

Matematika II; Tomšič, Mramor-Kosta, Orel

Zbirka nalog iz matematike II za VSS; Dolinar

Zbirka nalog iz matematike II; Jurčič - Zlobec, Mramor-Kosta

Linearna Algebra

1 - determinanta:

Def.: Je preslikava; preslikava je predpis, ki vsakemu elementu iz množice priredi sliko.

- mora biti injektivna

Determinanta je preslikava, ki vsaki kvadratni $n \times n$ shemi ^{realnih (kompleksnih)} števil priredi ^{realno (kompleksno)} število.

$$\det: \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -7 & \frac{3}{4} & 5 \\ 12 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Determinanta je definirana rekurezivno s pomočjo razvoja po katerikoli vrstici.

1.)

$$n=1$$

$$\det[a_{11}] = a_{11}$$

 a_{ij} - i -ta vrstica, j -ti stolpec

2.)

$$n=2$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det[a_{22}] + (-1)^{1+2} a_{12} \cdot \det[a_{21}] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

diagonalna mat. zlim sq. in
determin. sp. - determinanta
med seboj in zlim sq.

3.) $n=3$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Pri računanju 3×3 det. si lahko pomagamo na naslednji način:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

4. splošen nr:

razvoj po prvi vrstici

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} D_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} D_{1n}$$

pri čemer je D_{ij} determinanta istega veličnosti $(n-1) \times (n-1)$, ki jo dobimo tako, da v praksi $n \times n$ damo prečrtamo i -to vrstico in j -ti stolpec.

Izraz $(-1)^{i+j} D_{ij}$ imenujemo kofaktor.

Opomba:

Det. krajše zapisemo tudi na naslednji način:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Primer:

$$1.) \det \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = -2 - (-20) = 18$$

$$2.) \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 0 - 18 - 0 - 6 + 0 = -25$$

2) Lastnosti determinante:

⊕ DETERMINANTE LAHKO RAZUNJAMO PO KATERIKOLI VRSTICI ALI STOLPCU

① Vrednost determinante se ne spremeni, če zamenjamo vlogo vrstic in stolpcu.

primer:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 4 & 8 \\ 11 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 & 0 \\ -1 & -2 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 3 \\ 5 & 8 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Preizcalimo elemente iz diagonale.

② Če zamenjamo 2 vrstici, se determinanta spremeni predznak.
primer: katerikoli Enako velja za stolpce.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \\ -2 & 8 & 1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 5 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \det A = \det A^T$$

1 zamenjava je 1 "-".

③ Faktor, ki je skupen vsem elementom ene vrstice lahko izpostavimo.
Enako velja za stolpce.
primer:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

SLEDI 12 DEFINICIJE

④ Če sta dve vrstici enaki, potem je vrednost determinante nič.
Enako velja za stolpce. 23.2.2011

primer:

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

⊕ DETERMINANTA PRI KATERI JE
ENA VRSTICA VEČKRAJNIK DRUGE

dokaz te lastnosti:

Denimo, da imamo $n \times n$ matriko z vrstici enaki; potem je determinanta te matrike nič, ker so enake neke vrste. Če zamenjamo vrstici, ki sta enaki, je potem determinanta enaka 0. Zamenjamo vrstici p in q , enaka -D.

Toda shema, kjer zamenjamo enako vrstico je enaka sama sebi; torej

$$D = -D$$

$$2D = 0$$

$$D = 0$$

(5.) Vrednost determinante se ne spremeni, če katerikoli vrstico prištejemo večkratnik katerikoli druge vrstice / stolpca. (skupaj)

primer:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad v_{r2} - v_{r1} = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} v_{r3} - 2v_{r1} = \\ v_{r4} + v_{r1} \end{matrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

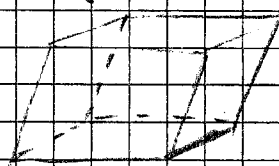
$$= 1 \cdot 5 \cdot (0 - (-1)) = \underline{\underline{5}}$$

⇒ 4 LASTNOST

(f) DEFINICIJA

Zgledni uporabe determinante:

(1.) Določanje prostornine paralelepipedov



3

(2.) Iskanje rešitev sistemov linearnih enačb s pomočjo Crammerjevega pravila.

primer:

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= -7 \\ x - y + 4z &= 1 \\ 2x + 2y + 10z &= 0 \end{aligned}$$

sistem treh enačb = trije neznankami rešimo
tako, da izračunamo 4 determinante
velikosti: 3×3 .

$$D_0 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 10 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-30) + 32 + 4(-4) - 24 - 40 = -54$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -7 & 4 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 70 + 0 + 4 - (-2) + (8 \cdot 7) - 40 = 90$$

momento x zapisemo desno stran enačb

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 10 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 30 - 56 + 0 - 4 - 0 + 70 = 40$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -7 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 8 - 14 - 14 - 6 = -26$$

$$x = \frac{D_x}{D_0} = \frac{90}{-54} = -\frac{5}{3}$$

$$y = \frac{D_y}{D_0} = \frac{40}{-54} = -\frac{20}{27} \quad z = \frac{D_z}{D_0} = \frac{-26}{-54} = \frac{13}{27}$$

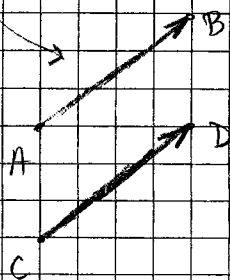
$$D_0 \neq 0$$

Če je $D_0 = 0$, sistem ali nima rešitev ali pa jih ima neskončno.

VEKTORJI

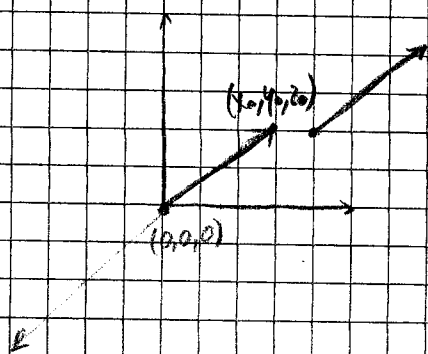
Definicija:

Geometrijski objekt, ki ima pravi velikosti tudi smer inenajenkrat smerjuna dolžino.



Vse smerjune dolžine, ki jih lahko izpremenimo premikamo pravih in enake dolžine, predstavljajo eno in isto vektor.

Vektor ima določeno velikost in smer ter se ne spreminja, če ga izpremenimo premikamo.



Če hočemo analitično opisati vektor, dan v prostoru, premaknemo tako, da je njegov začetek v koordinatnem izhodišču. To pomeni, da je krajnji vektor; nato nam je dovoljen skrajni točker.

To pomeni, da lahko identificiramo točko v prostoru in vektorja.

Naj bo dan vektor $\vec{r} = (x_0, y_0, z_0)$. Potem je njegova dolžina

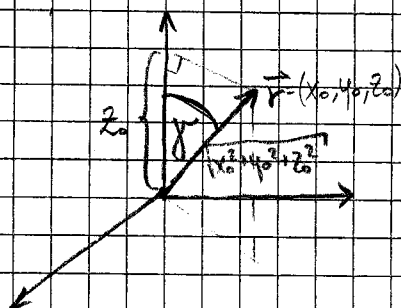
$$|\vec{r}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Vektor od točke $A(x_1, y_1, z_1)$ do točke $B(x_0, y_0, z_0)$ označimo s $\vec{AB}$.

$$\vec{AB} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

- Smerni vektorji $\vec{r} = (x_0, y_0, z_0)$:

Določimo kot med vektorjem in koordinatnimi osmi.



$$\cos \gamma = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$$

Vektor $\vec{r}$ oklepaj $\cos \gamma$ z koso $\vec{j}$.

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}; \quad \cos \beta = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$$

Vektorske in vektor imenjujemo tudi smeri in intenziteto.

- Pričunovanje = vektorji

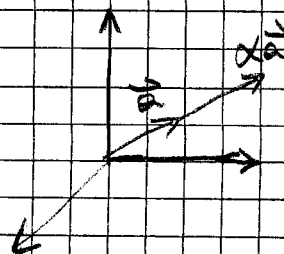
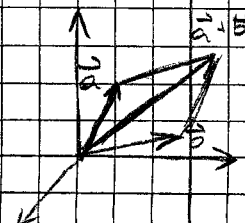
Naj bosta $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorji v $\mathbb{R}^3$.

Potem definiramo:

- vsota: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

- množenje s skalarnim (število)

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$



Veja tudi:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \dots \text{komutativnost}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \dots \text{asociativnost}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

niti eni vektor - edini vektor, ki nima smeri; določimo tudi
vektorja je $\vec{0}$. $\vec{0}$ je smerni in sestavljeni

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$(-\vec{a})$ je inverzni vektor v smerni in sestavljeni

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{a}$ $\Rightarrow$ $\lambda = 1$ $\Rightarrow$ $\vec{a}$ je smerni in sestavljeni
... distributivnost

Vektorski prostor

Definicija:

Neprazni množici V imenujemo vektorski prostor, če na V definiramo
operacije: seštevanje, množenje s skalarji in
ničelni vektor $\vec{0}$ in enotski vektor $\vec{1}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad ; \quad \vec{a}, \vec{b} \in V$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad ; \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$$

0-vektor element $\vec{0} \in V$, tako da je $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ za vsak $\vec{a} \in V$

za vsak $\vec{a} \in V$ obstaja vektor $-\vec{a}$, tako da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

$$\begin{aligned} &\lambda \in K \\ &\vec{a}, \vec{b} \in V \\ &\lambda, \mu \in K \\ &\vec{a} \in V \end{aligned}$$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$\begin{aligned} &\text{za } \vec{a} \in V \\ &1 \in K \end{aligned}$$

Primer:

$$1.) V = \{ u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \mid u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R} \}$$

2.) V je množica funkcij iz $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

3.) V je množica vseh matrik

1.3.2011

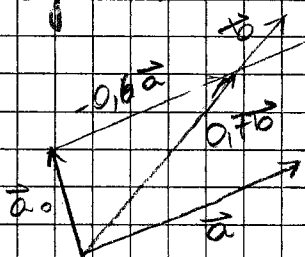
Def:

Naj bodo $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$
in $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

} potem izraz $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \in V$
imenujemo linearna kombinacija
elementov $a_1, a_2, \dots, a_n$

Def:

Podmnožica V_1 množice V : torej $V_1 \subseteq V$, je linearno odvisna, če obstaja v V_1 nek element a_0 , ki ga lahko zapišemo kot linearno kombinacijo ostalih elementov iz V_1 .



$$V = \{ \vec{a}_0, \vec{a}, \vec{b} \}$$

množica je linearno odvisna, ker lahko en element zapišemo z drugima dvema.

Def:

Množica V_1 je linearno neodvisna, če ni linearno odvisna.

BAZA

Def:

Naj bo V vektorski prostor; potem je B baza vektorskega prostora V , če velja

- 1.) B je linearno neodvisna podmnožica V .
- 2.) Vsak element iz V se da zapisati kot linearna kombinacija elementov iz B .

Primer:

1.) Vektorji v $\mathbb{R}^3$; torej:

$$V = \{ (a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$B = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$$

$$\left(-7, \frac{5}{2}, 6\right) = -7\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} + 6\vec{k}$$

Opomba:

Baza vektorskega prostora ni enolično določena

Primer:

Vektorji v $\mathbb{R}^3$

$B_2 = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ je tudi baza V .

$$\vec{i} = (1,0,0)$$

$$\vec{j} = (1,1,0) - (1,0,0)$$

$$\vec{k} = (1,1,1) - (1,1,0)$$

$$\begin{aligned} \left(-7, \frac{5}{2}, 6\right) &= -7\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} + 6\vec{k} = \\ &= -7(1,0,0) + \frac{5}{2}((1,1,0) - (1,0,0)) + 6((1,1,1) - (1,1,0)) = \\ &= \left(-7 + \frac{5}{2}\right)(1,0,0) + \left(\frac{5}{2} - 6\right)(1,1,0) + 6(1,1,1) = \\ &= (-9,5)(1,0,0) + (-3,5)(1,1,0) + 6(1,1,1) \end{aligned}$$

Trditve:

Vse baze nekakega vektorskega prostora imajo isto moč. To pomeni, da če je v bazi končen elementov, imajo vse baze nekakega vektorskega prostora enake elemente.

Baza je lahko tudi neskončna - ima neskončno elementov.

Na primer, če je V vektorski prostor realnih funkcij, je njegova baza neskončna.

Def.:

Naj bo V vektorski prostor, če ima nizepovno bazno končen elementov, npr.: n faktov pravimo, da je V n -dimenzionalni vektorski prostor. Če ima bazno neskončno elementov, pravimo, da je V neskončno dimenzionalni vektorski prostor.

Primer:

$$V = \{(a_1, a_2, \dots, a_{250}) : a_1, a_2, \dots, a_{250}\}$$

$$\vec{v}_1 = (57, 56, \dots, 45)$$

$$\vec{v}_2 = (1, 77, \dots, 51)$$

$$\dim V = 250$$

$$B: \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(0, 0, \dots, 1)$$

V splošnih prostorih sta definirani operaciji seštevanja in množenja s skalarji. V modeliranju si bomo opredeli za prostor vektorjev v $\mathbb{R}^3$, kakor definiramo še druge operacije.

V $\mathbb{R}^3$ lahko def. še dodatne operacije: skalarni produkt, vektorski produkt, mešani produkt.

5) - Skalarni produkt:

Def.:

Skalarni produkt priredi dvema vektorjema iz $\mathbb{R}^3$ neko realno število - skalar na naslednji način,

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R}$$

ta sk. pr. velja za lastnosti:

1.) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$... komutativnost

2.) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$... distributivnost

3.) $\vec{a} \cdot \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{a} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \dots \text{dolžina vektorja } \vec{a}$$

4.) lastnost, asociativnost NE velja:

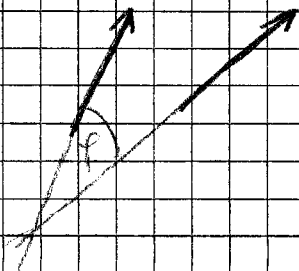
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$\mathbb{R}$ (skalar)

Če imata $\vec{a}$ in $\vec{c}$ različni smer, lastnost ne velja.

± def.: skal. pr. ni težko izpeljati, da velja;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \text{ pri čemer je } \varphi \text{ vmesni kot med } \vec{a} \text{ in } \vec{b}$$



- Trditelj (Cauchy - Schwarz - Benjakovski):

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Dokaz:

Ker je $|\cos f|$ vedno ≤ 1 očitno sledi:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos f| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

- Trditelj (Trikotniška neenakost):

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Dokaz:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \stackrel{\text{asociativnost}}{=} \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

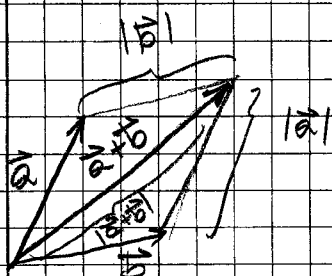
$$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b}|^2 \stackrel{\text{komutativnost}}{=}$$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \leq$$

$$= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

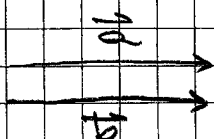
Geometrijska interpretacija:



daljina
Vsota dveh katet je vedno večja ali
enaka hipotenuzi.

Kdaj velja enakost?

Tukrat, ko sta vektorja vzporedna ($f = 0^\circ, 180^\circ$)



- Trditelj (paralelogramska pravila)

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$$

Dokaz:

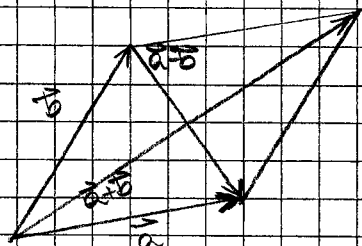
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b}|^2$$

$$|a-b|^2 = (a-b)(a-b) = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2$$

zaključimo:

$$|a|^2 + |b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

Geometrijska interpretacija:

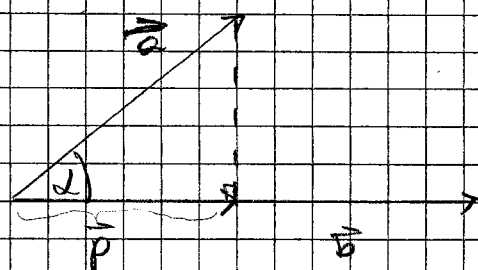


$a+b$ in $a-b$

diagonali paralelograma s stranicama a in b .

Projekcija vektorja na nek drugi vektor:

zanimanje: projekcija vektorja a na vektor b .



$$|p| = \cos \alpha |a|$$

dolžina p , gleda v smeri b :

$$p = \cos \alpha |a| \cdot \frac{b}{|b|}$$

2. 3. 2011

$$\frac{|p|}{|a|} = \cos \alpha$$

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \alpha$$

$$\frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \cos \alpha$$

$$p = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} |a| \frac{b}{|b|} = \frac{a \cdot b}{|b|^2} \cdot b$$

Primer:

$$\vec{a} = (-1, 2, 3)$$

$$\vec{b} = (0, 1, -2)$$

Zanima nas projekcija vektorja $\vec{a}$ na $\vec{b}$

$$\vec{p} = \frac{(0, 1, -2)}{|(0, 1, -2)|} \cdot \frac{(-1, 2, 3)(0, 1, -2)}{|(0, 1, -2)|} = \frac{(0, 1, -2) \cdot (-2, -6, 6)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} =$$

$$\vec{p} = \frac{(0, 1, -2)(-4)}{5} = -\frac{4}{5}(0, 1, -2)$$

6 VEKTORSKI PRODUKT

Naj bosta $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorja v $\mathbb{R}^3$. Potem je vektorski produkt operacija, ki vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ priredi vektor s predpisom:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Primer:

$$(1, -2, 3) \times (-1, 0, 4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-8, -(4 - (-3)), -2) = (-8, -7, -2)$$

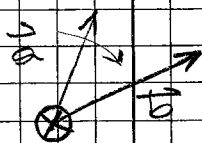
Izpeljemo lahko, da velja:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

dolžina dveh vektorjev, ker vektor nikoli ni enak skalarni.

Pri čemer je α vmesni kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
Za smer vektorskega produkta $\vec{a} \times \vec{b}$, da ima $\vec{a} \times \vec{b}$, ki je pravokoten tako na $\vec{a}$ kot na $\vec{b}$.
velja

pravilo desnega vijaka:

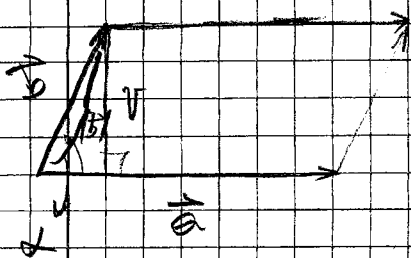


pravilo desne roke:

na $\vec{a}$ palec, na $\vec{b}$ kazalec; sredinec kaže smer produkta

Trditvi:

Dolžina vekt. pr. $\vec{a} \times \vec{b}$ je enaka površini pravokotnega trikotnika, ki ga določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$.



$$V = |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

površina ΔT :

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot V = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\frac{V}{|\vec{b}|} = \sin \alpha$$

Sledi, da je ploščina trikotnika, določenega z $\vec{a} \in \vec{B}$ enaka:

$$p_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Lastnosti vek. pr.:

1.) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$... distributivnost

2.) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \sin \alpha = 0; \vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\vec{0} = (0, 0, 0)$$

3.) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$... antikomutativnost

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

4.) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$... asociativnost v splošnem ne velja.

primer:

$$\underbrace{(\underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}})}_{\vec{0}} \times \vec{j} \neq \vec{i} \times (\underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}})$$

5.) $\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$

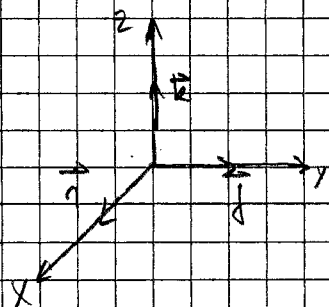
$$\lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

Opomba:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



16 MEŠANI PRODUKT

Def.:

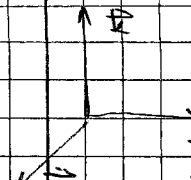
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Mešani produkt vektorjev $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ je definiran s predpisom

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Rezultat je skalar (Stavilo)

Velja:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$


$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$
 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$
 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$
 $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$
 $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$
 $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$
 $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$
 $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$
 $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 = 0$

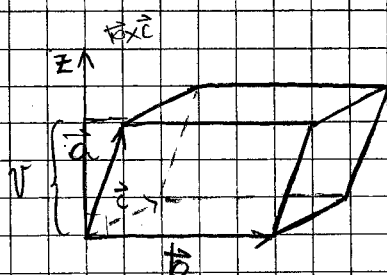
Te lastnosti determinante sledi:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$... zamenjamo 2 vrstici, doblimo "-"
- 2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$... zamenjamo 2 vrstici, doblimo "-"

Trditev:

Prostornina produkta vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ je enaka prostornini paralelipipeda, ki ga tvorijo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, kar pomeni, da je enaka:

$$V_{\text{par}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$



Prostornina je enaka produktu ploščine osnovne ploskve in višine.

Osn. ploskev je paralelogram:

$$pl_{\text{osn}} = |\vec{b} \times \vec{c}|$$

Višina je $\perp$ projekcija $\vec{a}$ na $\vec{b} \times \vec{c}$

$$\frac{V}{|\vec{a}|} = \cos \alpha, \quad V = |\cos \alpha| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \cdot |\vec{a}| = \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \cdot |\vec{a}|$$

Sledi:

$$V = |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot V = |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \cdot |\vec{a}| = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Opomba:

Prostornina paralelipipeda, ki ga tvorijo $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ je enaka V , kadar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ na isti način.

