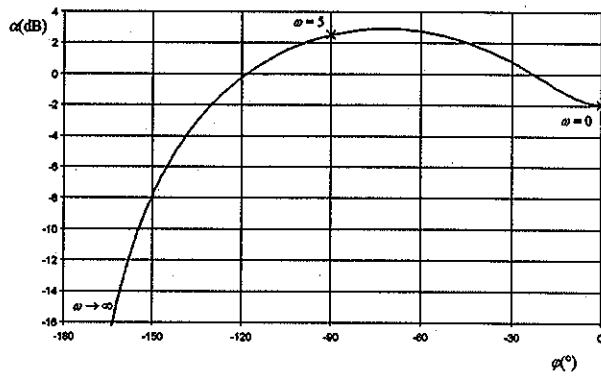
VAJA A-7

Iz podane frekvenčne karakteristike ugotovite pripadajočo prenosno funkcijo $F(s)$.

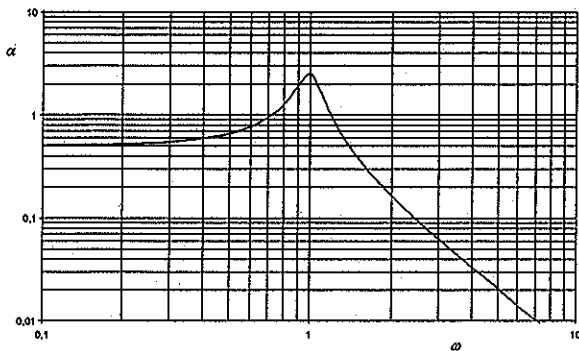
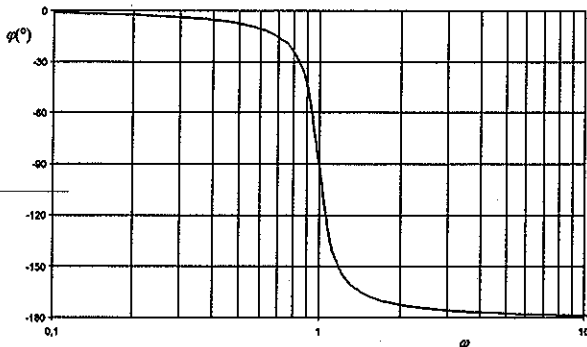
a)



b)



c)



Ime in priimek:

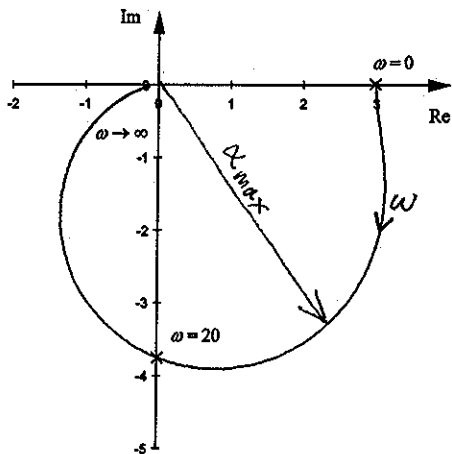
Blaž Potočnik

Datum:

Stran:

1/4

a)



$$\bullet \varphi(\omega \rightarrow \infty) = -180$$

Iz tega razberemo red sistema.

To je sistem II. reda ($2 \cdot 90 - 180 = 0$)

$$\bullet \varphi(\omega=0) = 0$$

Razberemo ojačanje ($\alpha(\omega=0) = 3$)

Ugotovimo, da gre za člen II. reda s funkcijo

$$F(s) = \frac{K}{1 + 2zTs + T^2s^2}$$

Iščemo $K, T, z!$

$$\bullet K = \alpha(\omega=0) = 3$$

$\bullet T = \frac{1}{\omega_0}$, kjer je $\omega_0 = \omega(\varphi = -90^\circ)$. To velja le za člen II. reda. Sledi $\omega_0 = 20$

$$T = 1/20 = 0,05$$

$\bullet \alpha_{max}$ pri ω_r . Približno $\alpha_{max} = 4,1$

\bullet Resonančni faktor $Q_r = \frac{\alpha_{max}}{K} = 1,367$

\bullet Izračun faktorja dušenja preko relacije

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{Q_r^2}}}{2}, \text{ sledi } z_1 \doteq 0,4 \text{ in } z_2 \doteq 0,9$$

Lahko razberemo tudi iz slike (knjiga, str. 55, sl. 2.14)

Ugotovimo, kateri je pravi

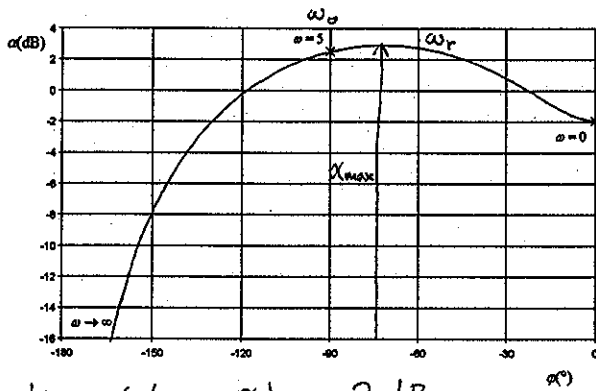
- $z < \sqrt{2}/2$ dobimo resonanco v frekvenčni karakteristiki
- $z > \sqrt{2}/2$ dušenja ni več

Pravi odgovor je $z \doteq 0,4$. Vemo, da dušenje imamo,

saj $\alpha(\omega=0) < \alpha_{max}$.

$$F(s) = \frac{3}{1 + 0,04s + 0,05s^2}$$

b)



$\varphi(\omega \rightarrow \infty) = -180^\circ$ (graf bi lahko podaljšali)
 $\varphi(\omega = 0) = 0^\circ$
 To je II. red.
 $\varphi(\omega = 0) = 0^\circ$
 $\alpha(\omega = 0) = -2 \text{ dB}$

$K = \alpha(\omega = 0) = -2 \text{ dB}$

$K = 10^{\frac{\alpha(\omega=0)[\text{dB}]}{20}} = 0,8$

$T = 1/\omega_0$, kjer $\omega_0 = \omega(\varphi = -90^\circ)$ To velja samo za II. red.
 $\omega_0 = 5 \rightarrow T = 0,2$

α_{max} odčitamo, $\alpha_{\text{max}} \hat{=} 2,9 \text{ dB}$
 $\alpha_{\text{max}} = 10^{\frac{\alpha_{\text{max}}[\text{dB}]}{20}} = 1,39$

$Q_r = \frac{\alpha_{\text{max}}}{K} = 1,75$

Izrazita resonanca $Q_r > 1$. To se vidi tudi iz grafa (amplitudno razmerje $\alpha(\omega=0)$ in α_{max})

vstavimo v

$$z = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - Q_r^{-2}}}{2}} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 0,31 \\ z_2 = 0,95 \end{cases}$$

Preverimo tudi na monogramu str. 55/sl. 2.14
 Torej $z = 0,3 < \sqrt{2}/2$, resonanco imamo.
 $K = 0,8 \quad T = 0,2 \quad z = 0,3$

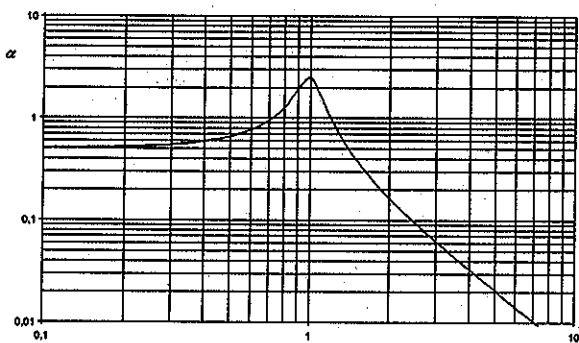
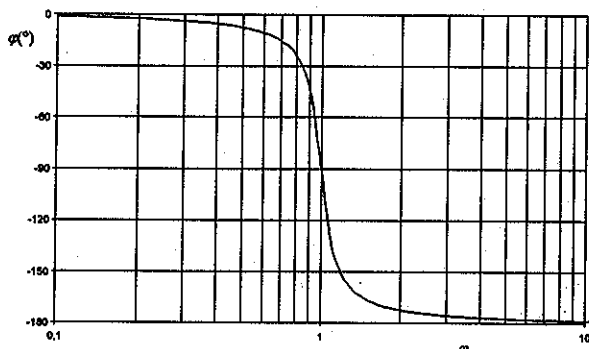
$$F(s) = \frac{0,8}{1 + 0,12s + 0,04s^2}$$

$$\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2z^2}$$

S pomočjo tega diagrama in enačbe lahko iz podatkov res. ~~iz~~ pojava Q_r in ω_r izračunamo parametra z in T člena II. reda. Vrednost faktorja stat. ojač. K pa v točki $\omega = 0$.



c)



$$\varphi(\omega \rightarrow \infty) = -180^\circ$$

To je II. red.

$$\varphi(\omega = 0) = 0^\circ$$

$$\alpha(\omega = 0) = 0,5$$

$$\bullet k = \alpha(\omega = 0) = 0,5$$

$$\bullet T = 1/\omega_0$$

$$\omega_0 = \omega(\varphi = -90^\circ) = 1$$

$$T = 1$$

$$\bullet z : \alpha_{\max} = 2,5$$

$$\bullet Q_r = \alpha_{\max} / k = 2,5 / 0,5 = 5$$

Izrazita resonanca, $z < \sqrt{2}/2$

$$z = \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{Q_r^2}}}}{2}$$

$$z_1 = 0,1$$

$$z_2 = 0,99$$

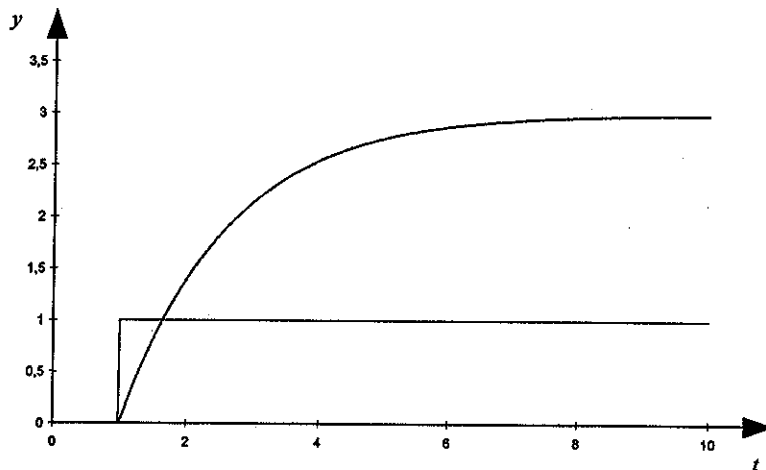
$$z = 0,1$$

$$F(s) = \frac{0,5}{1 + 0,2s + s^2}$$

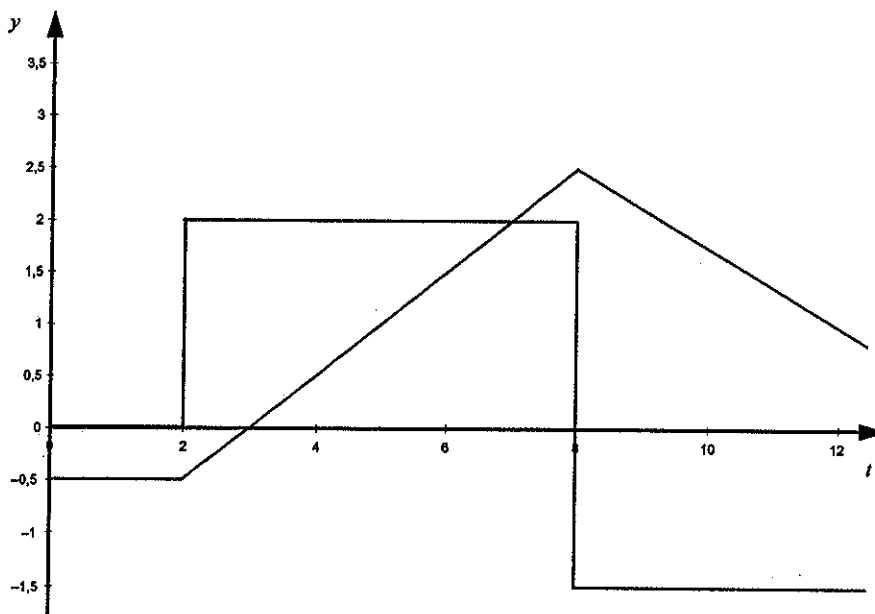
VAJA A-8

Iz podane prehodne funkcije ugotovite pripadajočo prenosno funkcijo $F(s)$.

