STROMAR

DIGITALNA KRMILJA IN TEORIJA REGULACIJ

3

Zapiski avditornih vaj

ME

Šolsko leto	2009 / 2010
Izvajalec	David Nedeljkovič
Avtor dokumenta	Blaž Potočnik
Skeniranje	Aleš Berkopec

STROMAR.SI
DRUŠTVO ELEKTROTEHNIKOV

UREJANJE DOKUMENTA	
VERZIJA	01.01
DATUM	13.03.2010

OPOMBE

TEORIJA REGULACIJ

AVDITORNE VAJE

Blaž Potočnik

2009/2010

VAJA A–1

Izračunajte prenosno funkcijo za sistem, ki ga popisuje diferencialna enačba

$$\dot{y}(t) + ky(t) = u(t) = e^{st}$$

Kakšen je odziv sistema na vhodni signal $u(t) = e^{st}$? Ugotovite tudi frekvenčni odziv, konkretno za vhodni signal $u(t) = A\sin(\omega t+\gamma)$!

• zapis pripadajoče prenosne funkcije

$y(t) = u(t) \cdot F(s)$; če je $u(t) = e^{st}$

$y(t) = e^{st} \cdot F(s) \longrightarrow$

$\dot{y}(t) = s \cdot e^{st} \cdot F(s) \longrightarrow$ Vstavimo v D.E.

Dobimo:

$s \cdot e^{st} \cdot F(s) + k \cdot e^{st} F(s) = e^{st}$

$(s+k)\cancel{e^{st}} \cdot F(s) = \cancel{e^{st}} \longrightarrow \boxed{F(s) = \frac{1}{s+k}}$

• ugotovimo odziv na vzbujanje

$y(t) = e^{st} \cdot F(s)$

$\boxed{y(t) = e^{st} \cdot \frac{1}{s+k}}$

• frekvenčni odziv

$s = j\omega$

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + k} = \frac{1}{k + j\omega} \quad \begin{matrix} / \cdot (k - j\omega) \\ / \cdot (k - j\omega) \end{matrix}$$

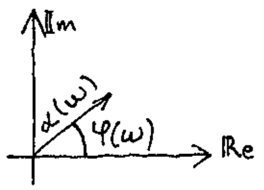
$$= \frac{k - j\omega}{k^2 + \omega^2}$$

$$\alpha = |F(j\omega)| = \sqrt{Re^2(F(j\omega)) + Im^2(F(j\omega))}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{k}{k^2+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\right)^2}$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{1}{k^2+\omega^2}}}$$

• fazni kot



$$\varphi(\omega) = atg\left[\frac{Im[F(j\omega)]}{Re[F(j\omega)]}\right] = atg\left[-\frac{\omega}{k}\right]$$

• izhodni signal

$$y(t) = \alpha(\omega) \cdot A \cdot \sin(\omega t + \gamma + \varphi(\omega))$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{1}{k^2+\omega^2}} \cdot A \cdot \sin\left[\omega t + \gamma + atg\left(-\frac{\omega}{k}\right)\right]}.$$

kjer je γ začetni premik

VAJA A–2

Za podano diferencialno enačbo zapišite prenosno funkcijo $F(s) = X(s)/Y(s)$ in določite $x(t=\infty)$, če sistem vzbujamo z enotino stopnico. Upoštevajte, da velja:

$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\left(2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) + 25x = 9y$ b) $2x + 3y = \frac{dx}{dt}$

a) $\frac{d^2x}{dt} + 3\left[2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right] + 25x = 9y \quad / \mathcal{L}$

- $s^2X(s) + 3(2 \cdot s \cdot X(s) - sY(s)) + 25X(s) = 9Y(s)$

  $s^2X(s) + 6sX(s) - 3sY(s) + 25X(s) = 9Y(s)$

  $X(s)\left[s^2 + 6s + 25\right] = Y(s)\left[3s + 9\right]$

$$\boxed{F(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{3s+9}{s^2+6s+25}}$$

$$X(s) = Y(s) \cdot F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{3s+9}{s^2+6s+25}$$

- $x(t=\infty)$:

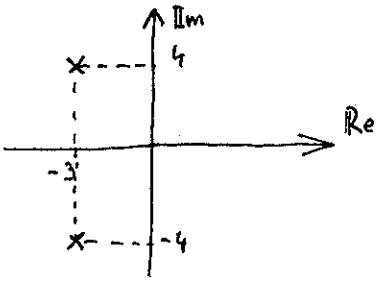
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0}\left[\cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \; \frac{3s+9}{s^2+6s+25}\right] = \frac{9}{25}$$

Preveriti je potrebno, ali je izrek o končni vrednosti funkcije veljaven. Poli so ničle imenovalca izraza

$$\frac{3s+9}{s^2+6s+25}$$

$$s^2 + 6s + 25 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-100}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = \boxed{-3 \pm 4i}$$



Ker sta oba pola levo od Im osi, vemo, da je izračun veljaven

- $x(t) = ?$

$$X(s) = \frac{1}{s} \, \frac{3s + 9}{s^2 + 6s + 25} \quad / \mathcal{L}^{-1}$$

$$X(s) = \frac{3}{s^2 + 6s + 25} + \frac{9}{s(s^2 + 6s + 25)}$$

$$X(t) = 3\left[\frac{1}{\omega} \cdot e^{-3t} \cdot \sin(\omega t)\right] +$$

$$+ 9 \cdot \frac{1}{25}\left[1 - \left(\cos(\omega t) + \frac{3}{\omega} \cdot \sin(\omega t)\right) \cdot e^{-3t}\right] =$$

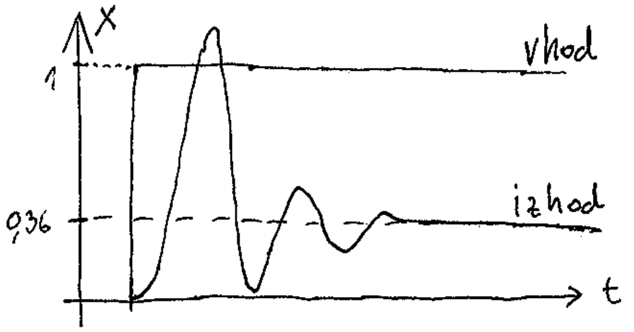
$$= \left[\frac{3}{4} e^{-3t} \sin(4t)\right] + \frac{9}{25} - \frac{9}{25}\left[\cos(4t)\, e^{-3t}\right] -$$

$$- \frac{27}{100}\left[\sin(4t) \cdot e^{-3t}\right] =$$

$$= e^{-3t}\left[\frac{3}{4}\cdot\sin(4t) - \frac{9}{25}\cos(4t) - \frac{27}{100}\sin(4t)\right] + \frac{9}{25}$$

$$\omega = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25-9} = 4$$

$$x(t=\infty) = 0{,}36$$



b) • $2x + 3y = \frac{dx}{dt} \quad / \mathcal{L}$

$$2X(s) + 3Y(s) = sX(s)$$

$$Y(s)\cdot 3 = X(s)(s-2)$$

$$\frac{3}{s-2} = \frac{X(s)}{Y(s)} = F(s)$$

$$X(s) = Y(s)F(s) = \frac{1}{s}\ \frac{3}{s-2}$$

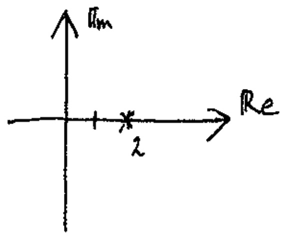
• $x(t=\infty)$:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0}\left[\cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}\cdot\frac{3}{s-2}\right] = -\frac{3}{2}$$

Preverimo

$s-2=0$

$s=2$

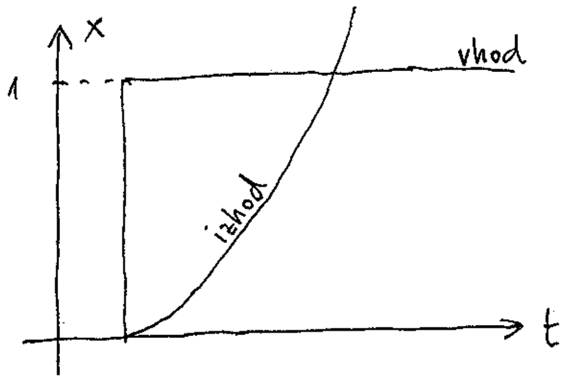


Izračun ni pravilen, ker je pol na realnem+ delu kompleksne ravnine.
Izreka ne moremo uporabiti.

• $x(t) = ?$

$$X(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{3}{s-2}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{3}{2}\left[e^{2t}-1\right]}$$



VAJA A–3

Rešite ($y(x) = ?$) nehomogeno diferencialno enačbo

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=4x+8$$ z začetnima pogojema $y(0)=6$ in $\dot{y}(0)=0$

a) na klasičen način

b) z uporabo Laplaceove transformacije

a) $y''+3y'+2y=4x+8$

- homogeni del

$y''+3y'+2y=0$

uporaba nastavka $y=e^{\lambda x}$; odvajamo in dobimo

$y'=\lambda e^{\lambda x}$ ter $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$

dalje

$\lambda^2+3\lambda+2=0 \longrightarrow \lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$

$y_h=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

- partikularni del

$y_p=Ax+B$

$y_p'=A$, $y_p''=0$

vstavimo v D.E.

$3A+2Ax+2B=4x+8$

$2A=4 \rightarrow A=2$, $3A+2B=8 \longrightarrow 2B=2 \longrightarrow B=1$

$y_p=2x+1$

$y = y_h + y_p$

$= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 2x + 1$

$y' = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} + 2$

$y'(0) = 0 \qquad y(0) = 6$

$-C_1 - 2C_2 + 2 = 0$

$C_1 + C_2 + 1 = 6$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 5 \\ -C_1 - 2C_2 = -2 \end{array}\right\} +$$

$-C_2 = 3 \longrightarrow C_2 = -3$

$C_1 = 5+3 \rightarrow C_1 = 8$

$$\boxed{y(x) = 8e^{-x} - 3e^{-2x} + 2x + 1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x + 8$$

b) uporaba $\mathcal{L}$ transformacije

$$s^2Y(s) - 6s + 3sY(s) - 3\cdot 6 + 2Y(s) = \frac{4}{s^2} + \frac{8}{s}$$

$$Y(s)(s^2 - 3s + 2) - 6s - 18 = (4/s^2) + (8/s)$$

$$Y(s) = \frac{6s^3 + 18s^2 + 8s + 4}{(s^2 + 3s + 2)\cdot s^2} \quad / \mathcal{L}^{-1}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{Cs + D}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{A(s+2)s^2 + B(s+1)s^2 + Cs^3 + 3Cs^2}{(s^2+3s+2)s^2} +$$

$$+ \frac{Ds^2 + 3Ds + 2D}{(s^2+3s+2)s^2}$$

$$Y(s) = \frac{6s^3 + 18s^2 + 8s + 4}{(s^2+3s+2)s^2}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} A+B+C=6 & 2A+B+3C+D=18 \\ 2C+3D=8 & 2D=4 \end{matrix}}$$

$\hookrightarrow D=2,\ C=1,\ A=8,\ B=-3$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{s+1} + \frac{-3}{s+2} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}\right]$$

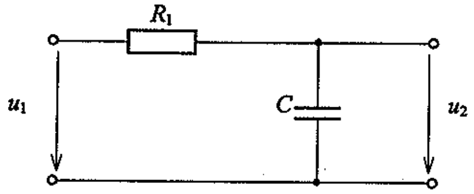
$$\boxed{y(x) = 8e^{-x} - 3e^{-2x} + 1 + 2x}$$

Študijsko leto	**Digitalna krmilja in teorija regulacij**	Vaja
2009/10	Laboratorij za regulacijsko tehniko	4

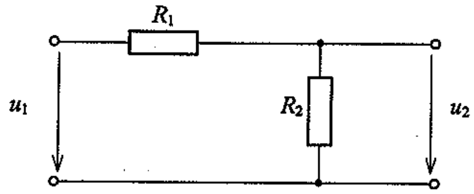
VAJA A–4

K četveropolom zapišite prenosno funkcijo $F(s) = u_2(s)/u_1(s)$ in skicirajte potek prehodne funkcije.

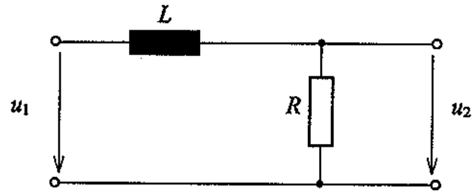
a) Na strani 2



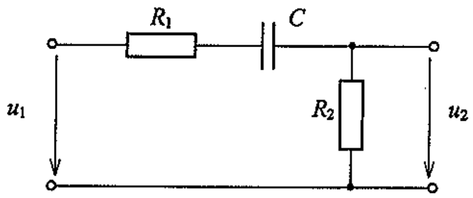
b) Na strani 3



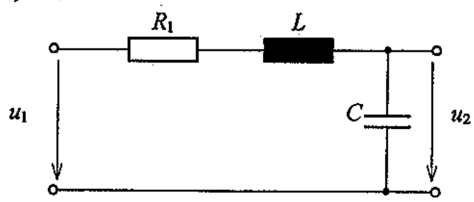
c) Na strani 3



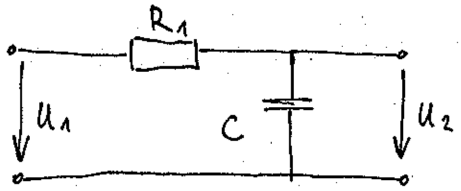
d) Na strani 4



e) Na strani 5



a)



$Z_1 = R$

$Z_2 = \frac{1}{Cs}$

$$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(1/Cs)}{R + (1/Cs)}$$

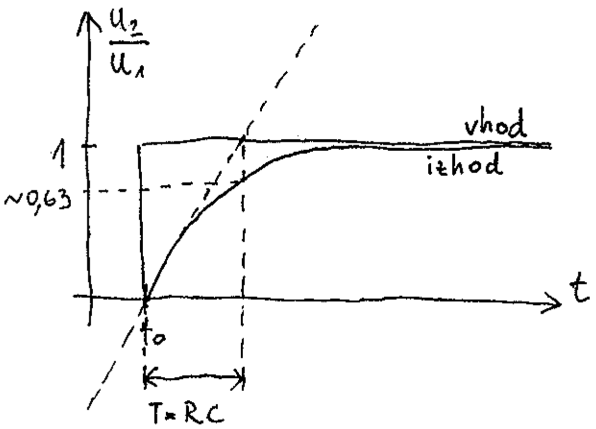
$$= \frac{1}{RCs+1} = \boxed{\frac{1}{1+sRC}}$$

To je sistem prvega reda.

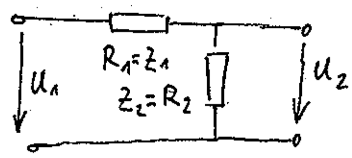
$F_1(s) = \frac{k}{1+sT}$, kjer je k atenuacija in T časovna konstanta.

V danem primeru je $k = 1$ in $T = RC$.

Imamo člen prvega reda



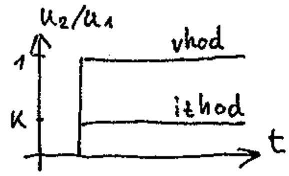
Za sisteme prvega reda velja, da zavzame izhodni signal v času ene časovne konstante 63% končne vrednosti.