Te trije vektorji v isti ravnini, kar pomeni, da so linearno odvisni. Če so linearno odvisni, potem so ti trije vektorji linearno odvisni, kar pomeni:

$\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ so odvisni med seboj, kar pomeni, da je:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Primer:

$$\begin{pmatrix} -1, 7, -2 \\ 2, 1, 3 \\ 0, 15, -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & -1 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 1 + 0 + (-4 \cdot 15) - 0 + 15 \cdot 3 + 14 = -225 + 225 = 0$$

$$(-1, 7, -2) = \alpha(2, 1, 3) + \beta(0, 15, -1)$$

$$-1 = 2\alpha + 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$7 = \alpha + 15\beta$$

$$-2 = 3\alpha + \beta$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

$$(-1, 7, -2) = -\frac{1}{2}(2, 1, 3) + \frac{1}{2}(0, 15, -1)$$

Trileter (Lagrangeva identiteta):

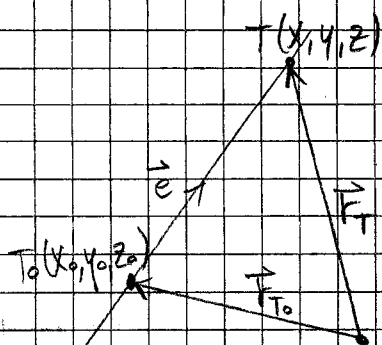
$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Točka, premica, ravnina v $\mathbb{R}^3$

- 1.) Točka T v $\mathbb{R}^3$ je ničdimensionalni objekt v kartezijem K.S. določen s tremi koordinatami $T(x, y, z)$. Točka v $\mathbb{R}^3$ lahko identificiramo s tridimenzionalnim vektorjem.

10. 2.) Premica p v $\mathbb{R}^3$ je enodimensionalni objekt; določena je s smerjo in neko točko, ki leži na tej premici. Natankeje je določena tudi s dvema točkama.

Naj bo $T_0(x_0, y_0, z_0)$ točka na premici in $\vec{e}$ smerni vektor premice. Potem za poljubno točko, ki leži na tej premici, velja:



$$\vec{r}_T = \vec{r}_{T_0} + \lambda \vec{e}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$$

Vektorski oblik enačbe premice

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$$

$$x = x_0 + \lambda a$$

$$y = y_0 + \lambda b$$

$$z = z_0 + \lambda c$$

$$l = \frac{x-x_0}{a}$$

parametrična
oblika

$$l = \frac{y-y_0}{b}$$

$$l = \frac{z-z_0}{c}$$

$$a, b, c \neq 0$$

a, b, c so komponente
vektorja $\vec{e}$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

kanonična oblika enačbe
premič

primer:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x-0}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-(-\frac{3}{2})}{1/2}$$

$$\text{sledi: } \vec{e} = (3, -2, \frac{1}{2})$$

$$T_0(0, 1, -\frac{3}{2})$$

$$T_1(3, -1, -1)$$

če je katera izmed koordinat $\vec{e}$ enaka 0; npr.: $a=0$ potem je
enačba premič:

$$x = x_0, \frac{y-y_0}{b}, \frac{z-z_0}{c} \quad ; \quad \underline{b, c \neq 0}$$

primer:

zapišimo enačbo premič:

$$\vec{e} = (-2, 0, 1)$$

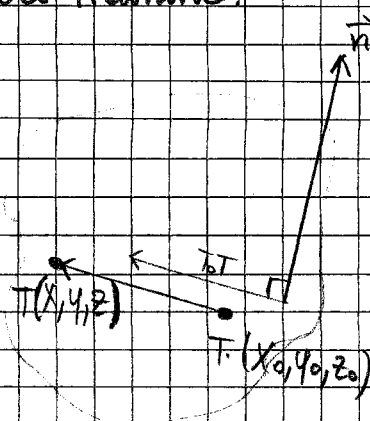
$$T(1, 2, 0)$$

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{z-0}{1} ; y=2$$

Ravnina

Def.: Ravnina je dvodimenzionalni objekt, ki je podan s smerjo, to je z normalo, (vektor, pravokoten na ravnino), in z eno točko, ki leži na ravnini.
Ravnina je natanko določena tudi s tremi nekolinearnimi točkami.

Enačba ravnine:



veljati mora, da je:

$$(\vec{r}_T - \vec{r}_{T_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

vektorska oblika enačbe ravnine

$$((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$(x - x_0) \cdot a + (y - y_0) \cdot b + (z - z_0) \cdot c = 0$$

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_d$$

a, b, c so komponente normale

$$ax + by + cz = d$$

kanonična oblika enačbe ravnine

Primer:

$$\vec{n} = (-1, 0, 2)$$

$$T_0 = (5, 9, -1)$$

$$-1 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z = d$$

$$-x + 2z = d$$

$$-5 + 2 \cdot (-1) = d$$

$$d = -7$$

$$-x + 2z = -7$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

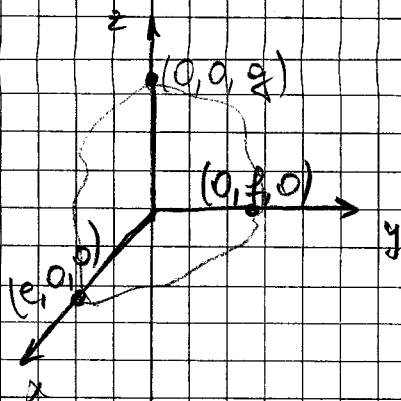
katerikoli y vstavimo
bo zadostoval enačbi,
ker ne nastopa v tej
enačbi

Enačbo ravnine lahko zapišemo tudi v segmentni obliki
(delimo z d)

$$\frac{x}{e} + \frac{y}{f} + \frac{z}{g} = 1$$

$$\frac{ax}{d} = \frac{x}{\frac{d}{a}} = \frac{x}{e}$$

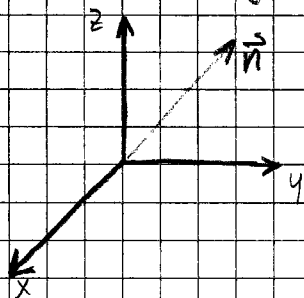
V tem primeru ravnina reke koordinatne osi v točkah
 $(e, 0, 0), (0, f, 0), (0, 0, g)$



Opomba:

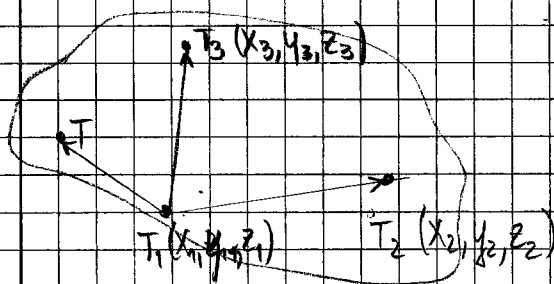
Naj bo ravnina podana z enačbo $ax + by + cz = d$; če je:

- 1.) $d = 0$; potem gre ravnina skozi koordinatno izhodišče $(0, 0, 0)$.
- 2.) $a = 0$; potem je normala $\vec{n} = (0, b, c)$; torej normala leži v ravnini (y, z) ; ravnina $by + cz = d$ je vzporedna z x osjo.



Enačbo ravnine lahko zapišemo tudi s pomočjo determinante:

Naj bodo T_1, T_2, T_3 točke na ravnini:



Potem točka T leži na ravnini, če ležijo na tej točki vektorji $\vec{T_1T}, \vec{T_1T_2}, \vec{T_1T_3}$. Če te 3 vektorji ležijo v isti ravnini je prostorski produkt poviščen, ki ga določajo, enaka 0.

Potem pa je

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

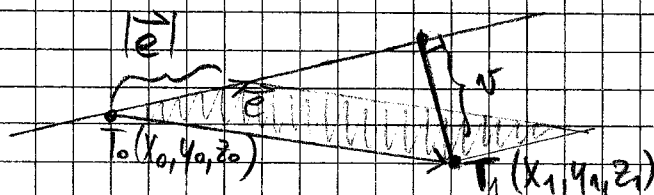
Medsebojna lega točke, premice, ravnine

1.) Razdalja med točkama T_1 in T_2 ; izračunajmo po Pitagorovem izreku

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2.) Razdalja točke od premice:

$$\vec{T_0 T_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$



$$\text{pg: } |\vec{e} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)| = |\vec{e}| \cdot v$$

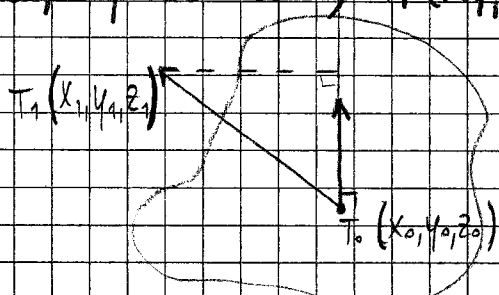
v je paralelogram

$$\text{razdalja } (v) = \frac{|\vec{e} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{e}|}$$

3.) Razdalja točke od ravnine:

$$ax + by + cz = d, \quad T_1(x_1, y_1, z_1)$$

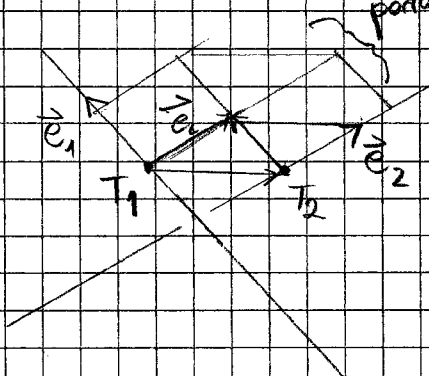
projekcija $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ na $\vec{n}$



$$\text{razdalja} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

vzp. premici $\Rightarrow$
točka do premice

4.) Razdalja med dvema premicama:



Vektorji $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{T}_1, \vec{T}_2$ predstavljajo
paralelepiped

$$V_{\text{paralepipeda}} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) =$$

$$= |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| \cdot v$$

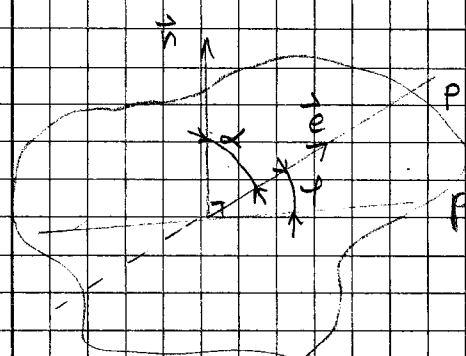
osnovna
ploskev

$$\text{Razdalja med premicama} = \frac{|(\vec{e}_1, \vec{e}_2, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$$

5) Razdalja premice do ravnine - če sta premica in ravnina vzporedni, vse točke na premici enako oddaljene od ravnine, izberemo si katerokoli točko.

- če nista vzporedni (se sekata), razdalja je 0

6.) kot med premico in ravnino:



pravokotna projekcija premice na ravnino

Kot med pr. in rav. je kot med pr. in njeno projekcijo na ravnino
 Kot med normalo n. in njenim vektorjem α je kot med premico in ravnino
 pa je $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$

9.3.2011

MATRIKE

Def.: Matrika velikosti $m \times n$ je pravokotna shema $m \times n$ števil z m vrsticami in n stolpci.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Opomba: V splošnem m ni enako n (kot pri determinantah)

Število a_{ij} imenujemo (i, j) -ti element matrike; to je število, ki je v i -ti vrstici in j -tem stolpcu.

Množico vseh $m \times n$ realnih matrik označimo z

$$M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ ali na kratko } M_{m,n}$$

- Če je $m = n$, potem je matrika kvadratna. Množico kvadratnih matrik kratko označimo M_n ($M_{n,n}$)

- Če je n enak 1, t.j. $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \text{stolpčna matrika}$

- Če je m enak 1, t.j. $A = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}] \Rightarrow A = \text{redna matrika}$

- Če velja $a_{ij} = 0$ za vsak i, j v matriki $A \in M_{m,n}$; potem imenujemo A ničelna matrika.

Oglejmo si nekaj posebnih primerov matrik množici M_n .

1) Če je $a_{ij} = \delta_{ij}$ matriko imenujemo identiteta.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Potem matriko imenujemo identiteta matrika ali identiteta.

Prej:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Po diagonali so 1, drugje so 0.

2) Če je $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$, potem takšno matriko imenujemo diagonalska matrika.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3) Če je $a_{ij} = 0$ za $i > j$, imenujemo matriko zgornje trikotne.

Če računamo det. take matrike, dobimo kar produkt členov diagonale.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Na matrikah lahko definiramo operacije:

- Seštevanje in množenje s skalarnim elementom $M_{m,n}$.

Naj bosta A in $B \in M_{m,n}$; potem je njuna vsota definirana enako:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Seštevanje je definirano po komponentah. Seštevanje lahko definiramo le matrike enake velikosti.

Naj bo $\lambda \in \mathbb{K}$ in $A \in M_{m,n}$. Potem je produkt matrike A s skalarnim λ definirani z enačbo:

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

s skalarnim množenjem po komponentah.

Primer:

Naj bo: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\lambda = -2$

$$A + \lambda B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ -10 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

Če ti dve operaciji velja:

$$A + B = B + A \quad \dots \text{komutativnost}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \dots \text{asociativnost}$$

$$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$$

$$1 \cdot A = A$$

$$A + 0 = A$$

Ker veljajo našete lastnosti, je množica $M_{m,n}$ vektorski prostor. Standardna baza tega prostora je:

$$B = \{E_{ij} ; i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n\}$$

Primer je E_{ij} matrika s vseh ničel razen ene enke na i, j -tem mestu.

Primer:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \text{baza}$$

prostora $M_{2,3}$

$$\text{Velja } M_{m,n} = m \cdot n$$

dimenzija
prostora.

Poselne vrste kvadratnih matrik:

- Operacija transponiranja:

Transponiranje matrike zamenja vlogo vrstic in stolpcev v matriki.

Primer:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

diagonala ostane nespremenjena,
elementi se preslikajo čez diagonalo.

- Def.: Matrika $A \in M_n$ je simetrična, če je $A = A^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$A = A^T$, torej A je simetrična

- Def. Matrika $A \in M_n$ je poševno simetrična, če je $A^T = -A$

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trditev:

Vsako matriko $A \in M_n$ lahko zapisemo kot vsoto simetrične in poševno simetrične matrike, torej:

$$A = S + P$$

↑
simetrična

↑
poševno simetrična

Dokaz:

Naj bo A dana matrika; potem definiramo 2 matriki:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ P = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{cases}$$

Opazimo, da je $S + P = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T = A$

Nadalje:

$$S^T = \left(\left(\frac{1}{2}(A + A^T) \right) \right)^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = S; \text{ torej}$$

S je simetrična.

Tudi P je poseben simetričen.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = S + P = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} -5 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 7 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{ij} &= s_{ij} + p_{ij} \\ a_{ji} &= s_{ji} - p_{ji} \end{aligned}}$$

Opomba:

Če je $A \in M_n(\mathbb{C})$ (to je kompleksna matrika), potem definiramo adjungirano matriko

$$A^* = \overline{A}^T$$

Če je $A^* = A$, pravimo, da je A hermitska oz. sebi adjungirana matrika.

- Def.:

Če za $A \in M_n(\mathbb{C})$ velja $A^*A = AA^* = I$ pravimo, da je A unitarna matrika.

Doslej smo za matrike iz $M_{m,n}$ definirali 2 operaciji: seštevanje in množenje s skalarjem.

V nadaljevanju bomo na množici matrik definirali še operacijo množenja, ki jo ni več težko, da so matrike enakih dimenzij.

Te 3 operacije pa so hkrati definirane v množici kvadratnih matrik.

MNOŽENJE MATRIK

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \right\} \text{ neuporabno}$$

Naj bo $A \in M_{m,n}$ in $B \in M_{p,r}$

Potem lahko definiramo produkt teh dveh matrik, ampak le v primeru, če je n enak p . $\Rightarrow$ če je št. stolpcov prve matrike enak številu vrstic druge matrike.

Dobljena matrika je dimenzije $m \times r$ in je definirana s predpisom:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$n=p$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{pn} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{p2} & \dots & a_{11}b_{1r} + a_{12}b_{2r} + \dots + a_{1n}b_{pr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{pn} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \dots + a_{mn}b_{p2} & \dots & a_{m1}b_{1r} + a_{m2}b_{2r} + \dots + a_{mn}b_{pr} \end{bmatrix}$$

je označimo:

$$A \cdot B = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{bmatrix}$$

potem je $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

c_{ij} = skalarni produkt i -te vrstice A in j -tega stolpca B .

$$\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\quad}^m & \overbrace{\quad}^n \\ \hline A & B \\ \hline \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \overbrace{\quad}^n \\ \hline A \cdot B \\ \hline \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \overbrace{\quad}^m \\ \hline A \cdot B \\ \hline \end{array} \right] \quad \underbrace{\quad}_r$$

Primer:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{-2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)}^3 & \overbrace{-2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 + 0 \cdot 0}^{17} & \overbrace{-2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 1}^6 \\ \underbrace{-1 \cdot 0 + 5 \cdot 1}_{11} & \underbrace{-1 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 0}_{33} & \underbrace{-1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1}_{-9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 6 \\ 11 & 33 & -9 \end{bmatrix}$$

Primer:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 + 7 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = 1$$

vrstična matrika stolpčna matrika

Dobimo da je množenje vrstične in stolpčne matrike ravno skalarni produkt dveh vektorjev.

Lastnosti množenja

$$1.) \underbrace{\underbrace{A \cdot B}_{m \times r}}_{m \times r} \cdot \underbrace{C}_{r \times g} = A \cdot \underbrace{\underbrace{B \cdot C}_{n \times r \times g}}_{n \times g} \quad \dots \text{asociativnost}$$

$\boxed{m \times g}$ $\underline{\underline{m \times g}}$

$$2.) \alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = (\alpha B) \cdot A$$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \quad \dots \text{lahko zmnožimo, ne moremo ju rešiti}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \quad \dots \text{lahko seštejemo, ne moremo ju množiti}$$

Hkrati lahko množimo in seštevamo le kvadratne matrike.

Naj bodo dani matrice, ki jih bomo obravnavali, kvadratne. Potem velja:

$$\begin{aligned} A \cdot (B+C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A+B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A \cdot (B+C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A+B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \end{aligned}} \right\} \text{distributivnost}$$

Ne velja komutativnost

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \vphantom{\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}} \right\} A \cdot B \neq B \cdot A$$

Še ena lastnost, ki je drugačna kot pri množenju s števili.
Iz enakosti:

$$\underline{A \cdot B = 0 \text{ ne pomeni nujno, da je } A=0 \text{ ali } B=0.}$$

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1+1 & 1-1 \\ -2+2 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Naj bo I identična matrica in $A \in M_n$; potem je:

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

$$I \text{ pri matrikah igra vlogo } 1 \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_I \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A =$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 1 &= 5 \\ 5 \cdot x &= 3 \end{aligned} \quad \left\{ \frac{1}{5} \right.$$

$$\frac{1}{5} \cdot 5 \cdot x = \frac{1}{5} \cdot 3$$

$$1 \cdot x = \frac{1}{5} \cdot 3$$

$$x = \frac{1}{5} \cdot 3$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_1 \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Definicija:

Naj bo $A \in M_n$. Če obstaja taka matrika $B \in M_n$, da je $B \cdot A = A \cdot B = I$, potem pravimo, da je B inverzna matrika matrike A in pišemo $B = A^{-1}$. Če za matriko A obstaja A^{-1} , potem pravimo, da je A obrnljiva matrika. Če A ni obrnljiva, potem pravimo, da je A singularna matrika.

Opomba: ni vsaka matrika obrnljiva!

Trditev: Matrika $A \in M_n$ je obrnljiva matrika tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

Inverzna matrika obrnljive matrike lahko zračunamo na več načinov,

npr.: na naslednji način:

$$\text{potem je } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

Pri čemer je A_{ij} (i, j) -ti kofaktor matrike A (prečrtamo i -to vrstico, j -ti stolpec matrike A , izračunamo poddeterminanto, množimo z $(-1)^{i+j}$)

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \det A = 5 \neq 0 \Rightarrow \underline{A^{-1} \text{ obstaja}}$$

$$A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} = 1$$

$$A_{12} = 3 \cdot (-1)^{1+2} = -3$$

$$A_{21} = (-1) \cdot (-1)^{2+1} = 1$$

$$A_{22} = 2 \cdot (-1)^{2+2} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}}$$

Primer:

Rešimo matrično enačbo

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B \quad / \quad A^{-1} \cdot$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Trditev:

Naj bosta A in B obrnljivi matriki. Potem je tudi $A \cdot B$ obrnljiva matrika.

$$\left\{ \text{kvadratni} \right\} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Dokaz:

Iščemo matriko, ki bo inverzna od $A \cdot B$.

$$X \cdot (A \cdot B) = I \quad / \quad \cdot B^{-1}$$

$$A \cdot B^{-1}$$

$$X \cdot A \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_I = B^{-1}$$

$$X \cdot A = B^{-1} \quad / \quad \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_I = A^{-1} \cdot B^{-1}$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B^{-1}}$$

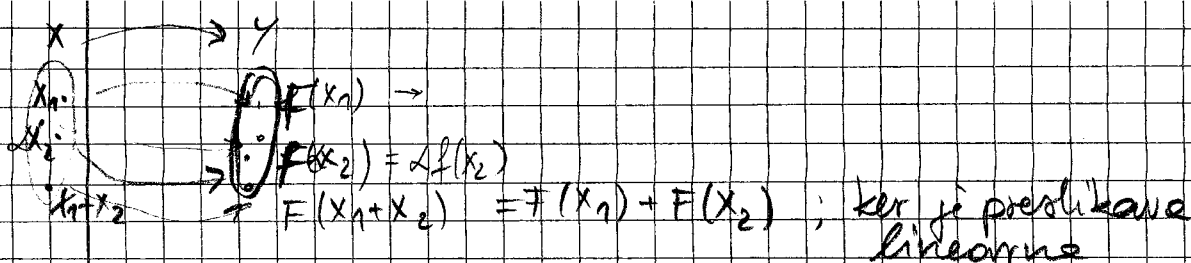
Zgled uporabe množenja matrik:

Najprej definirajmo pojem, ki ga bomo potrebovali:

Def.: Preslikava $F: X \rightarrow Y$ je linearna, če velja:

1.) $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$... aditivnost $x_1, x_2 \in X$

2.) $F(\lambda x) = \lambda F(x)$... homogenost $\lambda \in \mathbb{R}, x \in X$



18.3.2011

Def.: $F: X \rightarrow Y$
 v.pr. v.pr.

$$\left. \begin{aligned} F(x+y) &= F(x) + F(y) \\ F(\alpha x) &= \alpha F(x) \end{aligned} \right\} \text{aditivnost} \\ \text{homogenost} \} \text{linearnost}$$

Primer: $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

F je linearna, če je $F(x) = k \cdot x$

$$F(2x) = k \cdot 2x = 2(kx) = 2 F(x)$$

$$F(x_1+x_2) = k(x_1+x_2) = kx_1 + kx_2 = F(x_1) + F(x_2)$$

Trditve:

Na matrice lahko gledamo kot na preslikave. In sicer, če je $A \in M$ potem A definira preslikavo iz $M_{n,1} (= \mathbb{R}^n)$ v $M_{m,1} (= \mathbb{R}^m)$ mn.