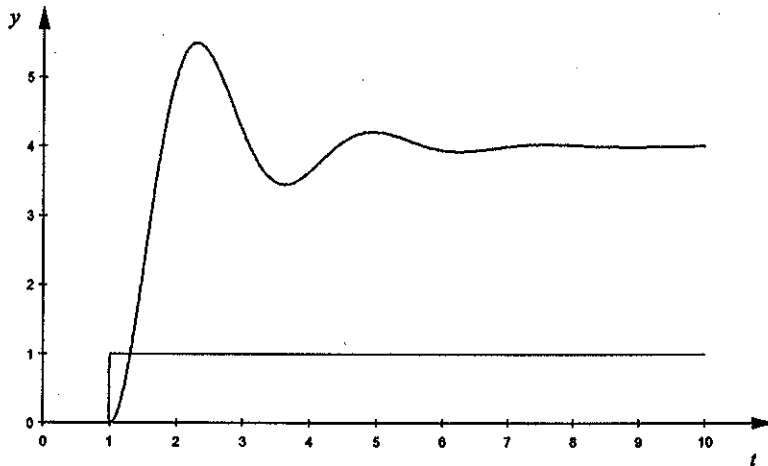
a) stran 3



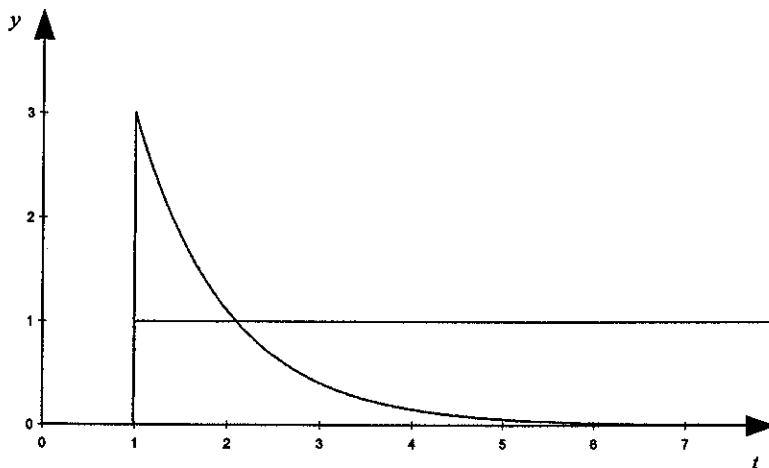
b) stran 4

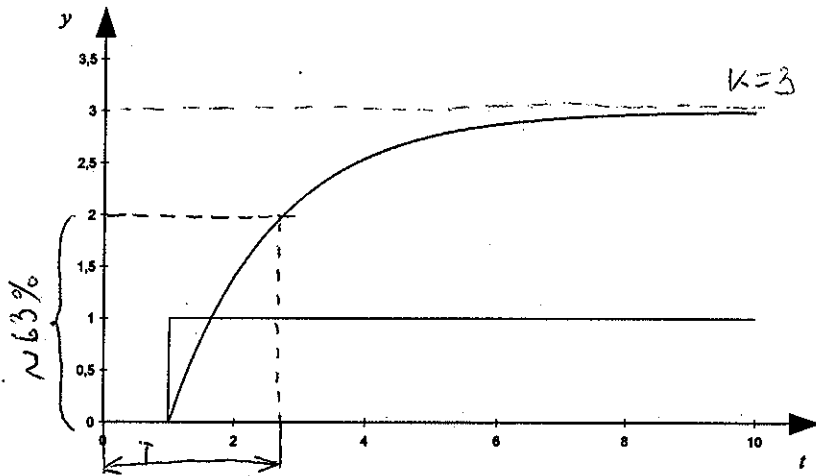


c) stran 5



d) stran 6





- Faktor statičnega ojačanja K

$$K = \frac{X_{\text{izhod}}}{X_{\text{vhod}}} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 3$$

- časovna konstanta - čas, v katerem izhodna veličina doseže 63,3% končne vrednosti.

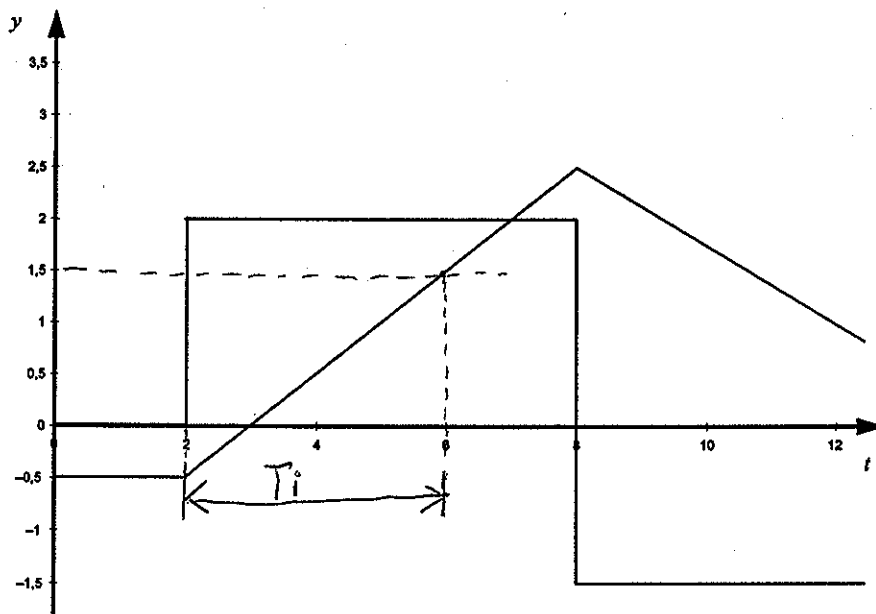
$$T \doteq 2,5$$

- člen prvega reda

$$F_1(s) = \frac{K}{1+sT}$$

- Rešitev

$$F_1(s) = \frac{3}{1+2,5s}$$



- Odziv integratorja na stopnico

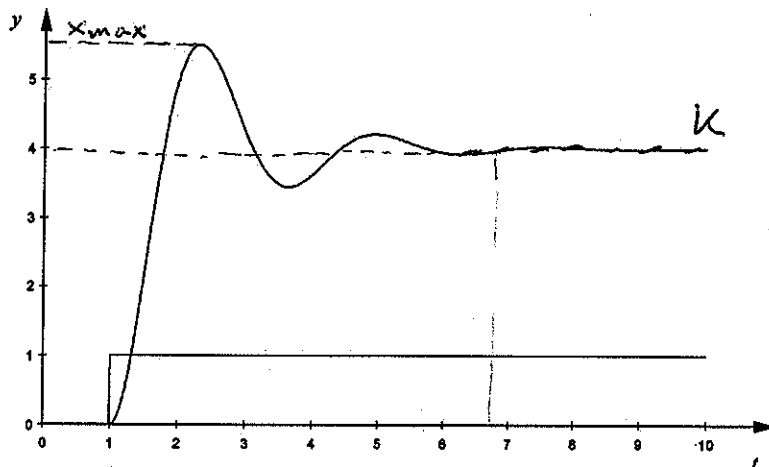
$$F_i(s) = \frac{1}{sT_i}$$

- Časovna konstanta - čas v katerem integrator doseže vrednost na vhodu (če štarta iz 0).

$$T_i = 4$$

- Prenosna funkcija

$$F_i(s) = \frac{1}{s4}$$



• Drugi red

$$F_2(s) = \frac{k}{1 + s^2 zT + s^2 T^2}$$

• Ojačanje k

$$k = \frac{x_{out}}{x_{in}} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 4$$

$$A_{pr} = \frac{x_{max} - x(t=\infty)}{x(t=\infty)} = 0,04$$

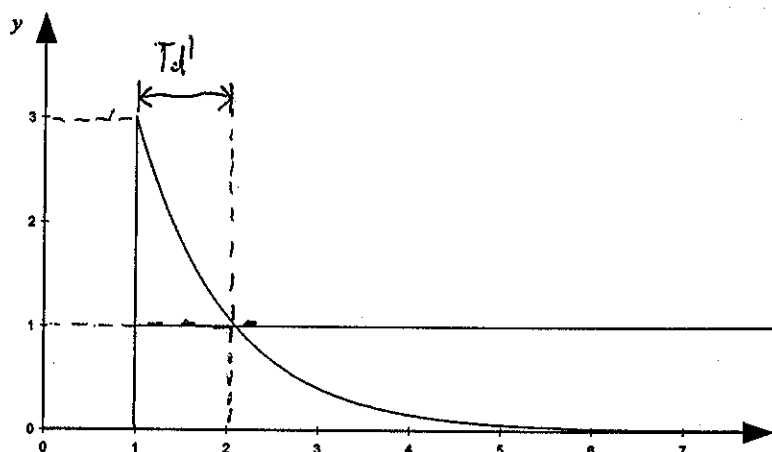
• Monogram v knjigi, stran 58, slika 2.18
Od tu odčitamo dušenje $z = 0,3$

• Časovna konstanta je odvisna od T_v . T_v odčitamo.

$$T_v = 2,6$$

$$T = \frac{T_v \sqrt{1 - z^2}}{2\pi} = 0,4$$

$$F_2(s) = \frac{4}{1 + s0,24 + s^2 0,16}$$



- Odziv realnega diferencialnega zlena na stopnico.

$$F_d(s) = \frac{sT_d}{1+sT_d}$$

- T_d' je čas, ko izhod pade za 63,3%

$$T_d' = 1$$

- Amplituda konice izhoda je definirana kot

$$\frac{T_d}{T_d'} \Rightarrow T_d = 3$$

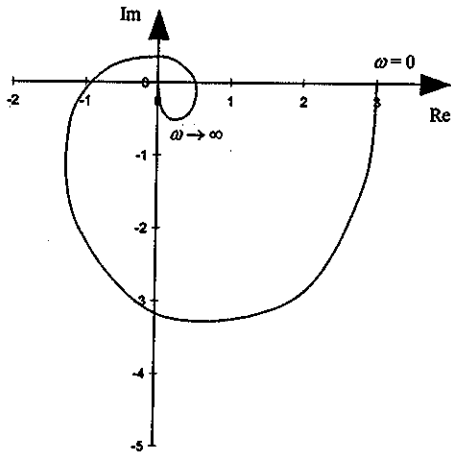
- Prenosna funkcija ima obliko

$$F_d(s) = \frac{s^3}{1+s}$$

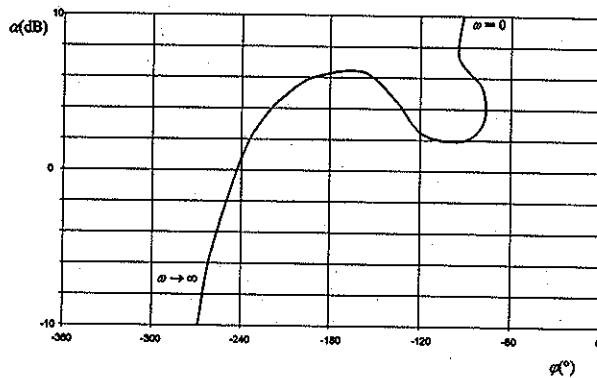
VAJA A-9

Ugotovite značilne podatke (statično ojačenje K , število integracij m , število diferenciacij k , red sistema $m + n - k$) za člene z naslednjimi karakteristikami:

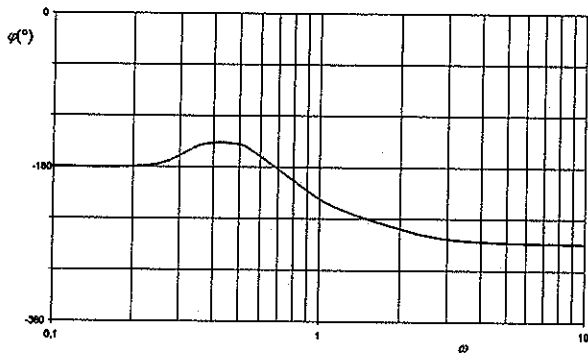
a) stran 2



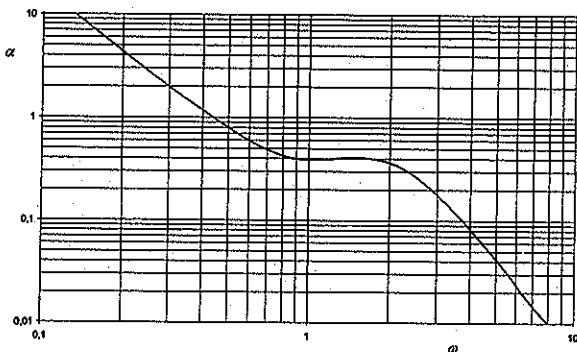
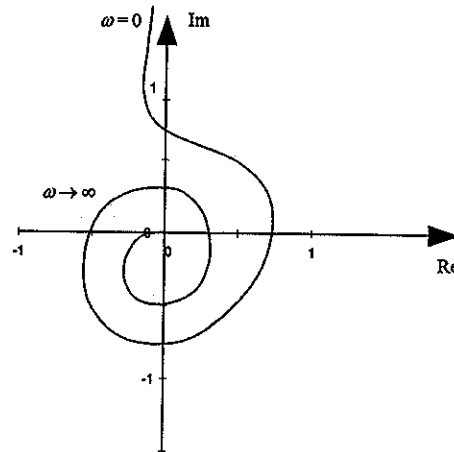
b) stran 3



c) stran 4



d) stran 5



Ime in priimek:

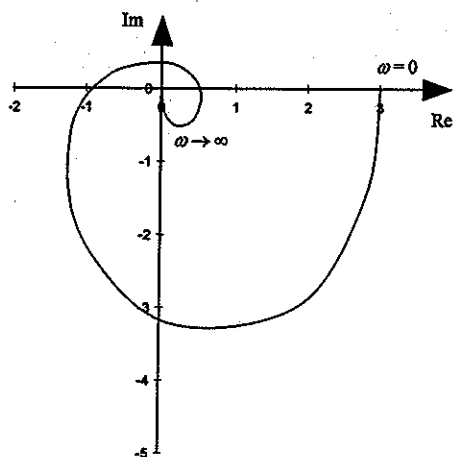
Blaž Potočnik

Datum:

Stran:

1/5

a)



• statično ojačanje
pri $\omega = 0$.

$$K = 3.$$

• Integracij ni, ker začnemo
pri 0° in lahko odčitamo
K.

$$m = 0$$

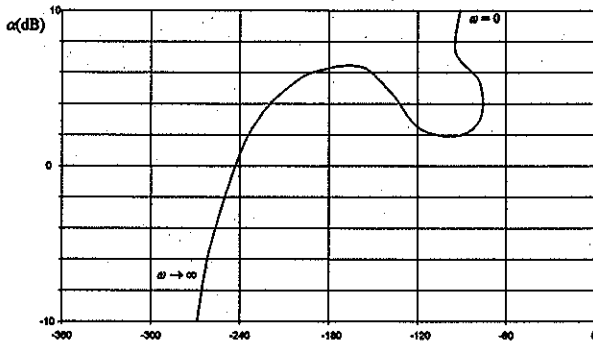
• ~~Diferenciacij~~ Diferenciacij ni, ker nikjer nimamo
pozitivnega faznega zasuka.

$$k = 0$$

• sistem je 5. reda, ker frekvenčna
karakteristika tangira na -450° ,
ko gre $\omega \rightarrow \infty$

$$m + n - k = 5$$

b)



- Ne moremo določiti statičnega sjačanja, ker je v sistemu integrator.

 $k = \checkmark$

- Karakteristika vsebuje eno integracijo, ker člen pri majhnih ω prihaja od neskončnosti pri -90° .

 $m = 1$

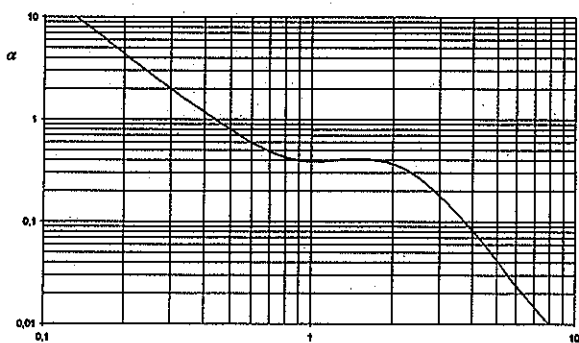
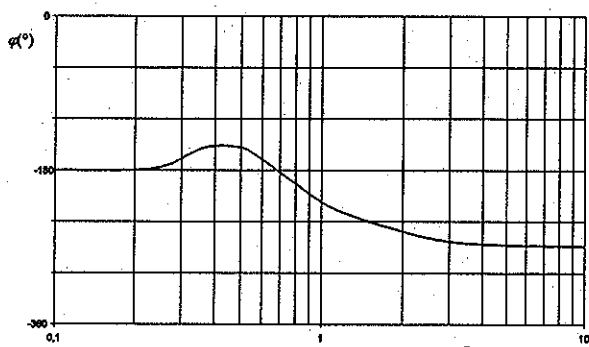
- Diferencialni člen obstaja, ker opazimo zmanjšanje faznega zaostanka, ko gremo k višjim frekvencam.

 $k > 0$

- Sistemu pripišemo III. red, ker karakteristika tangira $k - 270^\circ$, ko gre $\omega \rightarrow \infty$

$$m + n - k = 3$$

c)



- Nedoločljivo statično ojačanje K , ker imamo integrator.

$$K = \checkmark$$

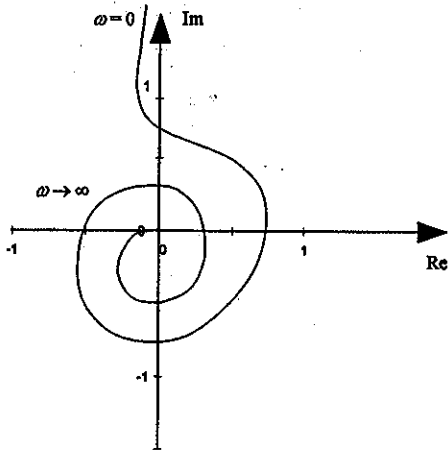
- Dve integraciji, ker člen pri majhnih ω prihaja od neskončnosti pri -180° .

$$M = 2$$

- Obstaja diferencialni člen, ker je opazno zmanjšanje faznega zaostanka pri višjih frekvencah.
- Sistem III. reda, ker frekvenčna karakteristika tangira na -270° , ko $\omega \rightarrow \infty$

$$m+n-k=3$$

d)



• Imamo integrator in statično ojačanje ni določljivo

$$k = /$$

• Tri integracije, ker člen pri majhnih ω prihaja (karakteristika prihaja) od neskončnosti pri -270° .

$$m = 3$$

• Dif. člen obstaja, ker je opazno zmanjšanje faznega zaostanka, ko gremo k višjim frekvencam.

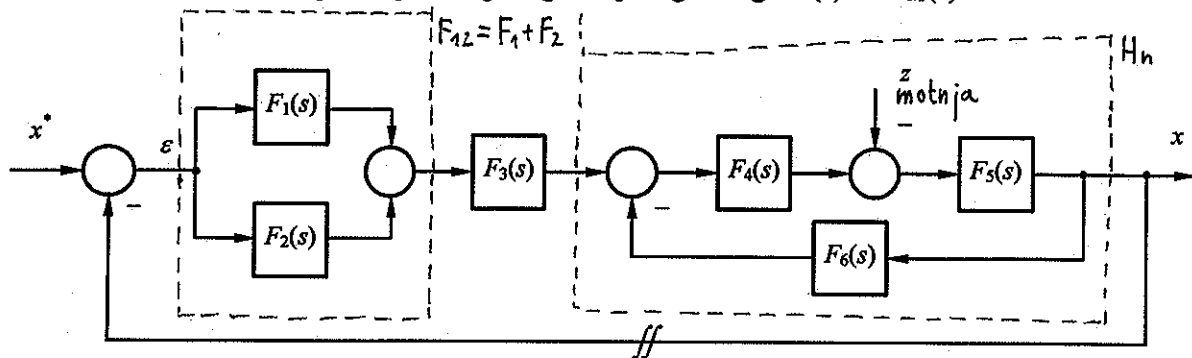
$$k > 0$$

• sistem je Σ . reda, ker frekvenčna karakteristika tangira na -90° , ko gre $\omega \rightarrow \infty$.

$$m + n - k = 10$$

VAJA A-10

Za podano blokovno shemo ugotovite prenosni funkciji odprtega regulacijskega kroga $F_o(s)$ in $F_M(s)$ ter prenosni funkciji zaključenega regulacijskega kroga $H(s)$ in $H_M(s)$!



$$\bullet H_n = \frac{F_4 \cdot F_5}{1 + F_{on}} \quad F_{on} = F_4 \cdot F_5 \cdot F_6$$

$$H_n = \frac{F_4 \cdot F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}$$

$$\bullet F_{12} = F_1 + F_2$$

$$\bullet \left\{ \left[(x^* - x) \cdot (F_1 + F_2) \cdot F_3 - x \cdot F_6 \right] \cdot F_4 - z \right\} \cdot F_5 = x$$

• sistem brez motnje s prekinjeno povratno zvezo

$$\left\{ \left[(x^* - \emptyset) \cdot (F_1 + F_2) \cdot F_3 - x \cdot F_6 \right] \cdot F_4 - \emptyset \right\} F_5 = x$$

↑
ni povratne
zveze

↑
to je povratna
zveza notranjega
dela H_n , katera
pa ni prekinjena

↑
ni motnje

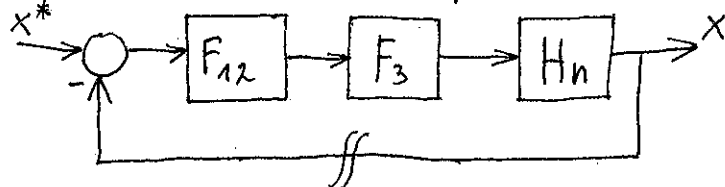
$$[X^*(F_1 + F_2) F_3 - X F_6] F_4 F_5 = X$$

$$X^* [F_1 F_3 F_4 F_5 + F_2 F_3 F_4 F_5] - X F_6 F_4 F_5 = X$$

Prenosna funkcija za prekinjeno povratno zvezo:

$$F_o(s) = \frac{X(s)}{X^*(s)} = \frac{F_1 F_3 F_4 F_5 + F_2 F_3 F_4 F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}$$

Enako dobimo po sledečem postopku:



$$F_o = F_{12} F_3 H_n$$

$$F_o = (F_1 + F_2) \cdot F_3 \cdot \frac{F_4 \cdot F_5}{1 + F_4 F_5 F_6} \quad \text{To pa je isto!}$$

