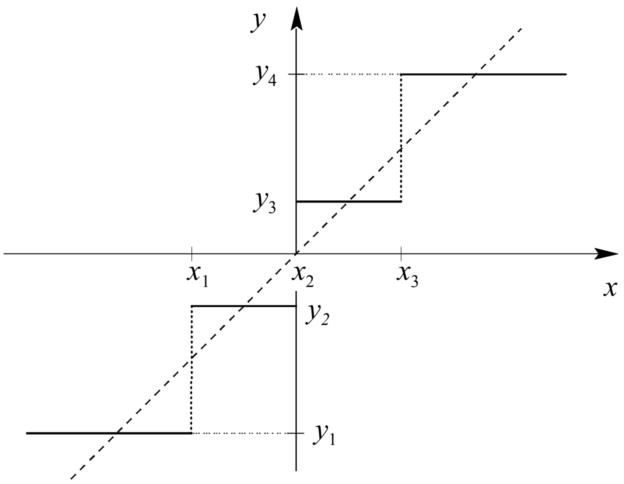
Naloge pisnega izpita

DIGITALNE KOMUNIKACIJE I

Izpitni rok: 5. 6. 2000

1. Določite napetostni obseg V (v voltih in dBm) 13-segmentnega kvantizatorja po A-zakonu tako, da bo psofometrično merjena moč kvantizacijskega popačenja praznega kanala manjša od 2,78nW na upornosti 600Ω.

2. Informacijski signal z Laplaceovo distribucijo in efektivno napetostjo 1 (volt) želimo kvantizirati s 4-nivojskim (2-bitnim) kvantizatorjem. Določite decizijske meje $x_1 \ldots x_4$ tako, da bodo vsi izhodni nivoji enako pogosti! Ali bi bila uporaba Huffmanove kode za kodiranje izhodnih nivojev smiselna?



3. Signal s porazdelitvijo gostote verjetnosti

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{a^2}x & \text{za} \quad 0 \le x \le a \\ 0 & \text{drugod} \end{cases}$$

vodimo na vhod kvantizatorja z obsegom $V^- = 0$ in $V^+ = V$. Kolikšno mora biti razmerje V/a, da bo razmerje signala proti prekoračitvenemu popačenju 10 dB ali več? ($S/N_P \ge 10$ dB)

4. Digitalni signal na liniji ima štiri vrednosti (-1,5V, -0,5V, 0,5V, 1,5V), ki so enako verjetne. Izračunajte in narišite verjetnostno funkcijo $P(x_i)$ za signal, ki ga dobimo, če seštejemo dve taki naključni napetosti. Koliko je efektivna vrednost napetosti novega signala?

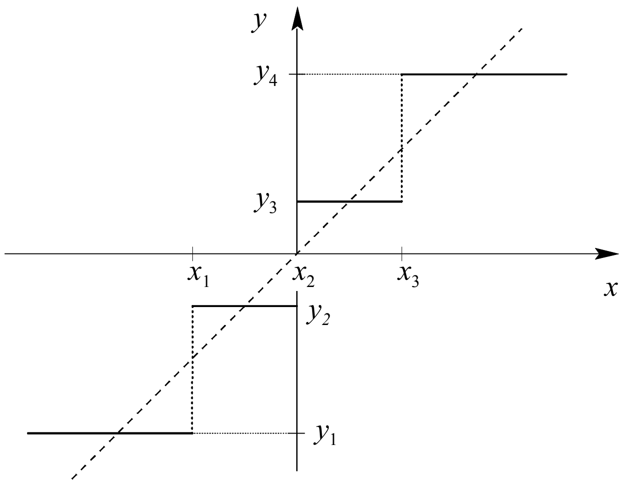
Naloge pisnega izpita

DIGITALNE KOMUNIKACIJE I

Izpitni rok: 5. 6. 2000

1. Določite napetostni obseg V (v voltih in dBm) 13-segmentnega kvantizatorja po A-zakonu tako, da bo psofometrično merjena moč kvantizacijskega popačenja praznega kanala manjša od 2,78nW na upornosti 600Ω.

2. Informacijski signal z Laplaceovo distribucijo in efektivno napetostjo 1 (volt) želimo kvantizirati s 4-nivojskim (2-bitnim) kvantizatorjem. Določite decizijske meje $x_1 \ldots x_4$ tako, da bodo vsi izhodni nivoji enako pogosti! Ali bi bila uporaba Huffmanove kode za kodiranje izhodnih nivojev smiselna?



3. Signal s porazdelitvijo gostote verjetnosti

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{a^2}x & \text{za} \quad 0 \le x \le a \\ 0 & \text{drugod} \end{cases}$$

vodimo na vhod kvantizatorja z obsegom $V^- = 0$ in $V^+ = V$. Kolikšno mora biti razmerje V/a, da bo razmerje signala proti prekoračitvenemu popačenju 10 dB ali več? ($S/N_P \geq 10$ dB)

4. Digitalni signal na liniji ima štiri vrednosti (-1,5V, -0,5V, 0,5V, 1,5V), ki so enako verjetne. Izračunajte in narišite verjetnostno funkcijo $P(x_i)$ za signal, ki ga dobimo, če seštejemo dve taki naključni napetosti. Koliko je efektivna vrednost napetosti novega signala?

Naloge pisnega izpita

DIGITALNE KOMUNIKACIJE I

Izpitni rok: 8. 9. 2000

1. Signal **z** Laplaceovo distribucijo ($\mu = 0$ V, $\sigma = 3$ V), merimo z enosmernim voltmetrom na izhodu nelinearnega vezja s karakteristiko:

$$y = \begin{cases} |x| & \text{za} \quad |x| \le a \\ a & \text{za} \quad |x| > a \end{cases}$$

Kolikšno napetost kaže voltmeter, če je $a = 4$ V?

2. Na vhod kvantizatorja s 13-segmentno karakteristiko po A-zakonu ($T_{max} = 3{,}14$ dBm0) je priključen sinusni signal z efektivno napetostjo $X_{ef} = -6$ dBm0. Določite bite *PXYZ ABCD* v izhodni kodi s katero sta kodirana vzorca temenskih vrednosti tega signala!

3. Kolikšno je dinamično območje X_{max}/X_{min} v dB 10-bitnega enakomernega kvantizatorja za signal z Laplaceovo distribucijo, na katerem je razmerje signal-šum 30 dB ali več? Kolikšna je velikost stopnice Δ, če je $X_{min} = -43{,}3$ dBm?

4. Določite šumno (ekvivalentno) pasovno širino naključnega signala, ki ima avtokorelacijo $R_X(\tau)$ dano z

$$R_X(\tau) = Pe^{-\frac{|\tau|}{t_0}},$$

kjer je $t_0 = 2$ ms!

Naloge pisnega izpita z rešitvami

DIGITALNE KOMUNIKACIJE I

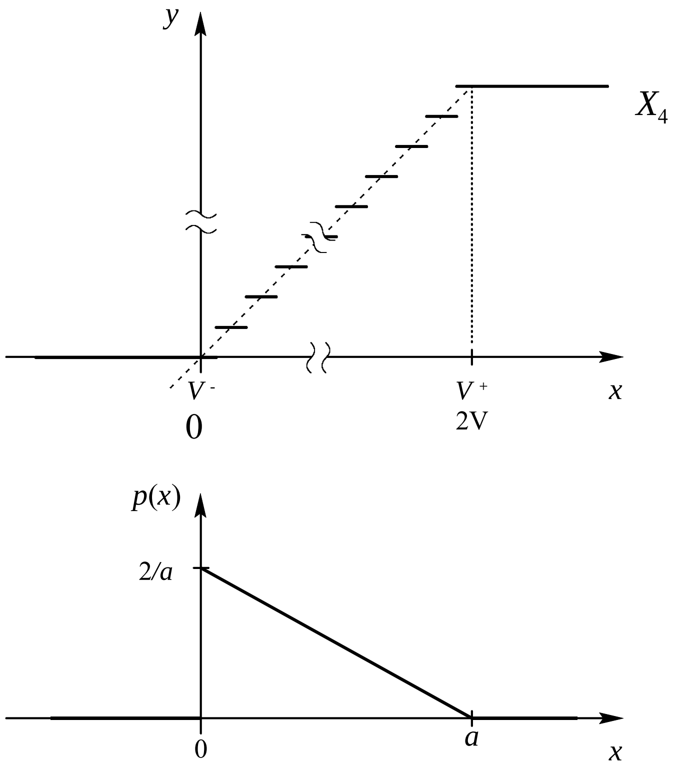
Izpitni rok: 29. 1. 2001

1. Enakomeren 8-biten kvantizator z dosegoma $V^- = 0$ in $V^+ = 2$ V uporabljamo za digitalizacijo signala z distribucijo gostote verjetnosti

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right) & \text{za} \quad 0 \le x \le a \\ 0 & \text{drugod} \end{cases}$$

Določite maksimalno razmerje $\left(\frac{X_{ef}}{V^+}\right)_{max}$ v dB, pri katerem še ne pride do prekoračitvenega popačenja! Kolikšno je tedaj razmerje S/N_q ?