V primeru kvadratnih matric $A \in M_n$ matrika definira preslikavo iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{matrix} & A_{n \times n} & & \\ \begin{matrix} m \\ \downarrow \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} & \begin{matrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ n \times 1 \end{matrix} & = & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \\ & \begin{matrix} m \times n & n \times 1 \\ \hline & m \times 1 \end{matrix} & & \end{matrix}$$

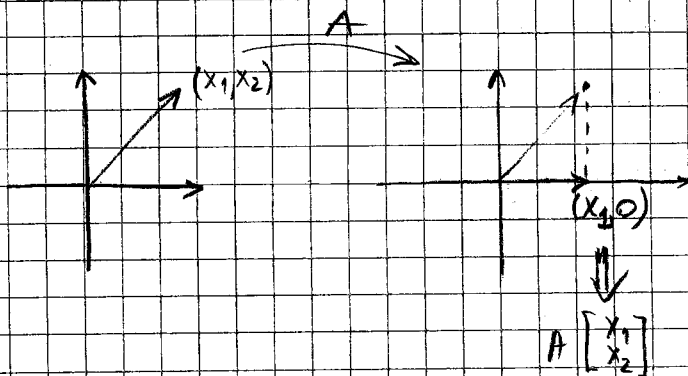
Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

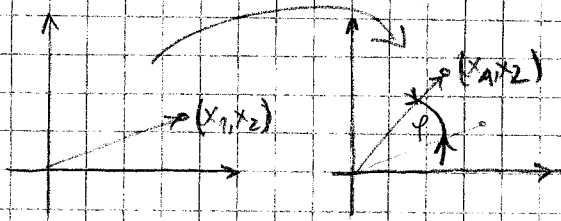


V tem primeru matrika A predstavlja projekcijo vektorja iz $\mathbb{R}^2$ na abscisno os.

A je predpis za pravokotno projekcijo.

Primer:

Opišimo preslikavo, ki nekemu vektorju (x_1, x_2) v $\mathbb{R}^2$ priredi vektor, ki je za kot φ zrotiran prvotni vektor.



To preslikavo zapišemo s pomočjo matrice:

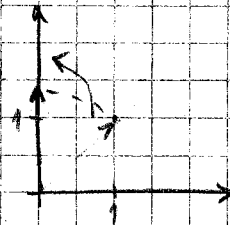
$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Če katerikoli vektor v v ravnini pomnožimo s to matriko, dobimo vektor, ki je rotiran za kot φ .

Naj bo $\varphi = \frac{\pi}{4}$; potem je

$$A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$



Izrek:

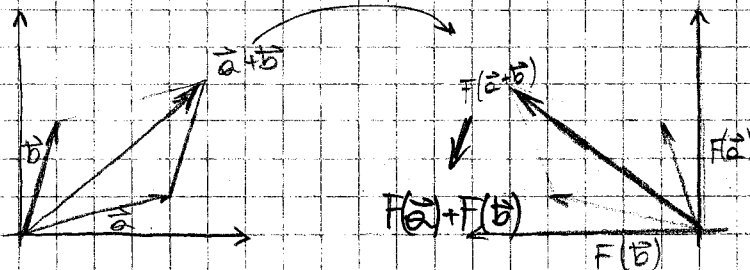
Preslikava, dana z matriko, je linearna. Velja tudi obratno; vsako linearno preslikavo lahko zapišemo s pomočjo matrice.

Opomba:

Če imamo neko preslikavo, ki ni linearna, je ne moremo zapisati s pomočjo matrice.

Primer:

Rotacija je linearna preslikava
rotacija za $\frac{\pi}{2}$



Torej s pomočjo matrik opisujemo linearne preslikave.

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednji pojem; RANG MATRIKE

Def.:

Rang matrice $A \in M_{m,n}$ je enak dimenziji največje nenulne poddeterminante matrice A .

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{rang } A = ?$$

$$A \in M_{3,4}$$

Ali je rang A enak 3? Ali obstaja kakšna 3×3 poddeterminanta, ki je različna od 0?

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 16 + 6 - 0 - 16 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 16 + 14 + 0 - 24 - 0 - 6 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 7 + 0 - 12 - 0 - 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 28 + 18 - 18 - 28 - 12 = 0$$

Torej $\text{rang } A < 3$; ali je $\text{rang } A = 2$?

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -5 \neq 0; \text{ Torej } \text{rang } A = 2$$

Opomba:

Naj bo $A \in M_{m,n}$, potem je $\text{rang } A \leq \min\{m, n\}$ (torej manjši ali enak od manjše "stranice" matrice).

$$m \left\{ \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \right\} n$$

- Opomba:
Rang matrike je enak nič

- Trditev:
 $\text{Rang } A^T = \text{rang } A$ (rang je definiran s pomočjo determinante, transformacije ne vpliva na determinante).
Spomnimo se, da je determinanta enaka 0, če sta dve vrstici linearno odvisni.

- Trditev:
Sledijo, da je rang matrice A enak številu linearno neodvisnih vrstic matrice A .

- Zaradi lastnosti det. (s pomočjo katere je definiran rang) velja, da se rang ne spremeni, če uvedemo katerokoli izmed naslednjih elementarnih operacij:

1.) Rang se ne spremeni, če v matriki zamenjamo katerikoli vrstici:

- Pri det. se spremeni predznak, nas zanima le ali je $\det = 0$ ali $\det \neq 0$

2.) Porežimo katerokoli vrstico s katerikoli nen ničelnim številom.

- det. se spremeni za nen ničelni faktor, če je različna od 0. Pri rangju nas zanima ali je $\det = 0$ ali $\det \neq 0$.

3.) Prištejemo katerikoli vrstici večkratnik katerokoli druge vrstice.

- Primer:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_2 + v_1} \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- Ker se rang pri elementarnih operacijah ne spremeni, računamo rang običajno tako, da preoblikujemo matriko s pomočjo elementarnih operacij do "zgornje trikotne" matrike.

- primer:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

- Rang matrike je potem enak številu linearno neodvisnih vrstic, torej št. nen ničelnih vrstic "zgornje trikotne" matrike.

- primer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_2 - v_1, v_4 - v_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_2 \leftrightarrow v_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_3 + v_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang } A = 3$$

- sistem linearnih enačb:

za n neznank $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

} a_{ij} imenujemo koeficient sistema

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

- Ta sistem lahko zapisemo v matrični obliki in sicer naj bo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sistem linearnih enačb v matrični obliki enak

$$\underline{AX = B}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Razširjena matrika:

Pri reševanju sistema si bomo pomagali še z razširjeno matriko R .

$$R = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \in M_{m, n+1}$$

Izrek: (osnovni izrek o reševanju sistema lin. enačb)

Sistem m linearnih enačb za n neznank $AX=B$ ima rešitev natanko tedaj, ko je rang matrike A enak rangu matrike R .

$$\boxed{\text{rang } A = \text{rang } R}$$

↓
št. neodvisnih
stolpcer

Ce sta rango različna, nimamo
rešitve sistema.

Ce je $\text{rang } A = \text{rang } R$, sistem ima rešitev; in ce je rang A enak št. neznank, potem obstaja natanko ena rešitev sistema.

Ce je rang sistema, ki ima rešitev različen od št. neznank, potem ima sistem neskončno rešitev.

Pri tem si lahko $n - \text{rang } A$ vrednosti poljubno izberemo, ostale vrednosti neznank so A temi vrednostim natanko določene.

Primer:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \quad / : a_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \quad / : a_{22} \end{aligned}$$

(Zapišimo ta sistem
z drugimi oznakami)

$$\begin{aligned} -k_1x + y &= n_1 \\ -k_2x + y &= n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \left(\begin{aligned} a_{11} &= -k_1, & \frac{b_1}{a_{11}} &= n_1 \\ a_{12} &= 1, & \frac{b_1}{a_{12}} &= y \end{aligned} \right. \\ x_1 &= x \\ x_2 &= y \end{cases}$$

$$\frac{a_{21}}{a_{22}} = -k_2, \quad \frac{b_2}{a_{22}} = n_2$$

Prewedimo:

$$\begin{aligned} y &= k_1x + n_1 \\ y &= k_2x + n_2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= k_1x + n_1 \\ y &= k_2x + n_2 \end{aligned}} \right\} \text{ enačbi premice}$$

Rešiti sistem teh dveh premic pomeni poiskati tisto točko s koordinatami (x, y) , ki zadošča tako prvi kot tudi drugi enačbi; leži na obeh premicah $\rightarrow$ presečišče premic

Kaj se lahko zgodi:
- premici se ne sekata, sistem nima rešitve.

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{ni rešitve}$$

- premici se sekata v eni točki

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow T(1, 1)$$

- premici ležita ena na drugi, dobimo neskončno rešitev

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 2y = 2x + 2 \end{cases} \Rightarrow (x, x + 1)$$

x si poljubno izberemo, y izračunamo iz enačbe

Definicija:

Če je $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, potem pravimo, da je sistem $A \cdot X = 0$ homogen.

ničelna
matrica

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

Izrek:

Homogen sistem ima vedno rešitev; saj je $\text{rang } A = \text{rang } B$

Za homogen sistem je $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ vedno rešitev sistema. To rešitev imenujemo trivialna rešitev.

Netrivialna rešitev obstaja, če je $\text{rang } A$ manjši od št. neznank. V tem primeru je neskončno rešitev.

Izrek:

Naj bo $AX = 0$ homogen sistem ^{n enačb} za n neznank, torej je A kvadratna matrica, potem obstaja netrivialna rešitev hom. sistema natanko tedaj, ko je $\det A = 0$

Dokaz, če je $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A < n \Rightarrow$ sistem ima neskončno rešitev.
 $\uparrow$
št. neznank

Sistem linearnih enačb rešimo z Gaussovo metodo to pomeni, da sistem z elementarnimi operacijami preoblikujemo do takega sistema, katerega je enostavno prebrati rešitev.

Elementarne operacije pri sistemu enačb:

- 1.) $AX=B$ Menjava dveh vrstic matrike
 $R = [A; B]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

- 2.) Množenje vrstične matrike z nenulnim skalarjem
 Na enačbo množenje ne vpliva

- 3.) Vrstici prištejemo večkratnik katerekoli druge vrstice $\leftrightarrow$
 enačbi prištejemo večkratnik druge enačbe

Torej elementarne operacije ne vplivajo na rešitev sistema.

Matriko zato z el. operacijami preoblikujemo do zgornje
 zgoraj trikotne matrike (pod diagonalo delamo 0)
 Rešitev potem preberemo od spodaj navzgor.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & \end{bmatrix}$$

Primer:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -x_4 \end{cases} \quad \text{Sistem zapisemo v matrični obliki} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{podelimo s 2} \\ \sim \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \sim \\ \sim \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \sim \\ \sim \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$2x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 1$$

$$x_3 + x_4 = -1 \Rightarrow x_3 = -2$$

$$x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -4 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

Z Gaussovo metodo lahko poiščemo inverzno matriko obrnele $n \times n$ matrike A .

To storimo tako, da razširimo matriko

$[A | I]$ z elementarnimi operacijami preoblikujemo do matrike $[I | B]$. Dobljena matrika B je ravno inverzna matrika matrike A ;

torej $B = A^{-1}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ I \cdot A = A \\ A \cdot A^{-1} = I \end{array} \right\}$$

Kako pridemo do identitete na levi strani; najprej priklonimo 0 pod diagonalo, nato pa pod desne proti levi še 0 nad diagonalo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\substack{V_2 - 2V_1 \\ \cdot \frac{1}{2}}} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

29.3.2011

KVADRATNA FORMA

Def.: Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$ in $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$

kvadratna
 $n \times n$
matrika

stolpčna
matrika

Izraz

$$\underbrace{X^T}_{1 \times n} \cdot \underbrace{A}_{n \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1} = \underbrace{\quad}_{1 \times 1}$$

imenujemo kvadratno forma in je matrika velikosti 1×1 , torej je to število - identificiramo 1×1 matrike in števila.

Primer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X^T \circ A \cdot X = \begin{bmatrix} -i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i-1 \\ 2i \end{bmatrix} = 1 + i + 2i = \underline{\underline{1+3i}}$$

Def: Če je A hermitska matrica, potem pravimo, da je $\bar{X}^T A X$ hermitska kvadratna forma.

Če je A poševno hermitska matrica, potem pravimo, da je $\bar{X}^T A X$ poševno hermitska kv. forma.

Izrek: Hermitska kvadratna forma je realno število za vsak $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$.

Dokaz: Št. α je realno natanko tedaj, ko je $\bar{\alpha} = \alpha$. Pokazali bi torej, da je $\overline{\bar{X}^T A X} \stackrel{?}{=} \bar{X}^T A X$.

$$\overline{\bar{X}^T A X} = (\overline{\bar{X}^T}) \overline{A \cdot X} = X^T \bar{A} \bar{X} = (X^T \bar{A} X)^T = \bar{X}^T A^T (X^T)^T =$$

ker je kv. forma matrica velikosti $1 \times 1 \rightarrow$ število, se pri transpoziciranju nič ne spremeni

hermitska:

$$A = A^* = A^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$= \bar{X}^T \bar{A}^T X = \bar{X}^T A X$$

Izrek: Poševno hermitska kv. forma je čisto imaginarno št. za vsak $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$

realni del je 0.

Dokaz: Št. α je čisto imaginarno natanko tedaj, ko je $\bar{\alpha} = -\alpha$. Pokazali bi, da je $\overline{\bar{X}^T A X} \stackrel{?}{=} -\bar{X}^T A X$

$$\overline{\bar{X}^T A X} = \bar{X}^T \bar{A} X = X^T \bar{A} \bar{X} = (X^T \bar{A} X)^T = \bar{X}^T A^T (X^T)^T = \bar{X}^T A^T X = -\bar{X}^T A X$$

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{A}^T = -A$, ker je A hermitsko poševna

Torej je A hermitska matrica

$$X = \begin{bmatrix} 7 \\ 1-i \end{bmatrix} \quad \bar{X}^T A X = \begin{bmatrix} 7 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14+1-i+i+1 \\ 7-7i+1-i \end{bmatrix} =$$

$$= 98+71-i+71i+7+71-71i+11^2-11i+7i+7+11i+1 \in \mathbb{R}$$

Izrek: Če je pri kvadratni formi $X^T A X$ matrica $A = I$, potem je

$$X^T A X = X^T I X = \underbrace{X^T X}_R \geq 0.$$

$$X^T X = 0 \Rightarrow \text{ko je } X = 0.$$

absolutne
vrednosti
vektorjev

Dokaz:

$$\begin{aligned} \text{Naj bo } X &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ potem je } X^T X = [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \overbrace{x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n}^{\text{absolutne vrednosti vektorjev}} \\ &= |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

To je enako 0, samo če so vsi x_i enaki 0.

LASTNI VEKTORJI IN LASTNE VREDNOSTI MATRIKE

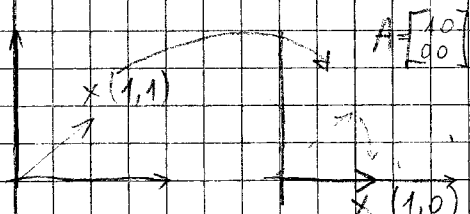
Def: Naj bo A kvadratna matrica dimenzije $n \times n$ in X nek neničeln vektor dimenzije $n \times 1$, tako da velja

$$AX = \lambda X$$

lastna
vrednost

lastni
vektor

Za neko število λ . Potem X imenujemo lastni vektor matrice A , ki pripada lastni vrednosti λ .



lastni vektorji so vsi vektorji, ki ležijo na osi x .

- Lastni vektorji so tisti, ki jim matrica ne spremeni smeri (lahko jih kvečjemu skrajša, raztegne, obrne smer)

Naj bo dana matrica A . radi bi poiskali vse njene lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje.

Iščemo λX , da velja:

$$AX = \lambda X$$

$\rightarrow$

$$AX - \lambda X = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

poznamo

iščemo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$AX - \lambda IX = 0$$

$$\rightarrow (A - \lambda I)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dobili smo matrični zapis sistema n linearnih enačb za n neznanke, ker so na desni same 0, je ta sistem homogen.

Homogen sistem ima vedno trivialno rešitev $X = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, to nas ne zanima, ker mora biti lastni vektor nenulčen.

Iščemo nenulčno rešitev, hočemo da ima sistem več kot 1 rešitev, to je neskončno rešitev $\rightarrow$ taktat ko je rang matrike manjši od št. neznank, v našem primeru $< n$.

Rang matrike $A - \lambda I$ mora biti manjši od n ; to pomeni (po def. rango) da mora biti $n \times n$ det. enaka 0. $\rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

Dobili smo enačbo za neznanke λ , ki jo rešimo in dobimo lastne vrednosti matrike A .

Potem, ko imamo lastne vrednosti, enačbo* in dobimo lastne vektorje.

rešimo sistem linearnih

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2+\lambda)(1-\lambda)(\lambda) + 12 + 12 + 12 \cdot (2+\lambda) - 3(1-\lambda) + 4\lambda =$$

$$= 2\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 + 24 - 3 + 3\lambda + 4\lambda + 24 + 12\lambda = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45 = 0$$

$$1 \quad 1 \quad -21 \quad -45$$

$$\lambda_1 = 5$$

$$\lambda_2 = -3$$

$$(\lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45) : (\lambda - 5) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2$$

$$6\lambda^2 - 21\lambda - 45$$

$$6\lambda^2 - 30\lambda$$

$$9\lambda - 45$$

$$9\lambda - 45$$

$$0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$

Lastne vrednosti matrike A sta $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3$

Izračunajmo lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = 5$.

Gammarus melano

1	2	3	0	$\frac{1}{10}$	1	2	3	0	$\frac{1}{10}$	1	2	3	0	
0	-4	-8	0	$\sim$	0	4	2	0	$\sim$	0	4	2	0	
0	4	6	32	0	$\frac{1}{10}$	0	4	2	0	$\frac{1}{10}$	0	4	2	0

$$X_2 = 2 \times 3 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + 5X_3 = 0$$

$$X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 0, \dots, X_n = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} -X_3 \\ -2X_3 \\ X_3 \end{bmatrix} = X_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{lastni vektor, ki pripada } \lambda = 5$$

30.3.2011

Naj bo A kvadratne $n \times n$ matrice;

1. Če je A hermitska matrika, potem so vse njene lastne vrednosti realne.
števila. $A = A^* = \bar{A}^T$
2. Če je A poševno-hermitska, potem so vse njene vrednosti čista imaginarna števila.
 $A = -A^* = -\bar{A}^T$
3. Če je A unitarna matrika (matrika, ki ohranja kote med preslikavanji npr.: rotacija, ...), potem so vse njene lastne vrednosti po abs. vrednosti enake 1.
 $A^*A = AA^* = I$

Hkrati dokažimo 1. in 2. točko.

Naj bo x lastna vrednost in x pripadajoči lastni vektor, torej:

$$AX = \lambda X \quad / \bar{X}^T$$

$$X^T A X = \overline{X}^T \overline{X} \Rightarrow \lambda \overline{X}^T \overline{X}$$

ker ja $\bar{X}^T X = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}_{\mathbb{R}}$

Ker je x lastni vektor, je $x \neq 0$, torej
 $\bar{x}^T \cdot x \neq 0$.

V enačbi izpostavimo l in dobimo:

$$\lambda = \frac{(\vec{x}^T A \vec{x})}{(\vec{x}^T \vec{x})} \rightarrow \text{kvadratične forme, torej število}$$

realno število

Če je A hermitska, je $\bar{X}^T A X$ realno št., torej $\lambda \in \mathbb{R}$

Če je A hermitska, je $\bar{X}^T A X$ realno št., torej $\lambda \in \mathbb{R}$
 Če je A posvobodno hermitska, je $\bar{X}^T A X$ čisto imaginarno število, je λ čisto img. število.

3. Naj bo A unitarna in naj bo λ lastna vrednost in X pripadajoči lastni vektor, torej:

• $AX = \lambda X$ / obe strani transponiramo

$A^T X^T = \lambda X^T$ / obe strani konjugiramo

• $X^T A^T = \overline{\lambda} X^T$

$A^* A = I$
 $A^T A = I$

Levo stran enačbe • pomnožimo z levo stranjo • enačbe. Enako tudi na desni strani.

$X^T A^T \cdot AX = \lambda X \cdot \overline{\lambda} X^T = \overline{\lambda}^T I X = \lambda^2 X^T X$

$\overbrace{X^T X}^{\text{realnost} \neq 0} = \underbrace{|\lambda|^2}_{\text{realnost} \neq 0} \overbrace{X^T X}^{\text{realnost} \neq 0}$ krajšamo $\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$

FUNKCIJSKE VRSTE (- posplošitev številskih vrst.)

Primer:

zapišemo:

$f_0(x) = 1$

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x^2$

$f_n(x) = x^n$

$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

← številčna vrsta

$x = \frac{1}{2}$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Def:

Naj bo $f_1(x), f_2(x), \dots$ dana števna množica funkcij. Potem definiramo funkcijsko vsoto:

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$

Za $x_0 \in \mathbb{R}$ je funkcijska vrsta $f(x)$ konvergentna, če konvergira številška vrsta $f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \dots$

Število x_0 je v tem primeru v Df. območju funkcijske vrste. Če za nek $x_1 \in \mathbb{R}$ vrsta $f_1(x_1) + f_2(x_1) + \dots$ divergira, potem je za ta x_1 funkcijska vrsta divergentna.

Množica vseh vrednosti x , za katero je funkcijska vrsta konvergentna, sestavlja Df. območje funkcijske vrste.