- Sistem brez motnje s sklenjeno povratno zvezo:

$$H(s) = X(s) / X^*(s)$$

$$H(s) = \frac{F_o}{1 + F_o}$$

$$= \frac{(F_1 + F_2) F_3 F_4 F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}$$

$$\uparrow + \frac{(F_1 + F_2) F_3 F_4 F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}$$

$$H(s) = \frac{(F_1 + F_2) F_3 F_4 F_5}{1 + F_4 F_5 F_6 + (F_1 + F_2) F_3 F_4 F_5}$$

- Zapišimo še prenosni f-ji za sistem z motnjo. Na vходу ni signala ($x^* = 0$) in povratna vez je prekinjena.

$$\left[\left(\cancel{0 - 0} \right) \cancel{(F_1 + F_2) F_3} - x F_6 \right] F_4 - z \left] F_5 = x$$

$$-x F_6 F_4 F_5 - z F_5 = x$$

$$x (-F_4 F_5 F_6 - 1) = z F_5$$

$$F_M(s) = \frac{x}{z} = \frac{-F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}$$

- sklenjena pov. vez, motnja

$$H_M = \frac{F_M}{1 + F_0}$$

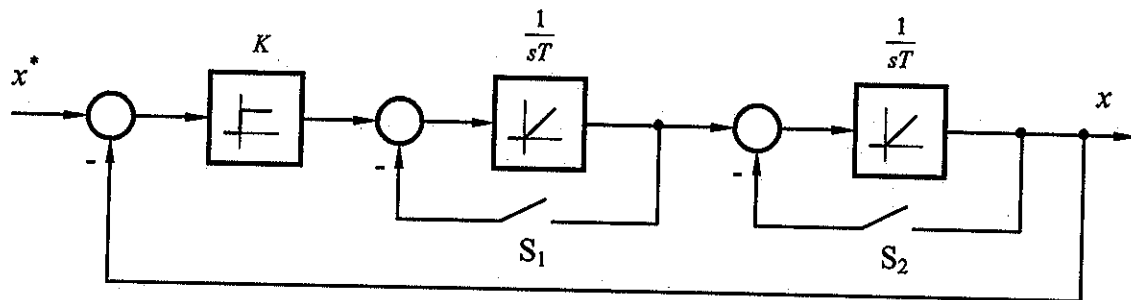
$$H_M = \frac{-F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}$$

$$1 + \frac{(F_1 + F_2) F_3 F_4 F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}$$

$$H_M = \frac{-F_5}{1 + F_4 F_5 F_6 + (F_1 + F_2) F_3 F_4 F_5}$$

VAJA A-11

Za podano blokovno shemo ugotovite statični pogrešek ε_s pri različnem številu integracij v regulacijskem krogu (0, 1, 2):



Upoštevajte naslednje vrednosti: $K = 1$, $K = 10$; $T = 1$

a) na skočno spremembo želene vrednosti (enotina stopnica),

b) za enakomerno naraščajočo spremembo želene vrednosti (enotina rampa).

a) ni integratorjev - stikali sta sklenjena

$$\varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot (1 - H(s)) X^*(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \left(\frac{1 + F_0}{1 + F_0} - \frac{F_0}{1 + F_0} \right) X(s) \right] =$$

$$\varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + F_0} \cdot X^* \right]$$

Statična napaka pri rodenih regulacijah z direktno povratno zvezo.

$$\bullet X^* = \frac{1}{s}$$

$$F_0 = K \cdot \frac{1}{1 + s \cdot 1} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot 1}$$

Integrator z direktno povratno zvezo je člen I. reda!

$$\varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + K \frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{1+s}} \cdot \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{1+K}$$

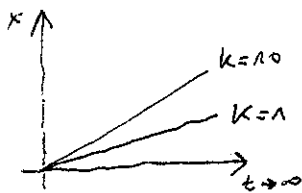
Sledi torej

$$\varepsilon_s = 50\%, \text{ kadar } K=1$$

$$\varepsilon_s = 9\%, \text{ kadar } K=10$$

$$\bullet X^* = \frac{1}{s^2}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1+2s+s^2}{1+2s+s^2+K} \cdot \frac{1}{s^2} \right] = \infty \quad \left| \begin{array}{l} K=1 \\ \text{ali} \\ K=10 \end{array} \right.$$



b) en integrator

$$\bullet X^* = \frac{1}{s}$$

$$F_0(s) = K \cdot \frac{1}{sT} \cdot \frac{1}{1+sT}$$

$$= K \cdot \frac{1}{(1+sT)sT} = \frac{K}{sT + s^2T^2}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + F_0(s)} \cdot X^* \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{sT + s^2T^2}} \cdot X^* \right]$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{sT + s^2T^2}{sT + s^2T^2 + K} \cdot X^* \right] =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{sT + s^2T^2}{sT + s^2T^2 + K} \cdot \frac{1}{s} \right] = \infty \quad \left| \begin{array}{l} K=1 \\ \text{ali} \\ K=10 \end{array} \right.$$

$$\bullet X^* = \frac{1}{s^2}$$

$$\xi_s = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{sT + s^2 T^2}{sT + s^2 T^2 + k} \cdot \frac{1}{s^2} \right] = \frac{1}{k}$$

$$\xi_s |_{k=1} = 100\% \quad , \quad \xi_s |_{k=10} = 10\%$$

c) dva integratorja

Predelamo v

$$X^* \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow X \quad H(s) = \frac{F_0(s)}{1 + F_0(s)}$$

$$F_0 = k \cdot \frac{1}{sT} \cdot \frac{1}{sT} = \frac{k}{s^2 T^2}$$

$$H(s) = \frac{\frac{k}{s^2 T^2}}{1 + \frac{k}{s^2}} = \frac{\frac{k}{s^2 T^2}}{\frac{T^2 s^2 + k}{s^2 T^2}} = \frac{k}{T^2 s^2 + k}$$

$$X = X^* \cdot H(s)$$

$$X = \frac{1}{s} \cdot \frac{k}{T^2 s^2 + k}$$

$$x(t) = \frac{1}{k} \left(1 - \cos(\sqrt{k} \cdot t) \right)$$

Frekvenca izhodnega signala je odvisna od ojačanja.

VAJA A-12

Za podano prenosno funkcijo odprtega regulacijskega kroga ugotovite z Routhovim kriterijem, ali je zaključen regulacijski krog stabilen.

$$F_o(s) = \frac{2(1+1,5s)}{s(1+0,1s)(1+2s+4s^2)}$$

• Karakteristična enačba

$$1 + F_o(s) = 0$$

$$1 + \frac{2(1+1,5s)}{s(1+0,1s)(1+2s+4s^2)} = 0$$

$$s(1+0,1s)(1+2s+4s^2) + 2(1+1,5s) = 0$$

$$0,4s^4 + 4,2s^3 + 2,1s^2 + 4s + 2 = 0$$

s^4	0,4	2,1	2
s^3	4,2	4	0
s^2	1,714	2	
s^1	-0,8866	0	
s^0	2		

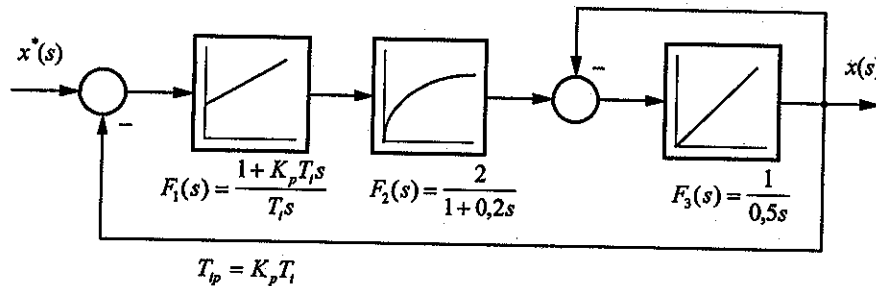
postopek (knjiga 149)

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4} ...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5} ...
s^{n-2}	w
\vdots			
\vdots	$w = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-2}) - (a_n \cdot a_{n-3})}{a_{n-1}}$		

Vsi elementi prvega stolpca NISO istega predznaka, zato ima enačba enega ali več Re^+ korenov. To pa pomeni, da sistem ni stabilen.

VAJA A-13

Za podano blokovno shemo izračunajte mejno stabilnostno krivuljo. Potem se prepričajte še, ali je regulacijski sistem stabilen za $K_p = 2$ in $T_i = 3$, in to po Routhovem stabilnostnem kriteriju!



- Integrator z negativno povratno zanko je člen prvega reda

$$F_3(s) = \frac{1}{1 + 0,5s}$$

- Karakteristična enačba

$$1 + F_0(s) = 0$$

$$1 + \frac{1 + K_p T_i s}{T_i s} \cdot \frac{2}{1 + 0,2s} \cdot \frac{1}{1 + 0,5s} = 0$$

$$T_i s (1 + 0,2s)(1 + 0,5s) + 2(1 + K_p T_i s) = 0$$

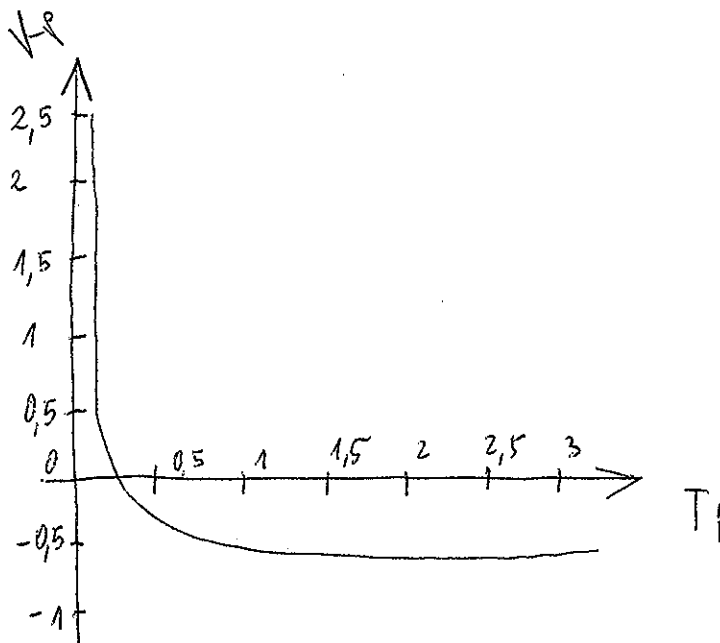
$$0,1 T_i s^3 + 0,7 T_i s^2 + [T_i + 2 K_p T_i] s + 2 = 0$$

• Za določitev mejne stabilnostne krivulje uporabimo Hurwitzov kriterij (knjiga 147)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,7 T_i & 2 \\ 0,1 T_i & T_i + 2K_p T_i \end{vmatrix} > 0$$

$$(0,7 + 1,4 K_p) T_i^2 - 0,2 T_i > 0$$

$$K_p > \frac{0,2 - 0,7 T_i}{1,4 T_i} = \text{}$$



Routhov kriterij:

Karakteristična enačba

$$0,3s^3 + 2,1s^2 + 15s + 2 = 0$$

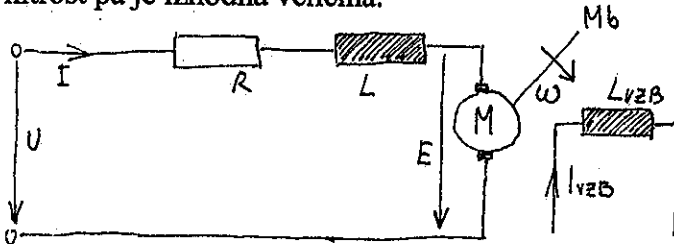
s^3	0,3	15
s^2	2,1	2
s^1	14,71	0
s^0	2	

Enačba nima korenov s pozitivnimi
realnimi deli.