Rešitev:



Slika 1. Karakteristika kvantizatorja (zgoraj) in porazdelitev gostote verjetnosti $p(x)$

Iz slike 1, ki prikazuje kvantizatorsko karakteristiko in porazdelitev gostote verjetnosti, je razvidno, da prekoračitvenega popačenja ni, dokler je $a \le V^+$, zato za maksimum upoštevamo enačaj.

$$S = X_{ef}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \int_0^a x^2 \frac{2}{a}(1-\frac{x}{a})dx = \frac{a^2}{6} \tag{1.1}$$

od tod je efektivna vrednost signala

$$X_{ef} = \frac{a}{\sqrt{6}}. \tag{1.2}$$

Največje razmerje $\left(\frac{X_{ef}}{V^+}\right)_{max}$ v dB, je določeno kot

$$\left(\frac{X_{ef}}{V^+}\right)_{max} = 20\log\frac{X_{ef}}{V^+} = 20\log\frac{1}{\sqrt{6}} = -10\log 6 = -7{,}78\text{dB} \tag{1.3}$$

Normirana moč zrnatega popačenja izračunamo z velikostjo stopnice Δ

$$N_z = \frac{\Delta^2}{12} = \left(\frac{V^+}{N}\right)^2 \frac{1}{12} = \frac{V^{+2}}{2^{2n}}\frac{1}{12} \tag{1.4}$$

$$\frac{S}{N_q} = \frac{S}{N_z} = \frac{V^{+2}}{6}\frac{2^{2n}\cdot 12}{V^{+2}} = 2^{2n+1}$$
$$\left(\frac{S}{N_q}\right)_{(\text{dB})} = 10\log\frac{S}{N_q} = 10\log 2^{2n+1} = (2n+1)10\log 2 = 170\cdot 0{,}301 = 51{,}17\ \text{dB} \tag{1.5}$$

2. Na vhod kvantizatorja s 13-segmentno karakteristiko po A-zakonu (T_{max} = 3,14 dBm0) je priključen sinusni signal z efektivno napetostjo X_{ef} = - 16,86 dBm0. Določite izhodno kodo (*PXYZ ABCD*) največjega pozitivnega vzorca (pozitivna amplituda)!

Rešitev:

Iščemo kodo PCM koderja s 13 segmentno kompresijsko karakteristiko po A-zakonu za amplitudo sinusnega signala z efektivno vrednostjo –16,86 dBm0. Enota dBm0 podaja moč, oz. efektivno napetost signala glede na referenčno točko komunikacijskega sistema. V istih enotah je podan tudi doseg koderja (kvantizatorja). Ker se meritve komunikacijskih naprav izvajajo s sinusnim signalom je doseg podan z izkrmilno mejo T_{max}, t.j. efektivno napetostjo sinusnega signala, katerega amplituda ravno doseže doseg kvantizatorja *V*. Amplituda sinusnega signala je 3 dB nad efektivno vrednostjo, zato velja:

$$X_{max(\text{dBm0})} = X_{ef\,(\text{dBm0})} + 3\,\text{dB} \quad \text{in} \quad V_{(\text{dBm0})} = T_{max(\text{dBm0})} + 3\,\text{dB} \tag{2.1}$$

Od tod dobimo razmerje med amplitudo vhodnega signala in amplitudo

$$\left(\frac{X_{max}}{V}\right)_{\text{dB}} = X_{max(\text{dBm0})} - V_{(\text{dBm0})} = (X_{ef\,(\text{dBm0})} + 3\,\text{dB}) - (T_{max(\text{dBm0})} + 3\,\text{dB}) =$$
$$= X_{ef\,(\text{dBm0})} - T_{max(\text{dBm0})} = -16{,}86\ \text{dBm0} - 3{,}14\ \text{dBm0} = -20\ \text{dB} \tag{2.2}$$

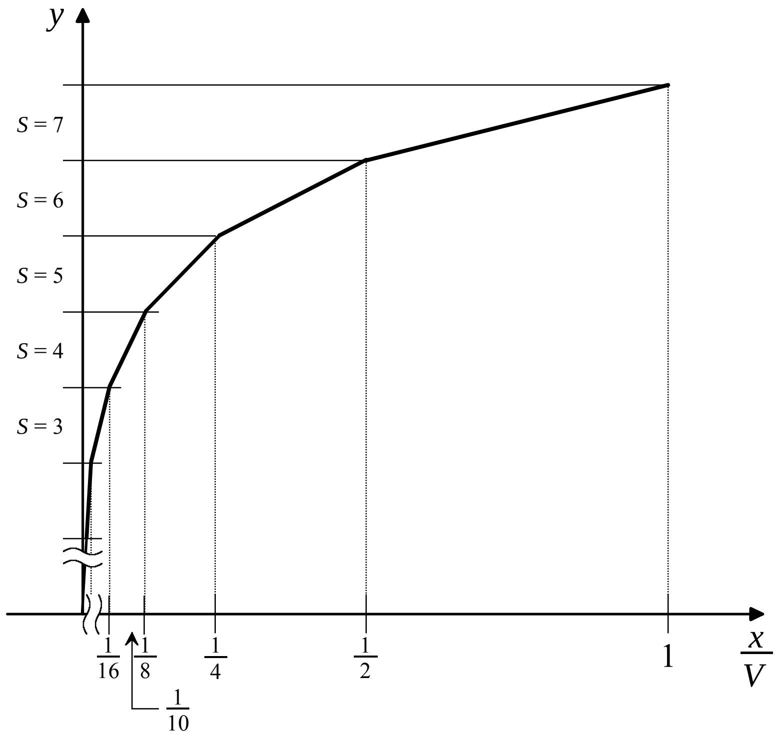
V linearnem merilu pomeni to razmerje 1/10 kajti

$$\frac{X_{max}}{V} = 10^{\frac{-20\text{dB}}{20}} = 10^{-1} = 0,1 \tag{2.3}$$

Kodna beseda vzorca je sestavljena iz bitov *PXYZABCD,* kjer je bit *P* polariteta, *XYZ* sestavljajo dvojiški zapis segmenta *S* in *ABCD* stopnico *L* znotraj segmenta. Za absolutno vrednost vhodnega signala *x*, ki je manjša od dosega *V*, poišče analogno digitalni pretvornik vrednosti *S* in *L* tako, da je zadoščeno neenačbi

$$(16\beta + L)\Delta_{min} 2^{S-\beta} < x < (16\beta + L + 1)\Delta_{min} 2^{S-\beta} \tag{2.4}$$

Segment, na katerem leži vzorec najlaže ugotovimo s pomočjo območij, ki jih pokriva posamezen segment. Iz grafa odsekoma linearne kompresijske krivulje, ki je shematsko prikazana na sliki 2, je razvidno, da amplituda danega vhodnega signala ($X_{max}/V = 1/10$) leži na 5. segmentu z $S = 4$ in $\beta = 1$.



Slika 2. Shematski prikaz grafa kompresijske karakteristike

Z upoštevanjem relacije

$$\Delta_{min} = \frac{V}{2^{11}} \tag{2.5}$$

in ugotovljenima vrednostima *S* in β, ki jih vstavimo v neenačbo (2.4) dobimo

$$(16 + L)\frac{V}{2^{11}} 2^3 < X_{max} = \frac{V}{10} \tag{2.6}$$

$$16 + L < \frac{2^{11-3}}{10} = \frac{2^8}{10} = 25,6 \Rightarrow L < 9,6 \Rightarrow L = 9 \tag{2.7}$$

Koda pozitivne amplitude danega signala je **1100 1001**, ker je $S = 4 = 100_2$ in $L = 9 = 1001_2$.

3. Naključni napetostni signal je opisan z avtokorelacijo

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 2\mathrm{V}^2\left(1 - \dfrac{|\tau|}{t_0}\right) & \text{za} \quad |\tau| < t_0 \\ 0 & \text{drugod} \end{cases}$$

Kolikšna je njegova moč izražena v dBm, če ga opazujemo na upornosti 50 Ω? Kolikšna je ekvivalentna pasovna širina f_{eq} te napetosti, če je parameter t_0 = 1 ms? ($N = 2f_{eq}\, S_X(0)$)

Rešitev:

Za močnostne signale velja

$$R_X(\tau)\big|_{\tau=0} = \overline{x^2} = X_{ef}^2 \tag{3.1}$$

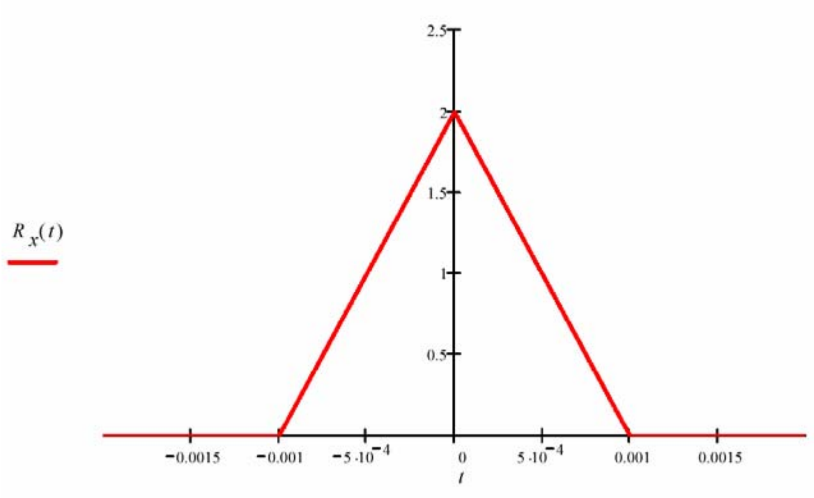
ker je

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt \tag{3.2}$$

Kvadrat efektivne šumne napetosti je torej $R_X(0)$ = 2 V^2, kar je tudi normalizirana moč (na upornosti 1 Ω).