Primer:

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots \\ &= e^{-x} + (e^{-x})^2 + (e^{-x})^3 + \dots \\ &= y + y^2 + y^3 + \dots \end{aligned}$$

$$y = e^{-x}$$

Ta vrsta konverira za $|y| < 1$, torej $|e^{-x}| < 1 \Rightarrow e^{-x} < 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \ln e^{-x} < \ln 1 \Rightarrow \underline{x > 0}$

Št. vrsta: je konvergentna za $x > 0$, torej Df. območje $D(f) = (0, \infty)$

Def.:

Funkcijska vrsta f je ^{enakomerno} konvergentna na intervalu $[a, b]$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako naravno št. n , da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vsak $x \in [a, b]$ za vse x s tega intervala f. vr. enakomerno konverira,

Izrek:

Naj bo $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$ enak. konv. f. vr. na intervalu $[a, b]$. Potem lahko to f. vr. členoma integriramo, torej:

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots$$

Če je f. vr. $f_1'(x) + f_2'(x) + \dots$ enak. konv., potem lahko f. vr. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$ členoma odvajamo, torej:

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots$$

Primer:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln|1-x| + C = \int 1 dx + \int x dx + \dots$$

$$-\ln|1-x| + C = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + C$$

$\Rightarrow$ v tem primeru enakost velja

če vstavimo $x = 0$, dobimo da so konstante enake 0.

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$1 + x + x^2 = \frac{1}{1-x}$$

$|x| < 1$

POTENČNE VRSTE

Def.:

Pot. vr. je f. vr. oblike

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n;$$

Pri čemer je x spremenljivka, $x_0, a_0, a_1, a_2, \dots$, pa so dane konstante.

Poseben primer potenčne vrste; $x_0 = 0 \Rightarrow f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Zanima nas Df. območje potenčne vrste $\Rightarrow$ za dano vrednost x_1 nas zanima ali je $f(x_1)$ konv. št. vrsta.

Konvergenco preverimo s kvocientnim kriterijem.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} (x-x_0) \right| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x-x_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Def.:

Limito $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ (če obstaja) imenujemo konvergenčni polmer potenčne vrste, torej $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$

Potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ konvergira za vse x , za katere velja:

$$|x-x_0| < R$$



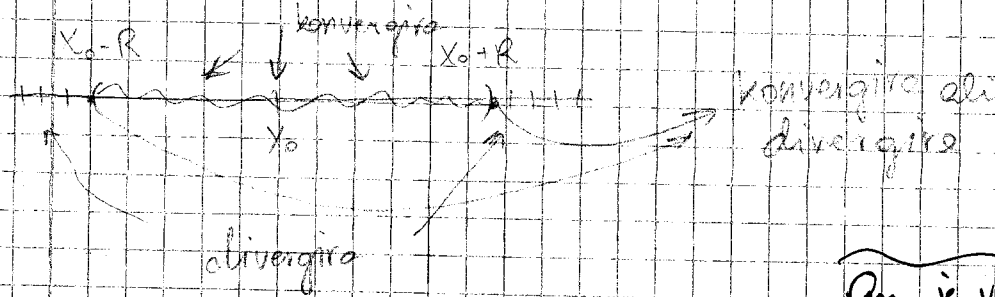
$$\text{torej } x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Izrek:

$$\text{Naj bo } f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

potenčna vrsta in naj bo $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ njen konvergenčni polmer.
Potem potenčna vrsta za vsake $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ konvergira, za vsake

$x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$ potenčna vrsta divergira na mejah intervala, t.j. za $x = x_0 - R$ in $x = x_0 + R$ lahko konvergira ali divergira (moramo preveriti v vsakem primeru posebej)



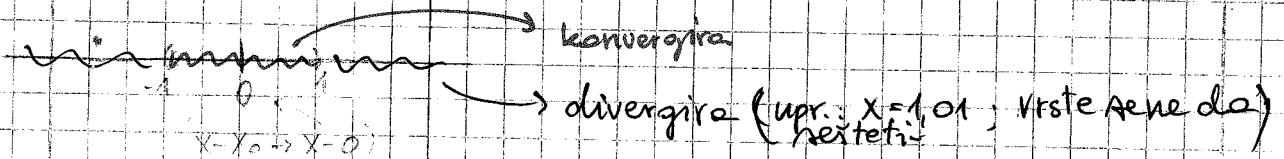
a_n je vedno tista zadelva, ki je pri x^n

Primer:

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

kaj je konvergenca te vrste?

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}(-1)^n}{\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}(-1)^n}{\frac{1}{n+1}(-1)^n(-1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$



Začetnih nekaj členov ne vpliva na konvergenco.

Preverimo konvergenco na meji / krajših intervala.

$$x = -1; \quad 1 - (-1) + \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^5}{5} + \dots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Primer harmonične vrste, ki divergira!

$$x = 1; \quad 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots =$$

Primer alternirajoče vrste; ker je kriterij konvergenca.

$\lim a_n = 0$, po Leibnizovem

Sledi, da je funkcijska vrsta konvergentna za vsak $x \in (-1, 1]$, torej je $[-1, 1]$ def. območje funkcijske vrste.

Primer:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Def. območje te vrste.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

F. vrsta bo za vse x konvergentna!

Ne glede na x se bo vrsta dala sešteti.

$$x \in (-\infty, \infty)$$

Primer:

$$f(x) = 1 + 1! \cdot x + 2! \cdot x^2 + \dots$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Funkcijska vrsta konvergira samo za $x=0$, za vse ostale vrednosti divergira.

TAYLOR-jeva VRSTA

Funkcijo, ki je dovolj lepa, lahko zapišemo v obliki potenčne vrste, ki jo imenujemo Taylorjeva vrsta te funkcije.
Naj bo dana funkcija f ; zanjima nas, če se da zapisati v obliki

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots$$

in koliko so koeficienti a_n .

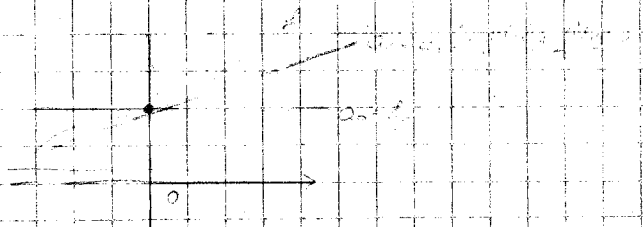
Koliko bi lahko bili ti koeficienti?

Naj bo f neskončnokrat odvedljiva funkcija, radi bi jo aproksimirali s potenčno vrsto. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$

1. aproksimacija z enim členom:

$$f(x) \approx f(0)$$

$$\text{Torej } a_0 = f(0)$$



2. aproksimacija z dvema členoma:

$$f(x) \approx \underbrace{a_0 + a_1x}_{\text{enaka premica}} = f(0) + f'(0)x \quad ; \quad \begin{matrix} a_0 = f(0) \\ a_1 = f'(0) \end{matrix}$$

Premica, ki najbolje aproksimira graf funkcije v neki točki, je ravno tangenta na graf v tej točki.

3. aproksimacija s tremi členi:

$$f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$f(0) \approx a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(x) \approx 2a_2$$

$$f''(0) \approx 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

Izrek:

Naj bo f neskončnokrat odvedljiva funkcija na svojem def. območju in naj bo x_0 iz def. območja; potem lahko f razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog točke x_0 , to pomeni, da je

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

To pomeni, da so pri razvoju f v potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ koeficienti

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Običajno bomo f razvijali okrog točke 0, torej $x_0 = 0$ in

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Opomba:

T. vrsto lahko zapišemo tudi v obliki

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{\text{prvih } m+1 \text{ členov}} + \underbrace{R_{m+1}(x_0)(x-x_0)^{m+1}}_{\text{ostanek vrste}} \quad \text{pri čemer}$$

$R_{m+1}(x_0)$ imenujemo ostanek T. vrste; velja še

$$R_{m+1}(x) = \frac{f^{(m+1)}(\tilde{x})}{(m+1)!}; \quad \tilde{x} \in (x_0, x)$$

$R_{m+1}(x_0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, torej sta za velike m vrednost f in vsote prvih $m+1$ členov skoraj enaki.

Vrednost ostanka vrste poskusimo oceniti; pri alternirajočih vrstah je vrednost manjše od prvega člena, ki smo ga izpustili.

T. vrste nekaterih elementarnih funkcij:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

1. $f(x) = e^x \rightarrow f(0) = 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) &= e^x \rightarrow f''(0) = 1 \end{aligned}$$

} sledi; $e^x = 1 + 1 \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

primer:

$$\sqrt{e} = 1,64872127, \dots$$

$$e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{2})^4}{4!} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} = \underline{\underline{1,6487, \dots}}$$

Konvergenca e^x :

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \infty$$

Vrstaz e^x konvergira za vsak x !
 Z katerikoli x bomo vedno lahko vrsto sešteli!

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \rightarrow f(0) = 0 \\ f'(x) &= \cos x \rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) &= -\sin x \rightarrow f''(0) = 0 \\ f'''(x) &= -\cos x \rightarrow f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \rightarrow f^{(4)}(0) = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

pri sodih številih je !! vsota
 sodih fakultet, upr.: $1+2+8+\dots$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}} = \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n$$

Opomba:

Ker je sinus liha funkcija so v njenem razvoju samo lihe potence, saj mora biti tudi desna stran lihe funkcije.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

6.4.2011

$$x \left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)$$

za pot. vrsto za potenco y
 lahko izračunamo konvergenčni
 polmer $R = \infty$.

$$x \left(\frac{1}{1!} - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \dots \right)$$

$$y = x^2$$

Opomba:

Prvi približek za funkcijo $\sin x$ je kar x : $\sin x \approx x$.
 Ta približek je dober za majhne vrednosti x .

Primer:

$$x = 0,1 \quad (\text{v rad})$$

$$x = 1$$

$$\sin 0,1 = 0,098 \approx 0,1$$

$$\sin 1 \approx 0,8414$$

$$\approx 1$$

napaka je že večja.

$$\sin x \approx x$$

$$x = 2$$

$$\sin 2 = 0,909$$

mm 2
 too much

3. $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \\ f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \sin x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= -1 \\ f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(0) &= 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Ker je $\cos x$ soda funkcija, lihe vrednosti/potence odpadejo. Konvergenčni polmer izračunamo podobno kot pri sinusu, torej $R = \infty$, to pomeni, da T. vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Opomba:

Prvi približek za kosinus je $1 - \frac{x^2}{2}$, torej $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

Primer:

$$x = 0,1 \quad (\text{v rad})$$

$$\cos x = 0,99500$$

$$x = 1$$

$$\cos 1 = 0,5403$$

$$x = 2$$

$$1 - \frac{0,1^2}{2} = 0,995$$

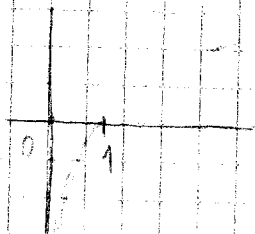
$$\cos 2 = -0,41 \quad 1 - \frac{4}{2} = -1$$

too much

$$1 - \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

4. log x



~~$$\log x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$~~

Funkcije $\log x$ ne moremo razviti v Taylorjevo vrsto okrog točke $x=0$, saj $\log x$ v tej točki sploh ni definirana.

V Taylorjevo vrsto okrog točke $x=0$ zato razvijemo $f(x) = \log(1+x)$.

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2}$$

$$f''(0) = -1$$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} (n-1)!$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$f'''(0) = (-1)(-2)$$

$$f^{(4)}(0) = (-1)(-2)(-3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (-1)^{n+1}$$

Sledi: $\log(1+x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$

$$= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}x^n + \dots =$$

$$\boxed{\log x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \dots}$$

Kaj je konvergenca?

konv. polmer:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$$

Preverimo še v kvajših intervala:

za $x = -1$; dobimo harmonično vrsto, ki divergira

za $x = 1$; dobimo alt. $\sum \frac{1}{n}$, ki konvergira

Formula :: velja samo za $x \in (-1, 1]$, torej lahko izračunamo vrednosti logaritma na intervalu $(0, 2]$.

Primer:

$$\log 2 = 0,693 \dots$$

$$x = 1; \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = 0,693$$

Kljub temu, da smo vzeli 5 členov je razlika velika; vrsta izredno slabo konvergira; za natančen približek bi mogli vzeti okoli 100 členov.

BINOMSKA VRSTA

$\sqrt{x}$ $\rightarrow$ ne moremo ga razviti v T. vrsto okrog $x = 0$, saj za $x < 0$ ni definiran.
Zato bomo okrog $x = 0$ razvili funkcijo $\sqrt{1+x}$, oz. splošno:
 $f(x) = (1+x)^r$; $r \in \mathbb{R}$

Preden se lotimo razvoja se spomnimo nekaj lastnosti binomskih simbolov:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Vrednosti dobimo s Pascalovim trikotnikom:

	1				
	1	1			
	1	2	1		
	1	3	3	1	
$m=4$	1	4	6	4	1

binomski simbol $\rightarrow \binom{m}{k}$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 6$$

$$= \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

Velja $\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} &= \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!} = \frac{m!(k+1) + m!(m-k)}{(k+1)!(m-k)!} = \\ &= \frac{m!((k+1) + (m-k))}{(k+1)!(m-k)!} = \frac{m!(m+1)}{(k+1)!(m-k)!} = \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m+1-(k+1))!} = \\ &= \binom{m+1}{k+1} \end{aligned}$$

Opazimo, da je $\boxed{\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{k!}}$

$$\frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$m, k \in \mathbb{N}$$

$$k = 0, \dots, m$$

Binomski simbol definirajmo sedaj še bolj splošno:

Def.: Naj bo $m \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Potem je $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{k!}$ $\{k \text{ členov}\}$

Primer:

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{3!} = \frac{\frac{3}{8}}{6} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

$$\binom{-\frac{1}{3}}{2} = \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{2!} = \frac{\frac{4}{9}}{2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$\binom{\frac{5}{4}}{3} = \frac{\frac{5}{4}(\frac{1}{4})(-\frac{3}{4})}{3!} = -\frac{\frac{15}{64}}{6} = -\frac{5}{128}$$

Razvoj v binomsko vrsto; Naj bo $m \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (1+x)^m$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$$

$$f^{(4)}(x) = m(m-1)(m-2)(m-3)(1+x)^{m-4}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = m$$

$$f''(0) = m(m-1)$$

$$f'''(0) = m(m-1)(m-2)$$

$$f^{(4)}(0) = m(m-1)(m-2)(m-3)$$

sledi:

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots = \\ &= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n}x^n \end{aligned}$$

Izračunajmo konvergenčni polmer

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} = \frac{m(m-1) \dots (m-(n+1)+1)}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{(m-n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n}}{-1 + \frac{m}{n}} \right| = 1$$

Vrsta konvergira $x \in (-1, 1)$

primer:

12. 4. 2011

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \dots$$

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)x^2 + \dots$$

približno izračunajmo vrednost $\sqrt{\frac{2}{3}}$:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,81649 \dots$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{(-\frac{1}{8})(-\frac{1}{3})^2}{2!} + \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \dots =$$

$$x = -\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{72} - \frac{1}{432} = 0,817 \dots$$

0,833
0,819

primer:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} (-x)^n = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(-x) + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{3!}x^3 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + \frac{14}{81}x^3 + \dots$$

približno izračunajmo $\frac{1}{\sqrt[3]{1,03}}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1,03}} = 0,9902$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1,03}} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{100}\right) \approx 0,99$$

$x = -\frac{3}{100}$

Ker je x majhen, dobimo dober približek že pri prvih dveh členih.

Opomba:

Natančnost približka pri razvoju $f(x)$ v T. vrsto je odvisna od št. členov, ki jih upoštevamo pri izračunu; od velikosti vrednosti spremenljivke, po kateri razvijamo; hitrosti konvergence T. vrste.

Uporaba Taylor-jeve vrste

- ① za izračun približnih vrednosti $f(x)$,
- ② za izračun limite $f(x)$,

Primer:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)}{x} =$$

vstavimo $x=0$

$$= 1$$

- ③ za izračun vrednosti neelementarne $f(x)$

Primer:

integralski $\rightarrow$ $S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt =$

neintegrabilna funkcija



$$= \int_0^x \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \right) dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \dots \right) dt$$

izračunamo ploščino

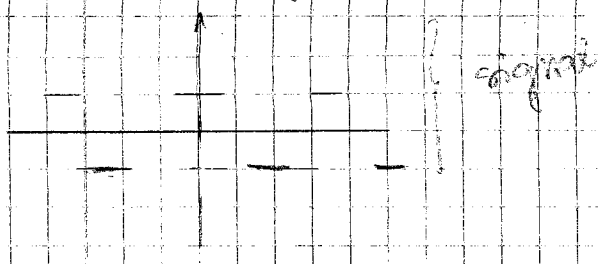
← neskončna vsota

$$= \int_0^x 1 dt - \int_0^x \frac{t^2}{3!} + \int_0^x \frac{t^4}{5!} - \int_0^x \frac{t^6}{7!} = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

$$S_i(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

Konvergira še hitreje kot $\sin(x)$.

FOURIERJEVA VRSTA



Pri T. vrsti je bila zahteva
mestoučna odvedljivaost, pri
F. vrsti pa je periodičnost.

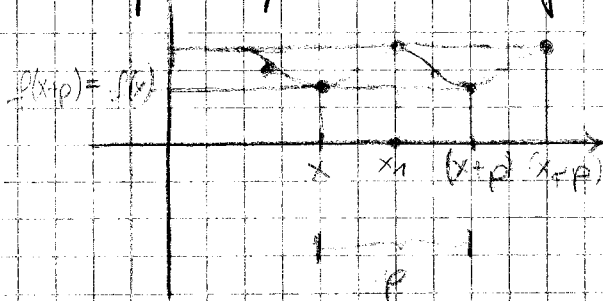
Pojmi o periodičnih funkcijah:

Def.

$f(x)$ je periodična, če obstaja tako število p , da velja:

$$f(x+p) = f(x) \quad \text{za } x \in \mathbb{R}$$

Število p v tem primeru imenujemo periodo funkcije f .



Trditev:

Če je $f(x)$ periodična s periodo p ; potem je f tudi periodična s periodo mp , $m \in \mathbb{N}$.

Dokaz:

Naj bo $m \in \mathbb{N}$. Potem je $f(x+np) = f(x+(n-1)p+p) = f(x+(n-1)p) = f(x+(n-2)p) = \dots = f(x)$.

Trditev:

Periodična $f(x)$ s periodo p je natančno določena z vrednostmi na kateremkoli intervalu dolžine p .

Naj bosta f in g periodični funkciji z isto periodo p ; potem je njuna lin. kombinacija tudi periodična funkcija s periodo p .

npr.: $5 \sin x + 3 \cos x \Rightarrow$ spet periodična funkcija.

Dokaži:

$$(\alpha f + \beta g)(x+p) = \alpha f(x+p) + \beta g(x+p) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \underline{\underline{(\alpha f + \beta g)(x)}}$$

Primeri periodičnih funkcij:

a) $\sin x, \cos x$

$p = 2\pi$

b) $\sin 2x, \cos 2x$

$p = \pi$

; perioda je tudi $\frac{2\pi}{2}$

c) $\sin 3x, \cos 3x$

$p = \frac{2\pi}{3}$

; perioda je tudi $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$

d) $\sin 4x, \cos 4x$

$p = \frac{\pi}{2}$

; perioda je tudi 2π

Sledi, da je vsota funkcij oblike $\sin(nx)$ in $\cos(nx)$ periodična funkcije s periodo $\underline{2\pi}$.

Def.: Funkcijska vrsta oblike:

$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$ imenujemo trigonometrijska vrsta.

Naj bo f dana periodična funkcija s periodo 2π . Radi bi jo razvili v trigonometrijsko vrsto, torej zapisali v obliki:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^*$$

To pomeni, da bi za dano funkcijo f radi izračunali koeficiente a_n in b_n .

To storimo na naslednji način:

Obe strani enačbe * integriramo:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx)) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx)) dx = \\ &= a_0 x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_0 + b_n \underbrace{\frac{(-\cos(nx))}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \cdot 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

ker sta funkciji $\sin(nx)$ in $\cos(nx)$ periodični s periodo 2π .

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Da določimo koeficiente enačbe najprej pomnožimo s $\cos(mx)$ in vsoto integriramo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx \right)$$

$$a_0 = \frac{\sin(mx)}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

soda $f(x) \cdot \text{lihe } f(x) = \text{lihe}(f(x))$

integral lihe funkcije na simetričnem intervalu je 0.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) dx$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n+m)x)}{n+m} \right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$\sin((n+m)x)$ je periodična s periodo 2π , $-\pi$ in π sta ravno 2π narazen.

$$\cos(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2} (\cos(n+m)x + \cos(n-m)x)$$

tudi če zamenjamo m in n se nič ne spremeni, ker je $f(x)$ soda.

$$\boxed{n \neq m}$$

Vsi integrali za $n \neq m$ oblike $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0$. Izračunajmo še integral $m=n$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos((n+m)x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n+m)x)}{n+m} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

Dobimo, da je $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = a_m \cdot \pi$, oz. $a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$

n se spreminja, m ostaja enak.

Na enak način izračunamo b_n , tako da pomnožimo začetno enačbo s $\sin(mx)$ in dobimo:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

Izrek:

Naj bo f odsekoma zvezna periodična funkcija s periodo 2π in naj v vsaki točki obstaja levi in desni odvod funkcije.

Funkcija, ki ima končno ali stevno neskončno preskokov.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{nevezna funkcija}$$

Potem lahko funkcijo razvijemo v trigonometrijsko - Fourierjevo vrsto,

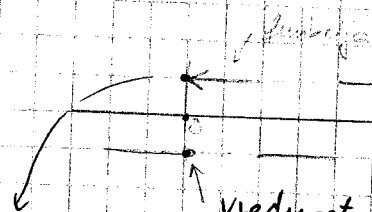
$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + \dots + \\ = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad \text{F.vr.}$$

pri čemer koeficiente izračunamo po formulah

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

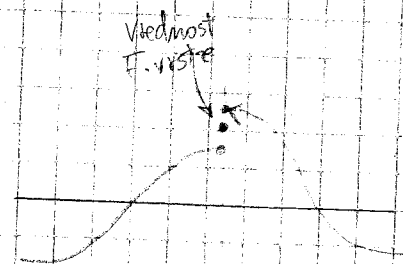
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Fourierjeva vrsta $f(x)$ konvergira za vsake x in je enaka vrednosti funkcije f v vseh točkah kjer je f zvezna $f(x)$. V točkah nezveznosti je vrednost F. vrste enaka aritmetični sredini - leve in desne limite $f(x)$ v tej točki.



desna limita $f(x) = 1$
leva limita $f(x) = -1$

Vrednost F. vrste je na sredini skoka; v tem primeru je $\frac{(-1)+1}{2} = 0$

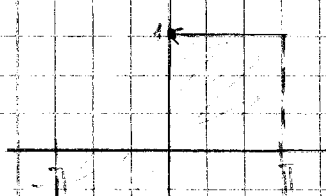


Tam kjer je skok leva stran ni enaka desni.