Sistem je stabilen

VAJA A-14

Izpeljite prenosno funkcijo tujezbujanega enosmernega motorja in podajte pripadajočo blokovno shemo. Napajalna napetost je vhodna veličina, bremenski navor je motnja, vrtilna hitrost pa je izhodna veličina.



$$F(s) = \frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{n(s)}{U(s)}$$

$$F_M(s) = \frac{\omega(s)}{M_D(s)}$$

• Mehanika:

$$M - M_b - M_D = 0$$

$$M_D = J \frac{d\omega}{dt}$$

$M = k \cdot \phi \cdot I$, kjer ϕ konst. pri tujezbujanem motorju

Normiramo na kratkostično vrednost navora,

$$M_k = M_N \frac{I_k}{I_N}, \text{ kjer } I_k = \frac{U_N}{R}$$

$$\frac{M_D}{M_k} = \frac{J}{M_k} \frac{d\omega}{dt} = \frac{J\omega_0}{M_k} \frac{d(\omega/\omega_0)}{dt} = T_z \frac{d(\omega/\omega_0)}{dt} =$$

$$= T_z \frac{d(n/n_0)}{dt}$$

Ime in priimek:

Blaž Potočnik

Datum:

Stran:

1/5

T_z ... zagonska časovna konstanta
 n_0 ... hitrost prostega teka

$$\frac{1}{I_k} - \frac{M_b}{M_k} - T_z \frac{d(n/n_0)}{dt} = 0$$

To je linearizirana mehanska karakteristika motorja.

• Določitev delovne točke

$$I = I_0 + \Delta I \quad I_0 = 0$$

$$M_b = M_{b0} + \Delta M_b \quad M_{b0} = 0$$

$$n = n_0 + \Delta n \quad (\text{prosti tek})$$

$$\frac{1}{I_k} - \frac{M_b}{M_k} - T_z \frac{d(n/n_0)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\Delta I}{I_k} - \frac{\Delta M_b}{M_k} - T_z \frac{d(\Delta n/n_0)}{dt} = 0$$

$$\mathcal{L}: \frac{\Delta I}{I_k}(s) - \frac{\Delta M_b}{M_k}(s) = T_z \cdot s \cdot \frac{\Delta n}{n_0}(s)$$

• Električni del

$$U = IR + L \frac{dI}{dt} + E$$

$$\frac{U}{R} = I + \frac{L}{R} \frac{dI}{dt} + \frac{E}{R} \quad \text{normiramo na kratkostični tok}$$

$$I_k = \frac{U_N}{R}$$

$$\frac{U}{R \cdot I_k} = \frac{I}{I_k} + \frac{L}{R} \frac{d(I/I_k)}{dt} + \frac{E}{R \cdot I_k}$$

$$= \frac{I}{I_k} + T_k \frac{d(I/I_k)}{dt} + \frac{E}{R \cdot I_k}$$

$T_k = L/R$ je časovna konstanta kotve

$$\frac{U}{U_N} = \frac{I}{I_k} + T_k \frac{d(I/I_k)}{dt} + \frac{E}{U_N}$$

$$E = k_2 \cdot n \cdot \phi = k_3 \cdot n, \text{ ker } \phi = \text{konst.}$$

• Določitev delovne točke

$$U = U_n + \Delta U$$

$$E_0 = U_N$$

$$I = I_0 + \Delta I$$

$$I_0 = \phi$$

$$E = E_0 + \Delta E$$

(prosti tok)

$$\frac{U}{U_N} = \frac{I}{I_k} + T_k \frac{d(I/I_k)}{dt} + \frac{E}{U_N}$$

$$\frac{\Delta U}{U_N} = \frac{\Delta I}{I_k} + T_k \frac{d(\Delta I/I_k)}{dt} + \frac{\Delta n}{n_0}$$

$$\mathcal{L}: \frac{\Delta U}{U_N}(s) = \frac{\Delta I}{I_k}(s) + T_k \cdot s \cdot \frac{\Delta I}{I_k}(s) + \frac{\Delta n}{n_0}(s)$$

• Normiramo zapis

$$\frac{\Delta U}{U_n}(s) = u(s) \quad \frac{\Delta n}{n_0}(s) = n(s)$$

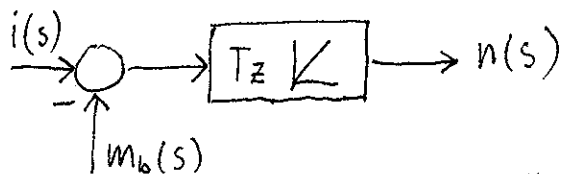
$$\frac{\Delta I}{I_k}(s) = i(s) \quad \frac{\Delta M_b}{M_k}(s) = m_b(s)$$

- Mehanika

$$\frac{\Delta I}{I_k}(s) - \frac{\Delta M_b}{M_k}(s) = T_z \cdot s \cdot \frac{\Delta n}{n_0}(s)$$

$$i(s) - m_b(s) = T_z \cdot s \cdot n(s)$$

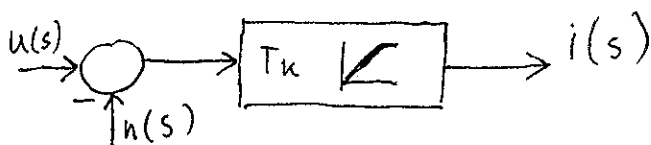
$$\boxed{\frac{n(s)}{i(s) - m_b(s)} = \frac{1}{s T_z}}$$



- Električni del

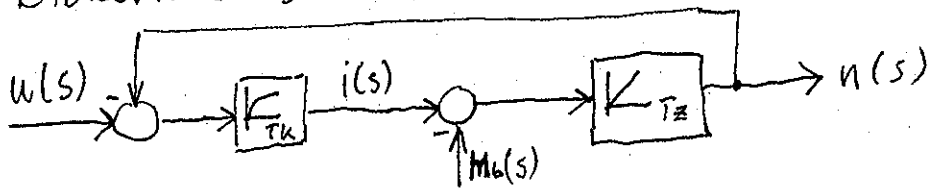
$$\frac{\Delta U}{U_n}(s) = \frac{\Delta I}{I_k}(s) + T_k \cdot s \cdot \frac{\Delta I}{I_k}(s) + \frac{\Delta n}{n_0}(s)$$

$$u(s) = i(s) + T_k s i(s) + n(s)$$



$$\boxed{\frac{i(s)}{u(s) - n(s)} = \frac{1}{1 + s T_k}}$$

• Blokovna shema



• Prenosni funkciji

$$F(s) = \frac{n(s)}{u(s)}$$

$$F_o(s) = \frac{1}{1+sT_k} \cdot \frac{1}{sT_z} \rightarrow$$

$$F(s) = \frac{1}{1+sT_z + s^2 T_z T_k}$$

$$F_m(s) = \frac{n(s)}{m_b(s)}$$

$$F_m(s) = - \frac{1+sT_k}{1+sT_z + s^2 T_z T_k}$$

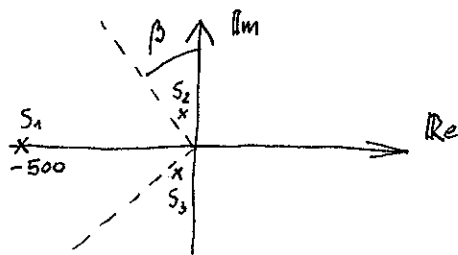
VAJA A-15

Nek regulacijski krog ima korene karakteristične enačbe:

$$s_1 = -500 \quad s_{2,3} = -0,35 \pm j109$$

Ugotovite absolutno dušenje d , relativno dušenje ρ , čas polperiode lastnega nihanja T_{pp} , relativni regulacijski čas τ , in regulacijski čas t_r .

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-at} + C_3 e^{-bt} \cdot \sin(ct + \varphi)$$



$$a = 500$$

$$b = 0,35$$

$$c = 109$$

- absolutno dušenje: $d = b$, $d = 0,35$
- čas polperiode T_{pp}

$$c = \omega$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi / T_{\text{periode}}$$

$$T_{pp} = T_{\text{periode}} / 2 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{109} = 0,02882$$

- regulacijski čas t_r

$$t_r = \pi \cdot T$$

$$T = 1/b$$

$$t_r = 8,976$$

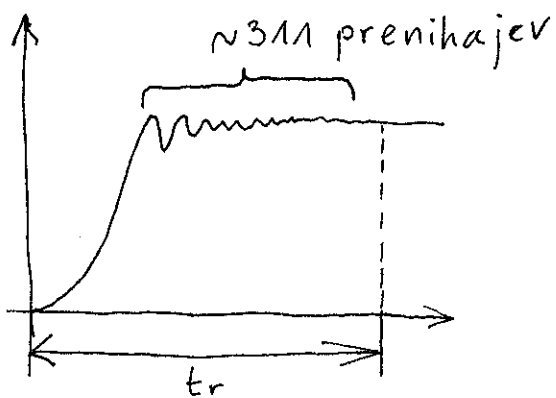
Vrednosti bližje Im osi prevladujejo.

- relativni regulacijski čas α_r
to je število polperiod v regulacijskem času t_r

$$\alpha_r = \frac{t_r}{T_{pp}} = 311,4$$

- relativno dušenje ρ

$$\rho = \frac{1}{\alpha_r} = 0,0032$$

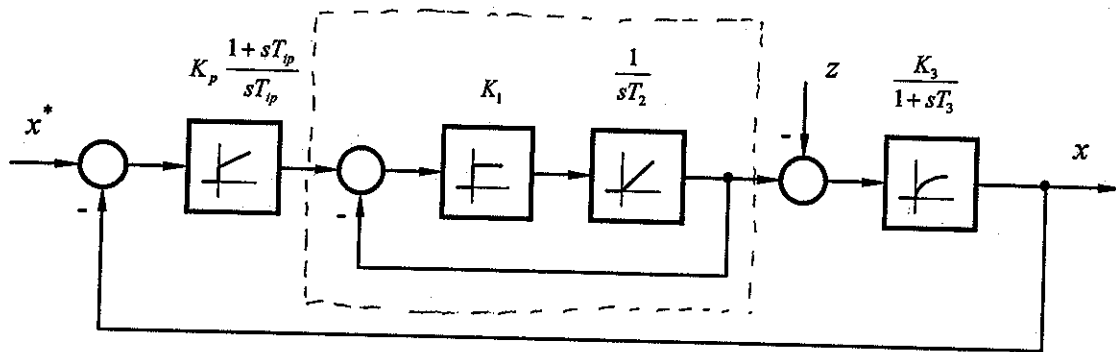


VAJA A-16

Za podano blokovno shemo regulacijskega kroga optimirajte konstanti PI-regulatorja:

- za vodeno regulacijo, (optimum iznosa)
- za regulacijo s konstantno želeno vrednostjo (simetrični optimum)
- za regulacijo s konstantno želeno vrednostjo z možnostjo skočne spremembe slednje (gladilni člen)

Dokažite doseženo stabilnost še z Routhovim kriterijem!



$$K_1=2 \quad T_2=0,03 \quad K_3=3 \quad T_3=2$$

• Prenosna funkcija reguliranca.