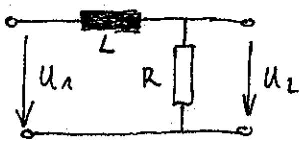
b) 

$$F(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$K = R_2/(R_1+R_2)$

to je proporcionalni člen



c) 

$Z_1 = sL$, $Z_2 = R$

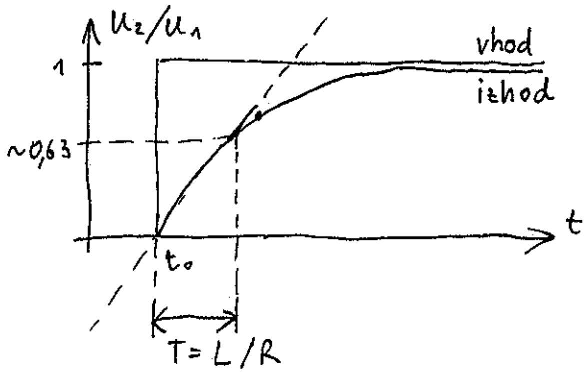
$$F(s) = \frac{R}{R + sL} \quad \begin{array}{l} /\cdot R \\ /\cdot R \end{array} \longrightarrow \boxed{F(s) = \frac{1}{1 + sL/R}}$$

To je člen prvega reda!

$$F_1(s) = \frac{K}{1 + sT}$$

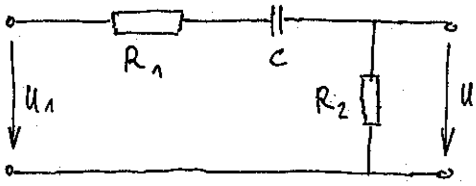
V danem primeru velja

$K = 1$, $T = L/R$



Podobno, kot v primeru a)

d)



$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{sC}$$

$$Z_2 = R_2$$

$$F(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{sC} + R_2} = \frac{sR_2C}{1 + s(R_1+R_2)\cdot C}$$

Gre za realni diferencialni člen s prenosno funkcijo

$$F_D(s) = \frac{sT_D}{1+sT_D'}$$, T_D' je parazitna časovna konstanta.

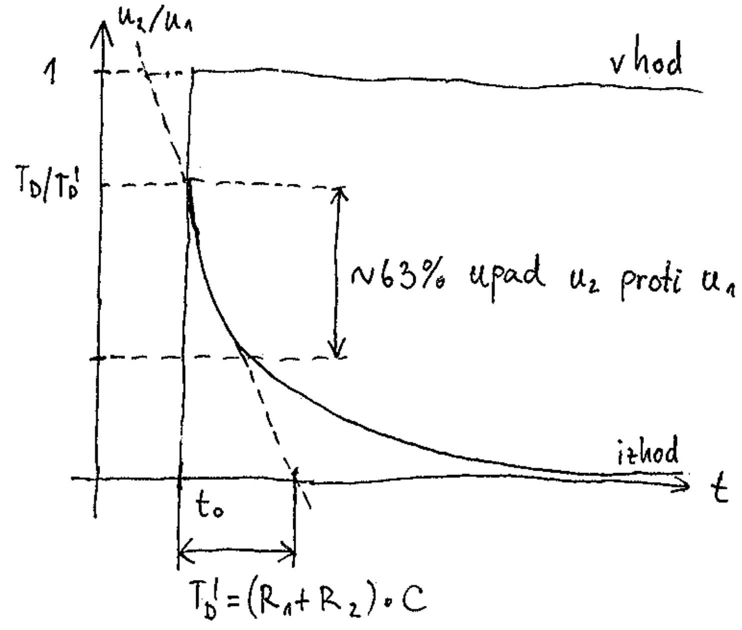
Idealni dif. člen:

$F_D(s) = sT_D$, kjer $T_D' = 0$

V danem primeru

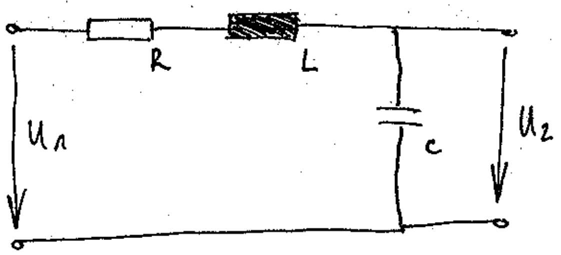
$T_D = R_2 \cdot C$ in $T_D' = (R_1 + R_2)\cdot C$

Blokovni simbol: 



$$\frac{T_D}{T_D'} = \frac{R_2 \cdot \cancel{C}}{(R_1+R_2)\cdot \cancel{C}}$$

e)



$Z_1 = R + sL$

$Z_2 = 1/sC$

$$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1/sC}{R + sL + (1/sC)} = \frac{1/\cancel{sC}}{\frac{s(R+sL)C + 1}{\cancel{sC}}} =$$

$$= \frac{1}{sC \cdot R + s^2 LC + 1}$$

To pa je člen drugega reda.

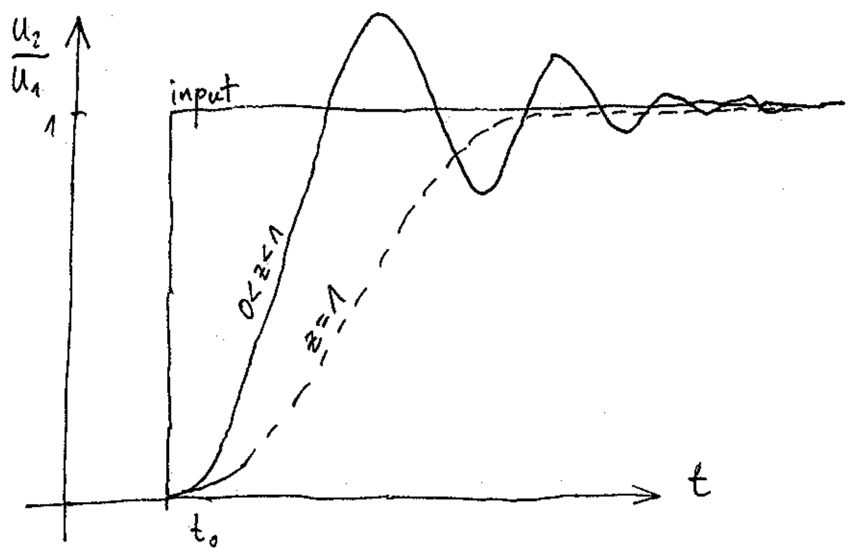
$$F(s) = \frac{K}{1 + 2zT + T^2 s^2}$$

V danem primeru:

$K = 1$, $2ZT = RC$, $T^2 = L$

Vkolikor:

- $0 < z < 1$ dobimo prenihaj
- $z = 0$ nihanje je nedušeno
- $z = 1$ ni prenihanja



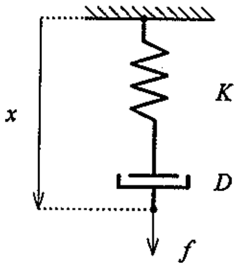
Študijsko leto 2009/10 | **Digitalna krmilja in teorija regulacij** | Vaja 5

Laboratorij za regulacijsko tehniko

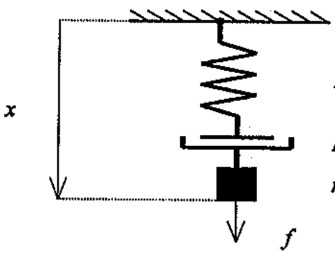
VAJA A–5

Zapišite prenosno funkcijo $F(s) = x(s)/f(s)$ za naslednje mehanske sisteme:

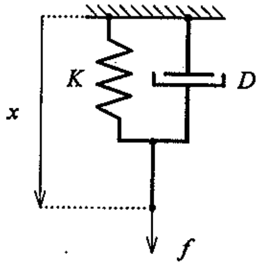
a)



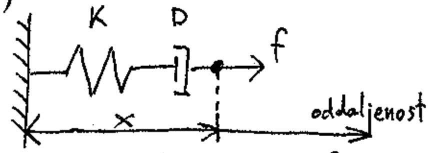
b)



c)



a)



vzmet: $k \cdot x_K = f_K$ dušilka: $D \cdot \dot{x}_D = f_D$

sila $f = f_D = f_K$ raztezek $x = x_K + x_D$

$$f = f_D = D\dot{x}_D = f_K = K x_K \quad /\mathcal{L}$$

$$f_K(s) = K \cdot x_K(s)$$

$$f_D(s) = D \cdot s \cdot x_D(s)$$

$$x(s) = x_K(s) + x_D(s) \qquad f(s) = f_D(s) = f_K(s)$$

$$x(s) = \frac{f_K(s)}{K} + \frac{f_D(s)}{D \cdot s} = \frac{f(s)}{K} + \frac{f(s)}{D \cdot s} =$$

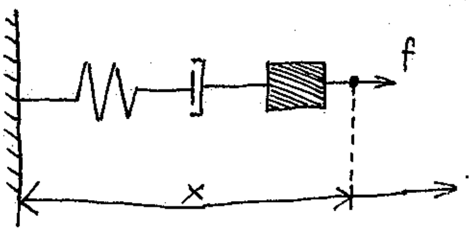
$$= f(s)\left[\frac{1}{K} + \frac{1}{D \cdot s}\right]$$

$$F(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \underbrace{\frac{1}{K}}_{P} + \underbrace{\frac{1}{D \cdot s}}_{I}$$

Imamo sistem, ki se obnaša kot PI člen.

Ime in priimek: Blaž Potočnik | Datum: | Stran: 1/3

b)



$$F(s) = \frac{x(s)}{f(s)}$$

$$f_D = D \cdot \dot{x}_D \quad /\mathcal{L} \qquad f_K = K \cdot x_K \quad /\mathcal{L}$$

$$f_D = D \cdot s \cdot x_D(s) \qquad f_K = K \cdot x_K(s)$$

$$f_D = f_K$$

$$x = x_K + x_D \,/\mathcal{L}$$

$$m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$f - m\ddot{x} = f_D = f_K$$

$$f - m\ddot{x} = D\dot{x}_D = K \cdot x_K \;/\mathcal{L}$$

$$f(s) - m s^2 X(s) = D s X_D(s) = K \cdot X_K(s)$$

$$X(s) = \frac{f(s) - m \cdot s^2 X(s)}{K} + \frac{f(s) - m s^2 X(s)}{D \cdot s}$$

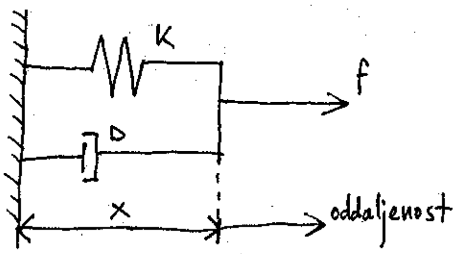
$$X(s)\left[1 + \frac{ms^2}{K} + \frac{ms}{D}\right] = f(s)\left[\frac{1}{K} + \frac{1}{D \cdot s}\right]$$

$$F(s) = \frac{X(s)}{f(s)} = \frac{\frac{1}{K} + \frac{1}{D \cdot s}}{1 + \frac{m}{D} \cdot s + \frac{m}{K} \cdot s^2} =$$

$$= \frac{\frac{D \cdot s + K}{K \cdot D \cdot s}}{1 + \frac{m}{D} \cdot s + \frac{m}{K} \cdot s^2}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{K + Ds}{\left[1 + \frac{m}{D} \cdot s + \frac{m}{K} \cdot s^2\right] K \cdot D \cdot s}}$$

c)



$$f_D = D \cdot \dot{x}_D$$

$$f_K = K \cdot x_K$$

$$x = x_D = x_K$$

$$f = f_D + f_K$$

$$f = K \cdot x_K + D \cdot \dot{x}_D \quad /\mathcal{L}$$

$$f(s) = K \cdot x(s) + D \cdot s \cdot x(s)$$

$$f(s) = x(s)[K + Ds]$$

$$F(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \frac{1}{K + D \cdot s} = \boxed{\frac{\frac{1}{K}}{1 + s \cdot \frac{D}{K}}}$$

Tak zapis je pomemben, da razberemo s čim imamo opravka.
Gre za člen prvega reda s prenosno funkcijo

$$F_1 = \frac{K_1}{1 + sT_1}$$

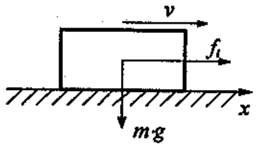
V našem primeru velja

$$K_1 = \frac{1}{K} \quad \text{ter} \quad T_1 = \frac{D}{K}$$

Študijsko leto	**Digitalna krmilja in teorija regulacij**	Vaja
2009/10	Laboratorij za regulacijsko tehniko	6

VAJA A–6

Vozilo z maso $m = 10$ kg se premočrtno giblje po ravni površini ($g = 9{,}81$ m/s^2). Pogonski sistem vozila je sposoben hipoma zagotoviti želeno vrednost vlečne sile f_t, neodvisno od trenutne hitrosti v. Koeficient trenja se spreminja po enačbi $k_f = k_o \cdot v$, kjer je $k_o = 10$ s/m, lepenje zanemarimo. **Zapišite prenosno funkcijo** $F_v(s) = v(s)/f_t(s)$.



$$f_T(s) \longrightarrow \boxed{F_v(s)} \longrightarrow v(s)$$

$$f_t - f_F = m \cdot a$$

$$f_F = k_F \cdot m \cdot g = k_o \cdot v \cdot m \cdot g$$

$$f_t - k_o\, m \cdot g \cdot v = m \cdot a$$

$$f_t - k_o\, m g \cdot v = m \cdot \dot{v} \quad / \mathcal{L}$$

$$f_t(s) - k_o \cdot m \cdot g \cdot v(s) = m \cdot s \cdot v(s)$$

$$f_t(s) = v(s)\,[m \cdot s + k_o\, m g]$$

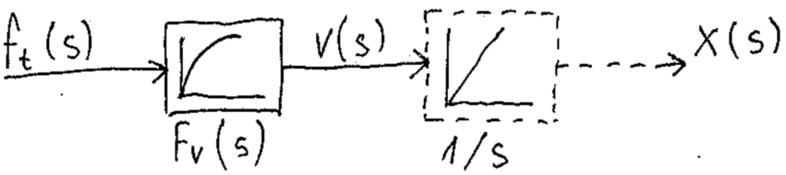
$$F_v(s) = \frac{v(s)}{f_t(s)} = \frac{1}{m s + k_o m g} \quad \begin{array}{l} /: k_o m g \\ /: k_o m g \end{array}$$

$$\boxed{F_v(s) = \frac{\frac{1}{k_o m g}}{1 + s\left(\frac{1}{k_o g}\right)}}$$

To pa je člen I. reda

$$F_1(s) = \frac{K_1}{1 + s T_1}$$

V našem primeru $K_1 = 1/k_o m g$ in $T_1 = 1/k_o g$



Ime in priimek:	Datum:	Stran:
Blaž Potočnik		1/1

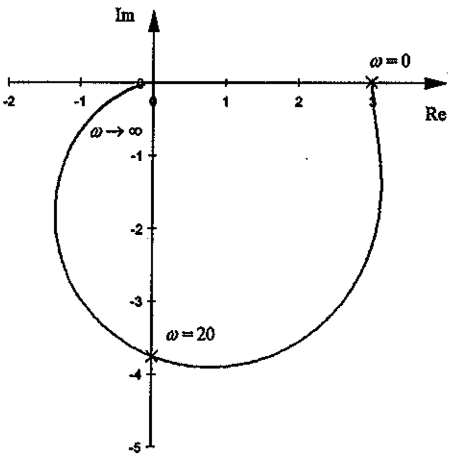
Študijsko leto **Digitalna krmilja in teorija regulacij** Vaja

2009/10 Laboratorij za regulacijsko tehniko 7

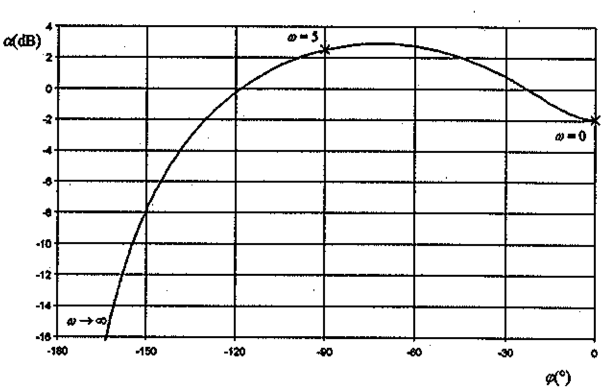
VAJA A–7

Iz podane frekvenčne karakteristike ugotovite pripadajočo prenosno funkcijo $F(s)$.