Primer:

$$f(x) = \begin{cases} -1; & -\pi < x \leq 0 \\ 1; & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Funkcija je liha, ker je simetrična na koordinatno izhodišče.



Vrednost funkcije v krajnih točkah ni pomembna, ker se nekaj točk pri integralu ne bo poznalo.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} (1) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left((-x) \Big|_{-\pi}^0 + x \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} (-(+\pi) + \pi) = \frac{1}{2\pi} \cdot 0 = \underline{0}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \underline{0} \quad \leftarrow \text{ker je } f(x) \text{ liha funkcija,}$$

na sim. intervalu je liha funkcija enaka 0.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx =$$

produkt dveh lihih funkcij je soda $f(x)$

$0 < x \leq \pi \} = 1$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos 0}{n} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} \right) =$$

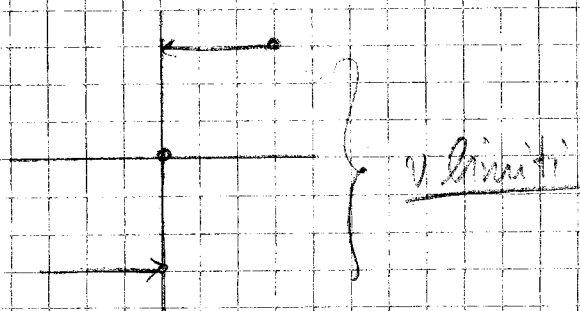
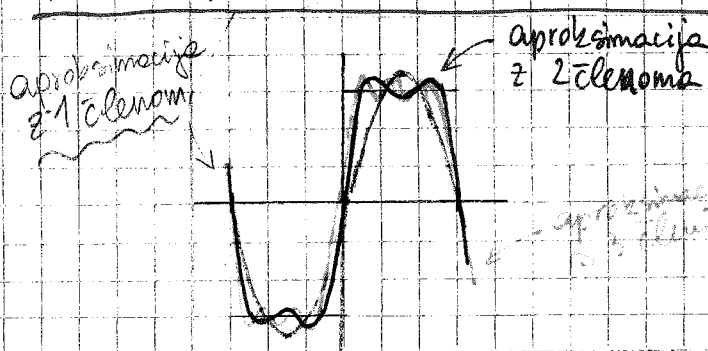
$$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} (1 - (-1)) = \frac{4}{\pi}; \quad b_2 = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0; \quad b_3 = \frac{2}{3\pi} \cdot 2 = \frac{4}{3\pi}$$

$$b_4 = \frac{1}{2\pi} \cdot 0 = 0$$

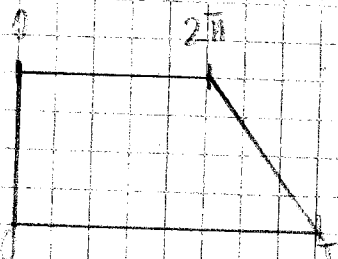
sodi vsi členi so enaki 0

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots$$



RAZVOJ FUNKCIJE S POLJUBNO PERIODO V F. VRSTO

Naj bo f periodična $f(x)$ s periodo T , torej $f(t+T) = f(t)$ za vsak t iz def. območja.



$$x = \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

$F(x)$ bomo razvili v F. vrsto s pomočjo uvedbe nove spremenljivke. Potem opazimo, da imajo $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, $\cos\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T}t\right)$, $\sin\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T}t\right)$ - periodo T .

Funkcijo f zapišemo v F. vrsto na naslednji način

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T}t\right) \right)$$

Določimo formule za koeficiente a_n, b_n :

To storimo tako, da vpišemo novo spremenljivko $x = \frac{2\pi}{T}t$, torej

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \frac{2\pi}{T} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

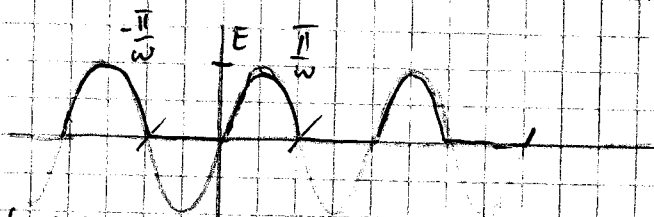
$x = \frac{2\pi}{T}t$
 $dx = \frac{2\pi}{T}dt$

Podobno dobimo, da je:

$$\left\{ \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \end{aligned} \right.$$

Primer:

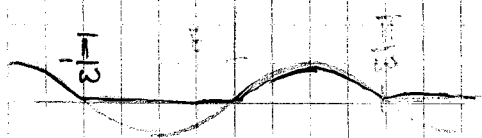
sinusna napetost
max vrednost E
perioda $\frac{2\pi}{\omega}$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & : -\frac{\pi}{\omega} \leq t \leq 0 \\ E \sin(\omega t) & : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n \cdot 2\pi}{T} \cdot t + b_n \sin \frac{n \cdot 2\pi}{T} \cdot t \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} \cdot t\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} \cdot t\right) dt$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ E \sin(\omega t) & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Razvoj te funkcije v F. vrsto:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \right) = \frac{\omega}{2\pi} E \cdot \left. \frac{\cos \omega t}{\omega} \right|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{E}{2\pi} (1 - 1) = \frac{E}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} t\right) dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin(\omega t) \cdot \cos(n \omega t) dt = \\ &= \frac{\omega}{\pi} \cdot E \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \sin((1+n)\omega t) + \sin((1-n)\omega t) dt = \frac{\omega E}{2\pi} \left[\frac{-\cos((1+n)\omega t)}{(1+n)} + \frac{-\cos((1-n)\omega t)}{(1-n)} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{\omega E}{2\pi} \left(\frac{\cos((1+n)\frac{\pi}{2})}{(1+n)} + \frac{\cos((1-n)\frac{\pi}{2})}{(1-n)} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n} \right) \\ &= -\frac{\omega E}{2\pi} \left(\frac{(-1)^{1+n}}{1+n} + \frac{(-1)^{1-n}}{1-n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n} \right) \end{aligned}$$

↑
n ≠ 1

(-1) ne more biti, ker štejemo koeficiente od 1 naprej.

primer:

$$a_{17} = -\frac{\omega E}{2\pi} \left(\frac{(-1)^{18}}{18} + \frac{(-1)^{-16}}{-16} - \frac{1}{18} + \frac{1}{16} \right) = -\frac{\omega E}{2\pi} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{16} - \frac{1}{18} + \frac{1}{16} \right) = 0$$

$$a_{18} = \dots - \frac{\omega E}{2\pi} \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{18} - \frac{1}{19} + \frac{1}{18} \right)$$

a_1 izračunamo posebej, dobimo $a_1 = 0$
Podobno izračunamo koeficiente b_n .

Sinusna in kosinusna vrsta

Spomnimo se, da za sodo periodično funkcijo pri razvoju te funkcije v F. vrsto nastopajo samo koeficienti pri kosinusi, vsi koeficienti pri sinusih so enaki 0.

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, če je $f(x)$ soda, mora biti na desni strani sode funkcije, zato so v tem primeru b_n enaki 0.

Podobno iz sode periodične funkcije, pri razvoju te funkcije v F. vrsto nastopajo samo koeficienti pri sinusih, vsi koeficienti pri kosinusi so enaki 0.

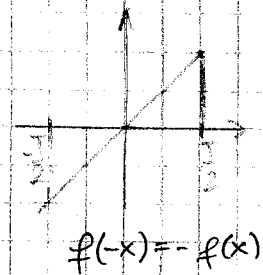
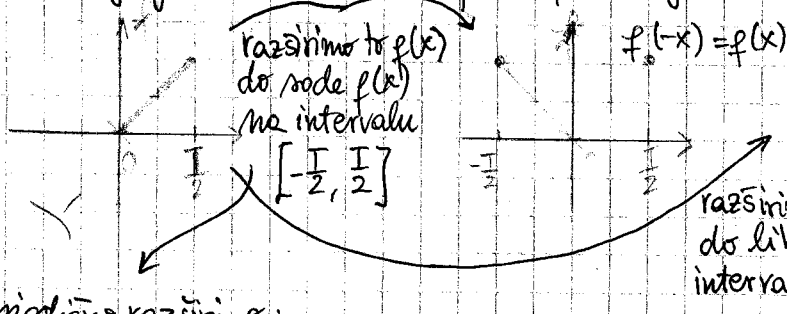
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{\text{liha}} \underbrace{\cos\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} t\right)}_{\text{soda}} dt = 0$$

liha

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{\text{liha}} \underbrace{\sin\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} t\right)}_{\text{liha}} dt = 0$$

liha

Naj bo sedaj f poljubna $f(x)$ (nemujno periodična) definirana na intervalu $[0, T/2]$. Ogledimo si, kako to $f(x)$ razvijemo v sinusno in kosinusno F.vrsto.



Periodično razširimo;

Dobimo sodo periodično funkcijo s periodo T , definirano na $\mathbb{R}$

razvijemo v F.vrsto
ker je f sode, $a_n \neq 0$

$$\rightarrow f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} t\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} t\right) dt$$

Integral sode f na sim. intervalu je integral f na polovičnem intervalu

To imenujemo kosinurna F.vrsta funkcije f .

Periodično razširimo; Dobimo liho funkcijo s periodo T , definirano na $\mathbb{R}$.

razvijemo v F.vrsto
ker je liha f liha, $a_n = 0$

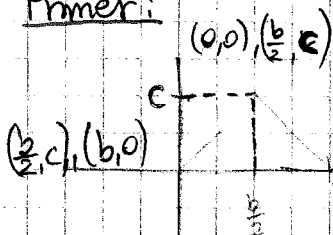
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} t\right)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{liha}} \underbrace{\sin\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} t\right)}_{\text{liha}} dt$$

sode

To imenujemo sinusna F.vrsta funkcije f .

Primeri:



naprej potrebujemo funkcijski predpis.

$$y = kt + n$$

$$c = k \cdot \frac{b}{2} + n$$

$$0 = kb + n$$

$$c = -k \cdot \frac{b}{2}$$

$$k = -\frac{2c}{b}$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{c \cdot 2}{b} \cdot t & ; 0 \leq t < \frac{b}{2} \\ -\frac{2c}{b} t + 2c & ; \frac{b}{2} \leq t < b \end{cases}$$

Razvijemo

to funkcijo v sinusno F.vrsto

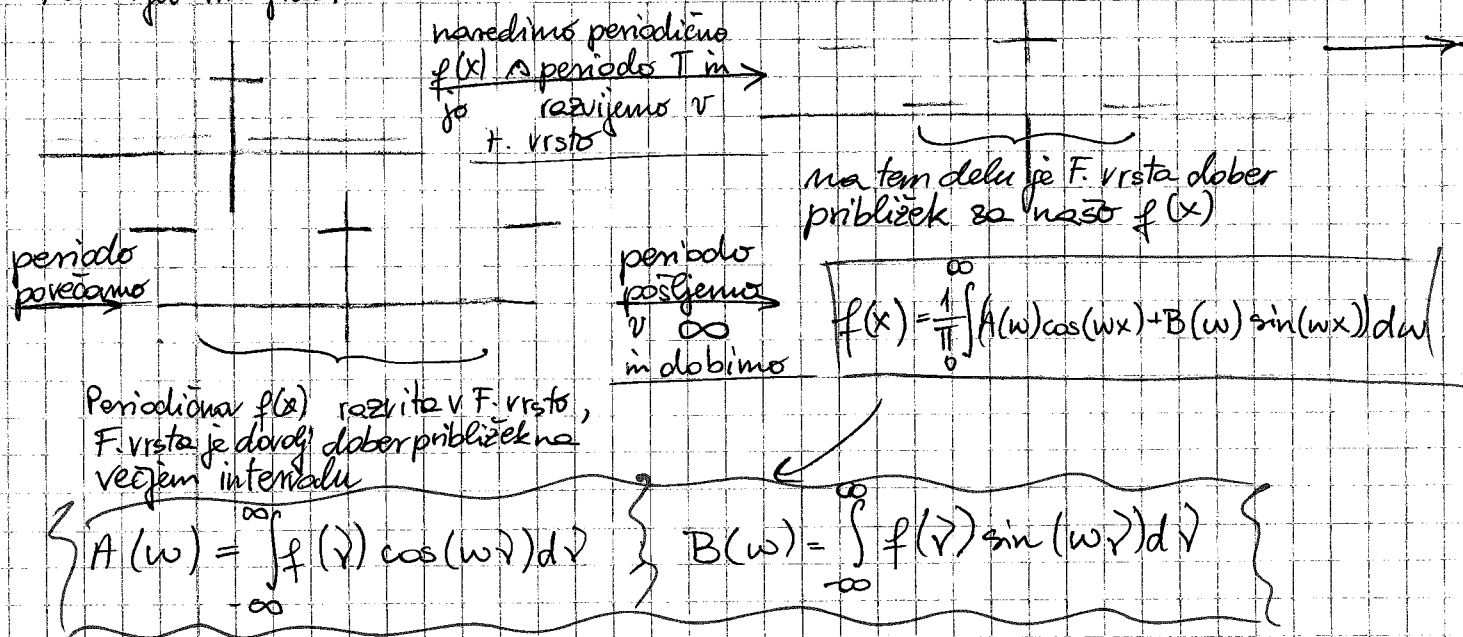
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{b} t$$

$$b_n = \frac{4}{2b} \int_0^b f(t) \sin \frac{n\pi}{2b} t dt = \frac{2}{b} \left(\int_0^{\frac{b}{2}} \frac{c \cdot 2}{b} t \sin \frac{n\pi}{b} t dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{b}{2}}^b (-\frac{2c}{b} t + 2c) \sin \frac{n\pi}{b} t dt \right) = \text{mathematica}$$

Fourierjev integral

Naj bo f poljubna $f(x)$ (ne nujno periodična). Radi bi jo zapisali v podobni obliki kot je F. vrsta za periodične $f(x)$. Kot vsoto sinusov in kosinusov je ne moremo zapisati, saj ni periodična, lahko pa jo zapišemo s pomočjo integrala, ki ga imenujemo Fourierjev integral.



Zapis F. vrste v kompleksni obliki

Velja:
$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Potem lahko F. vrsto zapišemo tudi v obliki:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - b_n) \underbrace{e^{inx}}_{\cos(nx) + i\sin(nx)}$$

FUNKCIJE DVEH SPREMENLJIVK

20.4.2011

$f: A \rightarrow B$

funkcija 1 spremenljivke $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 $D \subseteq \mathbb{R}$

Def.:

Funkcija f dveh spremenljivk je predpis, ki vsaki točki iz neke množice D ravnine $\mathbb{R}^2$ priredi realno število, kjer:

$f: D \rightarrow \mathbb{R} ; D \subseteq \mathbb{R}^2$

$(x, y) \rightarrow f(x, y)$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $\mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}$

Primer:

Del zem. površje ni aproksimirano z ravnino. Preslikava, ki neki točki z določeno geografsko dolžino in širino priredi nadmorsko višino v tej točki, je funkcija dveh spremenljivk (Google Earth).

Primer:

Naj bo dan pravokotnik v ravnini in naj funkcija v vsaki točki zavzame neko vrednost med 0 in 1, 0 pomeni belo barvo in 1 črna barva. Vmesne vrednosti so različni odtenki sive barve. Ta funkcija predstavlja Č-B slika.

Primer:

$$f(R, I) = R \cdot I$$

$U \leftarrow$ funkcija dveh spremenljivk

Opomba:

Graf funkcije 2h spremenljivk

$$\Gamma(f) = \left\{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D \right\}$$

$\underbrace{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}}_{\mathbb{R}^3}$ kartezijans

$\mathbb{R}^2$ je neka ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$

(npr.: v primeru nad. višine je graf ploskev, ki predstavlja relief zemeljske površine)

Osnovne lastnosti funkcij:

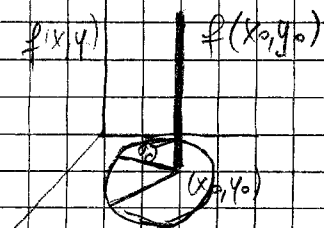
Def.:

Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je zvezna v točki $(x_0, y_0) \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja nek $\delta > 0$, da je:

$$|f(x_0, y_0) - f(x, y)| < \varepsilon$$

Črna je $|x_0, y_0 - (x, y)| < \delta$. $\leftarrow$ kolikšno sta 2 točki narazen

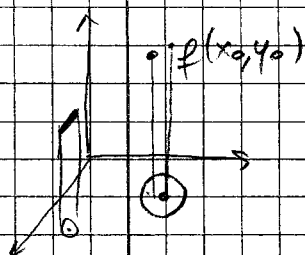
$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$



Def.:

Funkcija f je enakomerno zvezna na domeni, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon, \text{ čim je } |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta.$$



Def.:

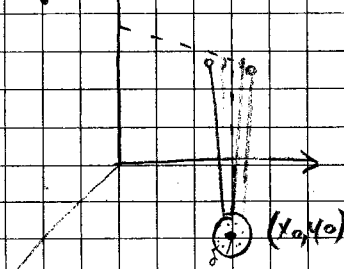
Število a je limita funkcije $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, v točki (x_0, y_0) , če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je:

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon$$

$$\text{čim je } |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$$

To zapišemo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = a$$



Opomba:

Podobno kot za funkcije 2h spremenljivk lahko definiramo pojme zveznosti; enakomerne zveznosti, limite tudi za funkcije več spremenljivk.

Pri računanju limite 2h spremenljivk lahko pridemo z več strani na to ali derivo.

PARCIALNI ODVODI

Def.:

Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkcija dveh spremenljivk. Če en izmed spremenljivk fiksiramo, drugo pa spreminjamo, dobimo funkcijo ene same spremenljivke za katero lahko izračunamo odvod.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Če ta limita obstaja, jo imenujemo parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x in pišemo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Podobno je paroc. odvod funkcije f po spremenljivki y enak:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Opomba:

Podobno definiramo parcialne odvode tudi za funkcije več spremenljivk.

Primer:

$$f(x, y) = e^{-xy^2}$$

$$g(x, y) = \tan \frac{x}{y}$$

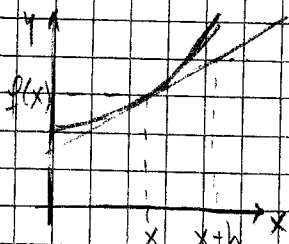
$$f_x(x, y) = e^{-xy^2}(-y^2)$$

$$f_y(x, y) = e^{-xy^2}(-x) \cdot 2y$$

$$g_x(x, y) = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$g_y(x, y) = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

DIFERENCIAL FUNKCIJE ZH SPREMENLJIVK



pri f. z 1 sprem.

$$f(x+h) \approx f(x) + h f'(x)$$

Pri f. z 1. sprem. - aproksimacija s tangento

Def.:

Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ zvezna in v točki (a, b) naj obstajata njena parcialna odvoda $f_x(a, b)$ in $f_y(a, b)$. Če obstaja:

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(a+h, b+k) - (f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Če velja (da je 0); potem velja, da je f diferenciable v točki (a, b) .

Izraz $df = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$ imenujemo diferencial funkcije f v točki (a, b) .

Opomba:

Če je f diferenciable v $T(a, b)$, potem gre izraz * hitreje proti 0 kot $\sqrt{h^2 + k^2}$; kot $(h, k) \rightarrow 0$.

Sledi, da je za majhne vrednosti h in k :

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

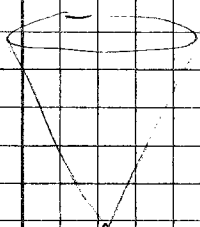
Opomba:

Pri diferencialni funkciji z sprem. vrednost funkcije v bližnji točki aproksimiramo z vrednostima ravnini (tangencialni ravnini).

Primer:

Stožec s polmerom:

$R=5$, višina $h=10$



R zmanjšamo za 0,2 višina povečamo za 0,2.
Ocenimo novo prostornino s pomočjo diferenciala.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

$$V_R = \frac{2}{3} \pi R h$$

$$V(R, h) = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$$

$$V_h = \frac{1}{3} \pi R^2$$

$$\Delta R = -0,2$$

$$\Delta h = +0,2$$

$$V(R+\Delta R, h+\Delta h) \approx V(R, h) + \Delta R V_R(R, h) + \Delta h V_h(R, h) =$$

$$V(4,8, 10,2) \approx V(5, 10) + (-0,2) \frac{2}{3} \pi R h + (+0,2) \frac{1}{3} \pi R^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \pi (4,8)^2 \cdot 10,2 = \frac{1}{3} \pi 250 - 0,2 \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot 50 + 0,2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 25$$

246,0998

246,091

3.5.2011

Primer: funkcija ene spremenljivke in posredno odvajanje:

$$f(x) = \cos(x^2)$$

$$f'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x$$

Posredno odvajanje funkcije dveh spremenljivk:

Do pravila bomo prišli v teh korakih:

- 1.) Naj bo $z = z(u, v)$ - funkcija dveh spremenljivk, vsaka izmed spremenljivk u in v pa funkcija samo ene spremenljivke.

$$u = u(x)$$

$$v = v(x)$$

$$z = z(u, v)$$

Ker sta u in v odvisna samo od 1 spremenljivke x , je potem z funkcija ene spremenljivke.