$$P = \frac{X_{ef}^2}{R} \tag{3.3}$$

$$P_{(\mathrm{dBm})} = 10\log\frac{P}{1\mathrm{mW}} = 10\log\frac{X_{ef}^2}{R\cdot 1\mathrm{mW}} = 10\log\frac{2\,\mathrm{V}^2}{50\Omega\cdot 1\mathrm{mW}} = 10\log 40 = \underline{16\ \mathrm{dBm}} \tag{3.4}$$

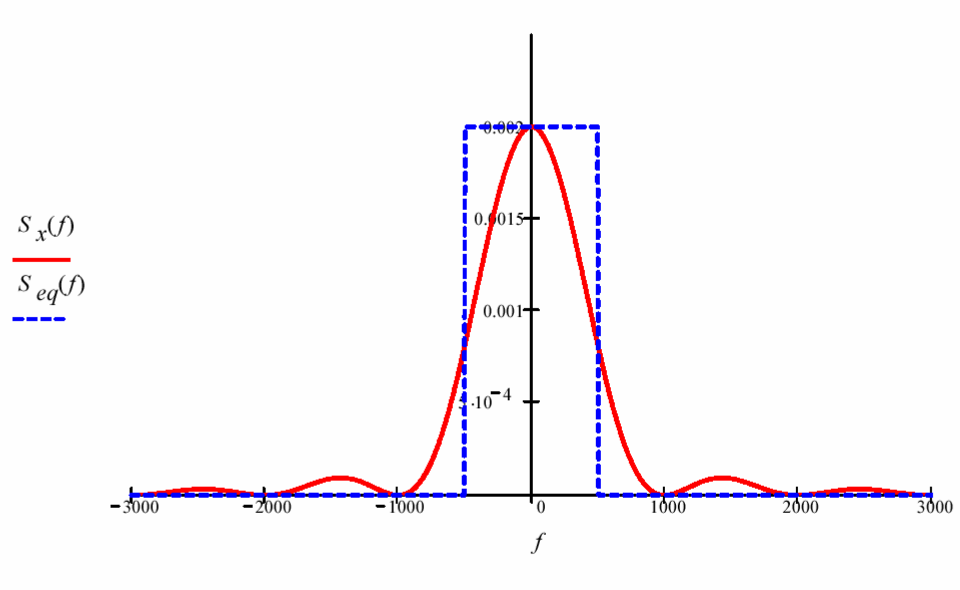


Slika 3. Graf avtokorelacije danega šuma

Avtokorelacija $R_X(\tau)$ in gostota močnostnega $S_X(\omega)$ spektra sta Fourierev par. Pojem ekvivalentne pasovne širine naključnega signala se ujema z definicijo šumne pasovne širine (noise bandwidth) filtra, kjer dejansko filtrsko karakteristiko nadomestimo z idealnim pasovnoprepustnim ali nizkim sitom. Ekvivalentna pasovna širina je definirana z izrazom

$$U_N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df = 2 f_{eq} S_X(0) \tag{3.5}$$

Na sliki 4 sta prikazana oba grafa gostote močnostnega spektra, $S_X(f)$ in ekvivalentna gostota $S_{eq}(f)$. Širina pravokotnika predstavlja dvojno nadomestno pasovno širino spektra, ker so obravnavani spektri dvostranski, realne frekvence pa so samo pozitivne.



Slika 4. Gostota močnostnega spektra podanega šuma in ilustracija pojma ekvivalentne frekvence f_{eq}

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=2\int_{0}^{\infty}R_x(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau=2U_{ef}^2\int_{0}^{t_0}(1-\frac{\tau}{t_0})\cos\omega\tau\,d\tau \tag{3.6}$$

Integral (3.6) izračunamo z metodo per partes ali s tabelami v priročniku. Končni rezultat je

$$S_x(\omega)=2U_{ef}^2\frac{(1-\cos t_0\omega)}{\omega^2 t_0}=U_{ef}^2 t_0\left(\frac{\sin\frac{t_0\omega}{2}}{\frac{t_0\omega}{2}}\right)^2. \tag{3.7}$$

Izraz (3.7) podaja sicer močnostni spekter kot funkcijo krožne frekvence ω , kar ni težko prevesti na odvisnost on frekvence, če ω zamenjamo z $2\pi f$. Druga oblika izraza v enačbi (3.7) je ugodnejša, ker lahko iz nje takoj ugotovimo vrednost za $f=0$. Graf izračunane gostote močnostnega spektra je prikazan na sliki 4 s polno črto.

Za izračun ekvivalentne širine, ki je zahtevana v izpitni nalogi, je gornje izvajanje nepotrebno, saj za njeno določitev zadostuje moč šuma in vrednost gostote močnostnega spektra pri $f=0$. Slednje lahko izračunano direktno z upoštevanjem lastnosti Fouriereve transformacije, oz. direktno iz njene definicije. Če nas zanima vrednost pri $f=\omega=0$ potem lahko to naredimo direktno v enačbi (3.6) pred integriranjem

$$S_x(0)=\left.\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)d\tau\,, \tag{3.8}$$

kar je dobro znana lastnost Fourierevega transforma: vrednost pri $\omega=0$ je enaka integralu časovne funkcije čez vse čase, oz. ploščini lika pod časovno funkcijo. Torej lahko $S_x(0)$ zelo enostavno izračunamo iz grafa avtokorelacije na sliki 3.

$$S_x(0) = \frac{1}{2}U_{ef}^2 \cdot 2t_0 = U_{ef}^2 t_0 \tag{3.9}$$

Isto vrednost dobimo tudi iz splošnega izraza (3.7), ki je na tem mestu podan za boljše razumevanje izračuna.

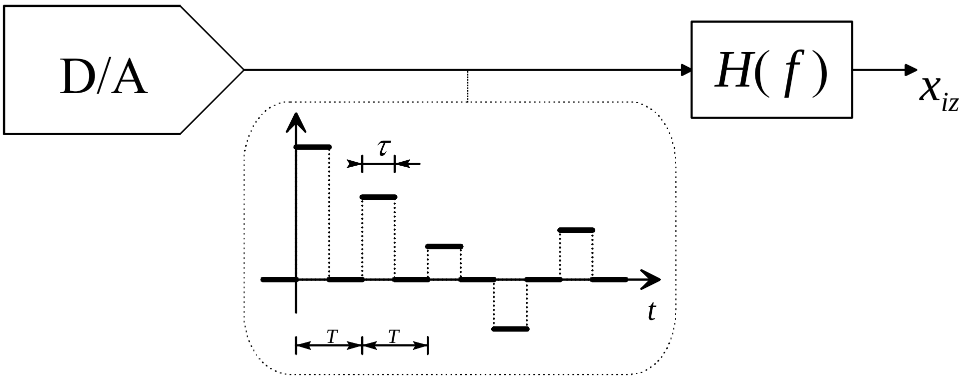
Iz (3.5) in (3.9) dobimo

$$U_N^2 = U_{ef}^2 = 2 f_{eq} U_{ef}^2 t_0 \tag{3.10}$$

in od tod

$$f_{eq} = \frac{1}{2t_0} = \frac{1}{2\text{ms}} = 500\,\text{Hz} \tag{3.11}$$

4. Kolikšni morata biti vrednosti $|H(f)|_{(\text{dB})}$ pri 0 in pri f_{zg}, da bo izhodni signal enak vhodnemu analognemu signalu? Na sliki narisani impulzi so po amplitudi enaki vzorcem analognega signala, kvantizacijsko napako pa zanemarite. f_{zg} = 8 kHz, $T = 2\tau$ = 50 µs



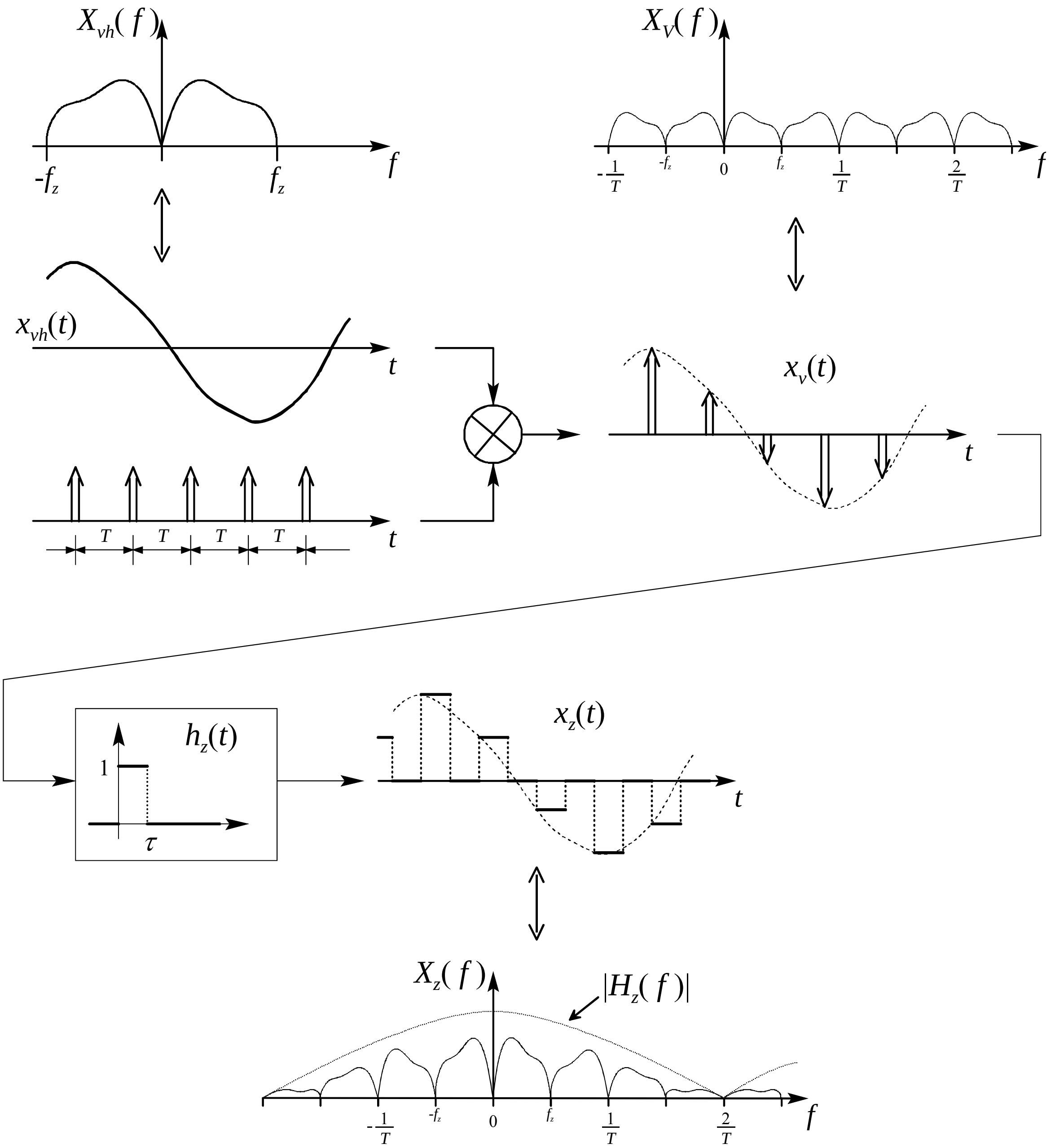
Rešitev:

Na sliki prikazani impulzi imajo amplitudo, ki ustreza vrednostim analognega vhodnega signala v časovnih trenutkih, ki so razmaknjeni za čas T. Do zahtevanih vrednosti frekvenčnega odziva pridemo prek spektra $X_Z(\omega)$ signala prikazanega na gornji sliki. Zadržane vzorce vzorčenega signala dobimo v po postopku vzorčenja signala z vlakom delta impulzov in z zadrževalnikom kot prikazuje slika 5. Za brezhibno rekonstrukcijo signala mora vhodni zvezni signal biti frekvenčno omejen, frekvenca vzorčenja pa vsaj dvakratnik najvišje frekvence f_{zg}. Tedaj lahko spekter vzorčenega signala zapišemo kot

$$X_V(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{vh}(f - n\frac{1}{T}). \tag{4.1}$$

Pri rekonstrukciji signala razširimo neskončno ozke impulze, s katerimi so zapisane vrednosti zveznega signala, povečati na širino $\tau < T$. To dosežemo s pomočjo zadrževalnega vezja z impulznim odzivom $h_z(t)$. Absolutna vrednost frekvenčnega odziva tega vezja je

$$|H_z(f)| = |\mathcal{F}(h_z(t))| = \tau\left|\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f}\right| \tag{4.2}$$



Slika 5. Grafični prikaz časovnih signalov in njihovih spektrov pri vzorčenju analognega signala

zato je spekter vzorčenega in zadržanega signala dan določen kot produkt frekvenčnega odziva $H_z(f)$ in $X_v(f)$. Amplitudni spekter signala na izhodu D/A pretvornika je torej

$$\left|X_z(f)\right| = \frac{\tau}{T}\left|\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f}\right| \cdot \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - n\frac{1}{T})\right| \tag{4.3}$$

Z izhodnim nizkim sitom moramo dušiti vse frekvenčno premaknjene spektre, ki nastopajo okrog celih mnogokratnikov vzorčevalne frekvence, primerno ojačiti pa moramo originalni del za n = 1. Da bo izhodni amplitudni spekter $|X_{iz}(f)|$ na prepustnem pasu od 0 do f_z enak vhodnemu mora $|X_a(f)|$ veljati

$$\left|X_{iz}(f)\right| = \frac{\tau}{T}\left|\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f}\right| \cdot \left|X_{vh}(f)\right| \cdot \left|H(f)\right| = \left|X_{vh}(f)\right|, \tag{4.4}$$

in od tod

$$\left|H(f)\right| = \left(\frac{\tau}{T}\left|\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f}\right|\right)^{-1}. \tag{4.5}$$

Zahtevani vrednosti pri frekvenci 0 in f_{zg} = 8 kHz dobimo

$$\begin{aligned}
&\left|H(0)\right| = \left(\frac{\tau}{2\tau}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^{-1} = 2 \qquad H(0)_{(\mathrm{dB})} = 20\log 2 = \underline{6\ \mathrm{dB}} \\
&\left|H(f_{zg})\right| = \left(\frac{\tau}{2\tau}\frac{\sin(\pi\cdot 25\cdot 10^{-6}\cdot 8000)}{\pi\cdot 25\cdot 10^{-6}\cdot 8000}\right)^{-1} = 2{,}14 \quad H(f_{zg})_{(\mathrm{dB})} = 20\log 2{,}14 = \underline{6{,}6\ \mathrm{dB}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Naloge pisnega izpita z rešitvami

DIGITALNE KOMUNIKACIJE I

Izpitni rok: 2. 6. 2003

1. naloga

Distribucija trenutnih vrednosti naključnega signala $x(t)$, ki ga dobimo z normiranjem naključne napetostnega signala $u(t)$ z maksimalno vrednostjo U_{max}, je podana z enačbo

$$p_X(x) = \begin{cases} k(x^2 - 2|x| + 1) & \text{za } |x| \le 1 \\ 0 & \text{drugod} \end{cases}.$$

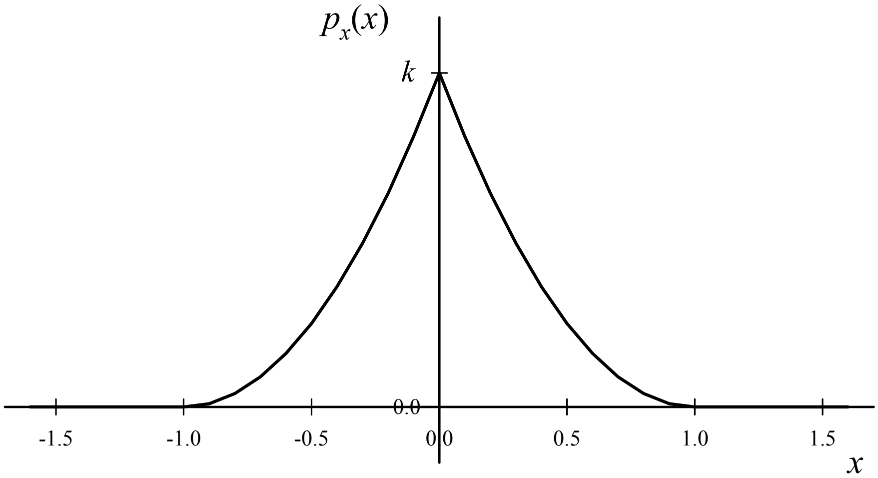
Narišite graf normirane porazdelitve in izračunajte njegovo maksimalno vrednost, če je efektivna vrednost signala 1V. Koliko dB znaša razmerje $\left(\frac{U_{max}}{U_{ef}}\right)$?

Rešitev:

Z normiranjem signala $u(t)$ z njegovo maksimalno vrednostjo U_{max} se izognemo težavam, z enotami v matematičnih izrazih

$$x = \frac{u}{U_{max}} \tag{1.1}$$

Na sliki 1.1 je prikazan graf distribucije trenutnih vrednosti normiranega naključnega signala $x(t)$.



Slika 1.1 Graf porazdelitve $p_X(x)$

Konstanto k izračunamo iz pogoja

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1, \tag{1.2}$$

ki mu morajo zadostovati porazdelitvene funkcije. Iz (1.2) in definicije porazdelitve dobimo

$$2k\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = 2k\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{2}{3}k = 1 \tag{1.3}$$

in od tod

$$k = \frac{3}{2}. \tag{1.4}$$

Srednja kvadratna vrednost $\overline{x^2}$ je enaka kvadratu efektivne vrednosti normiranega signala

$$X_{ef}^2 = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx = 2\int_0^1 x^2 p_X(x)dx = 3\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)dx = \frac{1}{10} \tag{1.5}$$

$$X_{ef} = \frac{U_{ef}}{U_{max}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad U_{max} = \sqrt{10}\cdot U_{ef} = 3{,}16\,\mathrm{V}. \tag{1.6}$$

Iz leve enačbe v izrazu (1.6) sledi tudi iskano razmerje med maksimalno in efektivno napetostjo (obremenilni faktor), ki ga moramo izraziti v dB

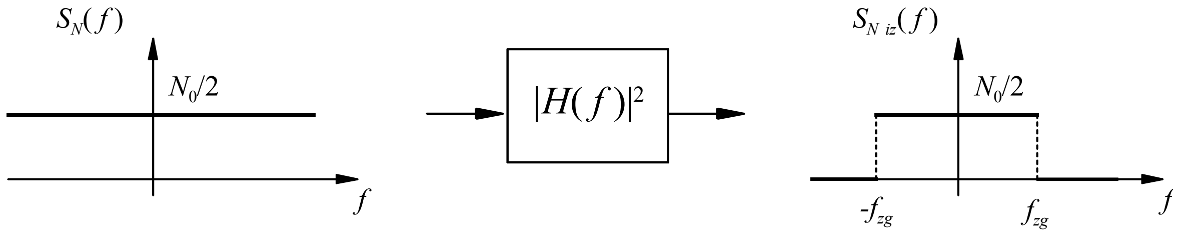
$$\left(\frac{U_{max}}{U_{ef}}\right)_{\mathrm{dB}} = 20\log\frac{U_{max}}{U_{ef}} = 20\log\sqrt{10} = 10\log 10 = 10\,\mathrm{dB}. \tag{1.7}$$

2. naloga

Na vhod idealnega nizkega sita z mejno frekvenco $f_{zg} = 10$ kHz vodimo beli šum z enostransko gostoto močnostnega spektra N_0. Izračunajte je gostoto N_0 na vhodu in avtokorelacijo $R_X(\tau)$ na izhodu, če je izhodna moč filtriranega šuma –40 dBm!