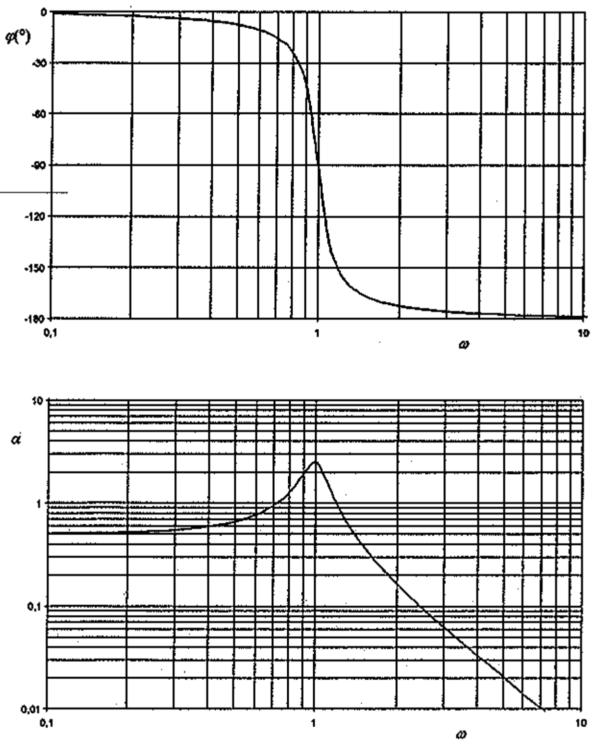
a)



b)



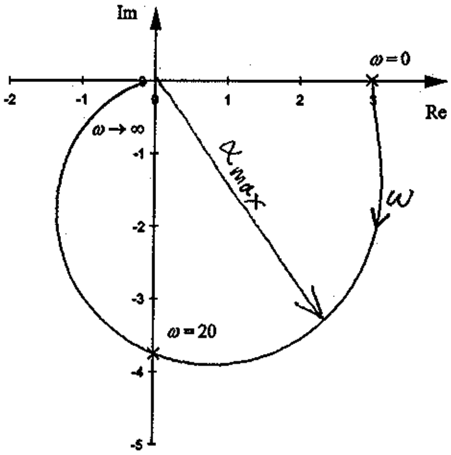
c)



Ime in priimek: Datum: Stran:

Blaž Potočnik 1/4

a)



• $\varphi(\omega \to \infty) = -180$

Iz tega razberemo red sistema.

To je sistem II. reda ($2 \cdot 90 - 180 = 0$)

• $\varphi(\omega = 0) = 0$

Razberemo ojačanje ($\alpha(\omega=0) = 3$)

Ugotovimo, da gre za člen II. reda s funkcijo

$F(s) = \dfrac{K}{1 + 2zTs + T^2 s^2}$ Iščemo K, T, z!

• $K = \alpha(\omega = 0) = 3$

• $T = \dfrac{1}{\omega_0}$, kjer je $\omega_0 = \omega(\varphi = -90°)$. To velja le za člen II. reda. Sledi $\omega_0 = 20$

$T = 1/20 = 0{,}05$

• α_{max} pri ω_r. Približno $\alpha_{max} = 4{,}1$

• Resonančni faktor $Q_r = \dfrac{\alpha_{max}}{K} = 1{,}367$

• Izračun faktorja dušenja preko relacije

$z = \sqrt{\dfrac{1 \mp \sqrt{1 - \frac{1}{Q_r^2}}}{2}}$, sledi $z_1 \doteq 0{,}4$ in $z_2 \doteq 0{,}9$

Lahko razberemo tudi iz slike (knjiga, str. 55, sl. 2.14)

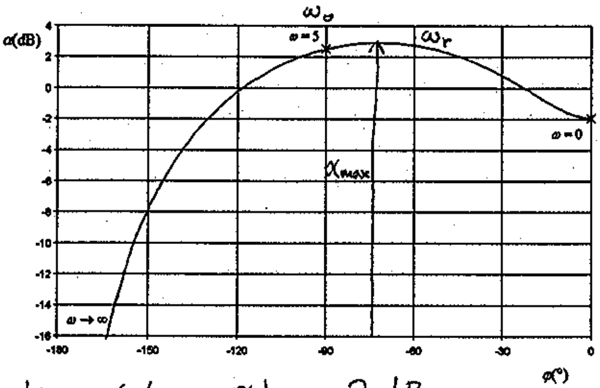
Ugotovimo, kateri je pravi

- $z < \sqrt{2}/2$ dobimo resonanco v frekvenčni karakteristiki
- $z > \sqrt{2}/2$ dušenja ni več

Pravi odgovor je $z \doteq 0{,}4$. Vemo, da dušenje imamo, saj $\alpha(\omega = 0) < \alpha_{max}$.

$$\boxed{F(s) = \frac{3}{1 + 0{,}04s + 0{,}05s^2}}$$

b)



$\varphi(\omega \to \infty) = -180°$ (graf bi lahko podaljšali)

$\varphi(\omega = \emptyset) = 0°$

To je II. red.

$\varphi(\omega = \emptyset) = \emptyset°$

$\alpha(\omega = \emptyset) = -2\,dB$

- $K = \alpha(\omega = \emptyset) = -2\,dB$

$$K = 10^{\frac{\alpha(\omega=\emptyset)[dB]}{20}} = 0{,}8$$

- $T = 1/\omega_0$, kjer $\omega_0 = \omega(\varphi = -90°)$ To velja samo za II. red.

$\omega_0 = 5 \rightarrow T = 0{,}2$

- α_{max} odčitamo, $\alpha_{max} \doteq 2{,}9\,dB$

$$\alpha_{max} = 10^{\alpha_{max}[dB]/20} = 1{,}39$$

$$Q_r = \frac{\alpha_{max}}{K} = 1{,}75$$

- Izrazita resonanca $Q_r > 1$. To se vidi tudi iz grafa (amplitudno razmerje $\alpha(\omega=0)$ in α_{max})

vstavimo v

$$\left. z = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{Q_r^2}}}{2}} \right\} \longrightarrow \frac{z_1 = 0{,}3\checkmark}{z_2 = 0{,}95}$$

- Preverimo tudi na monograma str. 55/sl. 2.14

Torej $z = \emptyset{,}3 < \sqrt{2}/2$, resonanco imamo.

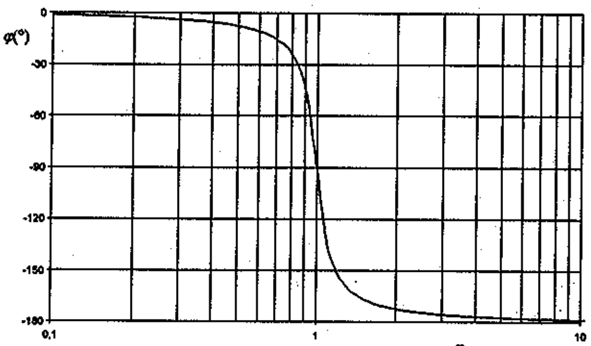
$K = 0{,}8 \qquad T = 0{,}2 \qquad z = 0{,}3$

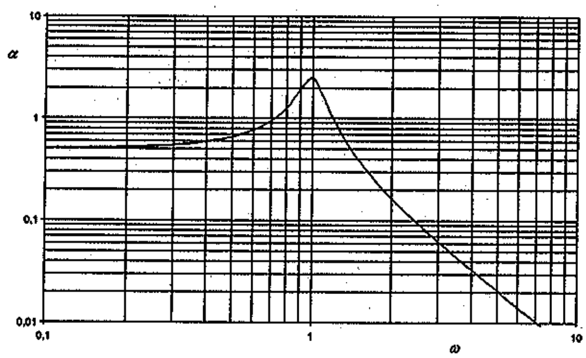
$$F(s) = \frac{0{,}8}{1 + 0{,}12\,s + 0{,}04\,s}$$

$$\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2z^2}$$

S pomočjo tega diagrama in enačbe lahko iz podatkov res. ~~[illegible]~~ pojava Q_r in ω_r izračunamo parametra z in T člena II. reda. Vrednost faktorja stat. ojač. K pa v točki $\omega = \emptyset$.

c)





$\varphi(\omega \to \infty) = -180°$

To je II. red.

$\varphi(\omega = 0) = 0°$

$\alpha(\omega = 0) = 0{,}5$

- $K = \alpha(\omega = 0) = 0{,}5$
- $T = 1/\omega_0$

  $\omega_0 = \omega(\varphi = -90°) = 1$

  $T = 1$
- $\zeta: \alpha_{max} \doteq 2{,}5$
- $Q_r = \alpha_{max}/K = 2{,}5/0{,}5 = 5$

Izrazita resonanca, $\zeta < \sqrt{2}/2$

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - \frac{1}{Q_r^2}}}{2}}$$

$\zeta_1 = 0{,}1$

$\zeta_2 = 0{,}99$

$\zeta = 0{,}1$

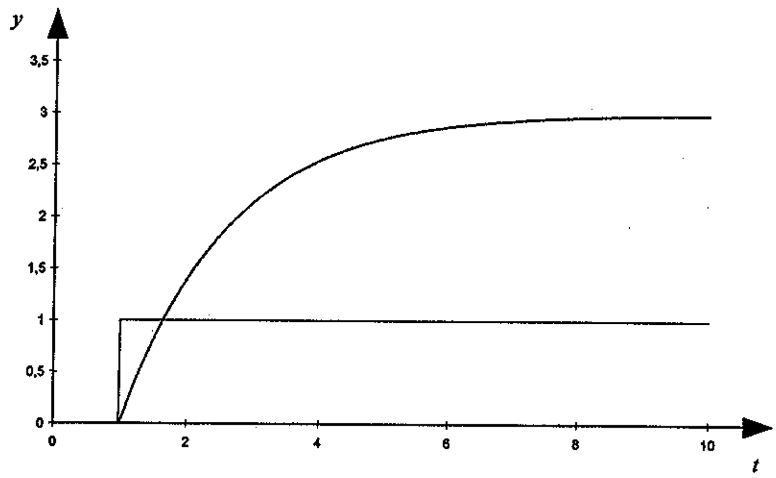
$$\boxed{F(s) = \frac{0{,}5}{1 + 0{,}2s + s^2}}$$

Študijsko leto	Digitalna krmilja in teorija regulacij	Vaja
2009/10	Laboratorij za regulacijsko tehniko	8

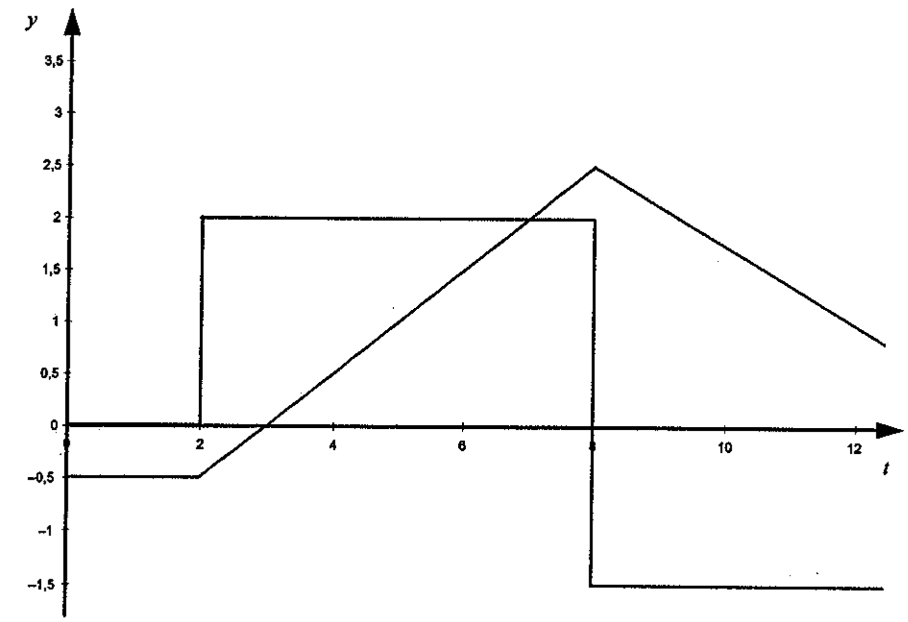
VAJA A–8

Iz podane prehodne funkcije ugotovite pripadajočo prenosno funkcijo $F(s)$.

a) stran 3

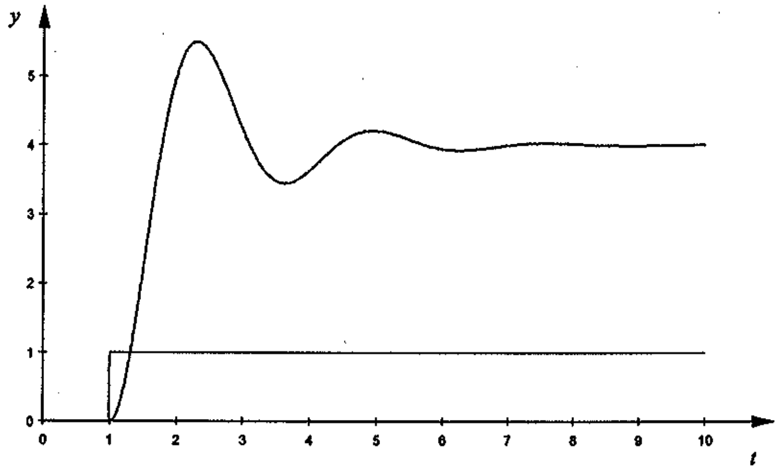


b) stran 4

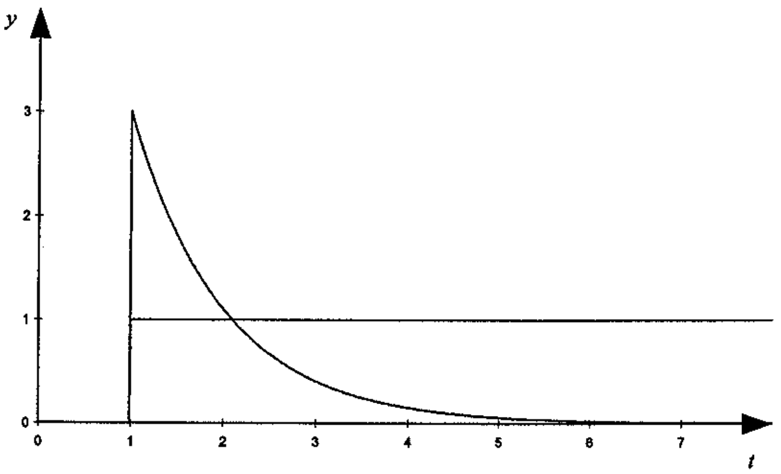


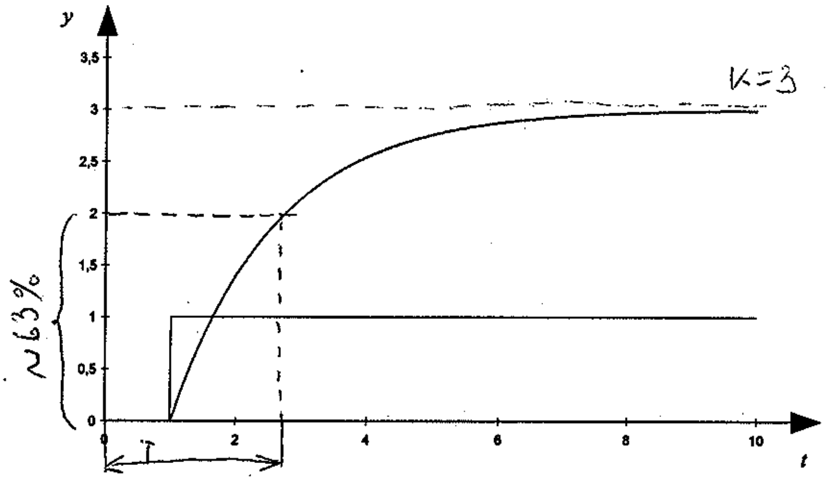
Ime in priimek:	Datum:	Stran:
Blaž Potočnik		1/6

c) stran 5



d) stran 6





- Faktor statičnega ojačanja K

$$K = \frac{x_{izhod}}{x_{vhod}}\bigg|_{t\to\infty} = 3$$

- Časovna konstanta – čas, v katerem izhodna veličina doseže 63,3% končne vrednosti.