Potem pa je odvod $\frac{dz}{dx}$ enak:

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(u(x+h), v(x+h)) - z(u(x), v(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(u+\Delta u, v+\Delta v) - z(u, v)}{h}$$

$$\begin{cases} z = 2u^2 \cos v \\ u = x^2 \\ v = 1-x \end{cases}$$

vpeljeno novo oznako
 $u(x+h) = u + \Delta u$
 $v(x+h) = v + \Delta v$

$$z(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx z(u, v) + z_u \Delta u + z_v \Delta v$$

$$\approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_u \Delta u + z_v \Delta v}{h} = z_u \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{h} + z_v \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{h} =$$

$$= [z_u \cdot u' + z_v \cdot v'] \Rightarrow \text{dobimo: } \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}$$

2.) Naj bo sedaj funkcija $z = z(u)$ odvisna samo od ene spremenljivke, spremenljivka u pa naj bo odvisna od dveh spremenljivk x in y , torej $u = u(x, y)$. Potem je funkcija dveh spremenljivk x in y , torej računamo parcialne odvode.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{cases} z(u) = z(u(x, y)) \\ z(u) = u^2 + 1 \\ u(x, y) = \cos x + y \\ z(x, y) = (\cos x + y)^2 + 1 \\ z'(u) = 2u \end{cases}$$

3.) Naj bo funkcija z funkcija dveh spremenljivk u in v torej $z = z(u, v)$, in naj bosta u in v funkciji dveh spremenljivk x in y , torej: $u = u(x, y)$ in $v = v(x, y)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = z'(\cos x + y) (\sin x) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = z'(\cos x + y) \cdot 1 \end{cases}$$

Potem je z funkcija spremenljivk x in y in izračunamo njena parcialna odvoda tako, da združimo prvi in drugi korak in dobimo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Verižno pravilo za posredno odvajanje funkcije dveh spremenljivk.

Tega ne krajšamo, ker to niso ulomki ampak oznake za parc. odvode.

Primer:

$$z(u, v) = u^2 \log v$$

$$u = \frac{x}{y}, \quad v = x \cdot y$$

$$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = 2u \log v \cdot \frac{1}{y} + u^2 \cdot \frac{1}{y} = 2 \frac{x}{y} \log(x \cdot y) \cdot \frac{1}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \frac{1}{y} \cdot y$$

$$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = 2u \log v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + u^2 \cdot \frac{1}{y} \cdot x = 2 \frac{x}{y} \log(xy) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \frac{1}{y} \cdot x$$

VISJI PARCIALNI ODVODI

Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ funkcija dveh spremenljivk. Če je parcialno odvedljiva, jo lahko ^{parcialno} odvajamo in dobimo dve novi funkciji f_x in f_y . Če sta ti dve funkciji spet ^{parcialno} odvedljivi, lahko izračunamo njena parcialna odvoda in dobimo druge parcialne odvode.

Postopek lahko nadaljujemo:

$$\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = f_{yy}$$

Primer:

$$f(x, y) = \log(xy^2) + xy^2$$

$$f_x = \frac{1}{xy^2} \cdot y^2 + y^2 = \frac{1}{x} + y^2$$

$$f_y = \frac{1}{xy^2} \cdot 2xy + 2xy = \frac{2}{y} + 2xy$$

$$f_{xx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f_{yx} = 2y$$

$$f_{xy} = 2y$$

$$f_{yy} = -\frac{2}{y^2} + 2x$$

mešana odvoda sta v večini primerov enaka.

Izrek:

Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$; funkcija dveh spremenljivk. Če sta njena parcialna odvoda f_x in f_y parcialno odvedljiva, potem velja $f_{xy} = f_{yx}$, torej ^{sta} mešana parcialna odvoda enaka.

Def:

Toda je $f(x)$ po odvajanju zvezna

ne mijno / v večini primerov

Naj bo f 2x parcialno zvezno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk. Matriko drugih parcialnih odvodov funkcije f imenujemo Hessejeva matrika.

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

če sta odvoda enaka, potem vrstni red ni pomemben.

Primer: Hessejeva matrika funkcije $f(x, y) = \log(xy^2) + xy^2$:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} & 2y \\ 2y & -\frac{2}{y^2} + 2x \end{bmatrix} \Rightarrow H(1, 1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hessejeva matrika je (običajno) simetrična, kvadratna in dimenzij 2x2.

Pri izpeljavi pravila za izračun ekstrema funkcije dveh spremenljivk bomo potrebovali Taylor-jevo vrsto funkcije dveh spremenljivk.

Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkcija dveh spremenljivk, za katero velja, da je merljivočkrat parciálno odvedljiva funkcija v neki točki (a, b) . Potem lahko to funkcijo f razvijemo v T. vrsto na naslednji način:

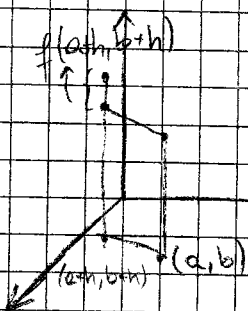
- f. 1. sprem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots$$

- f. 2. sprem:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (f_x(a, b)h + f_y(a, b)k) + \frac{1}{2!} (f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2) + \frac{1}{3!} (f_{xxx}(a, b)h^3 + 3f_{xxy}(a, b)h^2k + 3f_{xyx}(a, b)hk^2 + f_{yyy}(a, b)k^3) + \dots$$



binomski stolček - Pascalov trikotnik

Primer:

$f(x, y) = e^x \sin y$; Razvijmo f okrog $(0, 0)$ v T. vrsto in izračunajmo približno $f(0.1, -0.05)$.

$$a=0, b=0 \\ h=0.1; k=-0.05$$

$$f(h, k) = f(0, 0) + k + \frac{1}{2} (2hk) + \frac{1}{3!} (3h^2k + (-k^3)) =$$

$$f(h, k) = k + hk + \frac{1}{3!} (3h^2k - k^3)$$

$$f(0.1, -0.05) = -0.05 + (-0.05)(0.1) + \frac{1}{6} (3(0.1)^2(-0.05) - (-0.05)^3) =$$

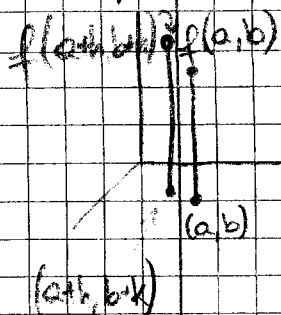
$$= -0.05529$$

$f_x = e^x \sin y$	
$f_y = e^x \cos y$	
$f_{xx} = e^x \sin y$	
$f_{yy} = -e^x \sin y$	
$f_{xy} = e^x \cos y$	
$f_{xxx} = e^x \sin y$	0
$f_{xxy} = e^x \cos y$	1
$f_{xyy} = -e^x \sin y$	0
$f_{yyy} = -e^x \cos y$	-1

Če vstavimo direktno (ne samo 3 člene) bi dobili: -0.05523

Def.: Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ima v točki (a,b) ekstrem, če velja:

- 1) $f(a+h, b+k) - f(a,b) > 0$: za vsak h in k v neki dovolj majhni okolici; v tem primeru je v točki (a,b) minimum.



- 2) $f(a+h, b+k) - f(a,b) < 0$: za vsak h in k v neki dovolj majhni okolici; v tem primeru je v točki (a,b) maksimum.

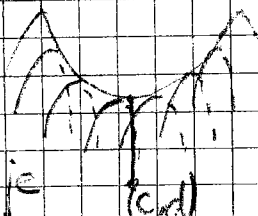
Ekstrem funkcije bomo iskali s pomočjo parcialnih odvodov prvega in drugega reda.

Denimo, da ima funkcija f v točki (a,b) ekstrem. Če fiksiramo eno koordinato, npr.: $y=b$, potem je funkcija $f(x,b)$ funkcija ene spremenljivke, ki ima v točki $x=a$ ekstrem, torej mora biti njen odvod v tej točki enak nič, kar pomeni, da je $f_x(a,b) = 0$.

Podobno, če fiksiramo $x=a$, potem je $f(a,y)$ funkcija ene spremenljivke y in kar ima pri $y=b$ ekstrem, mora biti $f_y(a,b) = 0$.

Sledi, da je $f_x(a,b) = 0$ in $f_y(a,b) = 0$ potreben pogoj za nastop ekstrema v točki (a,b) . To pomeni, če je v (a,b) ekstrem, vedno velja, da je $f_x(a,b) = 0$ in $f_y(a,b) = 0$.

Ni pa ta pogoj zadosten, kar pomeni, da obstaja točka (c,d) , takšna da za neko funkcijo f velja $f_x(c,d) = 0$, $f_y(c,d) = 0$ in (c,d) ekstrem. Npr.: Sedlo.



Def.: Če za neko točko (a,b) velja, da je

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, potem točko (a,b) imenujemo stacionarna točka funkcije f . Stacionarna točka je kandidat za ekstrem funkcije f .

Pri določanju ali v stac. točki je ekstrem ali ne in kakšen je ta ekstrem, pomagamo z medsebojnimi preizkušanji z drugimi parcialnimi odvodi. Naj bo torej točka (a,b) stacionarna točka funkcije f .

Zapišimo T. vrsto funkcije f okrog točke (a, b) :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \frac{1}{2!}(f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2) + \dots$$

Upoštevamo, da je (a, b) stac. točka, torej $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$. Nadalje, upoštevamo, da je za majhne vrednosti h in k ostanek vrste majhen, označimo ostanek vrste od tretjih parcialnih odvodov dalje z η .
Označimo še

$$f_{xx}(a, b) = A, f_{xy}(a, b) = B \text{ in } f_{yy}(a, b) = C$$

Sledi:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \eta(h, k)$$

$$= \frac{(Ah+Bk)^2 + (AC-B^2)k^2}{2A} + \eta(h, k)$$

Ker je za majhne h in k vrednost $\eta(h, k)$ poljubno majhna, ima izraz

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) \text{ isti predznak kot } \frac{(Ah+Bk)^2 + (AC-B^2)k^2}{2A}$$

1.) Če je $(AC-B^2) > 0$, potem je števec ulomka $\frac{(Ah+Bk)^2 + (AC-B^2)k^2}{2A}$ večji od nič, ulomek pa je pri $A > 0$ pozitiven (minimum), pri $A < 0$ pa je ulomek negativen (maksimum).

2.) Če je $(AC-B^2) < 0$, lahko izberemo h in k tako, da je ulomek pri nekem izboru pozitiven, pri drugem izboru h in k pa je ulomek negativen (redlo).

3.) Če je $(AC-B^2) = 0$, potem ne znamo povedati kaj je točka (a, b) .

$$(AC-B^2) = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2 =$$

$$= \det \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix} = \det H(a, b)$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

$$H(a, b) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Hessejeva matrika

Izrek: Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$, dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Naj bo (a, b) stacionarna točka funkcije f ; torej:

$$f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$$

Velja:

1.) Če je $\det H(a, b) > 0$, je v točki (a, b) ekstrem in vidno: - če je $f_{xx}(a, b) > 0$, je v (a, b) minimum.

- če je $f_{xx}(a, b) < 0$, je v (a, b) maksimum.

2.) Če je $\det H(a,b) < 0$, v točki (a,b) ni ekstrema ($v(a,b)$ je sedlo)

3.) Če je $\det H(a,b) = 0$: A pomočjo drugih parcialnih odvodov ne moremo določiti ali je $v(a,b)$ ekstrem ali ne (ne vem)

Primer:

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$$

1. Stacionarne točke:

$$\begin{aligned} f_x = 3x^2 - 6y - 39 &= 0 \Rightarrow x^2 - 2y - 13 = 0 \\ f_y = 2y - 6x + 18 &= 0 \Rightarrow y - 3x + 9 = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x^2 - 2(3x-9) - 13 &= 0 \\ x^2 - 6x + 18 - 13 &= 0 \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ (x-5)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Dobimo 2 točki; $T_1(1, -6)$
 $T_2(5, 6)$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x \\ f_{yy} &= 2 \\ f_{xy} &= -6 \end{aligned}$$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det H(x,y) = 12x - 36$$

1. $\det H(1, -6) = 12 \cdot 1 - 36 = -24 < 0$

ni ekstrema

2. $\det H(5, 6) = 60 - 36 = 24 > 0$

v točki $(5, 6)$ je ekstrem

$$f_{xx}(5,6) = 6 \cdot 5 = 30 > 0$$

$NT(5,6) = \text{minimum}$

IZREK O IMPLICITNI FUNKCiji

Funkcijo 2 sprem. bomo uporabili pri definiranju funkcije 1 sprem. na implicitni način.

1) Funkcijo 1 sprem. večkrat podamo implicitno; Na primer:

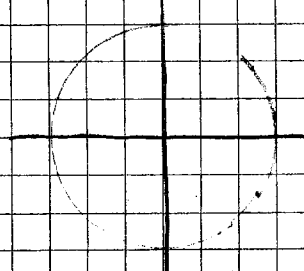
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$y = f(x)$$

$y = f(x)$ je pri nekem konkretnem x definirano kot rešitev enačbe $x^2 + y^2 - 1 = 0$

npr.: $x = 1$ je

$$\begin{aligned} 1^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ y^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$



npr.: $x = 0$

$$\begin{aligned} y^2 - 1 &= 0 \\ y^2 &= 1 \\ y_1 &= 1 \\ y_2 &= -1 \end{aligned}$$

To pomeni, da funkcijo ene spremenljivke podamo z enačbo $F(x,y) = 0$ pri čemer je F funkcija dveh spremenljivk:

Npr.: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Funkcija dveh spremenljivk, katere graf je ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$.

z enačbo:

$$F(x, y) = 0$$

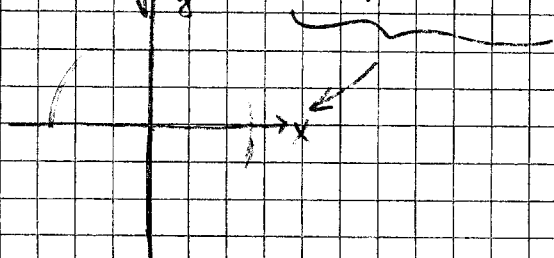
to je

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

pa je implicitno definirana funkcija ene spremenljivke, npr.:

$$y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Če na neki višini funkcijo "prežemo" dobimo množico. Ta krivulja nam implicitno določa funkcijo $y = y(x)$.



Primer:

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x} = 0$$

Zanima nas ali je ta enačba sploh implicitno podana neka funkcija $y = y(x)$.

Pomagamo si z izrekom:

Izrek o implicitni funkciji:

Naj bo $F: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$ funkcija dveh spremenljivk z naslednjimi lastnostmi:

- 1.) $F(a, b) = 0$, za nek $a, b \in D$ (ravnina in funkcija se sekata)
- 2.) F je zvezno parcialno odvedljiva v okolici točke (a, b) (lepa funkcija, brez "kroglov")
- 3.) parc. odvod v tej točki mora biti različen od 0.

$$\partial F(a, b) \neq 0$$

(enemu x pripada točno en y ,
pogoj da funkcija obstaja)

Potem je iz enačbe $F(x, y) = 0$ v neki okolini točke a enolično definirana funkcija ene spremenljivke

$$y = y(x), \text{ tako da je } y(a) = b \text{ in } F(x, y(x)) = 0 \text{ v}$$

neki okolini točke a .

Primer:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Definiramo:

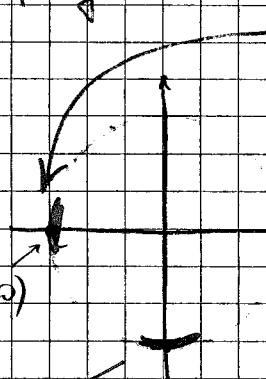
$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Izberemo točko $(-1, 0)$

1. pogoj } izpolnjena
2. pogoj }

$$F_y = 2y$$

$$F_y(-1, 0) = 0 \quad (\text{težave!})$$



to del krivulje
(okrog točke $(-1, 0)$)
ne definirata funkcije
 $y = y(x)$ - nimamo
enoličnega predpisa

Izberemo drugo točko, npr.: $(0, -1)$ + $(1, 0)$

$$F(0, -1) = 0$$

$$F_y(0, -1) = -2 \neq 0 \quad \checkmark$$

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

S pomočjo funkcij dveh spremenljivk določamo tudi spreminjanje
implicitno podane funkcije ene spremenljivke.

Naj bo funkcija ene spremenljivke implicitno podana z enačbo

$$F(x, y) = 0$$

Izpišemo diferencial funkcije F :

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

Preurejanju sledi, da je:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\downarrow$$
$$y'$$

to je funkcija dveh spremenljivk x in y

Primer:

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x} = 0$$

$y = y(x)$
← kaj se dogaja? funkcija 1 točka:
 $x=1$ & $y=0$

Koliko je vrednost funkcije $y = y(x)$ za $x=1$?

$$\log \sqrt{1+y^2} - \arctan \frac{y}{1} = 0$$

← za $y=0$ dobimo eno rešitev

$$F(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x} \Rightarrow \text{povečamo odredi}$$

$$F_y = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y - \frac{1}{1+\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2}$$

$$F(1,0) = \frac{0-1}{1+0} = -1 \neq 0$$

Is izreku o impl. funkciji je v okolici $x=1$ enolično definirana funkcija $y=y(x)$,
tako da je $y(1)=0$
izračunajmo odvod funkcije y v točki $x=1$.

$$y' = - \frac{F_x}{F_y} = - \frac{\frac{x+y}{x^2+y^2}}{\frac{y-x}{x^2+y^2}} = - \frac{x+y}{y-x} = \boxed{\frac{x+y}{x-y}} \Rightarrow y'(1) = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$$F_x = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

Funkcija $y=y(x)$ narašča v točki $x=1$

Opomba:

Poleg tega lahko izpeljemo za implicitno podano funkcijo dveh spremenljivk
 $z = z(x, y)$ z enačbo $F(x, y, z) = 0$, da velja

$$\boxed{\begin{aligned} z_x &= - \frac{F_x}{F_z} \\ z_y &= - \frac{F_y}{F_z} \end{aligned}}$$

DIFERENCIALNE ENAČBE

NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE

Navadna dif. enačba je enačba v kateri poleg neznanne funkcije y spremenljivke x , nastopajo tudi odvodi te funkcije in neodvisna spremenljivka x .

Na primer:

$$y''(x) - y(x) \cdot x = x^2 \cdot y'(x)$$

Poznamo še parcialne dif. enačbe kjer v enačbi poleg neznanne funkcije več spremenljivk nastopajo tudi njihovi parcialni odvodi in neodvisne spremenljivke.

Pr.: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Dif. enačba reda n , če v dif. enačbi nastopajo vsi odvodi neznanne funkcije, vsi prvotni pa ne nastopajo $\Rightarrow$ dif. enačba oblike

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Primer:

$$y'' - xy^{10} + (y')^{13} + y(5) = 0 \quad \leftarrow \text{to je dif. enačba 5. reda}$$

Rešitev D.E. je v splošnem več:

Primer:

$$y' = y \quad \text{rešitev: } y = ce^x; \quad c \text{ je poljubna konstanta}$$

Rešitev D.E. v kateri nastopa konstanta katere vrednost je poljubna se imenuje splošna rešitev dif. enačbe.

Če so dani začetni pogoji; npr.: začetna hitrost je potem rešitev enolično določena; takšne rešitve imenujemo partikularna rešitev ali problemna.

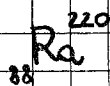
Lahko pa imamo tudi robne pogoje, npr.: vpeta struna pri parci dif. enačbi; v tem primeru dobimo partikularno rešitev robnega sistema.

Opomba:

Vsaka DE nima rešitve.

Primer:

Radioaktivni razpad radona



Zanima nas količina snovi v odvisnosti od časa; $y = y(t)$
masa radona v času t .

Naj bo $y(0) = 2g$ ← zač. pogoj

Več kot imamo snovi, hitreje razpade.
Hitrost razpada nam da odvod funkcije

$$y'(t) = ky(t)$$

$$k_{\text{radon}} = -1,4 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}$$

$$y(t) = ce^{kt}$$

↑ poljubna konstanta;
splošna rešitev DE

Partikularna rešitev

$$y(0) = c \cdot e^{k \cdot 0} \quad \left\{ \begin{array}{l} c = 2g \\ 2g \end{array} \right.$$

Rešitev DE:

$$y(t) = 2g \cdot e^{-1,4 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \cdot t}$$

Koliko radona imamo čez 1 leto:

$$y(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) = 2g e^{-1,4 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)}$$

$$y(1 \text{ leto}) = 1,9991 g$$

Razpolovna doba:

$$y(t_0) = 1g$$

$$2g e^{-1,4 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \cdot t_0} = 1g \quad / \log$$

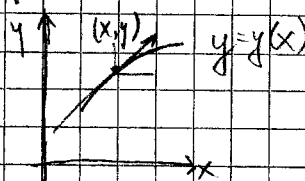
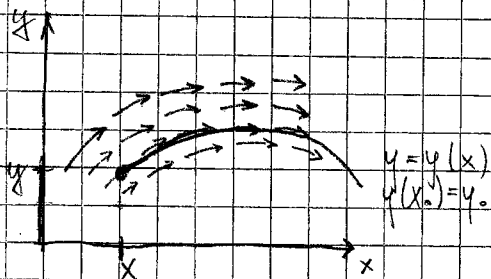
$$t_0 = \frac{\log \frac{1}{2}}{-1,4 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}} = 1570 \text{ let}$$

- enačba oblike $F(x, y, y') = 0$, v njej nastopa 1. odvod

Npr.: $\log y' - \arctan\left(\frac{x}{y} \cdot y'\right) = x^2 \leftarrow$ D.E. 1. reda

V nadaljevanju se bomo posvetili D.E. 1. reda oblike: $y' = f(x, y)$ {npr.: $y' = x^2 y - y \dots$ }

D.E. take oblike lahko predstavimo grafično:



$\leftarrow$ geometrijska interpretacija

D.E. $y' = f(x, y) \dots$ na ustreznem izpitu!

D.E. z ločljivimi spremenljivkami:

$$y'(x) = g(x) \cdot f(y)$$

Ta D.E. rešimo na naslednji način:

- zapišemo: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot f(y)$

- preuredimo: $\frac{dy}{f(y)} = g(x) \cdot dx$

- obe strani integriramo:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x) \cdot dx$$

- izračunamo nedoločene integrale in dobimo rešitev v implicitni obliki

Primer:

$$k > 0$$

$$m'(t) = \pm k \cdot m^p(t)$$

ločimo:

če je $p = 1$ in predznak "-" je to radioaktivni razpad.