Rešitev:

Na sliki 2. 1 sta prikazani dvostranski gostoti močnostnega spektra na vhodu in na izhodu idealnega nizkega sita.



Slika 2.1 Spekter šuma na vhodu in izhodu idealnega nizkega sita

Moč na izhodu filtra dobimo z integriranjem gostote močnostnega spektra izhodnega šuma.

$$N_{iz} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{N\,iz}(f)df = \frac{N_0}{2}\int_{-f_{zg}}^{f_{zg}} df = N_0 f_{zg} \tag{2.1}$$

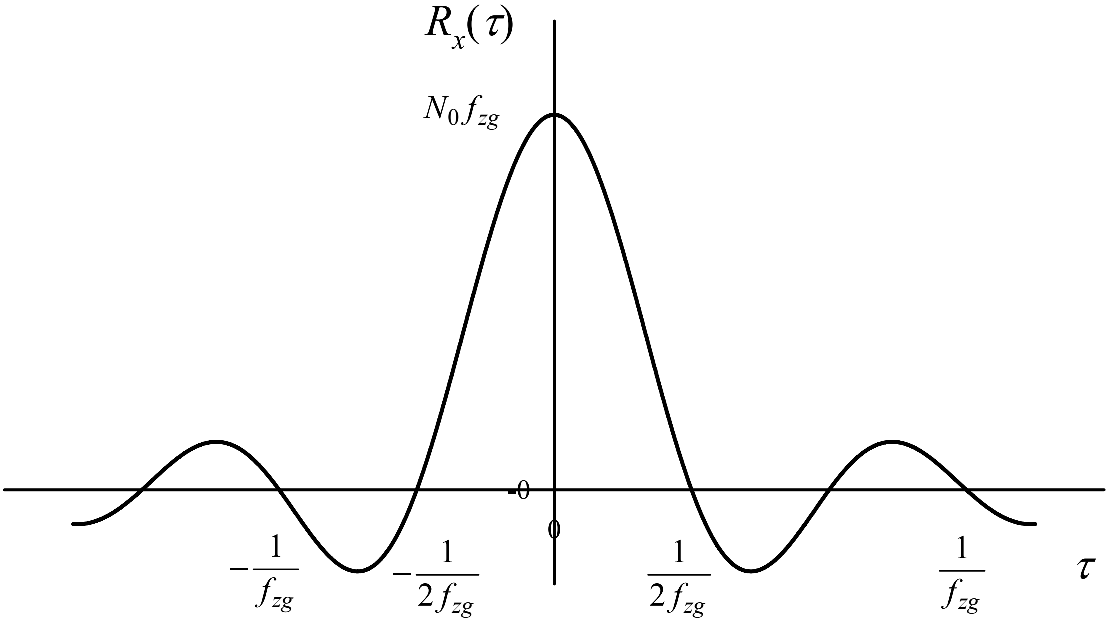
$$N_{iz} = -40\,\mathrm{dBm} = 1\mathrm{mW}\cdot 10^{-4} = 10^{-7}\,\mathrm{W} \tag{2.2}$$

Iz (2.1) in (2.2) dobimo iskano enostransko gostoto na vhodu

$$N_0 = \frac{N_{iz}}{f_{zg}} = \frac{10^{-7}\,\mathrm{W}}{10^4\mathrm{Hz}} = 10^{-11}\,\mathrm{W/Hz} = 10\,\mathrm{pW/Hz} \tag{2.3}$$

Avtokorelacija in gostota močnostnega spektra sta Fourierev par, zato velja

$$\begin{aligned}
R_{Xiz}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{N\,iz}(\omega)\,e^{j\omega\tau}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_{N\,iz}(f)\,e^{j2\pi f\tau}df = \frac{N_0}{2}\int_{-f_{zg}}^{f_{zg}} e^{j2\pi\tau f}df = \\
&= \frac{N_0}{2}\frac{e^{j2\pi\tau f}}{j2\pi\tau}\Bigg|_{-f_{zg}}^{f_{zg}} = \frac{N_0}{2\pi\tau}\frac{e^{j2\pi\tau f_{zg}} - e^{-j2\pi\tau f_{zg}}}{2j} = \frac{N_0}{2\pi\tau}\sin(2\pi f_{zg}\tau) = \\
&= N_0 f_{zg}\frac{\sin(2\pi f_{zg}\tau)}{2\pi f_{zg}\tau}
\end{aligned} \tag{2.4}$$



Slika 2.2 Avtokorelacija izhodnega šuma

3. naloga

Določite napetostni obseg V (v voltih in dBm) 13-segmentnega kvantizatorja po A-zakonu tako, da bo psofometrično merjena moč kvantizacijskega popačenja praznega kanala manjša od 2,78 nW na upornosti 600Ω.

Rešitev:

Razlika med psofometrično merjeno močjo šuma $N_{0\,P}$ in navadno meritvijo brez filtra znaša -2,5 dB, z upoštevanjem razlike med prepustnim pasom izhodnega filtra (300 ÷ 3400 Hz) in polovico vzorčne frekvence ($f_s/2$ = 4000 Hz) pa še -1,1 dB pasovnim, kar lahko zapišemo

$$N_{0\,P(\mathrm{dBm\,p})} = N_{0\,(\mathrm{dBm})} - 2{,}5\,\mathrm{dB} - 1{,}1\,\mathrm{dB} = N_{0\,(\mathrm{dBm})} - 3{,}6\,\mathrm{dB}\,. \tag{3.1}$$

Moč psofometrično merjenega šuma praznega kanala je podana v vatih, zato razliko 3,6 dB izrazimo v obliki razmerja moči izraženih v vatih

$$\begin{aligned} N_{0\,(\mathrm{dBm})} &= N_{0\,P(\mathrm{dBm\,p})} + 3{,}6\,\mathrm{dB} \\ N_0 &= N_{0\,P}\cdot 10^{\frac{3{,}6}{10}} = N_{0\,P}\cdot 2{,}3 = 6{,}37\mathrm{nW} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Moč tega šuma je računana na upornosti 600 Ω, zato izračunamo efektivno napetost šuma iz zveze

$$N_0 = \frac{U_{N_0}^2}{R} \;\Rightarrow U_{N_0}^2 = N_0\cdot R \tag{3.3}$$

Kvadrat efektivne napetosti šumne napetosti je enak normirani moči, zato za šum praznega kanala velja

$$U_{N_0}^2 = \frac{\Delta_{min}^2}{4}, \tag{3.4}$$

od koder izračunamo velikost minimalne stopnice

$$\Delta_{min} = 2\cdot U_{N_0} = 2\sqrt{N_0 R} = 2\sqrt{6{,}37\mathrm{nW}\cdot 600\Omega} = 3{,}9\cdot 10^{-3}\,\mathrm{V} \tag{3.5}$$

in od tod še pozitivni doseg kvantizatorja

$$V = \Delta_{min}\cdot 2^{11} = 3{,}9\cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}\cdot 2048 = 7{,}98\mathrm{V} \approx 8\mathrm{V}\,. \tag{3.6}$$

$$V_{(\mathrm{dBm}/600\Omega)} = 10\log\frac{V^2/600\Omega}{1\mathrm{mW}} = 10\log\frac{(8V)^2}{600\Omega\cdot 1\mathrm{mW}} = 20{,}2\,\mathrm{dBm} \tag{3.7}$$

4. naloga

Govorni signal kvantiziramo z enakomernim kvantizatorjem s simetričnim dosegom. Koliko znaša minimalno potrebno število bitov *n* tega kvantizatorja, da bo razmerje moči signala in kvantizacijske napake boljše kot 30 dB? Za govorni signal predpostavljamo dinamično področje X_{max}/X_{min} = 35 dB in Laplaceovo distribucijo.