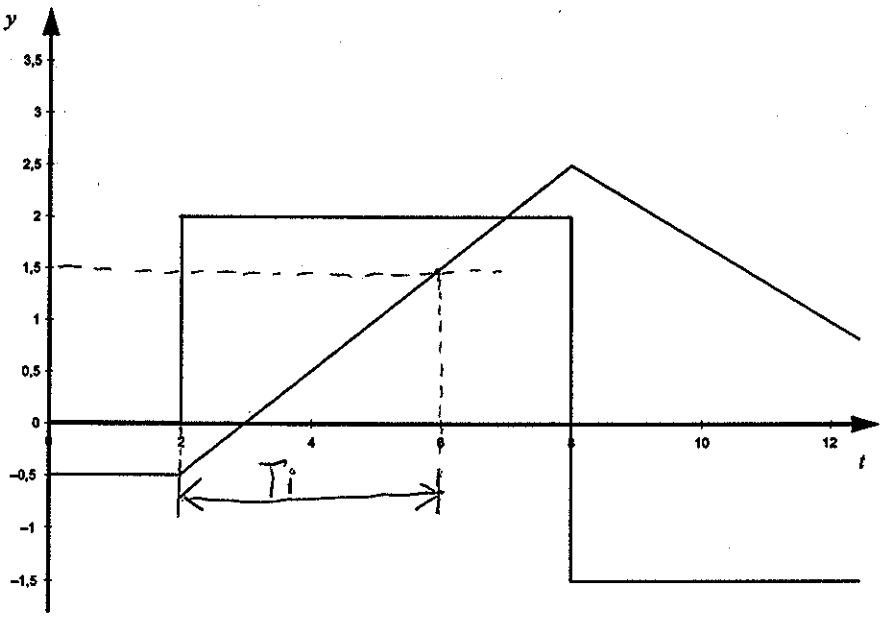
$T \doteq 2,5$

- Člen prvega reda

$$F_1(s) = \frac{K}{1+sT}$$

- Rešitev

$$F_1(s) = \frac{3}{1+2,5\,s}$$



- Odziv integratorja na stopnico

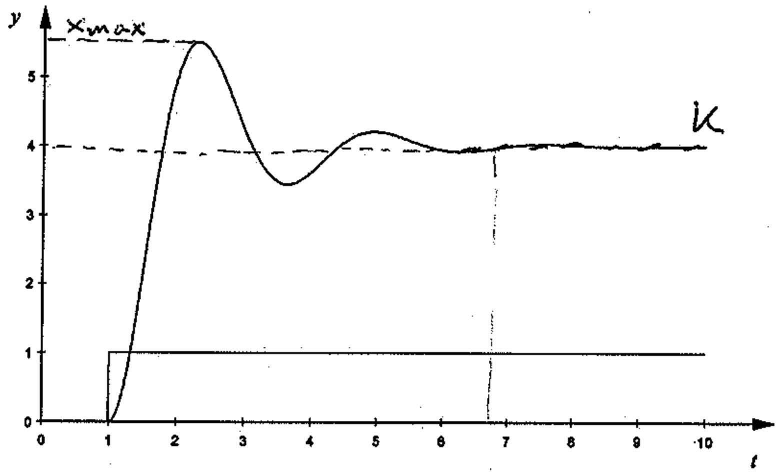
$$F_i(s) = \frac{1}{sT_i}$$

- Časovna konstanta - čas v katerem integrator doseže vrednost na vhodu (če štarta iz ∅).

$T_i = 4$

- Prenosna funkcija

$$F_i(s) = \frac{1}{s4}$$



- Drugi red

$$F_2(s) = \frac{K}{1 + s2zT + s^2T^2}$$

- Ojačanje K

$$K = \frac{X_{out}}{X_{in}}\Big|_{t \to \infty} = 4$$

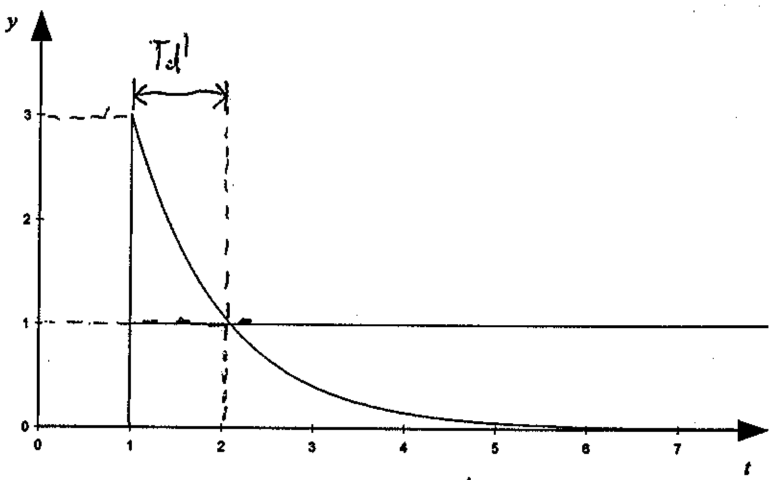
$$A_{pr} = \frac{X_{max} - X(t=\infty)}{X(t=\infty)} = 0{,}04$$

- Monogram v knjigi, stran 58, slika 2.18
Od tu odčitamo dušenje $z = 0{,}3$
- Časovna konstanta je odvisna od T_L. T_L odčitamo.

$T_L = 2{,}6$

$$T = \frac{T_L\sqrt{1 - z^2}}{2\pi} = 0{,}4$$

- $$F_2(s) = \frac{4}{1 + s0{,}24 + s^2 0{,}16}$$



- Odziv realnega diferencialnega člena na stopnico.

$$F_d(s) = \frac{sT_d}{1+sT_d}$$

- T_d' je čas, ko izhod pade za 63,3%

$T_d' = 1$

- Amplituda konice izhoda je definirana kot

$$\frac{T_d}{T_d'} \Rightarrow T_d = 3$$

- Prenosna funkcija ima obliko

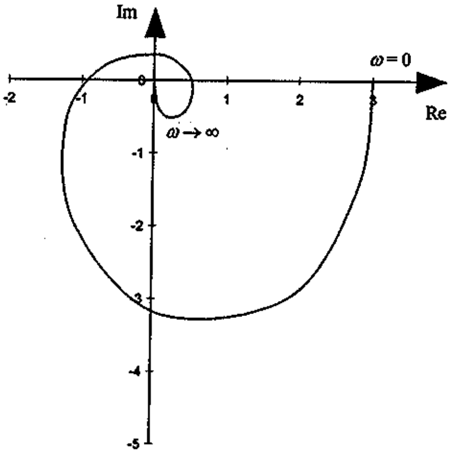
$$F_d(s) = \frac{s3}{1+s3}$$

Študijsko leto	Digitalna krmilja in teorija regulacij	Vaja
2009/10	Laboratorij za regulacijsko tehniko	9

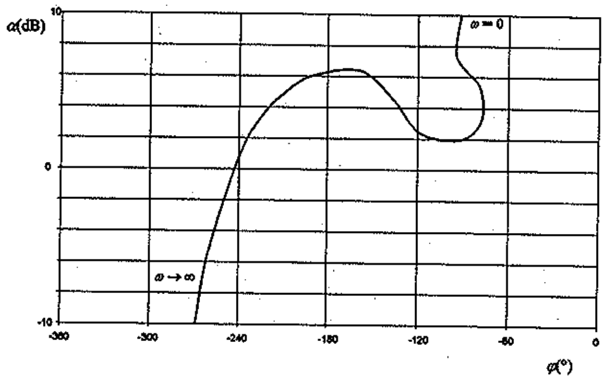
VAJA A–9

Ugotovite značilne podatke (statično ojačenje K, število integracij m, število diferenciacij k, red sistema $m + n - k$) za člene z naslednjimi karakteristikami:

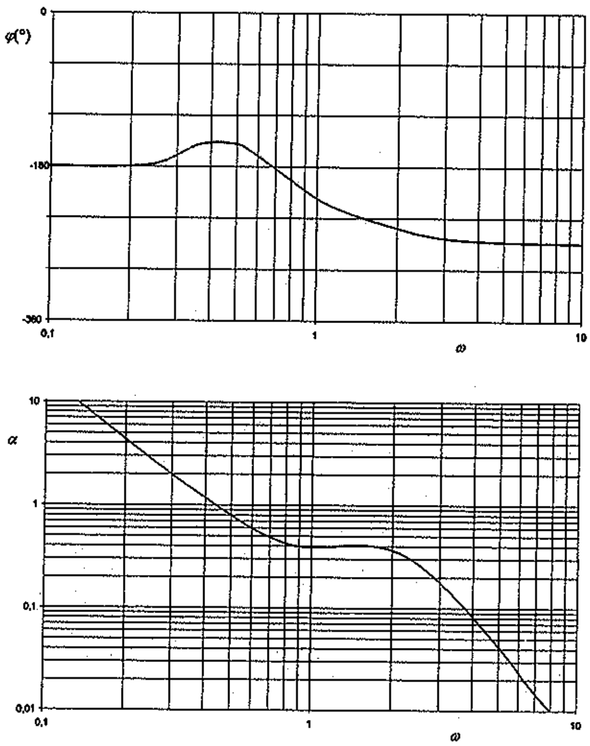
a) stran 2



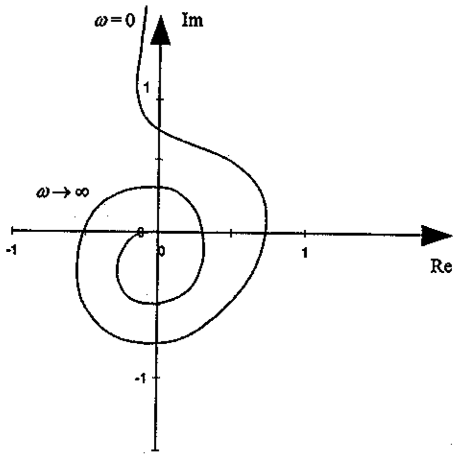
b) stran 3



c) stran 4

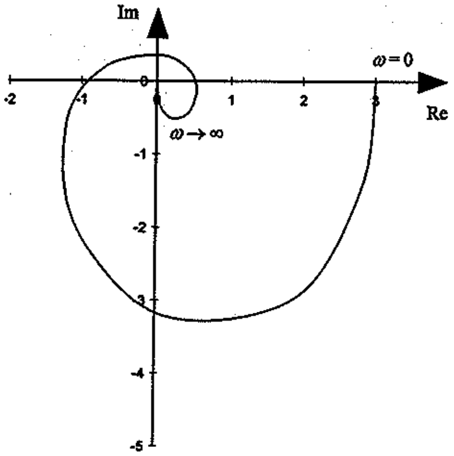


d) stran 5



Ime in priimek:	Datum:	Stran:
Blaž Potočnik		1/5

a)



- statično ojačanje pri $\omega = \emptyset$.
  $K = 3$.
- Integracij ni, ker začnemo pri $\emptyset°$ in lahko odčitamo K.

$m = \emptyset$

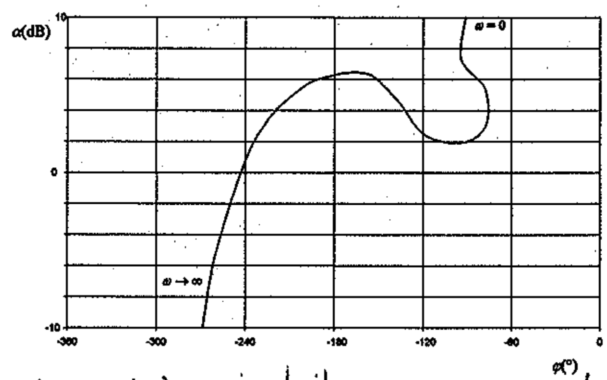
- Diferenciacij ni, ker nikjer nimamo pozitivnega faznega zasuka.

$k = \emptyset$

- sistem je 5. reda, ker frekvenčna karakteristika tangira na $-450°$, ko gre $\omega \to \infty$

$m + n - k = 5$

b)



- Ne moremo določiti statičnega ojačanja, ker je v sistemu integrator.

$K = /$

- Karakteristika vsebuje eno integracijo, ker člen pri majhnih ω prihaja od neskončnosti pri $-90°$.

$m = 1$

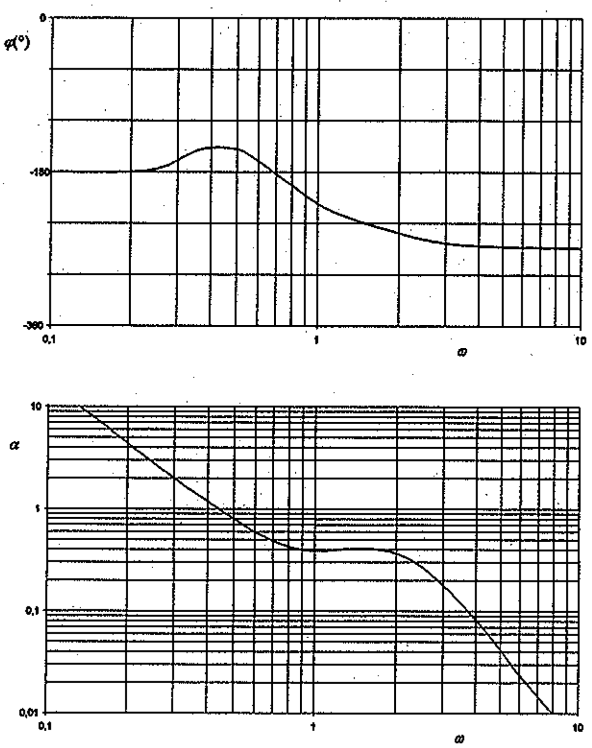
- Diferencialni člen obstaja, ker opazimo zmanjšanje faznega zaostanka, ko gremo k višjim frekvencah.

$k > \emptyset$

- Sistemu pripišemo III. red, ker karakteristika tangira k $-270°$, ko gre $\omega \to \infty$

$m + n - k = 3$

c)



- Nedoložljivo statično ojačanje K, ker imamo integrator.

$K = /$

- Dve integraciji, ker člen pri majhnih ω prihaja od neskončnosti pri $-180°$.

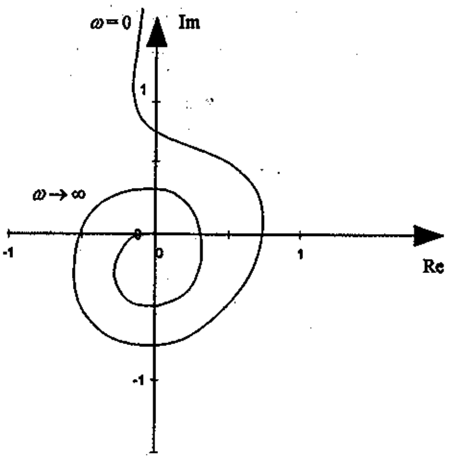
$m = 2$

- Obstaja diferencialni člen, ker je opazno zmanjšanje faznega zaostanka pri višjih frekvencah.

- Sistem III. reda, ker frekvenčna karakteristika tangira na $-270°$, ko $\omega \to \infty$

$m + n - k = 3$

d)



- Imamo integrator in statično ojačanje ni določljivo

$k = /$

- Tri integracije, ker člen pri majhnih ω prihaja (karakteristika prihaja) od neskončnosti pri $-270°$.

$m = 3$

- Dif. člen obstaja, ker je opazno zmanjšanje faznega zaostanka, ko gremo k višjim frekvencam.

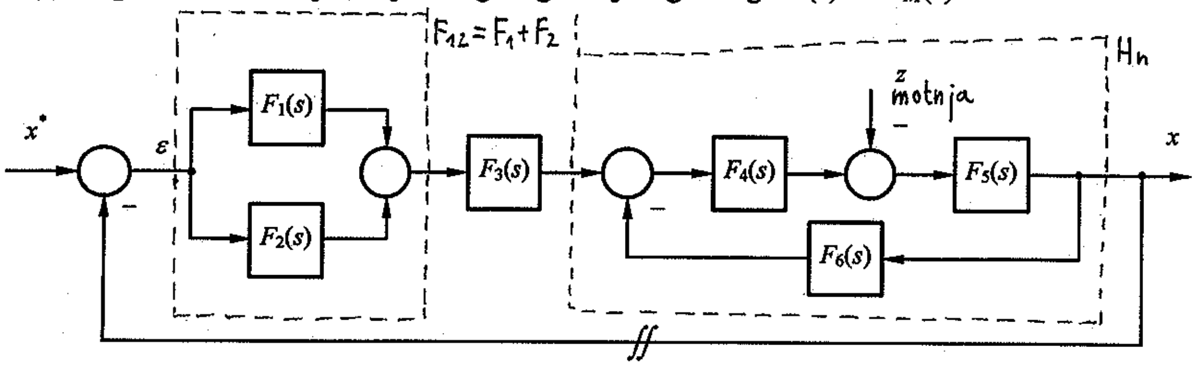
$k > 0$

- sistem je X. reda, ker frekvenčna karakteristika tangira na $-900°$, ko gre $\omega \to \infty$.