Naj bo $p > 1$. Ločimo 2 primera:

1.) $p > 1$ in predznak < 0

$$\frac{dm}{dt} = -k \cdot m^p(t) \Rightarrow \frac{dm}{m^p(t)} = -k \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dm}{m^p} = -k \int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m^{-p+1}}{-p+1} + C = -kt \Rightarrow m^{-p+1} = (kt - C) \cdot (-p+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^{p-1} = \frac{1}{(kt + C)(p-1)}$$

$$m(t) = \frac{1}{\sqrt[p-1]{(kt + C)(p-1)}}$$

Poseben primer:

$p=2$, dobimo

$$m(t) = \frac{1}{kt+c}$$

$$\Rightarrow m(t) = \frac{1}{kt+m(0)}$$

2.) $p > 1$, predznak > 0

$$m(t) = \frac{1}{\sqrt{c-kt} \cdot (p-1)}$$

v tem primeru pride v končnem času do eksplozije.

Nekatere enačbe lahko s substitucijo prevedemo na D.E. s ločljivimi spremenljivkami:

Taka D.E. je oblike:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) *$$

$$\begin{cases} \text{npr.:} \\ f(x) = x^2 - 1 \\ f\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 \end{cases}$$

Imenujemo jo homogena D.E. 1. stopnje.

Rešimo jo tako, da uvedemo novo spremenljivko x in y v posebni obliki.

$u = \frac{y}{x}$. Potem je $y = ux$ in če odvajamo, dobimo

$y' = ux' + u$. Vstavimo v D.E. * in dobimo:

$$ux' + u = f(u)$$

$$u' = \frac{f(u) - u}{x} \Rightarrow u' = (f(u) - u) \cdot \frac{1}{x}$$

dobili smo D.E. s ločljivimi spremenljivkami, ki jo znamo rešiti

Primer:

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

$$\boxed{y'} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{y^2}{2xy} - \frac{x^2}{2xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} - \frac{1}{\frac{y}{x}} \right)$$

Dobimo:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ pri čemer je } f(t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

Uvedemo novo spremenljivko:

$$ux' + u = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right)$$

$$ux' = \frac{1}{2} u - u - \frac{1}{2u}$$

$$\frac{du}{dx} x = -\frac{1}{2} u - \frac{1}{2u}$$

$$\frac{du}{u - \frac{1}{u}} = -\frac{1}{2} \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \int \frac{du}{u - \frac{1}{u}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2u du}{u^2 - 1} = -\frac{1}{2} \ln x + C$$

$$\frac{x}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln x + C$$

$$\ln t = -\ln x + C$$

$$t = e^{-\ln x + C} = e^{\log\left(\frac{1}{x}\right) + C} = \frac{1}{x} \cdot e^C$$

$$t = \frac{1}{x} e^C$$

C lahko zapišemo v obliki $C = \log K$, ker je poljubno število.

$$t = \frac{1}{x} e^{\log k} = \frac{1}{x} \cdot k$$

Dobimo:

$$t = \frac{k}{x}$$

$$u^2 - 1 = \frac{k}{x} \Rightarrow u^2 = \frac{k}{x} + 1$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{k}{x} + 1$$

$$y^2 = kx + x^2$$

$$y = \sqrt{kx + x^2}$$

Naslednji tip D.E. prvega reda (edempomembnejših) je linearna enačba prvega reda.

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) *$$

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Če je $g(x) = 0$ za vsak x , dobimo linearno D.E.

$$y' + f(x)y = 0, \text{ ki jo imenujemo homogena lin. D.E.}$$

Če je $g(x) \neq 0$ za nek x , je D.E. * nehomogena.

Lin. D.E. 1. reda rešimo s metodo variacije konstante. To storimo v dveh korakih.

1. korak:

Rešimo homogeno lin. D.E.

$$y' + f(x)y = 0$$

- Zapišemo:

$$y' = -f(x)y; \text{ vidimo, da je to D.E. z ločljivimi spremenljivkami}$$

- sledi:

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx \quad / \int$$

$$\ln y = -\int f(x)dx + \log K \quad / \text{antilog.}$$

$$y = e^{-\int f(x)dx + \log C}$$

$$y = e^{-\int f(x)dx} \cdot C$$

2. korak:

Rešimo nehomogeno lin. D.E.

$$y' + f(x)y = g(x)$$

S pomočjo rešimo homogene lin. D.E. tako da variiramo konstante: Rešitev iščemo v obliki

$$y(x) = y_h(x) \cdot C(x) *$$

pri čemer je y_h rešitev hom. D.E., $C(x)$ pa neznana funkcija.

Vstavimo * v nehomogeno lin. D.E. in dobimo

$$(y_h(x) C(x))' + f(x)(y_h(x) \cdot C(x)) = g(x)$$

$$y_n'(x) \cdot C(x) + y_n(x) \cdot C'(x) + f(x) y_n(x) C(x) = g(x)$$

izpostavimo $C(x)$:

$$C(x) = \underbrace{(y_n'(x) + f(x) y_n(x))}_{0} + C'(x) \cdot y_n(x) = g(x)$$

0 ; ker je y_n rešitev homogene lin. D.E.

Sledi:

$$C'(x) \cdot y_n(x) = g(x) ; \text{ oziroma:}$$

$$C'(x) = \frac{g(x)}{y_n(x)}$$

torej:

$$C(x) = \int \frac{g(x)}{y_n(x)} dx ; \text{ Izračunamo ta integral in dobimo } C(x)$$

Potem po postopku lahko rešimo nehomogene lin. D.E., ki je enaka

$$y'(x) = f_n(x) \cdot C(x)$$

Trditev:

Rešitev nehomogene linearne enačbe:

Splošna

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \text{ je enaka:}$$

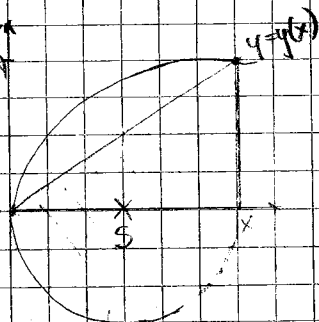
$$y(x) = C y_h(x) + y_p(x), \text{ pri čemer je } C y_h(x) \text{ splošna rešitev}$$

homogene L.D.E. $y'(x) + f(x)y(x) = 0$, y_p pa je partikularna rešitev nehomogene L.D.E.

To pomeni, da zadošča poiskati eno (katerokoli) rešitev nehomogene in splošno rešitev homogene L.D.E. Splošna rešitev je potem oblike $y(x) = C y_h(x) + y_p(x)$. Splošno rešitev nehomogene dobimo s postopkom variacije konstante

Primer:

y_h
 y_p



Isčemo tako krivuljo, da bo ploščina pod krivuljo enaka ploščini tega kroga.

Največjo ploščino objame krog:

1. korak:

$$S = \int_0^x y(t) dt = \frac{1}{2} \pi r^2 + \frac{1}{2} x \cdot y(x) / \frac{d}{dx}$$

$$y(x) = \pi \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} y(x) + x y'(x)$$

$$y(x) = \pi \cdot \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} y(x) + x y'(x) / 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{y(x)}{x} + \frac{2y(x)}{x}$$

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

Dobimo linearno D.E., nehomogena (zaradi $-\frac{\pi}{2}$)

h. L.D.E. rešuje problem krivulje, ki je enaka ploščini brez kroga

1. rešimo homogeno:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \ln x + \ln C$$

$$\ln y = \ln(x \cdot C)$$

$$y = C \cdot x$$

vedno zina eni strani
pustimo samo $\frac{dy}{y}$

2. nehomogena variacija konstante

$$y(x) = C(x) \cdot x$$

$$(C(x) \cdot x)' - \frac{1}{x} C(x) \cdot x = -\frac{\pi}{2}$$

$$C'(x) \cdot x + C(x) - C(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$C'(x) = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$C(x) = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln x + K$$

Če se člene $C(x)$ ne odštejeta, je prišlo do
napake v postopku, ni pa to edini
pogoj za pravilnost.

Splošna rešitev nehomogene je

$$y(x) = \left(-\frac{\pi}{2} \log x + K\right) \cdot x$$

$$y(x) = \left(-\frac{\pi}{2} \log x \cdot x + K \cdot x\right)$$

partikularna
rešitev
nehomogene D.E

splošna
rešitev
homogene

Definicija: domotje te rešitve/funkcije:

Če $x=0$ rešitev ni definirana, saj je
log definiran samo za pozitivne vrednosti
spremenljivke x .

Računamo limito:

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\pi}{2} \log x \cdot x = -\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \log x \cdot x = -\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

Če hočemo določiti K , moramo dodati še en pogoj, npr.: $y(1)=1$:

$$y(1) = -\frac{\pi}{2} \log 1 \cdot 1 + K \cdot 1 = 0 + K \Rightarrow K = 1$$

$$y(x) = -\frac{\pi}{2} \log x \cdot x + x$$

Bernoullijeva D.E. je D.E. oblike:

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)y^\alpha(x)$$

$\alpha \neq 0$, drugače je enako
kot prej

Rešimo jo tako, da uvedemo novo spremenljivko $\alpha \neq 1$, ker bi dobili linearno
D.E., ko je tudi že
znano rešiti.

Najprej delimo z y^α in dobimo:

$$\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)} + f(x)y^{1-\alpha}(x) = g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$w(x)$$

$$w(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

$$w'(x) = (1-\alpha) \cdot y^{1-\alpha-1}(x) \cdot y'(x) = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}(x) \cdot y'(x) = (1-\alpha) \frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)}$$

- vstavimo v enačbo:

$$\frac{w'(x)}{(1-\alpha)} + f(x)w(x) = g(x) \quad / \cdot (1-\alpha)$$

$$w'(x) + f(x)w(x) \cdot (1-\alpha) = g(x)(1-\alpha)$$

Dobimo L.D.E, ki jo znamo rešiti.

Primer:

$$y' + y = x\sqrt{y} \Rightarrow y' + y = xy^{\frac{1}{2}} \quad \Leftarrow \text{Bernoullijeva D.E. za } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{y'}{y^{1/2}} + y^{1/2} = x$$

$$w(x) = y^{\frac{1}{2}}(x)$$

$$w'(x) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$$

$$2w' + w = x \quad \Leftarrow \text{nehomogena L.D.E}$$

1.) rešimo homogeno:

$$2w' + w = 0$$

$$w' + \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}x$$

$$2 \frac{dw}{dx} = -w$$

$$\frac{dw}{w} = -\frac{1}{2}dx$$

$$\ln w = -\frac{1}{2}x + \ln c$$

$$w = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot c$$

2.) rešimo nehomogeno:

$$w(x) = C(x) e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$2(C(x) e^{-\frac{1}{2}x})' + C(x) e^{-\frac{1}{2}x} = x$$

$$2(C'(x) e^{\frac{1}{2}x} + C(x) e^{-\frac{1}{2}x} (-\frac{1}{2})) + C(x) e^{-\frac{1}{2}x} = x$$

$$2C'(x) e^{\frac{1}{2}x} - C(x) e^{-\frac{1}{2}x} + C(x) e^{-\frac{1}{2}x} = x$$

$$C(x) = \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$C(x) = \frac{1}{2} \int x e^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$= \frac{1}{2} (2x e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}) + K$$

$$C(x) = x e^{-\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x} + K$$

sledí:

$$w(x) = (x e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{\frac{1}{2}x} + K) e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$w(x) = (x - 2) + K e^{-\frac{1}{2}x}$$

per partes:

$$u = x \quad du = e^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$du = dx \quad v = +2e^{\frac{1}{2}x}$$

$$2x e^{\frac{1}{2}x} - \int 2e^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$2x e^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} + K$$

EKSAKTNA D.E. je D.E. oblike:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0; \text{ pri čemer velja še } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Opomba:

Eks. D.E. je še vedno D.E. oblike $y' = f(x,y)$ saj je

$$M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0, \text{ torej } y' = - \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Rešitev eks. D.E. dobimo v implicitni obliki $F(x,y) = C$, pri čemer je $F_x = M$, $F_y = N$, ker je $M_y = F_{xy}$ in $N_x = F_{yx}$, vidimo tudi, da sta mešanice parcialnih odvodov enaka.

18.5.2011

$$u(x,y) \quad \leftarrow \text{totalni diferencial funkcije}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0; \quad u = \text{const.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

primer:

$$xy' + y + 4 = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$x \frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$$

$$x dy + (y+4) dx = 0$$

$$\frac{\partial(y+4)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

$$u = yx + 4x + f(y)$$

$$\frac{df}{dy} = 0 \Rightarrow f = C$$

$$u = (y+4)x + C = C_1 \Rightarrow (y+4)x = C_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y+4 \Rightarrow u = (y+4)x + f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \Rightarrow x = x + \frac{df}{dy}$$

integracijske konstante ki je lahko tudi funkcije

primer:

$$x + ye^{2xy} + axe^{2xy} y' = 0$$

$$(x + ye^{2xy}) dx + axe^{2xy} dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x + ye^{2xy}) = \frac{\partial}{\partial x} (axe^{2xy})$$

$$e^{2xy} + ye^{2xy} \cdot 2x = a (e^{2xy} + xe^{2xy} \cdot 2y)$$

→ Določa tako, da bo ta enačba eksaktnim diferencialom.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y e^{2xy} \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} e^{2xy} + f(y)$$

enačba ne vsebuje odvisne spremenljivke;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x e^{2xy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x e^{2xy} = \frac{1}{2} e^{2xy} \cdot 2x + \frac{df}{dy}$$

$$\frac{df}{dy} = 0 \Rightarrow f = \text{konst.}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} e^{2xy} = C_1}$$

$$F(x, y') = 0, \quad p = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = p dx$$

$$p' = \frac{dp}{dx} \quad dx = p'(p) dp$$

$$dy = p p'(p) dp$$

$$x(p) = p(p)$$

$$y(p) = \int p p'(p) dp$$

$$F(x, y') = 0$$

$$y' = f(x)$$

18.5.2011

$$x = f(y') ; y' = p \Rightarrow \frac{dy}{dx} \leftarrow \text{parameter}$$

$$x = f(p)$$

$$dy = p \cdot dx = p f'(p) dp$$

$$dx = f'(p) dp$$

$$y = \int p f'(p) dp = F(p) + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = f(p) \\ y = F(p) + C \end{array}}$$

primer:

$$x = 2y' - 4y'^3, \quad y' = p$$

$$x = 2p - 4p^3$$

$$dx = (2 - 12p^2) dp$$

$$dy = p dx = p(2 - 12p^2) dp$$

$$dy = (2p - 12p^3) dp$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = p^2 - 3p^4 + C \\ x = 2p - 4p^3 \end{array}}$$

rešitev v parametrični obliki

$$F(y, y') = 0$$

$$y' = f(y)$$

$$\boxed{y = \psi(y')} \quad y' = p ; y = \psi(p)$$

$$y' = p = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{p}$$

$$\boxed{dx = \frac{\psi'(p)}{p} dp} \Rightarrow x = \int \frac{\psi'(p)}{p} dp$$

$$F(y, y') = C$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{f'(u) du}{\psi(u)}$$

$$\boxed{x = \int \frac{f'(u) du}{\psi(u)}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \psi(u) \\ y' = \psi'(u) \end{array}}$$

primer:

$$y^2(y'-1) = (2-y')^2$$

$$(2-y') = uy$$

$$y^2(y'-1) = u^2 y^2$$

$$y'-1 = u^2$$

$$y' = u^2 + 1$$

$$2 - (1+u^2) = uy$$

$$\frac{1-u^2}{u} = y = \frac{1}{u} - u$$

$$\boxed{dx} = \frac{dy}{y} = \frac{\left(-\frac{1}{u^2} - 1\right) du}{\left(1+u^2\right)} = \frac{-\frac{1+u^2}{u^2}}{1+u^2} du = \boxed{\frac{du}{u^2}}$$

$$x = \frac{1}{u} + C ; \boxed{y = x - C - \frac{1}{x-C}}$$

Lagrange-ova in Clairautova enačba

- Lagrange-ova D.E :

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \quad ; \quad y' = p$$

$$y = x\varphi(p) + \psi(p)$$

$$dy = dx\varphi(p) + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp = p dx$$

$$dx(\varphi(p) - p) + (x\varphi'(p) + \psi'(p))dp = 0$$

$$(\varphi(p) - p) \frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) = -\psi'(p)$$

$$\leftarrow a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x)$$

$$\boxed{X = X(p, c)}$$

$$\boxed{y = X(p, c)\varphi(p) + \psi(p)}$$

$\varphi(p) - p = 0 \leftarrow$ to ni funkcija, to je enačba z p in ima lahko neke diskretne rešitve, konstante.

$$p_1, p_2, \dots, p_i$$

$\leftarrow$ rešitve so neke premice.

$$p_i = y_i'$$

$$y'(x) = p_i$$

$$y(x) = p_i x + C(p_i)$$

$$y(x) = x \cdot p_i + \psi(p_i)$$

primer:

$$2y - xy' - \frac{3}{y} = 0$$

$$2y - xp - \frac{3}{p} = 0$$

$$2dy - p dx - x dp + \frac{3}{p^2} dp = 0$$

$$2p dx - p dx - x dp + \frac{3}{p^2} dp = 0$$

$$p dx - x dp + \frac{3}{p^2} dp = 0$$

$$\boxed{p \frac{dx}{dp} - x = -\frac{3}{p^2}}$$

{ Lagrange-ova enačba prepoznamo
po linearnosti x in y.

$$p \frac{dx}{dp} = x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln x = \ln p + \ln C$$

$$p [C'(p)p + C(p)] - C(p)p = -\frac{3}{p^2}$$

$$C'(p)p^2 = -\frac{3}{p^2}$$

$$C'(p) = -\frac{3}{p^4} \Rightarrow C(p) = -3 \frac{1}{p^3(-3)} + C_1 = \frac{1}{p^3} + C_1$$

$$X = \frac{1}{p^2} + C_1 p$$

$$2y = p \left(\frac{1}{p^2} + C_1 p \right) + \frac{3}{p} \Rightarrow 2y = \frac{4}{p} + C_1 p^2$$

$$y = \frac{2}{p} + \frac{C_1}{2} p^2$$

- Clairaut-ova D.E.

$$y = xy' + \Psi(y')$$

$$y' = p$$

$$y'dx = dxy' + xdy' + \Psi'(y')dy'$$

$$(x + \Psi'(y')) dy' = 0$$

$$1) dy' = 0 \Rightarrow y' = C$$

$$y = XC + \Psi(C)$$

splošna rešitev, za vsako konstanto dobimo rešitev v obliki premice družina premic/krivulj.

$$2.) x + \Psi'(y') = 0$$

$$x = -\Psi'(y') ; y' = p$$

$$x = -\Psi'(p)$$

$$y = -\Psi'(p) \cdot p + \Psi(p)$$

krivulja, ki je samo 1, optimizacija.

Ogrinjača družine krivulj je tista krivulja, ki se celodružinski tangentno prilega.

$$y = y(x, C)$$

$$\frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0$$

primer:

$$y = xy' - \frac{4}{27} (y')^3$$

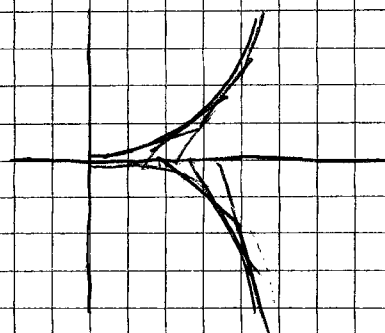
namesto odvoda damo C.

singularna rešitev je ogrinjača.

$$y = XC - \frac{4}{27} C^3$$

$$x - \frac{4}{27} \cdot 3C^2 = 0$$

$$x = \frac{4}{9} C^2 \Rightarrow C = \frac{3}{2} \sqrt{x} ; y = x \frac{3}{2} \sqrt{x} - \frac{4}{27} \cdot \frac{27}{8} x \sqrt{x} = x \sqrt{x}$$

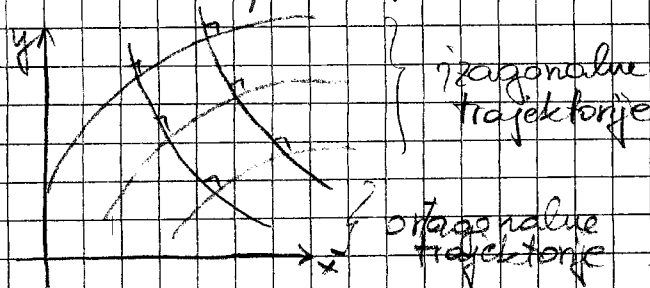


IZAGONALNE IN ORTOGONALNE TRAJEKTORIJE

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0$$

$$y' = f(x, y)$$



$$K_1; K_2 = -\frac{1}{K_1} \leftarrow \text{pravokotna na prvo trajektorijo.}$$

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} \quad ; \quad K_1 K_2 = 0$$

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

primer: družina krogov:

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

$$\frac{x^2 + y^2}{2y} = a \quad ; \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + y^2}{2y} \right) = 0 \Rightarrow \frac{(2x + 2yy')y - (x^2 + y^2)y'}{4y^2} = 0$$

$$2xy + 2y^2 y' - (x^2 + y^2)y' = 0$$

$$2xy + (y^2 - x^2)y' = 0$$

$$y' = -\frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

Parameter moramo eliminirati, da dobimo D.E. družine krivulj

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{xy^2 - x^3}{x^2 y^2 - x^4} \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad ; \quad \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux$$

$$u'x + u = \frac{u^2 x^2 - x^2}{2xux} = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

$$u'x = \frac{u^2 - 1}{2u} - u = \frac{u^2 - 1 - 2u^2}{2u} = -\frac{u^2 + 1}{2u}$$

$$\frac{du}{dx} x = -\frac{u^2 + 1}{2u} \quad ; \quad \frac{2u du}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$u^2 + 1 = t \quad ; \quad 2u du = dt$$

$$\Rightarrow \ln(u^2 + 1) = -\ln x + \ln C \Rightarrow \boxed{u^2 + 1 = \frac{C}{x}}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{C}{x} \quad ; \quad x^2 + y^2 = Cx \quad ; \quad \boxed{y^2 + \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}}$$

$$y^2 + (x^2 - Cx) = 0$$

$$y^2 + \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}$$

Poseben primer D.E. in sicer D.E. oblike:

$$y' = f(x, y) \quad \text{pri zač. pogojem: } y(x_0) = y_0$$

Ta začetni problem (D.E. + zač. pogoj) ima lahko neskončno rešitev, natanko eno rešitev ali nobene rešitve.