Rešitev:

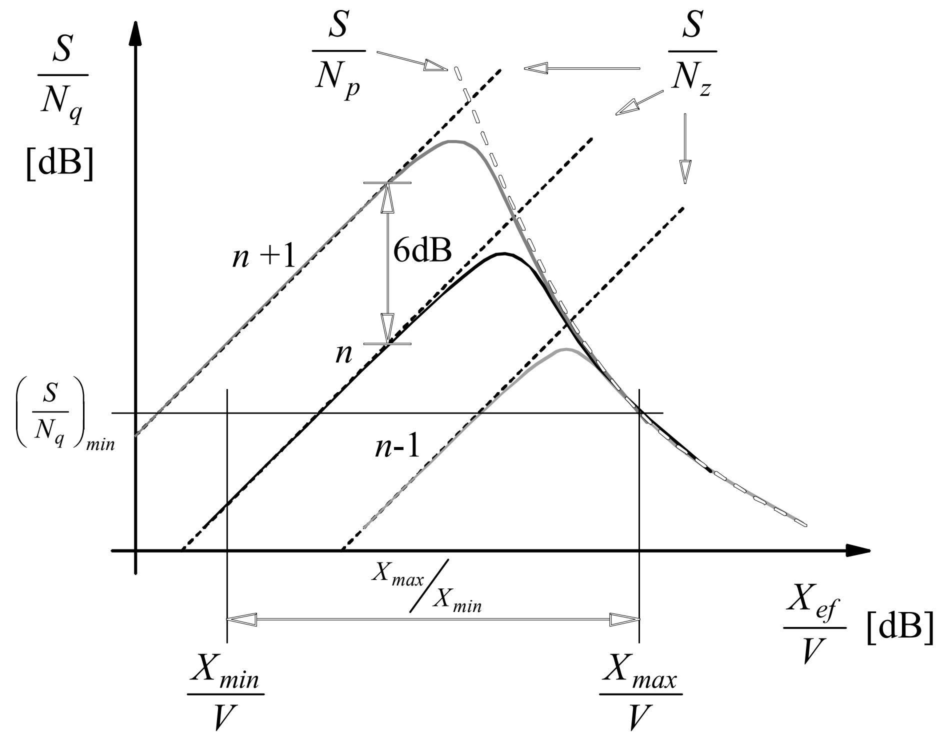
Na sliki 4.1 je prikazan potek razmerja med močjo signala in močjo kvantizacijske napake v odvisnosti od razmerja med efektivno vrednostjo signala in dosegom za enakomeren kvantizator s simetričnim dosegom. Moč prekoračitvene napake N_p ni odvisna od števila nivojev, na katere je je razdeljen obseg kvantizatorja, temveč od razmerja med dosegom in efektivno vrednostjo signala ter od porazdelitvene funkcije. Moč prekoračitvene napake za Laplaceovo distribucijo je podana z

$$N_p = S \cdot e^{-\sqrt{2}\frac{V}{X_{ef}}} \tag{4.1}$$

iin iz (4.1) izrazimo razmerje

$$\frac{S}{N_p} = e^{\sqrt{2}\frac{V}{X_{ef}}} \tag{4.2}$$

Iz grafa na sliki 4.1 je razvidno, da je skupno razmerje S/N_q za velike signale določeno le s prekoračitvenim popačenjem, zato določimo maksimalno izkrmiljenje X_{max}/V iz (4.2) z upoštevanjem minimalnega zahtevanega razmerja S/N_q = 30 dB. Ker gre za razmerje moči na to prestavlja faktor 1000, ki ga uporabimo v (4.2)



Slika 4.1 Razmerje med močjo signala in močjo popačenja za enakomerni kvantizator. Parameter *n* označuje število bitov v kodni besedi za zapis kvantizirane vrednosti vzorca.

$$\frac{X_{max}}{V} = \frac{\sqrt{2}}{\ln \dfrac{S}{N_p}} = \frac{\sqrt{2}}{\ln 1000} = 0,204 \tag{4.3}$$

Rezultat raje izrazimo v dB

$$\left(\frac{X_{max}}{V}\right)_{\mathrm{dB}} = 20\log\frac{X_{max}}{V} = 20\log 0,204 = -13,77\,\mathrm{dB}\,. \tag{4.4}$$

Potrebno število bitov kvantizatorja določimo iz minimalnega izkrmiljenja $(X_{min}/V)_{\mathrm{dB}}$, ki ga dobimo iz zahtevanega dinamičnega območja X_{max}/X_{min} = 35 dB in rezultata (4.4)

$$\begin{aligned}\left(\frac{X_{min}}{V}\right)_{\mathrm{dB}} &= 20\log\frac{X_{min}}{V} = 20\log\left(\frac{X_{max}}{V}\frac{X_{min}}{X_{max}}\right) = 20\log\frac{X_{max}}{V} - 20\log\frac{X_{max}}{X_{min}} = \\ &= \left(\frac{X_{max}}{V}\right)_{\mathrm{dB}} - \left(\frac{X_{max}}{X_{min}}\right)_{\mathrm{dB}} = -13,77\,\mathrm{dB} - 35\,\mathrm{dB} = -48,77\,\mathrm{dB}\end{aligned} \tag{4.5}$$

Za enakomerni kvantizator s simetričnim dosegom uporabimo izraz za razmerje $(S/N_z)_{\mathrm{dB}}$ na spodnji meji dinamičnega območja

$$\left(\frac{S}{N_z}\right)_{\mathrm{dB}} = 4,77\,\mathrm{dB} + 6,02\,\mathrm{dB}\cdot n + \left(\frac{X_{min}}{V}\right)_{\mathrm{dB}} \geq 30\,\mathrm{dB}\,, \tag{4.6}$$

in izračunamo minimalno število bitov

$$n \geq \frac{74}{6,02} = 12,3\,. \tag{4.7}$$

Ker je število bitov lahko le celo število, je končni rezultat prvo celo število, ki zadostuje pogoju (4.7) $n = 13$. S tem številom bitov in z njim povezanim številom nivojev ima kvantizator nekoliko večje dinamično območje, kot ga naloga zahteva.

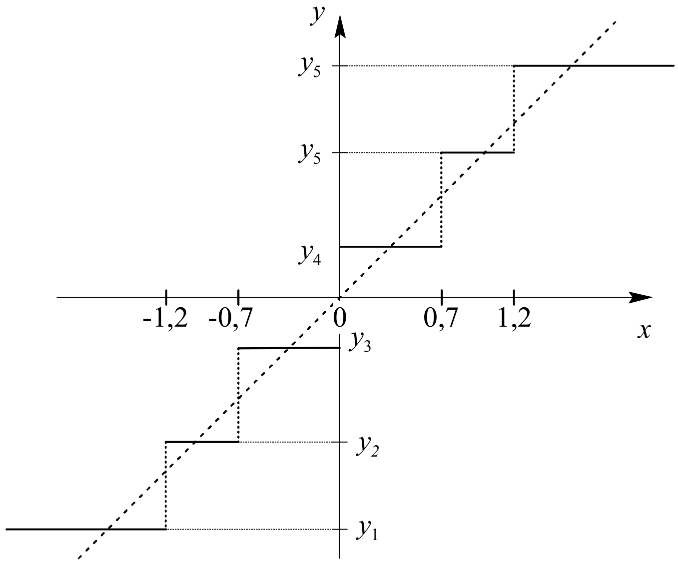
Naloge pisnega izpita z rešitvami

DIGITALNE KOMUNIKACIJE I

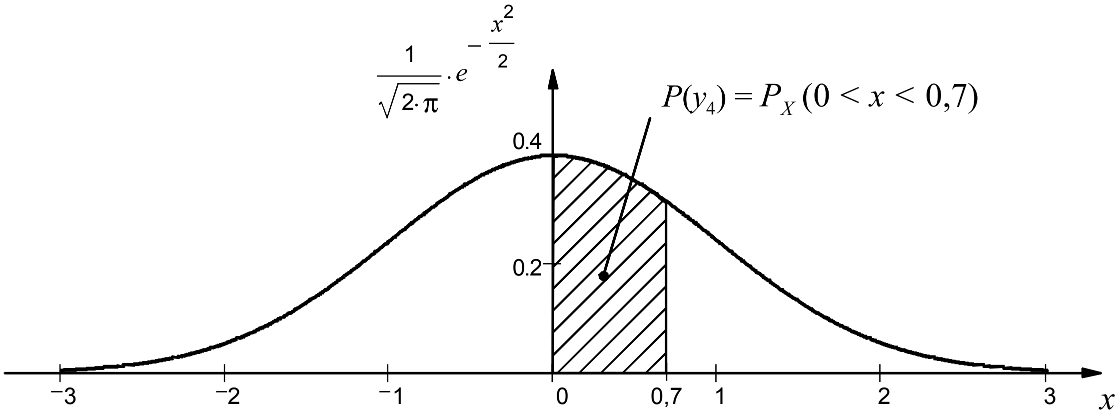
Izpitni rok: 9. 2. 2006

Naloga 1

Na vhod šest nivojskega kvantizatorja s podano karakteristiko je priključen signal z normalno distribucijo (Gaussovo) $\overline{x} = 0$ in $\sigma_X = 1$. Določite Huffmanovo kodo za kodiranje izhodnih nivojev (simbolov) y_i ($i = 1,\ldots,6$), in izračunajte povprečno število bitov na simbol $\overline{n}$. Kolikšna je entropija informacijskega izvora $H(Y)$?



Rešitev:



Slika 1.1 – Graf gostote verjetnosti za Gaussovo (normalno) porazdelitev

Verjetnosti za posamezni izhodni nivo y_i je določen z integralom gostote verjetnosti na ustreznem intervalu, za izhodni nivo y_4 je ta verjetnost določena z

$$P(y_4) = \int_0^{0,7} p_X(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{0,7} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(0,7) - \Phi(0) \tag{1.1}$$

kjer $\Phi(x)$ označuje verjetnostni integral (kumulativno verjetnost) za normalno porazdelitev gostote verjetnosti s $\sigma_x = 1$, ki je tabeliran v matematičnem priročniku za pozitivne vrednosti naključne spremenljivke x. Porazdelitev je simetrična zato so verjetnosti za negativne nivoje y_1, y_2 in y_3 enake ustreznim pozitivnim nivojem.