Poenostavitev - integrator + proporcionalni člen →
→ člen I. reda.

$$F = \frac{1}{1 + s(t_2/K_1)}$$

• Regulator PI:

$$F_R = K_p \frac{1 + sT_{sp}}{sT_{sp}}$$

a) Optimum iznosa za vodeno regulacijo

$$F_s = \frac{1}{1+s(T_2/K_1)} \cdot \frac{K_3}{1+sT_3}$$

$$F_s = \frac{1}{1+s\frac{0,03}{2}} \cdot \frac{3}{1+s2}$$

Določimo konstante regulatorja. Glej v skripti, stran 106, enačba 7.5.

$$K_P = \frac{T_1}{2K_s T_P}$$

$$T_i = T_1$$

$$K_P = \frac{T_1}{2K_s T_P} = \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 0,015} = 22,2$$

$$T_i = T_1 = 2$$

$$F_R = K_P \frac{1+sT_{ip}}{sT_{ip}} = 22,2 \frac{1+2s}{2s}$$

$$F_o = F_s \cdot F_R = 22,2 \cdot \frac{1+2s}{2s} \cdot \frac{1}{1+0,015s} \cdot \frac{3}{1+2s}$$

$$F_o = 22,2 \cdot \frac{1}{2s} \cdot \frac{1}{1+0,015s} \cdot \frac{3}{1} = \frac{33,3}{s(1+0,015s)}$$

Stabilnost preverimo po Routhovem kriteriju.

$$1 + F_0 = 0$$

$$\frac{33,3}{s(1+0,015s)} + 1 = 0$$

$$33,3 + s(1+0,015s) = 0$$

$$0,015s^2 + s + 33,3 = 0$$

s^2	0,015	33,3
s^1	1	0
s^0	33,3	

Vsi predznaki v prvem stolpcu so enaki,
torej je sistem stabilen.

b) konstantna željena vrednost
(simetrični optimum)

$$F_s = \frac{1}{1+s0,015} \cdot \frac{3}{1+s2}$$

Enačbe iz skripte (str. 106, en. 7.5)

$$K_p = \frac{T_n}{2K_s T_p} = \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 0,015} = 22,2$$

$$T_i = 4 T_p = 0,06$$

$$F_R = K_p \cdot \frac{1+sT_{ip}}{sT_{ip}} = 22,2 \cdot \frac{1+s0,06}{s0,06}$$

$$F_0 = F_s \cdot F_R = 22,2 \cdot \frac{1+s0,06}{s0,06} \cdot \frac{1}{1+s0,015} \cdot \frac{3}{1+s2}$$

Routhov kriterij

$$1+F_0 = 0$$

$$22 \frac{1+s0,06}{s0,06} \cdot \frac{1}{1+s0,015} \cdot \frac{3}{1+s2} + 1 = 0$$

$$\frac{1110(1+s0,06)}{s(1+s0,015)(1+s2)} = -1$$

$$0,03s^3 + 2,015s^2 + 67,6s + 1110 = 0$$

s^3	0,03	67,6	0
s^2	2,015	1110	0
s^1	51	0	
s^0	1110		

System je stabilen.

c) Regulacija s konstantno željeno vrednostjo z gladilnim členom

Vhod je stopnica in odpraviti želimo vpliv motenj.

Pred reg. krog se doda gladilni člen. Torej člen I. reda. Ojačanje mora imeti 1, časovno konstanto določimo s pomočjo slike 7.14 na strani 113 (skripta)

$$\frac{T_1}{4T_p} = \frac{2}{4 \cdot 0,015} = 33,3$$

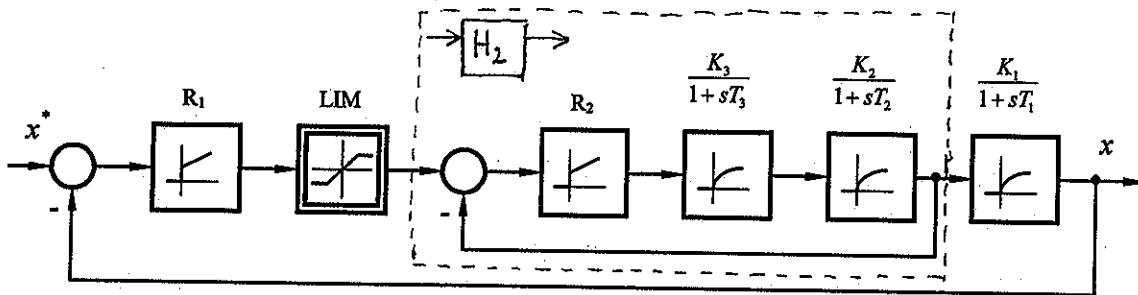
Razmerje je veliko, s slike razberemo, da je časovna konstanta 4x kratka časovna konstanta.

$$T_{gl} = 4 \cdot T_p = 0,06$$

Za regulator velja enako, kot pod točko b). Če je stabilen ~~stabilen~~ sistem brez gladilnega člena, je stabilen tudi tak z gladilnim členom.

VAJA A-17 (skripta, str. 106)

Za podano blokovno shemo kaskadne regulacije optimirajte konstante regulatorjev R_1 in R_2 .
Dokažite doseženo stabilnost še z Routhovim kriterijem!



$$K_1 = 1, T_1 = 3, K_2 = 1, T_2 = 0,5, K_3 = 1, T_3 = 0,08$$

• najprej optimiramo notranji regulator R_2

$F_{R2} = K_{p2} \frac{1 + sT_{ip2}}{sT_{ip2}}$ Iščemo K_{p2} in T_{ip2} ob znanem notranjem reguliranju.

$$F_{s2} = \frac{K_3}{1 + sT_3} \cdot \frac{K_2}{1 + sT_2}$$

Računamo po optimumu iznosa. Teorija:

$$K_p = \frac{T_1}{2K_s T_p} \rightarrow \text{dolga časovna konstanta}$$

\rightarrow ojačanje reguliranca

$$T_{ip} = T_1$$

Dobimo:

$$K_{p2} = 3,125 \quad T_{ip2} = 0,5$$

$$F_{R2} = 3,125 \cdot \frac{1 + 0,5s}{0,5s}$$

Ime in priimek:

Datum:

Stran:

Blaž Potočnik

1/4

$$F_{02} = F_{R2} \cdot F_{S2} = 3,125 \cdot \frac{1+0,5s}{0,5s} \cdot \frac{1}{1+0,08s} \cdot \frac{1}{1+0,5s}$$

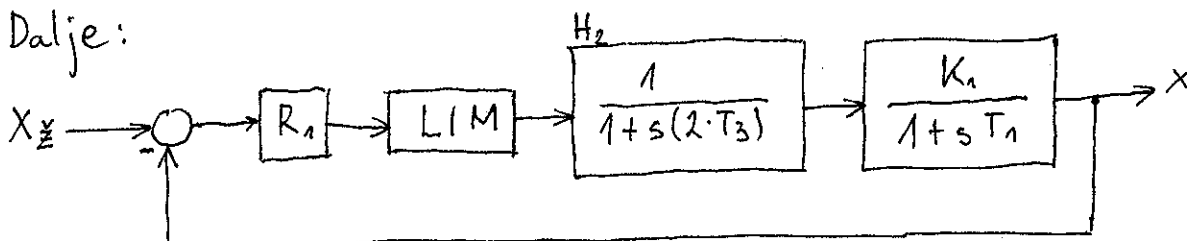
$$F_{02} = \frac{6,25}{s(1+0,08s)}$$

$$H_2 = \frac{F_{02}}{1+F_{02}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{to lahko naredimo, ker je} \\ \text{povratna zanka direktna} \end{array} \right.$$

$$H_2 \doteq \frac{1}{1+s(2T_{kratka})} = \frac{1}{1+0,08 \cdot s \cdot 2} = \frac{1}{1+0,16s}$$

Dobili smo nadomestni blok za notranji reg. krog.

• Dalje:



Iščemo parametre za R_1

$$F_{R1} = K_P \frac{1 + sT_{ip1}}{sT_{ip1}}$$

$$F_{S1} = H_2 \cdot \frac{K_1}{1+sT_1} = \frac{1}{1+2sT_3} \cdot \frac{K_1}{1+sT_1}$$

$$K_{P1} = 9,375$$

$$T_{ip1} = 3$$

$$F_{R1} = 9,375 \cdot \frac{1+3s}{3s}$$

$$F_{O1} = F_{R1} \cdot H_2 \cdot \frac{K_1}{1+sT_1}$$

$$F_{O1} = 9,375 \cdot \frac{1+3s}{3s} \cdot \frac{1}{1+0,16s} \cdot \frac{1}{1+3s}$$

$$H_1 = \frac{F_{O1}}{1+F_{O1}} \quad | \quad \text{ker je zanka direktna}$$

$$H_1 = \frac{1}{1+4T_3} = \frac{1}{1+0,32s}$$



- preverimo po Routhovem kriteriju...
karakteristična enačba $1+F_{O1}=0$

$$H = \frac{F_2}{1+F_{O2}}$$

$$F_{O2} = F_{R2} \cdot F_2 \cdot F_3 = \frac{6,25}{s(1+0,08s)}$$

$$H = \frac{6,25}{s(1+0,08s)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{6,25}{s(1+0,08s)}}$$

$$H = \frac{6,25}{6,25 + s(1+0,08s)}$$

$$F_o = F_{R1} \cdot H \cdot F_1$$

$$F_o = 9,375 \frac{1+s^3}{s^3} \cdot \frac{6,25}{6,25+s(1+s0,08)} \cdot \frac{1}{1+s^3}$$

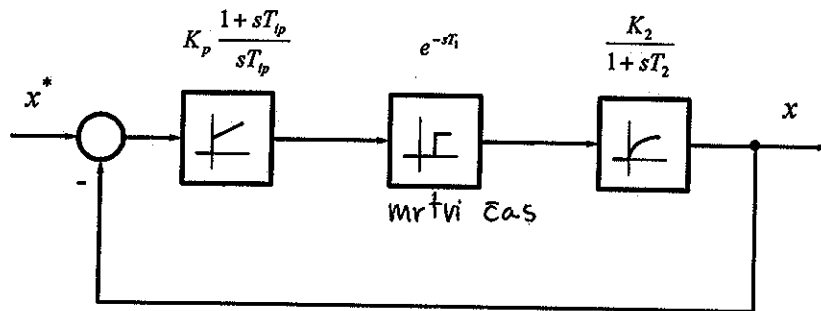
$$1 + F_o = 0$$

s^3	0,0128	1	0
s^2	0,16	3,125	0
s^1	0,75	0	
s^0	3,125		

Sistem je stabilen.

VAJA A-18

Podanemu regulacijskemu krogu optimirajte konstanti PI-regulatorja za vodeno regulacijo.



$$T_1 = 0,05 \quad K_2 = 3 \quad T_2 = 0,2$$

Ker gre za vodeno regulacijo, izberemo metodo optimuma iznosa.

• regulator

$$F_R = K_p \frac{1 + sT_1}{sT_1}$$

• reguliranec

$$F_S = e^{-sT_1} \cdot \frac{K_2}{1 + sT_2} = e^{-s0,05} \frac{3}{1 + s0,2}$$

Prenosna funkcija oblike

$$F_S = \frac{e^{-sT_1}}{1 + sT_2}$$

str. 108: 7.11 in 7.13 (listi),
tudi v knjigi Regulacije
str. 258, en. 5.52 in 5.54

Ker v tej enačbi (za reguliraneec) ojačanje ne nastopa, ga prenesemo k regulatorju

$$F_R' = K_p \cdot K_2 \cdot \frac{1 + sT_{ip}}{sT_{ip}}$$

• Izračunamo A:

$$A = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow A = \frac{0,05}{0,2} = 0,25$$