Primer:

$$y' = 2 \frac{y}{x}$$

Najprej poiščimo splošno rešitev:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}$$

$$\log y = 2 \log x + \log C$$

$$y = x^2 \cdot C$$

Oglejmo si rešitev te D.E. pri naslednjih zač. pogojih:

a) $y(0) = 0$ $0 = 0^2 \cdot C \Rightarrow C$ je poljuben, zač. pogoj ne določa konstante C ; imamo neskončno rešitev.

b) $y(1) = 1$ $1 = 1^2 \cdot C \Rightarrow C$ je 1; dobimo natanko eno rešitev.

c) $y(0) = 1$ $1 = 0^2 \cdot C$; ni mogoče; rešitev D.E. pri tem pogoju ne obstaja.

Znamo nas, kdaj ima neka D.E. skupaj z zač. pogojem rešitev in kdaj je ta rešitev enolična.
Delni odgovor na ti dve vprašanji nam podata naslednja izreka:

Izrek:

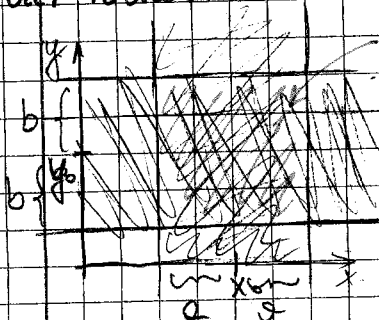
Naj bo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija in zadrž omejena na:

$$Q = \{ (x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$$

torej obstaja konstanta M , tako da je $|f(x, y)| \leq M$ za vsak $(x, y) \in Q$.
Potem obstaja rešitev D.E.

okoliš točke x_0 .

$$y' = f(x, y) \quad \text{pri pogojem } y(x_0) = y_0 \quad \text{v neki}$$



Pridemo do opl. rešitve, kočemo postaviti zač. pogoj, da dobimo miselnost rešitev, da bo funkcije zvezna.

obstaja konstanta M , tako da je vrednost funkcije manjša od maksimalne vrednosti za vsako točko v pravokotniku

Izrek: Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zvezna in parcialno odvedljiva funkcija, zato omejena:

$$Q = \{(x, y); |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

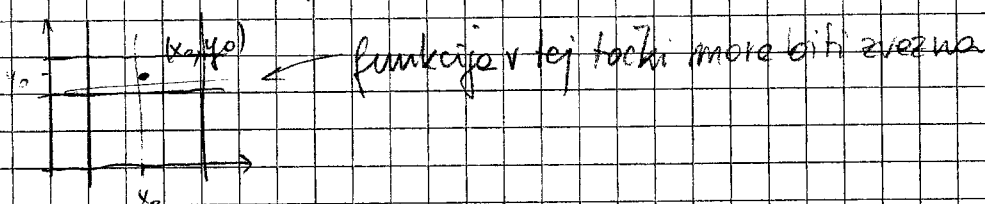
torej obstajata konstanti M in K , tako da je

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq K \quad \text{za vse } (x, y) \in Q,$$

Potem obstaja natanko ena rešitev D.E.: $y' = f(x, y)$ pri pogoju $y(x_0) = y_0$

To rešitev lahko dobimo z Picardovo metodo, pri kateri konstruiramo zaporedje funkcij:

$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt$; to zaporedje pa konvergira k rešitvi zač. probleme.



Primer: Predstavimo Picardovo metodo na primeru $y' = y$; $y(0) = 1$

Konstruiramo zaporedje:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + t \Big|_0^x = 1 + x, \quad f(x, y)$$

$$f(t, y_1(t)) = f_0(t) = 1$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$f(t, y_2(t))$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right) dt = 1 + \left[t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right]_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$f(t, y_3(t))$$

Dobivamo vedno več členov T. vrste; v limiti dobimo e^x .

DIFERENCIALNE ENAČBE VIŠJEGA REDA

Splošna rešitev D.E. n -tega reda:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

ima obliko $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$; pri čemer je x neodvisna spremenljivka,
 $C_1, C_2, \dots, C_n$ pa poljubne konstante.

Te konstante lahko npr.: določimo z n zač. pogoji: $y(x_0) = y_0$,

$$y'(x_0) = y_1 \leftarrow \text{npr.: hitrost v neki točki}$$

$$y''(x_0) = y_2 \leftarrow \text{npr.: pospešek v neki točki} \quad \left. \vphantom{y''(x_0) = y_2} \right\} \text{opišejo pot nekega telesa.}$$

$$\frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!}(x_0) = y_{n-1}$$

ali pa z robnimi pogoji:

$$y(x_1) = y_1$$

$$y(x_2) = y_2$$

$$y(x_n) = y_n$$

2. reda:

$$y = y(x, C_1, C_2)$$

$\downarrow$
dveparametrična družina krivulj

- linearne D.E. drugega reda:

Splošna oblika lin. D.E. drugega reda je:

$$y'' + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = r(x).$$

Če je $r(x)$ enak 0 za vsak x , potem pravimo, da je lin. D.E. homogena.
V nasprotnem primeru je nehomogena.

Opomba: lin. D.E. n -tega reda je oblike:

$$\frac{y^{(n)}}{n!} + f_{n-1}(x) \frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!} + \dots + f_1(x) y'(x) + f_0(x) y(x) = r(x)$$

Posvetimo se homogenim lin. D.E. drugega reda:

$$y'' + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0, (*)$$

Trditvi: Najbosta y_1 in y_2 rešitvi homogene L.D.E. (*), potem je funkcija
 $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ tudi rešitev L.D.E. (*).

$\downarrow$
upoštevamo pri naslednjem izračunu

Dokaz: Preverimo, da je y res rešitev (*)

$$\begin{aligned} & (C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))'' + f(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))' + g(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) = \\ &= (C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x)) + f(x)(C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)) + g(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) = \\ &= C_1 (y_1''(x) + f(x)y_1'(x) + g(x)y_1(x)) + C_2 (y_2''(x) + f(x)y_2'(x) + g(x)y_2(x)) = 0 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \parallel & \text{ker je } y_1 \text{ rešitev} \\ 0 & \text{D.E. (*)} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \parallel & \text{ker je } y_2 \text{ rešitev} \\ 0 & \text{D.E. (*)} \end{matrix}$

Baza rešitev je tu dvodimenzionalna.

Def: Funkciji y_1 in y_2 sta lin. odvisni, če obstaja konstanta C , tako da je:

$$y_1(x) = C y_2(x); \text{ za vsak } x.$$

Tj pomeni, da sta lin. neodvisni, če $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq C$ ni konstantna funkcija.

Primeri:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sin x \\ y_2(x) &= \sin(2x) \\ y_3(x) &= \sin x \cdot \cos x \end{aligned}$$

1.) Ker je $\frac{y_1(x)}{y_3(x)} = \frac{\sin x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x} \neq C$

y_1 in y_3 sta lin. neodvisni funkciji.

2.) Ker je $\frac{y_2(x)}{y_3(x)} = \frac{\sin(2x)}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x} = 2 = C$

y_2 in y_3 sta linearno odvisni funkciji.

Pri določanju lin. odvisnosti rešitev homogene lin. D.E. si lahko pomagamo tudi z determinanto Wronskega:

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$

pri čemer sta y_1 in y_2 rešitvi D.E. (*).

Trditev: Rešitvi y_1 in y_2 D.E. (*) sta lin. neodvisni natanko tedaj, ko je determinanta Wronskega različna od 0, za vsak x ;

$$W(x) \neq 0 \text{ za vsak } x.$$

Če je $W(x_0) = 0$ za nek x_0 , potem je $W(x) = 0$ za vsak x . V tem primeru sta rešitvi linearno odvisni.

Opomba: Determinanta Wronskega lahko definiramo tudi za L.D.E. višjega reda, npr.:

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix}$$

Izrek: Rešitev $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ je splošna rešitev L.D.E.:

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0; \text{ natanko tedaj, ko sta } y_1 \text{ in } y_2 \text{ linearno neodvisni rešitvi te L.D.E. (*)}$$

To pomeni, če želimo poiščati rešitev L.D.E. (*) moramo poiščati 2 linearno neodvisni rešitvi te enačbe; vsako drugo pa zapiše kot linearno kombinacijo teh dveh.

25.5.2011

Oglejmo si kakšne poiščemo linearno neodvisni rešitvi homogene linearne D.E. drugega reda s konstantnimi koeficienti.

$$y'' + ay' + by = 0 \quad *$$

Rešitvi enačbe * iščemo z nastankom: $y(x) = e^{\lambda x}$
vstavimo v D.E. in dobimo

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a \lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

$\neq 0$ za vsak x , zato lahko krajšamo

Sledi: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Dobimo kv. enačbo za katero velja, da ima:

1.) Dve različni realni rešitvi λ_1 in λ_2 . Splošna rešitev D.E. * je potem
 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

2.) Ena realna rešitev λ ; potem je ena izmed rešitev D.E. * enaka
 $y(x) = e^{\lambda x}$; za drugo rešitev pa lahko preverimo, da je

$$y(x) = e^{\lambda x} x$$

vstavimo:
 $y(x) = e^{\lambda x} x$ v D.E. *

$$y'' + ay' + by = 0$$

dobimo:

$$\underbrace{\lambda e^{\lambda x} x + e^{\lambda x} \lambda + e^{\lambda x} \lambda}_{y''} + a \underbrace{(e^{\lambda x} \lambda + e^{\lambda x})}_{y'} + b e^{\lambda x} x = 0$$

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 x + 2\lambda + a\lambda x + a + bx) = 0$$

$$e^{\lambda x} \left(\underbrace{x(\lambda^2 + a\lambda + b)}_0 + \underbrace{2\lambda + a}_0 \right) = 0$$

ker je λ rešitev kv. enačbe

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$\lambda = -\frac{a}{2}$; ker je λ dvojni ničla

Torej je res $y(x) = e^{\lambda x} x$ rešitev D.E. *

Očitno sta funkciji $y_1(x) = e^{ix}$ in $y_2(x) = e^{-ix}$ lin. neodvisni, torej je splošna rešitev D.Ě. * enaka $y(x) = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$

3.) Dve različni kompleksni rešitvi; konjugiran par;

$$\lambda_1 = p + iq \quad ; \quad \lambda_2 = p - iq$$

$$(Velja \quad e^{iqx} = \cos(qx) + i \sin(qx))$$

Rešitvi D.Ě. * sta v tem primeru

$$y_1(x) = e^{px} \cos(qx)$$

$$y_2(x) = e^{px} \sin(qx)$$

$$\text{Splošna rešitev je potem } y(x) = C_1 e^{px} \cos(qx) + C_2 e^{px} \sin(qx)$$

Opomba:

Kv. enačbo ki jo dobimo iz D.Ě. *, torej $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ imamo karakternistično enačbo.

Opomba:

Podobno velja tudi za L.D.Ě., homogene s konstantnimi koeficienti / višjega reda.

Primer: $y'' + y' - 2y = 0$

postavka:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

(dve različni realni ničli)

sledi:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

Primer:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^x \cdot x$$

Primer:

$$y'' + y' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{-15}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{-15}}{2}$$

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)$$

EULERJEVA D.E.

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, *$$

Rešitev te D.E. * bomo iskali z nastankom $y(x) = x^\lambda$, vendar bi dobili dve linearno neodvisni rešitvi samo v nekaterih primerih. Zato bomo iskali dve linearno neodvisni rešitvi z nastankom

$$x = e^t$$

in s pomočjo tega nastanka prevedli Eulerjevo D.E. na D.E. s konst. koeficienti.

Velja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad \text{in} \quad dx = e^t dt$$

Torej: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}$

Sledi: $\frac{d^2 y}{(dx)^2} = \frac{d^2 y}{(dt)^2} e^{-t} + \frac{dy}{dt} \cdot (-e^{-t})$

Vstavimo v enačbo *

$$(e^t)^2 \cdot (\ddot{y} e^{-t} + \dot{y} (-e^{-t})) + \alpha e^t + \beta y = 0$$

$$\ddot{y} + \dot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y = 0$$

$$\boxed{\ddot{y} + (a-1)\dot{y} + by = 0}$$

← To pa je D.E. s konstantnimi koeficienti, ki jo znamo rešiti.

1.) Če imamo 2 rešitvi; λ_1, λ_2 dobimo

$$y(t) = e^{\lambda_1 t} C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 (e^t)^{\lambda_1} + C_2 (e^t)^{\lambda_2} \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}$$

2.) Dvojna rešitev

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\text{Potem je: } y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t} \cdot t = C_1 (e^t)^{\lambda} + C_2 (e^t)^{\lambda} t$$

$$\text{sledi: } y(x) = C_1 x^{\lambda} + C_2 x^{\lambda} \log x$$

3.) Konjugirani par kompleksnih števil:

$$\lambda_1 = p + iq; \quad \lambda_2 = p - iq$$

$$y(t) = C_1 e^{pt} \cos(qt) + C_2 e^{pt} \sin(qt)$$

$$\begin{aligned} x &= e^t \\ \log x &= t \end{aligned}$$

Primer: $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + (-3-1)\lambda + 4 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^\lambda \\ y' = \lambda x^{\lambda-1} \\ y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \end{array} \right\}$$

$$x^2 \cdot \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 3x \lambda x^{\lambda-1} + 4x^\lambda = 0$$

$$x^\lambda (\lambda^2 - 1) - 3\lambda x^\lambda + 4x^\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Rešimo kv. enačbo:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^2 \log x$$

Nehomogene L.D.E. višjega reda

Tudi pri nehomogenih L.D.E. višjega reda velja podobno kot pri L.D.E. 1. reda. nehomogenih

Izrek: Naj bo y_h splošna rešitev hom. L.D.E.

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0 \quad *$$

Naj bo y_p partikularna (torej katerakoli) rešitev nehomogene D.E.

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = r(x)$$

Potem je $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ spl. rešitev nehomogene L.D.E.

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = r(x) \quad \bullet$$

Če hočemo poiskati vse rešitve nehom. D.E. • (torej splošno rešitev D.E.), potem moramo poiskati vse rešitve homogene D.E. * (spl. rešitev D.E. *) in eno rešitev nehomogene D.E. • (torej partikularno rešitev)

Vsaka rešitev D.E. • se potem zapisuje kot vsota splošne rešitve homogene in partikularne.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Oglejmo si 2 načina, kako lahko poiščemo partikularno rešitev nehomogene linearnne D.E. drugega reda.

1.) Metoda nedoločenih koeficientov:

Naj bo $y'' + ay' + by = r(x)$ lin. D.E. s konstantnimi koeficienti. Naj bo r "lepa" funkcija, t.j. npr.: r je polinom, eksponentna funkcija, sinus, kosinus, lin. kombinacija teh in produkt teh funkcij.

Potem iščemo partikularno rešitev z nastankom v katerem nastopajo neznane konstante, t.j. nedoločeni koeficienti, ki jih moramo določiti.

Natančneje:

a) Če je $r(x) = \overset{\text{poznani}}{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}$, potem iščemo partikularno rešitev z nastankom:

$$y_p(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

← hočemo določiti

Primer:

$$y'' + 4y = 8x^2$$

1.) homogena:

$$\lambda^2 + 4 = 0; \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$$

$$y_H = e^{\lambda_1 x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$$

2.) partikularna:

$$y_p(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \leftarrow \text{nastanek}$$

Vstavimo v D.E.:

$$2b_2 + 4(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = 8x^2$$

$$x^2: 4b_2 = 8$$

$$x^1: 4b_1 = 0$$

$$x^0: 2b_2 + 4b_0 = 0$$

$$\rightarrow b_2 = 2$$

$$\rightarrow b_1 = 0$$

$$\rightarrow 4 = 4b_0 \Rightarrow b_0 = -1$$

$$y_p(x) = 2x^2 - 1$$

Splošna rešitev nehomogene D.E. je:

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + 2x^2 - 1$$

b) Če je npr.: $r(x) = \sin(kx)$, potem je nastavek

$$y_p(x) = b_1 \sin(kx) + b_2 \cos(kx)$$

(pri nastanku sinus in kosinus vedno nastopata v paru.)

Primer:

$$y'' - y' - 2y = 10 \cos x$$

1) homogena:

$$y'' - y' - 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 ; (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

2) nehomogena:

$$y_p(x) = b_1 \sin x + b_2 \cos x$$

$$y_p'(x) = b_1 \cos x - b_2 \sin x$$

$$y_p''(x) = -b_1 \sin x - b_2 \cos x$$

} vstavimo v D.E.

$$-b_1 \sin x - b_2 \cos x - (b_1 \cos x - b_2 \sin x) - 2(b_1 \sin x + b_2 \cos x) = 10 \cos x$$

Izenačimo levo in desno stran:

$$\sin x : -b_1 + b_2 - 2b_1 = 0 \rightarrow b_2 = 3b_1$$

$$\cos x : -b_2 - b_1 - 2b_2 = 10 \rightarrow -b_1 - 3b_2 = 10 =$$

$$= -b_1 - 9b_1 = 10$$

$$\begin{array}{|c|} \hline b_1 = -1 \\ \hline b_2 = -3 \\ \hline \end{array}$$

Dobimo, da je partikularna rešitev:

$$y_p(x) = -\sin x - 3\cos x$$

Splošna rešitev nehomogene D.E. je:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \sin x - 3\cos x$$

c) Če je npr.: $r(x) = e^{kx}$, je nastavek $y_p(x) = b e^{kx}$

Primer:

$$y'' - y' - 2y = -e^{-x}$$

1) homogena:

- glej prejšnji primer:

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

2.) nehomogena:

Če bi vzeli za nastavek $y_p(x) = be^{-x}$, bi dobili na levi strani nehomogene D.E. nič, na desni pa e^{-x} , saj je e^{-x} že rešitev homogene D.E.

Opomba:

Če je funkcija $r(x)$ na desni strani nehomogene D.E. enaka rešitvi homogene D.E., potem moramo v nastavek funkcijo pomnožiti z x .

za nastavek torej v našem primeru vzamemo $y_p(x) = be^{-x} \cdot x$

$$y_p'(x) = b(e^{-x}(-1) \cdot x + e^{-x}) = be^{-x}(1-x)$$

$$y_p''(x) = b(e^{-x} \cdot x + e^{-x}(-1) + (-1)e^{-x}) = b(e^{-x} \cdot x - 2e^{-x}) = be^{-x}(x-2)$$

$$be^{-x}(x-2) - be^{-x}(-x+1) - 2be^{-x} \cdot x = e^{-x} / e^{-x}$$

$$b(x-2) - b(-x+1) - 2bx = -1$$

$$x^1: b + b - 2b = 0$$

$$x^0: -2b - b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$$

Torej je partikularna rešitev: $y_p(x) = \frac{1}{3}e^{-x} \cdot x$

splošna rešitev nehomogene D.E. je: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-x} \cdot x$

2.) Metoda z variacijo konstante:

Te metoda je veliko bolj splošna od metode nedoločenih koeficientov (funkcija r je lahko "poljubna").

Iščemo torej partikularno rešitev linearnе D.E.

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$$

Najprej rešimo homogeno in dobimo splošno rešitev:

$$y(x) = C_1 \overbrace{y_1(x)}^{\text{konstanti}} + C_2 \overbrace{y_2(x)}^{\text{konstanti}}$$

↑
linearno neodvisni
rešitvi homogene

Partikularno rešitev iščemo tako, da privzamemo, da sta C_1 in C_2 neznani funkciji, torej:

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

Odvajamo:

$$y_p'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

Lahko privzamemo, da je $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$.

(t.j. imamo dve enačbi prvega reda, kot eno drugega reda - v tem primeru)

Odvajamo:

$$y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)$$

Vstavimo v D.E.: $y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$ in dobimo:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + f(x)(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) + g(x)(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = r(x)$$

Ker je y_1 rešitev homogene, je izraz $C_1(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + f(x)C_1(x)y_1'(x) + g(x)C_1(x)y_1(x)$ enak 0.

→ y_2 rešitev - 11, 11 -

$$\text{Dobimo: } C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = r(x)$$

Sledi, da moramo rešiti sistem dveh enačb:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = r(x) \end{cases}$$

iscemo poznamo

To je linearen sistem, ki ima natanko eno rešitev, kadar je determinanta sistema različna od nič.

Determinanta sistema pa je:

$$\det \begin{bmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{bmatrix} \rightarrow \text{to pa je natanko determinanta Wronskega, za katero velja, da je različna od nič,}$$

Saj sta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi homogenega sistema. Torej rešitev sistema obstaja in zato dobimo partikularno rešitev.

Primer:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

1.) homogena:

$$\lambda^2 + 1 = 0; \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) = y_H(x)$$

2.) nehomogena:

$$y_p(x) = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x)$$

iscemo $C_1(x)$ in $C_2(x)$, ki zadoščata sistemu

$$* C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)\sin(x) = 0 \quad / \cdot \sin x$$

$$C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos(x) = \frac{1}{\cos x} \quad / \cos x$$

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \cos x \sin x + C_2'(x) \sin^2 x = 0 \\ C_1'(x) (-\sin x) \cos x + C_2'(x) \cos^2 x = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_2'(x) = 1 \\ C_2(x) = x + \text{const} \end{matrix}$$

Vstavimo v enačbo * in dobimo:

$$C_1'(x) \cos x + 1 \sin x = 0$$

$$C_1'(x) = - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_1(x) = \log(\cos x) + \text{const}$$

iščemo 1 partikularno rešitev:
 $\Rightarrow K_1, K_2 = 0$

Splošna rešitev nehomogene D.E. je potem

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \log(\cos x) \cdot \cos x + x \sin x$$

Opomba:

Včasih lahko z uvedbo nove spremenljivke znižamo red D.E., npr.:
 če v enačbi ne nastopa kakšna izmed spremenljivk.

Primer:

$$y''' + 2y' = x \quad \leftarrow \text{D.E. 3. reda}$$

Uvedemo novo spremenljivko $u(x) = y'(x)$ in dobimo:

$$u''(x) + 2u(x) = x \quad \leftarrow \text{D.E. 2. reda}$$

SYSTEMI D.E.

Sistem D.E. je sestavljen iz več enačb v katerih nastopajo neznane funkcije skupaj z odvodi.

Preverimo, da je sistem normalen, če je oblike:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

Izrek:

Sistem n -D.E. ^{1. reda} za n neznanih funkcij je ekvivalenten eni D.E. n -tega reda za eno neznano funkcijo.