$m + n - k = 10$

VAJA A–10

Za podano blokovno shemo ugotovite prenosni funkciji odprtega regulacijskega kroga $F_o(s)$ in $F_M(s)$ ter prenosni funkciji zaključenega regulacijskega kroga $H(s)$ in $H_M(s)$!



- $H_n = \dfrac{F_4 \cdot F_5}{1 + F_{on}}$ $\qquad F_{on} = F_4 \cdot F_5 \cdot F_6$

  $H_n = \dfrac{F_4 \cdot F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}$

- $F_{12} = F_1 + F_2$

- $\Big\{\big[(x^* - x)\cdot(F_1+F_2)\cdot F_3 - x \cdot F_6\big]\cdot F_4 - z\Big\}\cdot F_5 = X$

- sistem brez motnje s prekinjeno povratno zvezo

  $\Big\{\big[(x^* - \emptyset)\cdot(F_1+F_2)\cdot F_3 - x \cdot F_6\big]\cdot F_4 - \emptyset\Big\} F_5 = X$

  ni povratne zveze

  to je povratna zveza notranjega dela Hn, katera pa ni prekinjena

  ni motnje

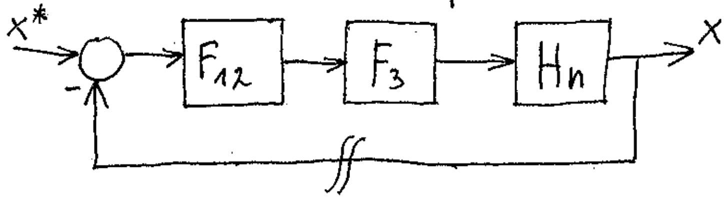
$$[X^*(F_1+F_2)F_3 - X F_6] F_4 F_5 = X$$

$$X^*[F_1 F_3 F_4 F_5 + F_2 F_3 F_4 F_5] - X F_6 F_4 F_5 = X$$

Prenosna funkcija za prekinjeno povratno zvezo:

$$\boxed{F_0(s) = \frac{X(s)}{X^*(s)} = \frac{F_1 F_3 F_4 F_5 + F_2 F_3 F_4 F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}}$$

Enako dobimo po sledečem postopku:



$$F_0 = F_{12} F_3 H_n$$

$$F_0 = (F_1 + F_2) \cdot F_3 \cdot \frac{F_4 \cdot F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}$$ To pa je isto!

- Sistem brez motnje s sklenjeno povratno zvezo:

$$H(s) = X(s) / X^*(s)$$

$$H(s) = \frac{F_0}{1 + F_0}$$

$$= \frac{\dfrac{(F_1+F_2) F_3 F_4 F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}}{1 + \dfrac{(F_1+F_2) F_3 F_4 F_5}{1 + F_4 F_5 F_6}}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{(F_1+F_2)F_3F_4F_5}{1+F_4F_5F_6+(F_1+F_2)F_3F_4F_5}}$$

- zapišimo še prenosni f-ji za sistem z motnjo. Na vhodu ni signala ($x^* = \emptyset$) in povratna vez je prekinjena.

$$\left[\left\{\cancel{(\emptyset-\emptyset)(F_1+F_2)F_3} - xF_6\right\}F_4 - z\right]F_5 = x$$

$$-xF_6F_4F_5 - zF_5 = x$$

$$x(-F_4F_5F_6-1) = zF_5$$

$$\boxed{F_M(s) = \frac{x}{z} = \frac{-F_5}{1+F_4F_5F_6}}$$

- sklenjena pov. vez, motnja

$$\boxed{H_M = \frac{F_M}{1+F_0}}$$

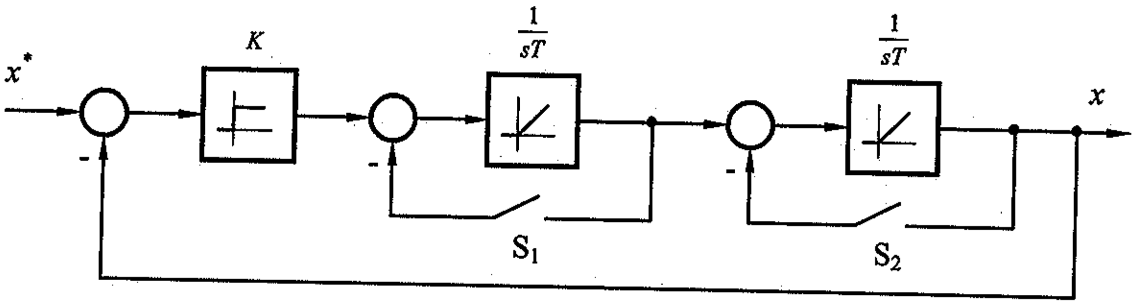
$$H_M = \frac{\dfrac{-F_5}{1+F_4F_5F_6}}{1+\dfrac{(F_1+F_2)F_3F_4F_5}{1+F_4F_5F_6}}$$

$$\boxed{H_M = \frac{-F_5}{1+F_4F_5F_6+(F_1+F_2)F_3F_4F_5}}$$

Študijsko leto	**Digitalna krmilja in teorija regulacij**	Vaja
2009/10	Laboratorij za regulacijsko tehniko	11

VAJA A–11

Za podano blokovno shemo ugotovite statični pogrešek ε_s pri različnem številu integracij v regulacijskem krogu (0, 1, 2):



Upoštevajte naslednje vrednosti: $K = 1$, $K = 10$; $T = 1$

a) na skočno spremembo želene vrednosti (enotina stopnica),

b) za enakomerno naraščajočo spremembo želene vrednosti (enotina rampa).

a) ni integratorjev - stikali sta sklenjeni

$$\varepsilon_s = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot (1 - H(s)) X^*(s) \right] = \lim_{s \to 0} \left[s \left(\frac{1+F_0}{1+F_0} - \frac{F_0}{1+F_0} \right) X(s) \right] =$$

$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{1}{1+F_0} \cdot X^* \right]}$$

Statična napaka pri vodenih regulacijah z direktno povratno zvezo.

- $X^* = \frac{1}{s}$

$$F_0 = K \cdot \frac{1}{1+s \cdot 1} \cdot \frac{1}{1+s \cdot 1}$$

Integrator z direktno povratno zvezo je člen I. reda!

Ime in priimek:	Datum:	Stran:
Blaž Potočnik		1/3

$$\varepsilon_s = \lim_{s\to 0}\left[s \cdot \frac{1}{1+K\frac{1}{1+s}\cdot\frac{1}{1+s}} \cdot \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{1+K}$$

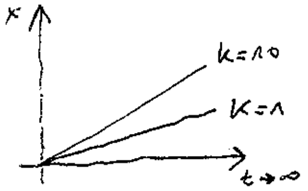
Sledi torej

$\varepsilon_s = 50\%$, kadar $K = 1$

$\varepsilon_s = 9\%$, kadar $K = 10$

- $X^* = \frac{1}{s^2}$

$$\varepsilon_s = \lim_{s\to 0}\left[s \cdot \frac{1+2s+s^2}{1+2s+s^2+K} \cdot \frac{1}{s^2}\right] = \infty \quad \Big| \begin{array}{l} K=1 \\ \text{ali} \\ K=10 \end{array}$$



b) en integrator

- $X^* = \frac{1}{s}$

$$F_0(s) = K \cdot \frac{1}{sT} \cdot \frac{1}{1+sT}$$

$$= K \cdot \frac{1}{(1+sT)sT} = \frac{K}{sT+s^2T_2}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{s\to 0}\left[s \cdot \frac{1}{1+F_0(s)} \cdot X^*\right] = \lim_{s\to 0}\left[s \cdot \frac{1}{1+\frac{K}{sT+s^2T^2}} \cdot X^*\right]$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[s \cdot \frac{sT+s^2T^2}{sT+s^2T^2+K} \cdot X^*\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[\cancel{s} \cdot \frac{sT+s^2T^2}{sT+s^2T_2+K} \cdot \frac{1}{\cancel{s}}\right] = 0 \quad \Big| \begin{array}{l} K=1 \\ \text{ali} \\ K=10 \end{array}$$

- $X^* = \frac{1}{s^2}$

$$\varepsilon_s = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{sT + s^2T^2}{sT + s^2T^2 + K} \cdot \frac{1}{s^2} \right] = \frac{1}{K}$$

$$\varepsilon_s \big|_{K=1} = 100\% \quad , \quad \varepsilon_s \big|_{K=10} = 10\%$$

c) dva integratorja

Predelamo v .

$$X^* \to \boxed{H(s)} \to X \qquad H(s) = \frac{F_0(s)}{1 + F_0(s)}$$

$$F_0 = K \cdot \frac{1}{sT} \cdot \frac{1}{sT} = \frac{K}{s^2T^2}$$

$$H(s) = \frac{\frac{K}{s^2T^2}}{1 + \frac{K}{s^2}} = \frac{\frac{K}{s^2T^2}}{\frac{T^2s^2 + K}{s^2T^2}} = \frac{K}{T^2s^2 + K}$$

$$X = X^* \cdot H(s)$$

$$X = \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{T^2s^2 + K}$$

$$x(t) = \frac{1}{K}\left(1 - \cos\left(\sqrt{K} \cdot t\right)\right)$$

Frekvenca izhodnega signala je odvisna od ojačanja.

Študijsko leto	**Digitalna krmilja in teorija regulacij**	Vaja
2009/10	Laboratorij za regulacijsko tehniko	12

VAJA A–12

Za podano prenosno funkcijo odprtega regulacijskega kroga ugotovite z Routhovim kriterijem, ali je zaključen regulacijski krog stabilen.

$$F_o(s) = \frac{2(1+1{,}5s)}{s(1+0{,}1s)(1+2s+4s^2)}$$

• karakteristična enačba

$$1 + F_o(s) = 0$$

$$1 + \frac{2(1+1{,}5s)}{s(1+0{,}1s)(1+2s+4s^2)} = 0$$

$$s(1+0{,}1s)(1+2s+4s^2) + 2(1+1{,}5s) = 0$$

$$0{,}4s^4 + 4{,}2s^3 + 2{,}1s^2 + 4s + 2 = 0$$

s^4	0,4	2,1	2
s^3	4,2	4	0
s^2	1,719	2	
s^1	−0,8866	0	
s^0	2		

postopek (knjiga 149)

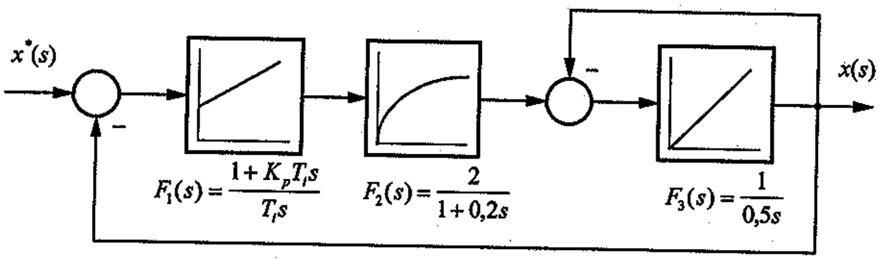
s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4} ...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5} ...
s^{n-2}	W	...	...
$\vdots$			

$$W = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-2}) - (a_n \cdot a_{n-3})}{a_{n-1}}$$

Vsi elementi prvega stolpca NISO istega predznaka, zato ima enačba enega ali več Re^+ korenov. To pa pomeni, da sistem ni stabilen.

VAJA A–13

Za podano blokovno shemo izračunajte mejno stabilnostno krivuljo. Potem se prepričajte še, ali je regulacijski sistem stabilen za $K_p = 2$ in $T_i = 3$, in to po Routhovem stabilnostnem kriteriju!



$T_{ip} = K_pT_i$

- Integrator z negativno povratno zanko je člen prvega reda

$$F_3'(s) = \frac{1}{1+0,5s}$$

- Karakteristična enačba

$$1 + F_0(s) = 0$$

$$1 + \frac{1+K_pT_is}{T_is} \cdot \frac{2}{1+0,2s} \cdot \frac{1}{1+0,5s} = 0$$

$$T_is(1+0,2s)(1+0,5s) + 2(1+K_pT_is) = 0$$

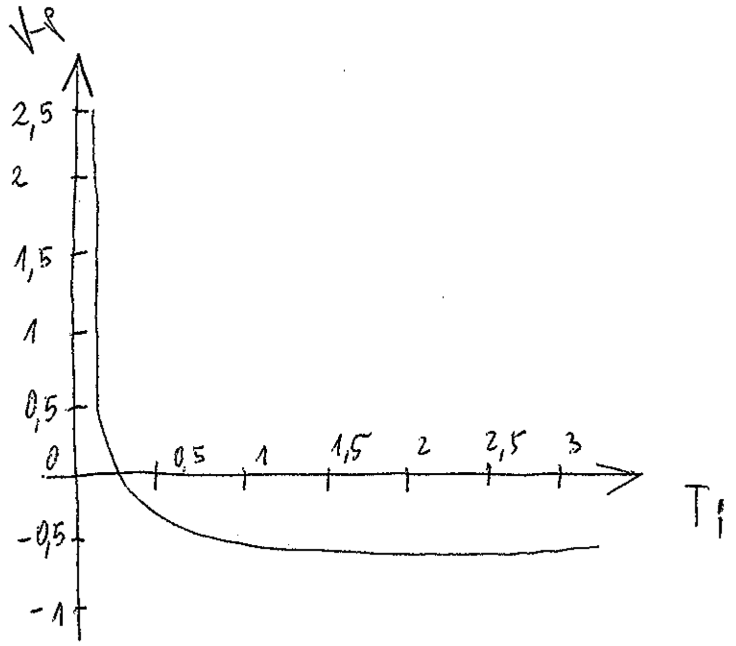
$$0,1T_is^3 + 0,7T_is^2 + [T_i + 2K_pT_i]s + 2 = 0$$

- Za določitev mejne stabilnostne krivulje uporabimo Hurwitzov kriterij (knjiga 147)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0{,}7\,T_i & 2 \\ 0{,}1\,T_i & T_i + 2K_p T_i \end{vmatrix} > 0$$

$$(0{,}7 + 1{,}4\,K_p)\,T_i^2 - 0{,}2\,T_i > 0$$

$$K_p > \frac{0{,}2 - 0{,}7\,T_i}{1{,}4\,T_i} =$$



Routhov kriterij:

Karakteristična enačba

$0{,}3s^3 + 2{,}1s^2 + 15s + 2 = 0$

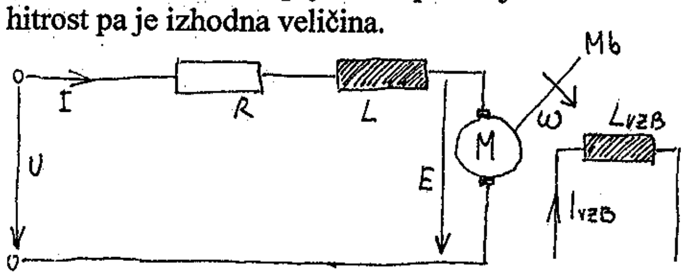
s^3	0,3	15
s^2	2,1	2
s^1	14,71	0
s^0	2	

Enačba nima korenov s pozitivnimi realnimi deli.

Sistem je stabilen

VAJA A–14

Izpeljite prenosno funkcijo tujevzbujanega enosmernega motorja in podajte pripadajočo blokovno shemo. Napajalna napetost je vhodna veličina, bremenski navor je motnja, vrtilna hitrost pa je izhodna veličina.



- $F(s) = \dfrac{\omega(s)}{U(s)} = \dfrac{n(s)}{U(s)}$
- $F_M(s) = \dfrac{\omega(s)}{M_b(s)}$

- Mehanika:

$M - M_b - M_D = \emptyset$

$M_D = J \dfrac{d\omega}{dt}$

$M = k \cdot \emptyset \cdot I$, kjer $\emptyset$ konst. pri tujevzbujanem motorju

Normiramo na kratkostično vrednost navora.