Za nivoje y_4, y_5, y_6 dobimo verjetnosti

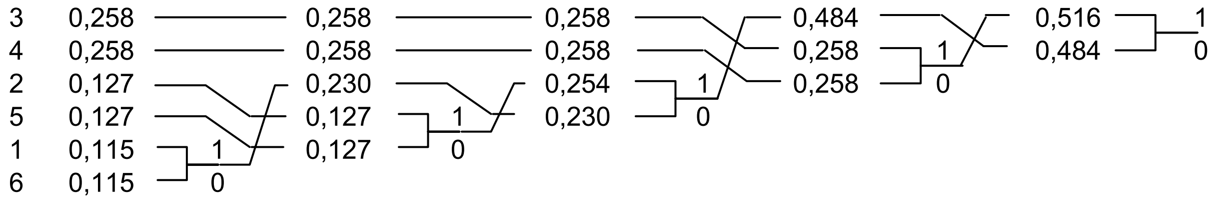
$$\begin{aligned} P(y_4) &= \Phi(0,7) - \Phi(0) = 0,758 - 0,5 = 0,258 = P(y_3) \\ P(y_5) &= \Phi(1,2) - \Phi(0,7) = 0,885 - 0,758 = 0,127 = P(y_2) \\ P(y_6) &= \Phi(\infty) - \Phi(1,2) = 1 - 0,885 = 0,115 = P(y_1) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Rezultati so strnjeni v spodnji tabeli. Kode za kodiranje posameznih nivojev določimo s Huffmanovim postopkom z redukcijo urejenega informacijskega izvora.

i	$P(y_i)$	koda	n_i	$P(y_i).n_i$	$I(y_i)$	$I(y_i).P(y_i)$
1	0,115	001	3	0,345	3,120	0,359
2	0,127	011	3	0,381	2,977	0,378
3	0,258	11	2	0,516	1,955	0,504
4	0,258	10	2	0,516	1,955	0,504
5	0,127	010	3	0,381	2,977	0,378
6	0,115	000	3	0,345	3,120	0,359

$\overline{n} =$ 2,4840

$H(Y) =$ 2,4824



Naloga 2

Na vhod 18-bitnega kvantizatorja s simetričnim dosegom $V^+ = V^- = 5$ V je priključen signal z Laplaceovo distribucijo. Z voltmetrom (izmeničnim) izmerimo na vhodu efektivno napetost 2,2 dBm. Izračunajte enosmerno komponento vhodnega signala $\overline{X}$, če na izhodu izmerimo moč prekoračitvenega popačenja $N_P = -19$ dBm!

Rešitev:

Zrnato kvantizacijsko popačenje je popolnoma zanemarljivo v primerjavi s prekoračitvenim. Za normalizirano moč zrnatega popačenja s simetričnim dosegom velja izraz

$$N_{qz} = \frac{\Delta^2}{12} = \left(\frac{2V}{2^n}\right)^2 \frac{1}{12} = \frac{V^2}{3 \cdot 2^{2n}} \tag{2.1}$$

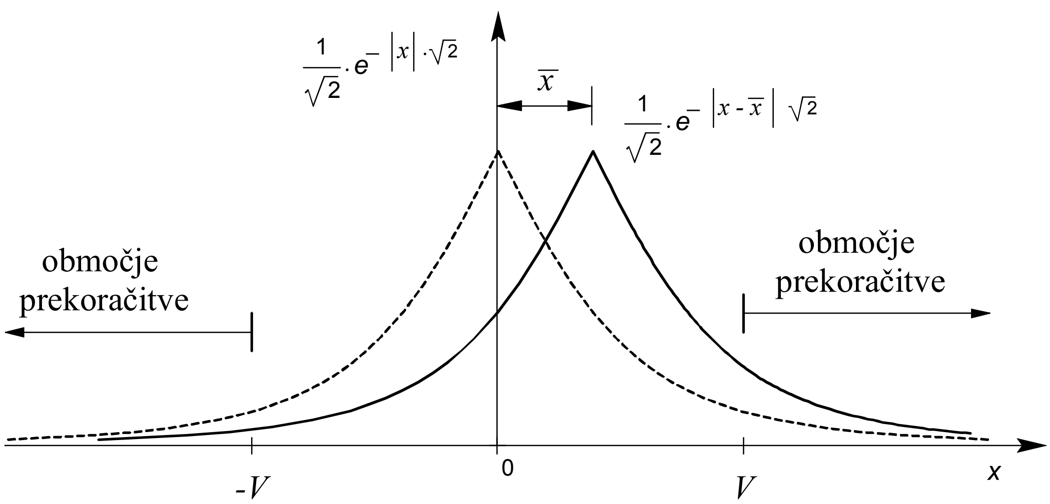
Za lažjo primerjavo zrnato popačenje izrazimo v dBm

$$\begin{aligned} N_{qz}[\text{dBm}] &= 10\log\frac{N_{qz}}{R_{REF} \cdot 1\text{mW}} = 10\log\frac{1}{3 \cdot 2^{2n}} \frac{V^2}{R_{REF} \cdot 1\text{mW}} = \\ &= -10\log 3 - n \cdot 20\log 2 + 10\log\frac{V^2}{R_{REF} \cdot 1\text{mW}} = \\ &= -4{,}77\,\text{dB} - n \cdot 6{,}02 + 10\log\frac{25\text{V}^2}{0{,}6\text{V}^2} = -96{,}9\,\text{dBm} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Izračun zrnatega popačenja je na tem mestu podan zgolj zaradi razjasnitve, da na izhodu pomerimo le prekoračitveno popačenje N_P, ki ga izračunamo s podano porazdelitveno funkcijo.

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\frac{|x-\overline{x}|}{\sigma_X}} \tag{2.3}$$

$$N_P = \int_{-\infty}^{V^-} (x - V^-)^2 p_X(x)dx + \int_{V^+}^{\infty} (x - V^+)^2 p_X(x)dx \tag{2.4}$$



Slika 2.2 – Laplaceova porazdelitev gostote verjetnosti za naključno spremenljivko z enosmerno komponento ($\overline{x} \neq 0$)

Z upoštevanjem simetričnosti dosega in porazdelitve (2.3) dobimo

$$\begin{aligned} N_P &= \int_{-\infty}^{-V} (x+V)^2 p_X(x)dx + \int_{V}^{\infty} (x-V)^2 p_X(x)dx = \\ &= \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{-V} (x+V)^2 e^{\sqrt{2}\frac{x-\bar{x}}{\sigma_X}} dx + \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2}} \int_{V}^{\infty} (x-V)^2 e^{-\sqrt{2}\frac{x-\bar{x}}{\sigma_X}} dx = \\ &= A + B \end{aligned} \tag{2.5}$$

V prvem integralu za negativno območje vpeljemo zamenjavo

$$\begin{aligned} &x+V=-t \;;\quad x=-V \rightarrow t=0;\; x=-\infty \rightarrow t=\infty \\ &x=-t-V\;;\quad dx=-dt \end{aligned} \tag{2.6}$$

Integral A s to zamenjavo postane

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2}} \int_0^{\infty} t^2 e^{\sqrt{2}\frac{(-t-V-\bar{x})}{\sigma_X}} dx = e^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \cdot e^{-\sqrt{2}\frac{\bar{x}}{\sigma_X}} \cdot \left(\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2}} \int_0^{\infty} t^2 e^{-\sqrt{2}\frac{t}{\sigma_X}} dx \right) = \\ &= \frac{\sigma_X^2}{2} e^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \cdot e^{-\sqrt{2}\frac{\bar{x}}{\sigma_X}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Izraz znotraj oklepaja v (2.7) predstavlja srednjo kvadratno vrednost spremenljivke za pozitivne vrednosti naključne spremenljivke brez enosmerne vrednosti. Tega integrala ni potrebno računati saj σ_X nastopa kot parameter porazdelitve. S podobno substitucijo

$$t = x - V \tag{2.8}$$

izračunamo integral B

$$B = \frac{\sigma_X^2}{2} e^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \cdot e^{\sqrt{2}\frac{\bar{x}}{\sigma_X}} \tag{2.9}$$

S tem dobimo izraz za moč prekoračitvene napake

$$N_p = \sigma_X^2 e^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \cdot \frac{e^{\sqrt{2}\frac{\bar{x}}{\sigma_X}} + e^{-\sqrt{2}\frac{\bar{x}}{\sigma_X}}}{2} = S e^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{2}\frac{\bar{x}}{\sigma_X}\right), \tag{2.10}$$

kjer S predstavlja normalizirano moč signala (kvadrat efektivne vrednosti). Iz podatkov dobimo

$$\left(\frac{N_p}{S}\right)[\mathrm{dB}] = N_p[\mathrm{dBm}] - S[\mathrm{dBm}] = N_p[\mathrm{dBm}] - X_{ef}[\mathrm{dBm}] = -21{,}2\,\mathrm{dB} \tag{2.11}$$

oziroma

$$\frac{N_p}{S} = 10^{-\frac{21{,}2}{10}} = 7{,}58 \cdot 10^{-3} \tag{2.12}$$

Iz (2.10) dobimo

$$\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}\frac{\bar{x}}{\sigma_X}\right) = \frac{N_p}{S} e^{\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} = 7{,}58 \cdot 10^{-3} e^{\sqrt{2}\frac{5\mathrm{V}}{1\mathrm{V}}} = 8{,}93 \tag{2.13}$$

$$\overline{x} = \frac{1\text{V}}{\sqrt{2}}\text{Arch}(8{,}93) = \underline{2\text{V}} \tag{2.14}$$

Do izraza (2.10) za moč prekoračitve lahko pridemo tudi na osnovi izraza za signal brez enosmerne komponente (predavanja, vaje)

$$N_p = Se^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \tag{2.15}$$

in slike 2.1. Lahko si mislimo, da postane doseg za pozitivne signale manjši $V - \overline{x}$ za negativno stran pa večji $V + \overline{x}$. Dokler velja $|\overline{x}| < V$, prispeva vsaka stran polovico napake, ki velja za simetrično porazdelitev. Od tod sledi

$$N_p = \frac{1}{2}Se^{-\sqrt{2}\frac{V+\overline{x}}{\sigma_X}} + \frac{1}{2}Se^{-\sqrt{2}\frac{V-\overline{x}}{\sigma_X}} \tag{2.16}$$

Naloga 3

Doseg 13-segmentnega neenakomernega kvantizatorja po A-zakonu je ± 10 V. Izračunajte izhodni šum praznega kanala v dBm in v dBmp!