• Izračun K_p :

$$K_R = \frac{1}{4} \frac{6A^3 + 6A^2 + 3A + 1}{3A^2 + 3A + 1}$$

$$K_p K_2 = \frac{1}{4} \frac{6A^3 + 6A^2 + 3A + 1}{3A^2 + 3A + 1} = \frac{1}{4} \frac{6 \cdot 0,25^3 + 6 \cdot 0,25^2 + 3 \cdot 0,25 + 1}{3 \cdot 0,25^2 + 3 \cdot 0,25 + 1}$$

$$K_p = \frac{0,286}{K_2} = \frac{0,286}{3} = 0,0954$$

• Izračun T_{ip} :

$$T_{ip} = \frac{T_1}{3} \frac{6A^3 + 6A^2 + 3A + 1}{2A^2 + 2A + 1}$$

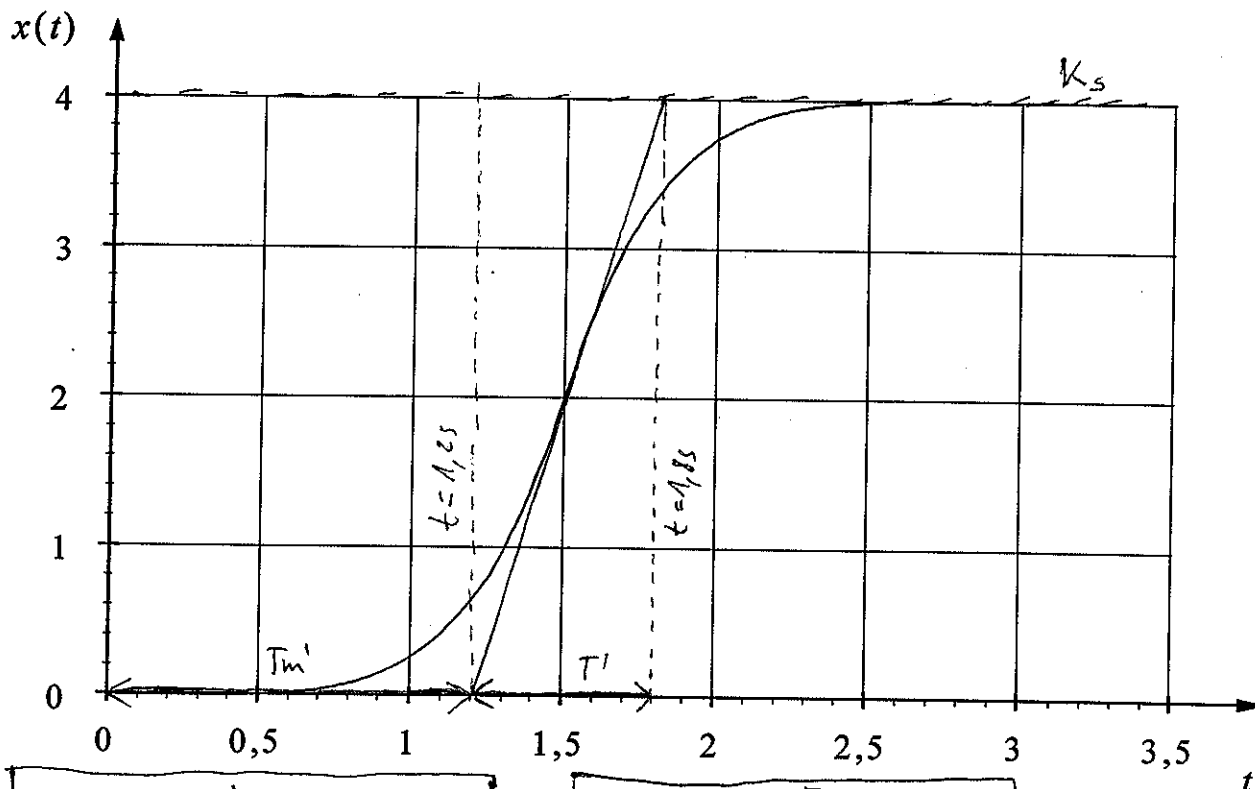
$$T_{ip} = \frac{0,05}{3} \cdot \frac{6 \cdot 0,25^3 + 6 \cdot 0,25^2 + 3 \cdot 0,25 + 1}{2 \cdot 0,25^2 + 2 \cdot 0,25 + 1}$$

$$= 0,0228$$

$$F_R = 0,0954 \cdot \frac{1 + s0,0228}{s0,0228}$$

VAJA A-19

Regulirancu v procesni regulaciji smo ugotovili podano prehodno funkcijo. Optimirajte konstanti PI-regulatorja po priporočilih, ki jih navajata Ziegler in Nichols.



regulirancu

$$F_s = e^{-sT_m'} \cdot \frac{K_s}{1+sT'}$$

regulator

$$F_R = \frac{1+sT_{ip}}{sT_{ip}} \cdot K_P$$

Iz prehodne funkcije razberemo

$$K_s = 4 \quad T_m' = 1,2 \text{ s} \quad T' = 0,6 \text{ s}$$

tabela, str. 103, priloga

$$K_P = 0,9 \frac{T'}{K_s \cdot T_m'} = 0,1125 \quad F_R = 0,1125 \cdot \frac{1+3,96s}{3,96s}$$

$$T_{ip} = 3,3 T_m' = 3,96$$

Ime in priimek:

Blaž Potočnik

Datum:

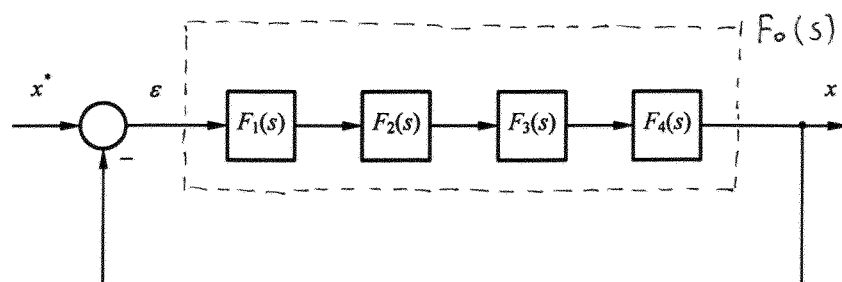
Stran:

1/1

VAJA A-20

Za podani regulacijski krog ugotovite optimalno konstanto P-regulatorja K_p ob upoštevanju kriterija

$$\alpha_{\text{rezervni}} = 0,6 \quad \varphi_{\text{rezervni}} = 30^\circ$$



$$F_1 = K_p \quad F_2 = \frac{1}{s} \quad F_3 = \frac{3}{1+0,1s} \quad F_4 = \frac{3}{1+0,28s+0,04s^2}$$

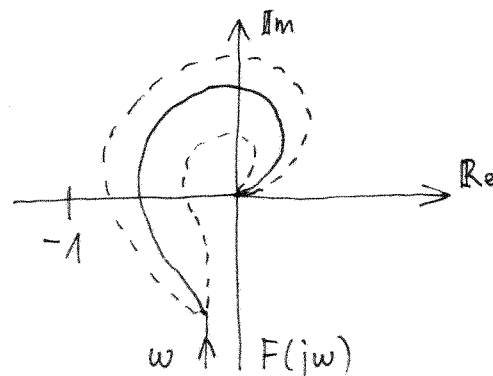
$$F_0 = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4$$

$$= K_p \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{3}{0,1s} \cdot \frac{3}{1+0,28s+0,04s^2}$$

- Za začetek predpostavimo $K_p = 1$

$$F_0 = \frac{9}{s(1+0,1s)(1+0,28s+0,04s^2)}$$

- skiciramo $F(j\omega)$



- Pri kakšnem K_p je sistem mejno stabilen?
karakteristična enačba $1 + F_0 = 0$

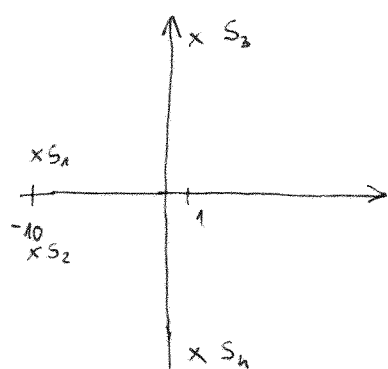
$$1 + \frac{g K_p}{s(1+0,1s)(1+0,28s+0,04s^2)} = 0$$

$$0,04s^4 + 0,068s^3 + 0,38s^2 + 1s + gK_p = 0$$

Če je $K_p = 1$:

$$\rightarrow s_{1,2} = -9,282332 \pm j 3,577914$$

$$\rightarrow s_{3,4} = +0,782332 \pm j 4,631406$$



Za $K_p = 1$ je torej sistem nestabilen.
To pomeni, da moramo ojačanje
močno zmanjšati (numeričen pristop)

- Kdaj gre krivulja skozi -1 , da je sistem mejno stabilen?

Postopamo po Routhovem kriteriju:

$$s^4: 0,004 \quad 0,38 \quad 9K_p$$

$$s^3: 0,068 \quad 1$$

$$s^2: 0,321176 \quad 9K_p$$

$$s^1: \left[1 - \frac{0,068 \cdot 9K_p}{0,321176} \right]$$

$$= 1 - 1,9054937K_p$$

$$s^0: 9K_p$$

- Da se v prvem stolpcu ohrani predznak

$$s^0: K_p > 0$$

$$s^1: 1 - 1,9054937K_p > 0$$

$$K_p < 0,524798$$

- Če je $K_p = 0,524798$, gre $F(j\omega)$ čez kritično točko.

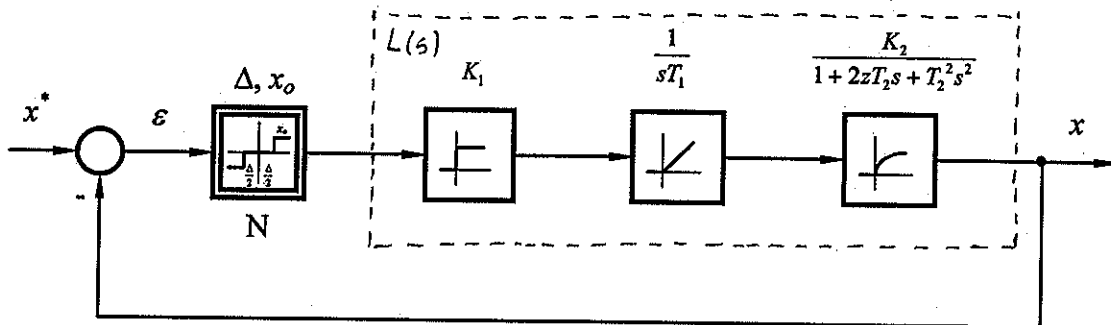
Da je $\alpha_{rez} = 0,6$, moramo prečkati točko 0,4.

$$K_p = 0,524798 \cdot 0,4 = 0,21$$

$$K_p = 0,21$$

VAJA A-21

Za podani sistem ugotovite stabilnostne razmere po metodi opisne funkcije.



$$K_1=2 \quad T_1=1 \quad K_2=3 \quad T_2=0,04 \quad z=0,25 \quad x_0=1 \quad \Delta=0,2$$

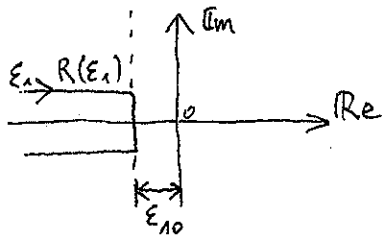
• enačba kritične trajektorije $R(\epsilon_1)$

$$R(\epsilon_1) = \frac{-1}{N(\epsilon_1)}$$

enačba za dvopoložajni člen z mrtvo cono poiščemo v knjigi na strani 212.

$$R(\epsilon_1) = \frac{-\pi \epsilon_1}{4x_0 \sqrt{1 - \frac{\Delta}{2\epsilon_1}}}$$

• skiciramo kritično trajektorijo
skica je pretirano povečana.
Zanima nas, kako blizu koordinatnemu izhodišču pridemo po Re osi.



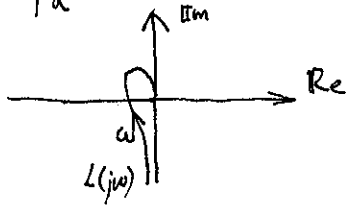
Najbližja točka je ϵ_{10} .

$$\epsilon_{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta$$

$$R(\epsilon_{10}) = \frac{-\pi \Delta}{4x_0} = \frac{-\pi \cdot 0,2}{4 \cdot 1} = 0,157$$

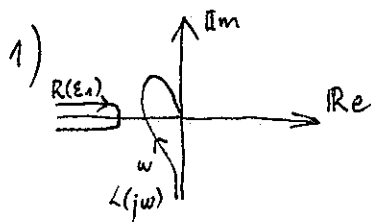
$$L(s) = K_1 \cdot \frac{1}{sT_1} \cdot \frac{K_2}{1 + 2zT_2s + T^2s^2}$$

Nyquist:

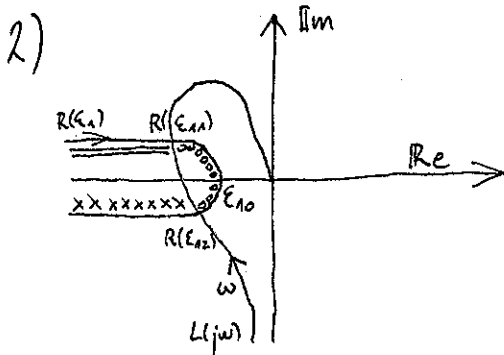


3. red, 1 int.