$M_k = M_N \dfrac{I_k}{I_N}$, kjer $I_k = \dfrac{U_N}{R}$

$$\frac{M_D}{M_k} = \frac{J}{M_k}\frac{d\omega}{dt} = \frac{J\omega_0}{M_k}\frac{d(\omega/\omega_0)}{dt} = T_z \frac{d(\omega/\omega_0)}{dt} =$$

$$= T_z \frac{d(n/n_0)}{dt}$$

T_z .... zagonska časovna konstanta
n_0 .... hitrost prostega teka

$$\boxed{\frac{I}{I_K} - \frac{M_b}{M_K} - T_z \frac{d(n/n_0)}{dt} = \emptyset}$$

To je linearizirana mehanska karakteristika motorja.

• Določitev delovne točke

$I = I_0 + \Delta I \qquad I_0 = \emptyset$

$M_b = M_{b0} + \Delta M_b \qquad M_{b0} = \emptyset$

$n = n_0 + \Delta n \qquad$ (prosti tek)

$$\frac{I}{I_K} - \frac{M_b}{M_K} - T_z \frac{d(n/n_0)}{dt} = \emptyset \rightarrow \frac{\Delta I}{I_K} - \frac{\Delta M_b}{M_K} - T_z \frac{d(\Delta n/n_0)}{dt} = \emptyset$$

$$\boxed{\mathcal{L}: \frac{\Delta I}{I_K}(s) - \frac{\Delta M_b}{M_K}(s) = T_z \cdot s \cdot \frac{\Delta n}{n_0}(s)}$$

• Električni del

$$U = IR + L\frac{dI}{dt} + E$$

$$\frac{U}{R} = I + \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} + \frac{E}{R} \qquad \text{normiramo na kratkostični tok}$$

$$I_K = \frac{U_N}{R}$$

$$\frac{U}{R \cdot I_k} = \frac{I}{I_k} + \frac{L}{R}\frac{d(I/I_k)}{dt} + \frac{E}{R\, I_k} =$$

$$= \frac{I}{I_k} + T_k \frac{d(I/I_k)}{dt} + \frac{E}{R\, I_k}$$

$T_k = L/R$ je časovna konstanta kotve

$$\frac{U}{U_N} = \frac{I}{I_k} + T_k \frac{d(I/I_k)}{dt} + \frac{E}{U_N}$$

$E = k_2 \cdot n \cdot \phi = k_3 \cdot n$, ker $\phi = \text{konst.}$

- Določitev delovne točke

$U = U_n + \Delta U$ $\qquad E_0 = U_N$

$I = I_0 + \Delta I$ $\qquad I_0 = 0$

$E = E_0 + \Delta E$ $\qquad$ (prosti tek)

$$\frac{U}{U_N} = \frac{I}{I_k} + T_k \frac{d(I/I_k)}{dt} + \frac{E}{U_N}$$

$$\frac{\Delta U}{U_N} = \frac{\Delta I}{I_k} + T_k \frac{d(\Delta I/I_k)}{dt} + \frac{\Delta n}{n_0}$$

$$\boxed{\mathcal{L}: \frac{\Delta U}{U_N}(s) = \frac{\Delta I}{I_k}(s) + T_K \cdot s \cdot \frac{\Delta I}{I_k}(s) + \frac{\Delta n}{n_0}(s)}$$

• Normiramo zapis

$$\frac{\Delta U}{U_n}(s) = u(s) \qquad \frac{\Delta n}{n_0}(s) = n(s)$$

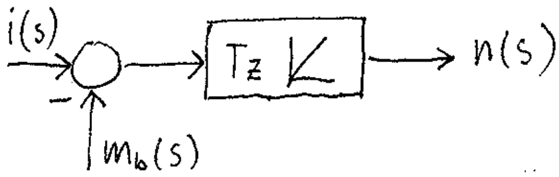
$$\frac{\Delta I}{I_k}(s) = i(s) \qquad \frac{\Delta M_b}{M_k}(s) = m_b(s)$$

– Mehanika

$$\frac{\Delta I}{I_k}(s) - \frac{\Delta M_b}{M_k}(s) = T_z \cdot s \cdot \frac{\Delta n}{n_0}(s)$$

$$i(s) - m_b(s) = T_z \cdot s \cdot n(s)$$

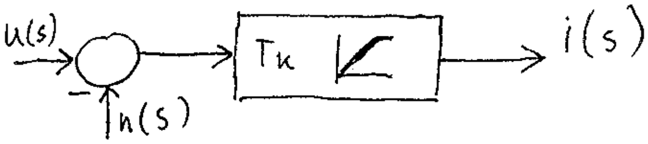
$$\boxed{\frac{n(s)}{i(s) - m_b(s)} = \frac{1}{s T_z}}$$



– Električni del

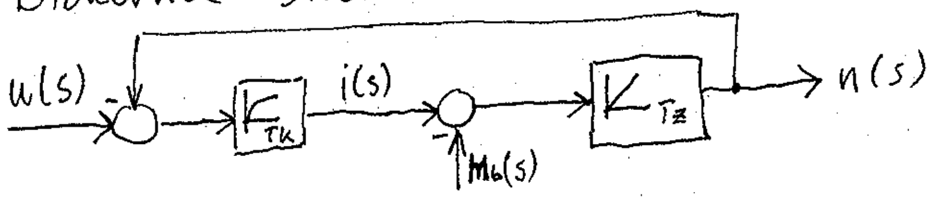
$$\frac{\Delta U}{U_n}(s) = \frac{\Delta I}{I_k}(s) + T_k \cdot s \cdot \frac{\Delta I}{I_k}(s) + \frac{\Delta n}{n_0}(s)$$

$$u(s) = i(s) + T_k s\, i(s) + n(s)$$



$$\boxed{\frac{i(s)}{u(s) - n(s)} = \frac{1}{1 + s T_k}}$$

- Blokovna shema



- Prenosni funkciji

$$F(s) = \frac{n(s)}{u(s)}$$

$$F_0(s) = \frac{1}{1+sT_K}\,\frac{1}{sT_Z} \longrightarrow \boxed{F(s) = \frac{1}{1+sT_Z+s^2T_ZT_K}}$$

$$F_m(s) = \frac{n(s)}{m_b(s)}$$

$$\boxed{F_m(s) = -\frac{1+sT_K}{1+sT_Z+s^2T_ZT_K}}$$

Študijsko leto	**Digitalna krmilja in teorija regulacij**	Vaja
2009/10	Laboratorij za regulacijsko tehniko	15

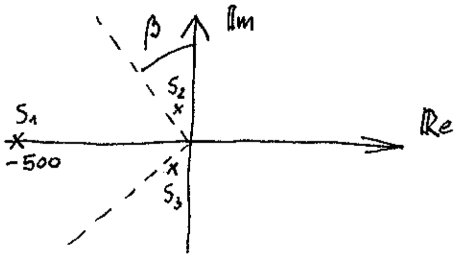
VAJA A–15

Nek regulacijski krog ima korene karakteristične enačbe:

$s_1 = -500 \quad s_{2,3} = -0{,}35 \pm j109$

Ugotovite absolutno dušenje d, relativno dušenje ρ, čas polperiode lastnega nihanja T_{pp}, relativni regulacijski čas τ_r in regulacijski čas t_r.

$x(t) = C_1 + C_2 e^{-at} + C_3 e^{-bt} \cdot \sin(ct + \varphi)$



$a = 500$

$b = 0{,}35$

$c = 109$

- absolutno dušenje: $d = b$, $d = 0{,}35$
- čas polperiode T_{pp}

  $c = \omega$

  $\omega = 2\pi f$

  $\omega = 2\pi / T_{periode}$

  $T_{pp} = T_{periode}/2 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{109} = 0{,}02882$

- regulacijski čas t_r

  $t_r = \pi \cdot T$

  $T = 1/b$

  $t_r = 8{,}976$

Vrednosti bližje Im osi prevladujejo.

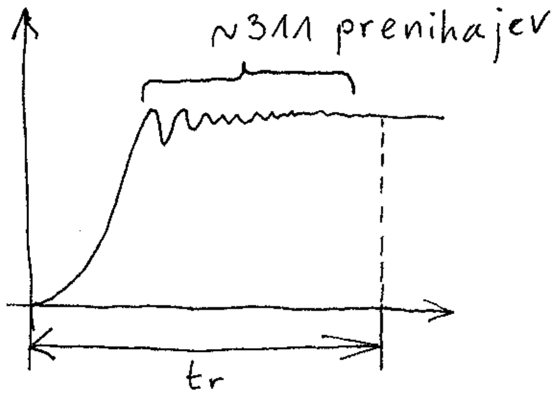
Ime in priimek:	Datum:	Stran:
Blaž Potočnik		1/2

- relativni regulacijski čas τ_r
  to je število polperiod v regulacijskem času tr

  $$\tau_r = \frac{t_r}{T_{pp}} = 311,4$$

- relativno dušenje ρ

  $$\rho = \frac{1}{\tau_r} = 0,0032$$

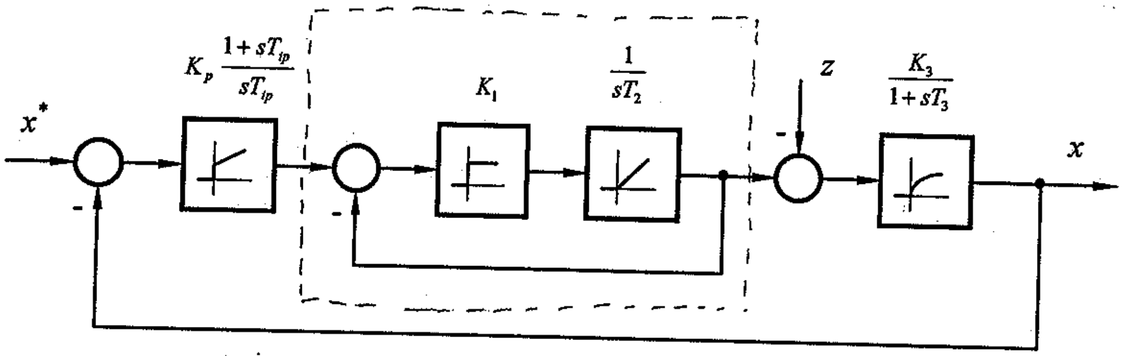


VAJA A–16

Za podano blokovno shemo regulacijskega kroga optimirajte konstanti PI-regulatorja:

a) za vodeno regulacijo, (optimum iznosa)
b) za regulacijo s konstantno želeno vrednostjo (simetrični optimum)
c) za regulacijo s konstantno želeno vrednostjo z možnostjo skočne spremembe slednje (gladilni člen)

Dokažite doseženo stabilnost še z Routhovim kriterijem!



$K_1 = 2$ $T_2 = 0{,}03$ $K_3 = 3$ $T_3 = 2$

- Prenosna funkcija reguliranca.

Poenostavitev – integrator + proporcionalni člen → → člen I. reda.

$$F = \frac{1}{1 + s(T_2/K_1)}$$

- Regulator PI:

$$F_R = K_p \frac{1 + sT_{ip}}{sT_{ip}}$$

a) Optimum iznosa za vodeno regulacijo

$$F_s = \frac{1}{1+s(T_2/K_1)} \cdot \frac{K_3}{1+sT_3}$$

$$F_s = \frac{1}{1+s\frac{0{,}03}{2}} \cdot \frac{3}{1+s2}$$

Določimo konstante regulatorja. Glej v skripti, stran 106, enačba 7.5.

$$\boxed{\begin{aligned} K_p &= \frac{T_1}{2K_sT_N} \\ T_i &= T_1 \end{aligned}}$$

$$K_p = \frac{T_1}{2K_sT_N} = \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 0{,}015} = 22{,}2$$

$$T_i = T_1 = 2$$

$$F_R = K_p \frac{1+sT_{ip}}{sT_{ip}} = 22{,}2 \frac{1+2s}{2s}$$

$$F_o = F_s \cdot F_R = 22{,}2 \cdot \frac{1+2s^{*}}{2s} \cdot \frac{1}{1+0{,}015s} \cdot \frac{3}{1+2s}$$

$$F_o = 22{,}2 \cdot \frac{1}{2s^{*}} \cdot \frac{1}{1+0{,}015s} \cdot \frac{3}{1} = \frac{33{,}3}{s(1+0{,}015s)}$$

Stabilnost preverimo po Routhovem kriteriju.

$1 + F_0 = 0$

$\frac{33,3}{s(1+0,015s)} + 1 = 0$

$33,3 + s(1+0,015s) = 0$

$0,015s^2 + s + 33,3 = 0$

s^2	0,015	33,3
s^1	1	0
s^0	33,3	

Vsi predznaki v prvem stolpcu so enaki, torej je sistem stabilen.

b) konstantna željena vrednost
(simetrični optimum)

$$F_S = \frac{1}{1+s0{,}015} \cdot \frac{3}{1+s2}$$

Enačbe iz skripte (str. 106, en. 7.5)

$$K_p = \frac{T_1}{2K_sT_p} = \frac{2}{2\cdot 3\cdot 0{,}015} = 22{,}2$$

$$T_i = 4\,T_p = 0{,}06$$

$$F_R = K_p \cdot \frac{1+sT_{ip}}{sT_{ip}} = 22{,}2\,\frac{1+s\,0{,}06}{s\,0{,}06}$$

$$F_0 = F_S \cdot F_R = 22{,}2 \cdot \frac{1+s\,0{,}06}{s\,0{,}06} \cdot \frac{1}{1+s\,0{,}015} \cdot \frac{3}{1+s2}$$

Routhov kriterij

$$1 + F_0 = 0$$

$$22\,\frac{1+s0{,}06}{s\,0{,}06} \cdot \frac{1}{1+s0{,}015} \cdot \frac{3}{1+s2} + 1 = 0$$

$$\frac{1110\,(1+s0{,}06)}{s(1+s0{,}015)(1+s2)} = -1$$

$$0{,}03s^3 + 2{,}015\,s^2 + 67{,}6\,s + 1110 = 0$$

s^3	0,03	67,6	0
s^2	2,015	1110	0
s^1	51	0	
s^0	1110		

Sistem je stabilen.

c) Regulacija s konstantno željeno vrednostjo z gladilnim členom

Vhod je stopnica in odpraviti želimo vpliv motenj!

Pred reg. krog se doda gladilni člen. Torej člen I. reda. Ojačanje mora imeti 1, časovno konstanto določimo s pomočjo slike 7.14 na strani 113 (skripta)

$$\frac{T_1}{4T_N} = \frac{2}{4 \cdot 0{,}015} = 33{,}3$$

Razmerje je veliko, s slike razberemo, da je časovna konstanta 4x kratka časovna konstanta.

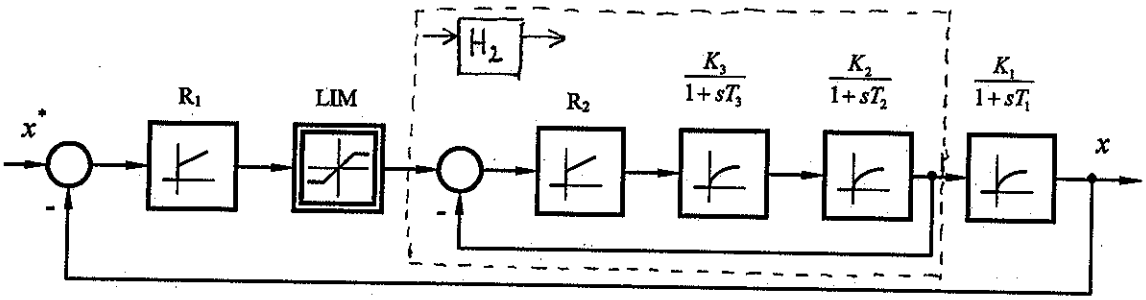
$T_{gl} = 4 \cdot T_N = 0{,}06$

Za regulator velja enako, kot pod točko b). Če je stabilen ~~sistem~~ sistem brez gladilnega člena, je stabilen tudi tak z gladilnim členom.

Študijsko leto	**Digitalna krmilja in teorija regulacij**	Vaja
2009/10	Laboratorij za regulacijsko tehniko	17

VAJA A–17 (skripta, str. 106)

Za podano blokovno shemo kaskadne regulacije optimirajte konstante regulatorjev R_1 in R_2. Dokažite doseženo stabilnost še z Routhovim kriterijem!



$K_1 = 1,\ T_1 = 3,\ K_2 = 1,\ T_2 = 0{,}5,\ K_3 = 1,\ T_3 = 0{,}08$

• najprej optimiramo notranji regulator R_2

$F_{R2} = K_{p2}\,\frac{1 + sT_{ip2}}{sT_{ip2}}$ Iščemo K_{p2} in T_{ip2} ob znanem notranjem regulirancu.

$$F_{S2} = \frac{K_3}{1 + sT_3} \cdot \frac{K_2}{1 + sT_2}$$

Računamo po optimumu iznosa. Teorija:

$K_p = \frac{T_1}{2K_s T_p}$ → dolga časovna konstanta

K_s → ojačanje reguliranca

$T_{ip} = T_1$

Dobimo:

$K_{p2} = 3{,}125$ $\qquad T_{ip2} = 0{,}5$

$$F_{R2} = 3{,}125 \cdot \frac{1 + 0{,}5s}{0{,}5s}$$

Ime in priimek:	Datum:	Stran:
Blaž Potočnik		1/4

$$F_{o2} = F_{R2} \cdot F_{s2} = 3{,}125 \cdot \frac{\cancel{1+0{,}5s}}{0{,}5s} \cdot \frac{1}{1+0{,}08s} \cdot \frac{1}{\cancel{1+0{,}5s}}$$

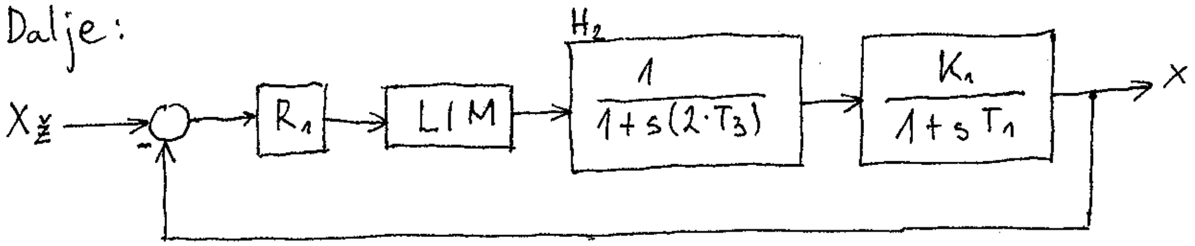
$$F_{o2} = \frac{6{,}25}{s(1+0{,}08s)}$$

$$H_2 = \frac{F_{o2}}{1+F_{o2}}$$ | to lahko naredimo, ker je povratna zanka direktna

$$H_2 \doteq \frac{1}{1+s(2 \cdot T_{kratka})} = \frac{1}{1+0{,}08 \cdot s \cdot 2} = \frac{1}{1+0{,}16s}$$

Dobili smo nadomestni blok za notranji reg. krog.

- Dalje:



Iščemo parametre za R_1

$$F_{R1} = K_p \frac{1+sT_{ip1}}{sT_{ip1}}$$

$$F_{s1} = H_2 \cdot \frac{K_1}{1+sT_1} = \frac{1}{1+2sT_3} \cdot \frac{K_1}{1+sT_1}$$

$K_{p1} = 9{,}375$

$T_{ip1} = 3$

$$F_{R1} = 9{,}375 \cdot \frac{1+3s}{3s}$$

$$F_{o1} = F_{R1} \cdot H_2 \cdot \frac{K_1}{1+sT_1}$$

$$F_{o1} = 9{,}375 \cdot \frac{1+3s}{3s} \cdot \frac{1}{1+0{,}16s} \cdot \frac{1}{1+3s}$$

$$H_1 = \frac{F_{o1}}{1+F_{o1}}$$ | ker je zanka direktna

$$H_1 = \frac{1}{1+4T_3} = \frac{1}{1+0{,}32s}$$

$$X_ž \longrightarrow \boxed{H_1} \longrightarrow X$$

- preverimo po Routhovem kriteriju..

karakt. enačba $1+F_{o1}=0$

$$H = \frac{F_2}{1+F_{o2}}$$

$$F_{o2} = F_{R2} \cdot F_2 \cdot F_3 = \frac{6{,}25}{s(1+s0{,}08)}$$

$$H = \frac{\frac{6{,}25}{s(1+0{,}08s)}}{1+\frac{6{,}25}{s(1+0{,}08s)}}$$

$$H = \frac{6{,}25}{6{,}25+s(1+s0{,}08)}$$

$$F_0 = F_{R1} \cdot H \cdot F_1$$

$$F_0 = 9{,}375 \; \frac{1+s3}{s3} \cdot \frac{6{,}25}{6{,}25 + s(1+s\,0{,}08)} \cdot \frac{1}{1+s3}$$

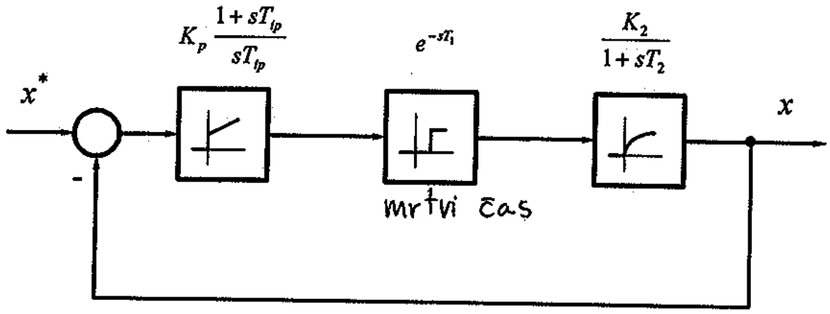
$$1 + F_0 = 0$$

s^3	0,0128	1	0
s^2	0,16	3,125	0
s^1	0,75	0	
s^0	3,125		

Sistem je stabilen.

VAJA A–18

Podanemu regulacijskemu krogu optimirajte konstanti PI-regulatorja za vodeno regulacijo.



$T_1 = 0{,}05$ $K_2 = 3$ $T_2 = 0{,}2$

Ker gre za vodeno regulacijo, izberemo metodo optimuma iznosa.

• regulator

$$F_R = K_p \frac{1+sT_{ip}}{sT_{ip}}$$

• regulaliranec

$$F_S = e^{-sT_1} \cdot \frac{K_2}{1+sT_2} = e^{-s0{,}05} \frac{3}{1+s0{,}2}$$

Prenosna funkcija oblike

$$\boxed{F_S = \frac{e^{-sT_1}}{1+sT_2}}$$

str. 108: 7.11 in 7.13 (listi), tudi v knjigi Regulacije str. 258, en. 5.52 in 5.54

Ker v tej enačbi (za regaliranec) ojačanje ne nastopa, ga prenesemo k regulatorju

$$F_R' = K_p \cdot K_2 \cdot \frac{1+sT_{ip}}{sT_{ip}}$$

- Izračunamo A:

$$A = \frac{T_1}{T_2} \longrightarrow A = \frac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25$$

- Izračun K_p:

$$\boxed{K_R = \frac{1}{4} \frac{6A^3 + 6A^2 + 3A + 1}{3A^2 + 3A + 1}}$$

$$K_p K_2 = \frac{1}{4} \frac{6A^3 + 6A^2 + 3A + 1}{3A^2 + 3A + 1} = \frac{1}{4} \frac{6 \cdot 0{,}25^2 + 6 \cdot 0{,}25^2 + 3 \cdot 0{,}25 + 1}{3 \cdot 0{,}25^2 + 3 \cdot 0{,}25 + 1}$$

$$K_p = \frac{0{,}286}{K_2} = \frac{0{,}286}{3} = 0{,}0954$$

- Izračun T_{ip}:

$$T_{ip} = \frac{T_1}{3} \frac{6A^3 + 6A^2 + 3A + 1}{2A^2 + 2A + 1}$$

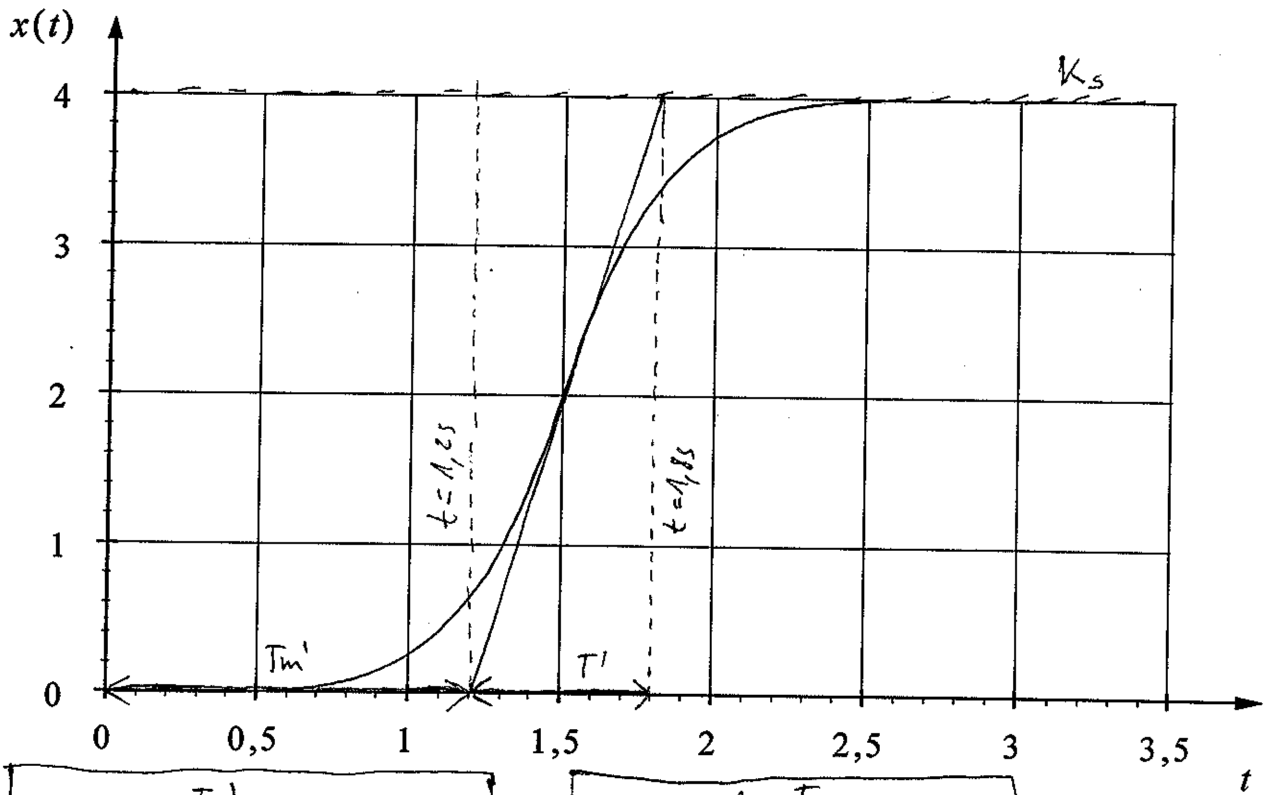
$$T_{ip} = \frac{0{,}05}{3} \cdot \frac{6 \cdot 0{,}25^3 + 6 \cdot 0{,}25^2 + 3 \cdot 0{,}25 + 1}{2 \cdot 0{,}25^2 + 2 \cdot 0{,}25 + 1}$$

$$= 0{,}0228$$

- $F_R = 0{,}0954 \cdot \dfrac{1 + s0{,}0228}{s0{,}0228}$

VAJA A–19

Regulirancu v procesni regulaciji smo ugotovili podano prehodno funkcijo. Optimirajte konstanti PI-regulatorja po priporočilih, ki jih navajata Ziegler in Nichols.



reguliranec: $F_s = e^{-sT_m'} \cdot \dfrac{K_s}{1+sT'}$

regulator: $F_R = \dfrac{1+sT_{ip}}{sT_{ip}} \cdot K_p$

Iz prehodne funkcije razberemo

$K_s = 4 \qquad T_m' = 1,2\ s \qquad T' = 0,6\ s$

tabela, str. 103, priloga

$K_p = 0,9\ \dfrac{T'}{K_s \cdot T_m'} = 0,1125 \qquad F_R = 0,1125 \cdot \dfrac{1+3,96\ s}{3,96\ s}$

$T_{ip} = 3,3\ T_m' = 3,96$

Ime in priimek: Blaž Potočnik

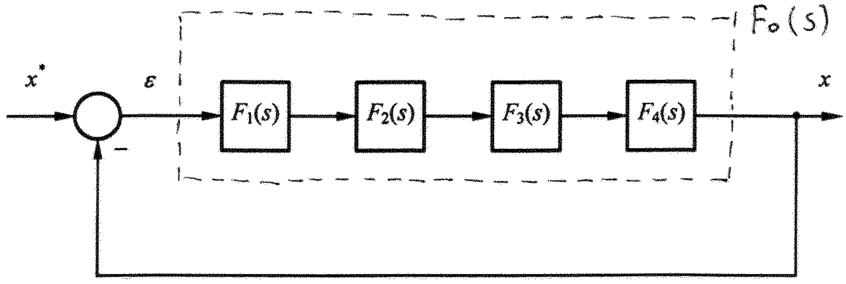
Datum:

Stran: 1/1

VAJA A–20

Za podani regulacijski krog ugotovite optimalno konstanto P–regulatorja K_p ob upoštevanju kriterija

$\alpha_{rezervni} = 0{,}6 \quad \varphi_{rezervni} = 30°$



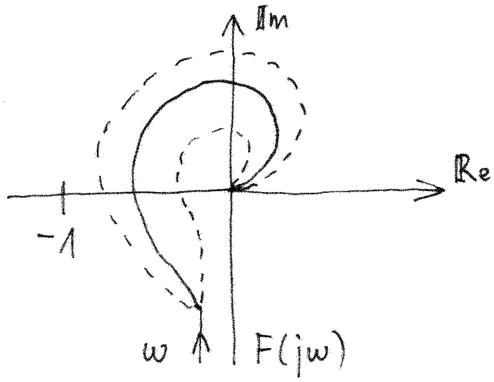
$$F_1 = K_p \qquad F_2 = \frac{1}{s} \qquad F_3 = \frac{3}{1+0{,}1s} \qquad F_4 = \frac{3}{1+0{,}28s+0{,}04s^2}$$

$$F_o = F_1 \cdot F_2 \, F_3 \, F_4$$
$$= K_p \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{3}{0{,}1s} \cdot \frac{3}{1+0{,}28s+0{,}04s^2}$$

- za začetek predpostavimo
  $K_p = 1$

$$F_o = \frac{9}{s(1+0{,}1s)(1+0{,}28s+0{,}04s)}$$

- skiciramo $F(j\omega)$



- Pri kakšnem K_p je sistem mejno stabilen?

Karakteristična enačba $\underline{1 + F_0 = 0}$

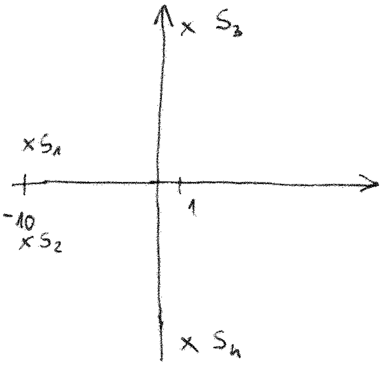
$$1 + \frac{9K_p}{s(1+0{,}1s)(1+0{,}28s+0{,}04s^2)} = \emptyset$$

$$0{,}04s^4 + 0{,}068s^3 + 0{,}38s^2 + 1s + 9K_p = \emptyset$$

Če je $K_p = 1$:

$\rightarrow s_{1,2} = -9{,}282332 \pm j\,3{,}977914$

$\rightarrow s_{3,4} = +0{,}782332 \pm j\,4{,}631406$



Za $K_p = 1$ je torej sistem nestabilen. To pomeni, da moramo ojačanje močno zmanjšati (numeričen pristop)

- Kdaj gre krivulja skozi -1, da je sistem mejno stabilen?