• Sledita dve možnosti



Tak sistem JE stabilen.



- če je $\epsilon_1 < \Delta/2$, smo v mrtvi coni in izhod iz nelinearnega člena je \emptyset .

- če je $\epsilon_1 < \Delta/2 < \epsilon_{11}$ je reč stabilna, $\epsilon_1 \downarrow$, sistem se ustali (=)

- $\epsilon_{11} < \epsilon_1 < \epsilon_{12}$, sistem je nestabilen, $\epsilon_1 \uparrow$ (oooo) } *

- $\epsilon_1 > \epsilon_{12}$ (xxxx), sistem je stabilen, $\epsilon_1 \downarrow$ }

* zaključek: $\varepsilon_1 > \varepsilon_{11} \rightarrow$ mejno nihanje z
amplitudo $\varepsilon_c = \varepsilon_{12}$ in frekvenco
 ω_c .

• iščemo presečišče $L(j\omega)$ z x osjo.

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{K_1 K_2}{j\omega T_1 (1 + 2z T_2 j\omega - T_2^2 \omega^2)} = \frac{6}{j\omega (1 + 0,02j\omega - 0,0016\omega^2)} = \\ &= \frac{6}{j\omega - 0,02\omega^2 - j0,0016\omega^3} = \frac{6}{-0,02\omega^2 + j(\omega - 0,0016\omega^3)} = \\ &= \frac{6}{-0,02\omega^2 + j(\omega - 0,0016\omega^3)} \cdot \frac{1 \cdot (-0,02\omega^2 - j(\omega - 0,0016\omega^3))}{1 \cdot (-0,02\omega^2 - j(\omega - 0,0016\omega^3))} \end{aligned}$$

$$L(j\omega) = \frac{6 [0,02\omega^2 - j(\omega - 0,0016\omega^3)]}{(-0,02\omega^2)^2 + (\omega - 0,0016\omega^3)^2}$$

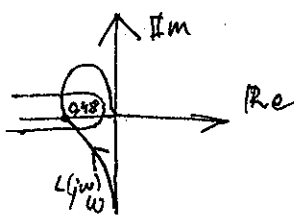
$$\operatorname{Im}[L(j\omega)] = 0 \iff \begin{aligned} \omega - 0,0016\omega^3 &= 0 \\ 1 &= 0,0016\omega^2 \rightarrow \underline{\underline{\omega = 25}} \end{aligned}$$

$$\omega_c = \omega = 25$$

$$\operatorname{Re}[L(j\omega)] = \frac{6 \cdot 0,02 \cdot 25^2}{(-0,02 \cdot 25^2)^2 + (25 - 0,0016 \cdot 25^3)^2} = \underline{\underline{-0,48}}$$

Presečišče je v točki $(-0,48, 0)$ pri frekvenci
25.

• Pri kakšnih ε pride do presečišča?



$$\text{Re}[L(j\omega)] = R(\varepsilon_1)$$

$$\frac{-\pi \varepsilon_1}{4X_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{2\varepsilon_1}\right)^2}} = -0,48$$

$$-0,48 = \frac{-\pi \varepsilon_1}{4 \sqrt{1 - \left(\frac{0,1}{\varepsilon_1}\right)^2}}$$

$$\pi \varepsilon_1 = 1,92 \sqrt{1 - \left(\frac{0,1}{\varepsilon_1}\right)^2}$$

$$\pi^2 \varepsilon_1^2 = 3,6864 \left(1 - \frac{0,01}{\varepsilon_1^2}\right) ; \varepsilon_1^2 = x$$

$$\pi^2 x^2 - 3,6864x + 0,036864 = 0$$

$$x_1 = 0,010283104$$

$$x_2 = 0,363227308$$

$$\downarrow$$

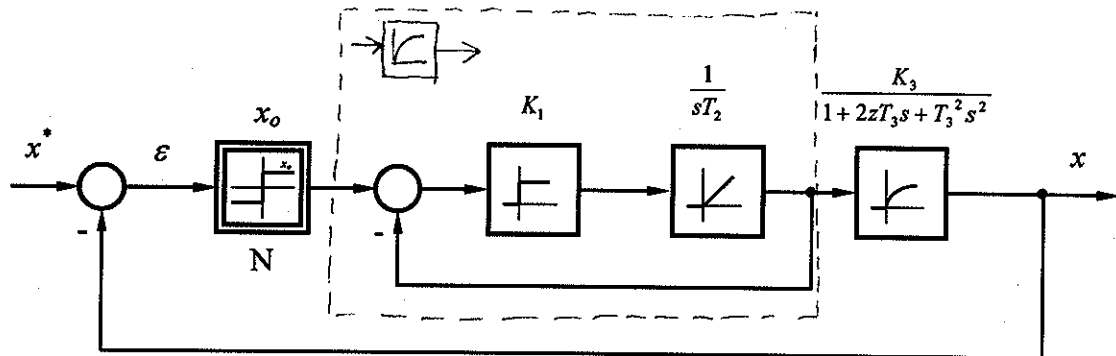
$$\boxed{\varepsilon_{11} = 0,101405641}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_{12} = 0,602683422}$$

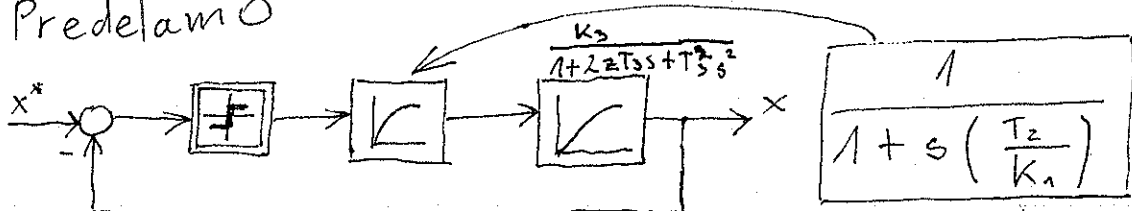
V primeru ε_{11} smo blizu mrtve cone.
Za manjše od tega mejnega nihanja ni.

VAJA A-22



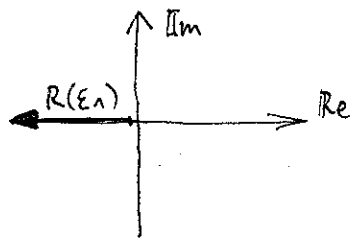
$$K_1 = 15 \quad T_2 = 3 \quad K_3 = 3 \quad T_3 = 1 \quad z = 0,2 \quad x_0 = 0,5$$

• Predelamo



• $R(\varepsilon_1)$ za dvopoložajni člen na strani 311 v knjigi Regulacije. Kot z dvopoložajni člen z mrtvo cono, le da postavimo $\Delta = \emptyset$.

$$R(\varepsilon_1) = \frac{-1}{N(\varepsilon_1)} = -\frac{\pi \varepsilon_1}{4x}$$



$$L(s) = \frac{1}{1 + s(T_2/K_1)} \cdot \frac{K_3}{1 + 2zT_3 + T_3^2 s^2}$$

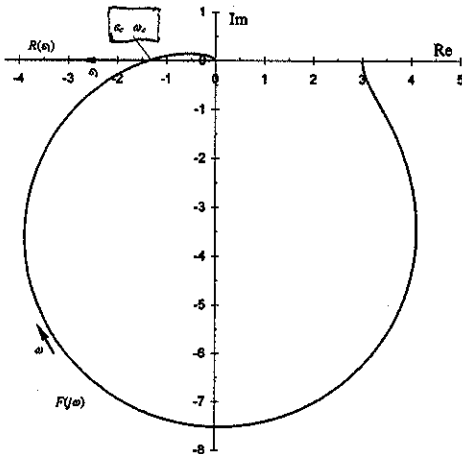
Ime in priimek:

Blaž Potočnik

Datum:

Stran:

1/3

Nyquist za $L(s)$ 3. red, $\omega \rightarrow \infty: \varphi = -270^\circ$ Začnemo pri $\omega = 0, \varphi = 0^\circ$, ker
ni integratorjev

$$R(\varepsilon_1) = -\frac{1}{N(\varepsilon_1)} = -\frac{\pi \varepsilon_1}{4x_0} \quad \checkmark$$

vrisana $R(\varepsilon_1) \quad \checkmark$

40 %

(5 %)

$$F(j\omega) = \frac{K_3}{\sqrt{(1 + j\omega T_2/K_1)(1 + 2zT_3j\omega + T_3^2(j\omega)^2)}}$$

vrisana $F(j\omega) \quad \checkmark$

(5 %)

Razlaga:

(10 %)

 $\varepsilon_1 < \varepsilon_c$ (majhni ε_1): lokalno nestabilno, ε_1 se povečuje... (Mar v nedogled? POZOR - glej naprej!) $\varepsilon_1 > \varepsilon_c$ (veliki ε_1): lokalno stabilno, ε_1 se zmanjšuje (ampak če se zmanjša pod ε_c , se znova povečuje...)**Posledica:** za vsako začetno vrednost ε_1 sistem preide v mejno nihanje s frekvenco ω_c in z amplitudo na vходу v nelinearni element $\varepsilon_1 = \varepsilon_c$

$$F(j\omega_c) = \frac{3}{(1 + 0,4j\omega_c - \omega_c^2 + 0,2j\omega_c - 0,08\omega_c^2 - 0,2j\omega_c^3)} = \frac{3}{(1 - 1,08\omega_c^2) + j(0,6\omega_c - 0,2\omega_c^3)}$$

$$F(j\omega_c) = \frac{\overbrace{3(1 - 1,08\omega_c^2)}^{\text{Re}} - \overbrace{j(0,6\omega_c - 0,2\omega_c^3)}^{\text{Im}}}{(1 - 1,08\omega_c^2)^2 + (0,6\omega_c - 0,2\omega_c^3)^2}$$

Iščemo rešitve enačbe $F(j\omega_c) = R(\varepsilon_c)$ (za kakšne vrednosti ω_c in ε_c velja enakost); ker pa leži kritična trajektorija na realni osi, je naloga preprosta: *glej naprej*

$$\text{Im}[F(j\omega_c)] = 0 \quad \omega_c = 1,732 \quad \checkmark \quad \text{Re}[F(j\omega_c)] = -1,339 \quad \checkmark \quad (10 \%)$$

$$\text{Re}[F(j\omega_c)] = R(\varepsilon_c) \quad \varepsilon_c = 0,8526 \quad \checkmark \quad (10 \%)$$

Ime in priimek:

Blaž Potočnik

Datum:

Stran:

2/3

$\text{Im}[F(j\omega)] = 0$, da dobimo presečišče.

$$0,6\omega_c - 0,2\omega_c^3 = 0$$

$$\omega_c^2 = (-0,6)/(-0,2) = 3$$

$$\omega_c = \sqrt{3} = 1,732$$

$$\begin{aligned} \text{Re}[F(j\omega_c)] &= \frac{3 \cdot (1 - 1,08 \cdot 3)}{(1 - 1,08 \cdot 3)^2 + (0,6 \cdot \sqrt{3} - 0,2 \cdot \underbrace{(\sqrt{3})^3}_{3^{3/2}})} = \\ &= \underline{\underline{-1,339}} \end{aligned}$$

• Sledi dalje

$$\text{Re}[F(j\omega_c)] = R(\xi_c)$$

$$-\frac{\pi \xi_c}{4x_0} = -1,339, \quad x_0 = 0,5$$

$$\xi_c = \frac{4 \cdot x_0 \cdot 1,339}{\pi} = \underline{\underline{0,8526}}$$