Postopamo po Routhovem kriteriju:

s^4: 0,004 0,38 9 Kp
s^3: 0,068 1

s^2: 0,321176 9Kp

s^1: $1-\frac{0{,}068\cdot 9K_p}{0{,}321176}=$
$=1-1{,}9054937K_p$

s^0: 9 Kp

- Da se v prvem stolpcu ohrani predznak

$s^0: K_p>0$

$s^1: 1-1{,}9054937K_p>0$

$$\boxed{K_p<0{,}524798}$$

- Če je $K_p=0{,}524798$, gre $F(j\omega)$ čez kritično točko.

Da je $\alpha_{rez}=0{,}6$, moramo prečkati točko 0,4.

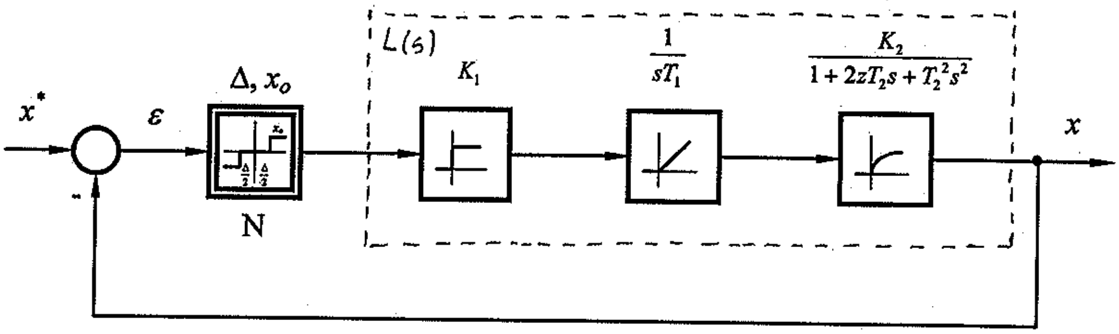
$K_p=0{,}524798\cdot 0{,}4=0{,}21$

$$\boxed{K_p=0{,}21}$$

Študijsko leto	**Digitalna krmilja in teorija regulacij**	Vaja
2009/10	Laboratorij za regulacijsko tehniko	21

VAJA A–21

Za podani sistem ugotovite stabilnostne razmere po metodi opisne funkcije.



$K_1 = 2$ $T_1 = 1$ $K_2 = 3$ $T_2 = 0{,}04$ $z = 0{,}25$ $x_0 = 1$ $\Delta = 0{,}2$

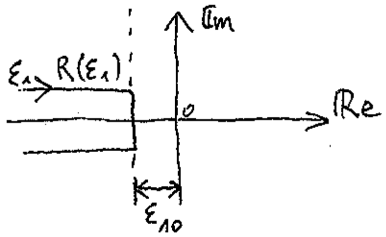
- enačba kritične trajektorije $R(\varepsilon_1)$

$$R(\varepsilon_1) = \frac{-1}{N(\varepsilon_1)}$$

enačba za dvopoložajni člen z mrtvo cono poiščemo v knjigi na strani 212.

$$R(\varepsilon_1) = \frac{-\pi\varepsilon_1}{4x_0\sqrt{1-\frac{\Delta}{2\varepsilon_1}}}$$

- skiciramo kritično trajektorijo



skica je pretirano povečana. Zanima nas, kako blizu koordinatnemu izhodišču pridemo po Re osi.

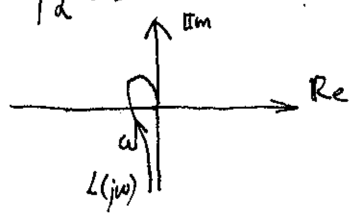
Najbližja točka je ε_{10}.

$$\varepsilon_{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta^*$$

$$R(\varepsilon_{10}) = \frac{-\pi\Delta}{4x_0} = \frac{-\pi\cdot 0{,}2}{4\cdot 1} = 0{,}157$$

- $L(s) = K_1 \cdot \dfrac{1}{sT_1} \cdot \dfrac{K_2}{1 + 2zT_2 s + T^2 s^2}$

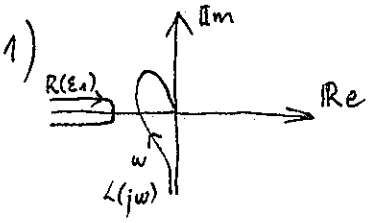
Nyquist:



3. red, 1 int.

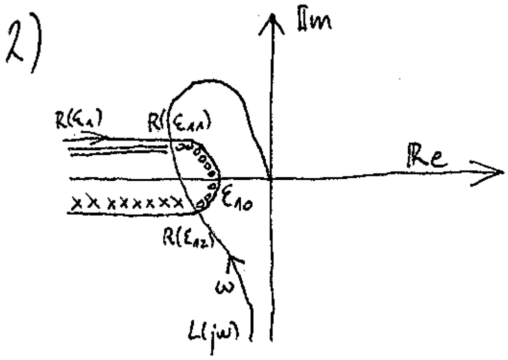
- Sledita dve možnosti

1)



Tak sistem JE stabilen.

2)



- če je $\varepsilon_1 < \Delta/2$, smo v mrtvi coni in izhod iz nelinearnega člena je $\emptyset$.
- če je $\varepsilon_1 < \Delta/2 < \varepsilon_{11}$ je reč stabilna, $\varepsilon_1 \downarrow$, sistem se ustali (═)
- $\varepsilon_{11} < \varepsilon_1 < \varepsilon_{12}$, sistem je nestabilen, $\varepsilon_1 \uparrow$ (oooo)
- $\varepsilon_1 > \varepsilon_{12}$ (xxxx), sistem je stabilen, $\varepsilon_1 \downarrow$

$\Big\}$ *

* zaključek: $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_{11} \rightarrow$ mejno nihanje z amplitudo $\underline{\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_{12}}$ in <u>frekvenco ω_c.</u>

- iščemo presečišče $L(j\omega)$ z x osjo.

$$L(j\omega) = \frac{K_1 K_2}{j\omega T_1 (1 + 2z T_2 j\omega - T_2^2 \omega^2)} = \frac{6}{j\omega(1 + 0{,}02 j\omega - 0{,}0016\omega^2)} =$$

$$= \frac{6}{j\omega - 0{,}02\omega^2 - j0{,}0016\omega^3} = \frac{6}{-0{,}02\omega^2 + j(\omega - 0{,}0016\omega^3)} =$$

$$= \frac{6}{-0{,}02\omega^2 + j(\omega - 0{,}0016\omega^3)} \quad \begin{array}{l} /\cdot(-0{,}02\omega^2 - j(\omega - 0{,}0016\omega^3)) \\ /\cdot(-0{,}02\omega^2 - j(\omega - 0{,}0016\omega^3)) \end{array}$$

$$L(j\omega) = \frac{6[0{,}02\omega^2 - j(\omega - 0{,}0016\omega^3)]}{(-0{,}02\omega^2)^2 + (\omega - 0{,}0016\omega^3)^2}$$

$$\mathrm{Im}[L(j\omega)] = \emptyset \iff \omega - 0{,}0016\omega^3 = \emptyset$$

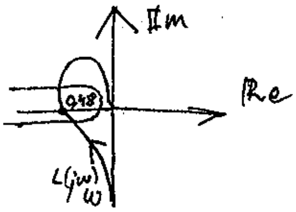
$$1 = 0{,}0016\omega^2 \longrightarrow \underline{\underline{\omega = 25}}$$

$$\omega_c = \omega = 25$$

$$\mathrm{Re}[L(j\omega)] = \frac{6 \cdot 0{,}02 \cdot 25^2}{(-0{,}02 \cdot 25^2)^2 + (25 - 0{,}0016 \cdot 25^3)^2} = \underline{\underline{-0{,}48}}$$

Presečišče je v točki $(-0{,}48, 0)$ pri frekvenci 25.

• Pri kakšnih $\mathcal{E}$ pride do presečišča?



$$\boxed{Re[L(j\omega)] = R(\mathcal{E}_1)}$$

$$\frac{-\pi \mathcal{E}_1}{4X_0\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{2\mathcal{E}_1}\right)^2}} = -0{,}48$$

$$-0{,}48 = \frac{-\pi \mathcal{E}_1}{4\sqrt{1-\left(\frac{0{,}1}{\mathcal{E}_1}\right)^2}}$$

$$\pi \mathcal{E}_1 = 1{,}92\sqrt{1-\left(\frac{0{,}1}{\mathcal{E}_1}\right)^2}$$

$$\pi^2 \mathcal{E}_1^2 = 3{,}6864\left(1-\frac{0{,}01}{\mathcal{E}_1^2}\right) \quad ; \quad \mathcal{E}_1^2 = x$$

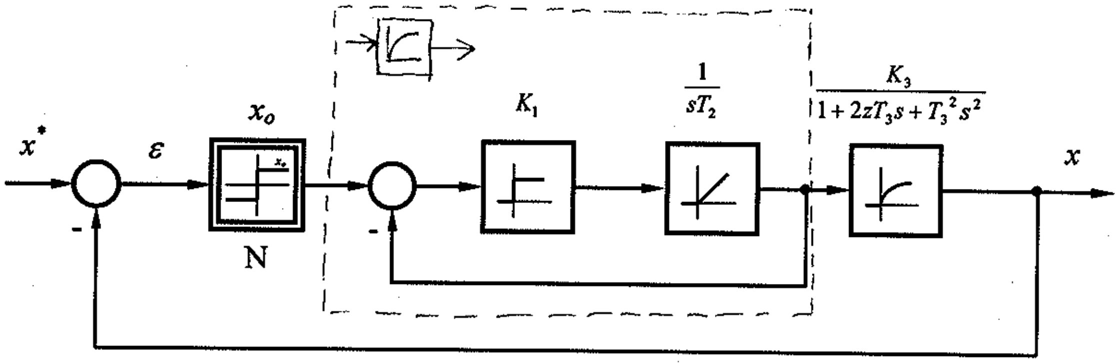
$$\pi^2 x^2 - 3{,}6864x + 0{,}036864 = 0$$

$$x_1 = 0{,}010283104 \qquad x_2 = 0{,}363227308$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{11} = 0{,}101405641} \qquad \boxed{\mathcal{E}_{12} = 0{,}602683422}$$

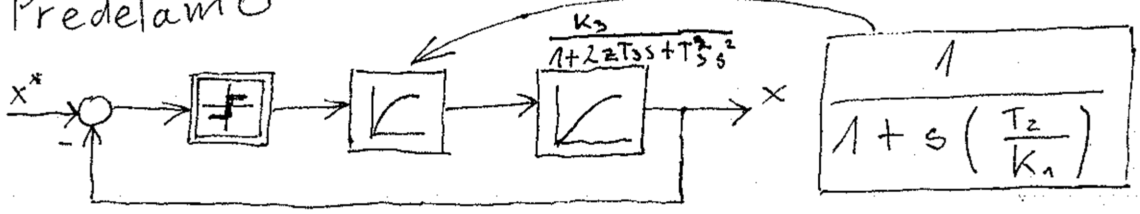
V primeru $\mathcal{E}_{11}$ smo blizu mrtve cone. Za manjše od tega mejnega nihanja ni.

VAJA A–22



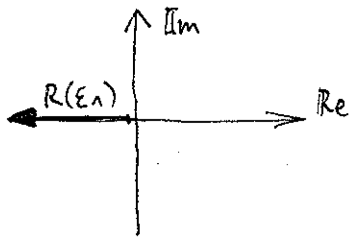
$K_1 = 15$ $T_2 = 3$ $K_3 = 3$ $T_3 = 1$ $z = 0{,}2$ $x_o = 0{,}5$

- Predelamo

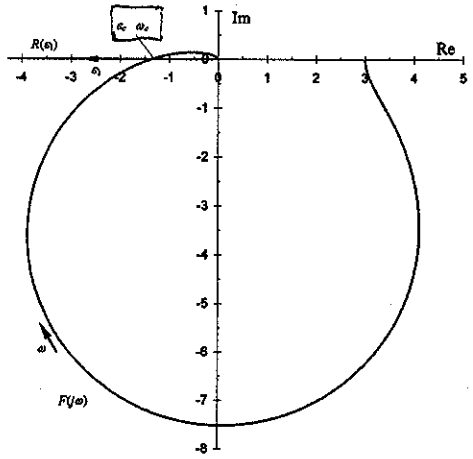


- $R(\varepsilon_1)$ za dvopoložajni člen na strani 311 v knjigi Regulacije. Kot z dvopoložajni člen z mrtvo cono, le da postavimo $\Delta = \emptyset$.

$$R(\varepsilon_1) = \frac{-1}{N(\varepsilon_1)} = -\frac{\pi \varepsilon_1}{4x}$$



- $$L(s) = \frac{1}{1+s(T_2/K_1)} \cdot \frac{K_3}{1+2zT_3+T_3^2s^2}$$



Nyquist za L(s)

3. red, $\omega \to \infty : \varphi = -270°$

začnemo pri $\omega = 0$, $\varphi = 0°$, ker ni integratorjev

40 %

$$R(\varepsilon_1) = -\frac{1}{N(\varepsilon_1)} = -\frac{\pi\varepsilon_1}{4x_o}$$ ✓

vrisana $R(\varepsilon_1)$ ✓ (5 %)

$$F(j\omega) = \frac{K_3}{(1 + j\omega T_2/K_1)(1 + 2zT_3 j\omega + T_3^2 (j\omega)^2)}$$ ✓

vrisana $F(j\omega)$ ✓ (5 %)

Razlaga: (10 %)

$\varepsilon_1 < \varepsilon_c$ (majhni ε_1): lokalno nestabilno, ε_1 se povečuje... (Mar v nedogled? POZOR - glej naprej!)

$\varepsilon_1 > \varepsilon_c$ (veliki ε_1): lokalno stabilno, ε_1 se zmanjšuje (ampak če se zmanjša pod ε_c, se znova povečuje...)

Posledica: za vsako začetno vrednost ε_1 sistem preide v mejno nihanje s frekvenco ω_c in z amplitudo na vhodu v nelinearni element $\varepsilon_1 = \varepsilon_c$

$$F(j\omega_c) = \frac{3}{(1 + 0{,}4 j\omega_c - \omega_c^2 + 0{,}2 j\omega_c - 0{,}08\omega_c^2 - 0{,}2 j\omega_c^3)} = \frac{3}{(1 - 1{,}08\omega_c^2) + j(0{,}6\omega_c - 0{,}2\omega_c^3)}$$

$$F(j\omega_c) = \frac{3(\overbrace{(1 - 1{,}08\omega_c^2)}^{Re} - j\overbrace{(0{,}6\omega_c - 0{,}2\omega_c^3)}^{Im})}{(1 - 1{,}08\omega_c^2)^2 + (0{,}6\omega_c - 0{,}2\omega_c^3)^2}$$

Iščemo rešitve enačbe $F(j\omega_c) = R(\varepsilon_c)$ (za kakšne vrednosti ω_c in ε_c velja enakost); ker pa leži kritična trajektorija na realni osi, je naloga preprosta: glej naprej

$\mathrm{Im}[F(j\omega_c)] = 0$ $\omega_c = 1{,}732$ ✓ $\mathrm{Re}[F(j\omega_c)] = -1{,}339$ ✓ (10 %)

$\mathrm{Re}[F(j\omega_c)] = R(\varepsilon_c)$ $\varepsilon_c = 0{,}8526$ ✓ (10 %)

$\mathrm{Im}[F(j\omega)] = \emptyset$, da dobimo presečišče.

$$0{,}6\,\omega_c - 0{,}2\,\omega_c^3 = \emptyset$$

$$\omega_c^2 = (-0{,}6)/(-0{,}2) = 3$$

$$\omega_c = \sqrt{3} = 1{,}732$$

$$\mathrm{Re}[F(j\omega_c)] = \frac{3\cdot(1-1{,}08\cdot 3)}{(1-1{,}08\cdot 3)^2 + (0{,}6\cdot\sqrt{3} - 0{,}2\cdot\underbrace{(\sqrt{3})^3}_{3^{3/2}})} =$$

$$= \underline{-1{,}339}$$

- Sledi dalje

$$\mathrm{Re}[F(j\omega_c)] = R(\varepsilon_c)$$

$$-\frac{\pi\varepsilon_c}{4x_0} = -1{,}339 \quad , \quad x_0 = 0{,}5$$

$$\varepsilon_c = \frac{4\cdot x_0\cdot 1{,}339}{\pi} = \underline{0{,}8526}$$