Rešitev:

Normalizirana moč šuma praznega kanala kvantizatorja je dana z

$$N_{q0} = \frac{\Delta(0)^2}{4}, \tag{3.1}$$

kjer je $\Delta(0)$ velikost stopnice kvantizatorja pri prehodu čez ničlo. Pri 13-segmentnem A-zakonu velja

$$\Delta(0) = \Delta_{min} = \frac{V}{2^{11}} \tag{3.2}$$

Za izračun moči v dBm moramo upoštevati moč na referenčnem uporu, ki je za telefonske signale vedno 600 Ω, in jo primerjati z referenčno močjo 1 mW.

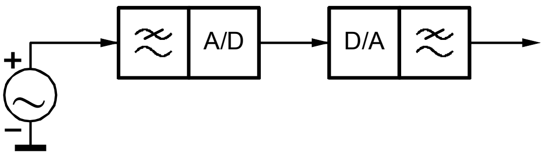
$$N_0[\text{dBm}] = 10\log\frac{\Delta_{min}^2}{4R\cdot 1mW} = 10\log\frac{100\,\text{V}^2}{2^{22}\cdot 4\cdot 600\,\Omega\cdot 1mW} = -50\,\text{dBm} \tag{3.3}$$

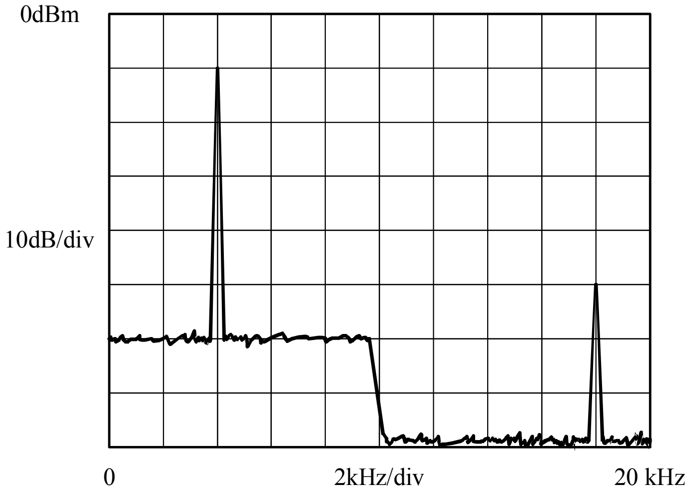
Pri psofometrično merjeni moči šuma moramo izračunano vrednost v dBm zmanjšati za 3,6 dB.

$$N_0[\text{dBmp}] = N_0[\text{dBm}] - 3{,}6\,\text{dB} = -53{,}6\,\text{dBmp} \tag{3.4}$$

Naloga 4

Izhodni signal digitalnega komunikacijskega sistema je priključen na vhod spektralnega analizatorja. Na vhod sistema je priključen sinusni signal. Iz slike na zaslonu analizatorja izračunajte: razmerje med signalom in kvantizacijskim šumom S/N_q v dB, dušenje izhodnega filtra v zapornem pasu, frekvenco vzorčenja. Ekvivalentna šumna pasovna širina vhodnega filtra je B_{eq} = 40 Hz.





Rešitev:

Iz slike lahko razberemo naslednje: na vhodu je harmonični signal z nivojem -10dBm in frekvenco f_T = 4 kHz, prva zrcalna harmonska komponenta ima frekvenco f_z = 18 kHz in nivo -50 dBm.

Zgornja mejna frekvenca rekonstrukcijskega filtra f_m = 10 kHz in na frekvenčnem pasu od 0 do f_m je prisoten kvantizacijski šum, ki ga vhodni filter analizatorja prevede v napetost v šumno napetost $U_N = -60$ dBm. Šumna napetost, ki jo prikazuje frekvenčni analizator, določena z gosto močnostnega spektra kvantizacijskega šuma S_{Nqz}, ki je na frekvenčnem pasu $0 \div f_m$ konstantna in ekvivalentno pasovno širino B_{eq}

$$U_N^2 = B_{eq} S_{Nqz} \tag{4.1}$$

Kvadrat šumne napetosti je preračunan v dBm po enačbi

$$U_N[\mathrm{dBm}] = 10\log\frac{U_N^2}{R\cdot 1\mathrm{mW}} = 10\log\frac{B_{eq}S_{Nqz}}{R\cdot 1\mathrm{mW}} = 10\log\left(\frac{S_{Nqz}}{R\cdot 1\mathrm{mW}}\cdot 1\mathrm{Hz}\right) + 10\log\frac{B_{eq}}{1\mathrm{Hz}}, \tag{4.2}$$

kar pomeni, da lahko izrazimo gostoto močnostnega spektra šuma v dBm/Hz tako, da v dBm izrazimo moč na frekvenčnem intervalu 1 Hz. S tem dobimo iz (4.2) zvezo

$$U_N[\mathrm{dBm}] = S_{Nqz}[\mathrm{dBm/Hz}] + 10\log\frac{B_{eq}}{1\mathrm{Hz}} \tag{4.3}$$

oziroma

$$S_{Nqz}[\mathrm{dBm/Hz}] = U_N[\mathrm{dBm}] - 10\log\frac{B_{eq}}{1\mathrm{Hz}} = -60\,\mathrm{dBm} - 10\log 40 = -76\,\mathrm{dBm/Hz}. \tag{4.4}$$

Celotna moč šuma je določena z mejno frekvenco rekonstrukcijskega filtra f_m po enačbi

$$N_q = \int_0^{f_m} S_{Nqz} df = S_{Nqz} \cdot f_m \,, \tag{4.5}$$

ki jo lahko zapišemo tudi z logaritmičnimi enotami podobno kot (4.3)

$$N_q[\mathrm{dBm}] = S_{Nqz}[\mathrm{dBm/Hz}] + 10\log\frac{f_m}{1\mathrm{Hz}} = -76\,\mathrm{dBm/Hz} + 10\log 10^4 = -36\,\mathrm{dBm} \tag{4.6}$$

Razmerje med močjo signala in kvantizacijskega šuma S/N_q dobimo z odštevanjem obeh moči izraženih v dBm

$$\frac{S}{N_q}[\mathrm{dB}] = S[\mathrm{dBm}] - N_q[\mathrm{dBm}] = -10\,\mathrm{dBm} - (-36\,\mathrm{dBm}) = \underline{26\,\mathrm{dB}} \tag{4.7}$$

Frekvenco vzorčenja f_0 izračunamo iz zrcalne frekvence testnega signala f_z

$$f_z = f_0 - f_T \tag{4.8}$$

$$f_0 = f_z + f_T = 18\,\mathrm{kHz} + 4\,\mathrm{kHz} = \underline{22\,\mathrm{kHz}} \tag{4.9}$$

Dušenje rekonstrukcijskega filtra dobimo iz razmerja med velikostjo tesnega signala v prepustnem pasu in zrcalne frekvence v zapori

$$\left|H(f_{zap})\right| = \left|H(f_z)\right| = S_z[\mathrm{dBm}] - S[\mathrm{dBm}] = -50\,\mathrm{dBm} - (-10\,\mathrm{dBm}) = \underline{-40\,\mathrm{dB}} \tag{4.10}$$

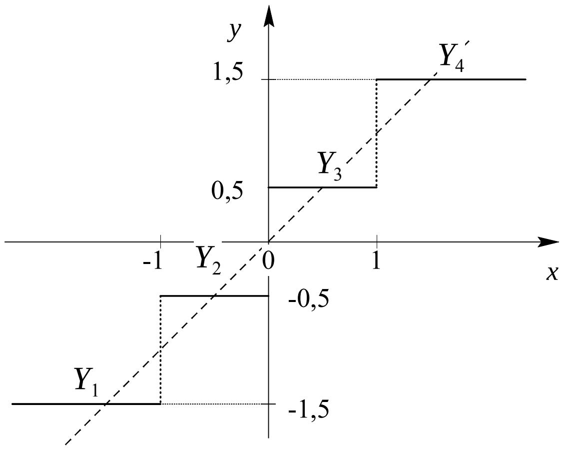
Naloge pisnega izpita z rešitvami

DIGITALNE KOMUNIKACIJE I

Izpitni rok: 26. 1. 2007

Naloga 1

Na vhod štiri-nivojskega enakomernega kvantizatorja (Δ = 1V) je priključen signal, ki ima Lapalceovo distribucijo z $\mu = 0$. Določite efektivno napetost vhodnega signala, če je verjetnost izhodne kode Y_3 enaka 0,316. Kolikšna je entropija informacijskega izvora $H(Y)$?



Rešitev:

Verjetnost za izhodno kodo Y_3 je dana z integralom gostote verjetnosti na intervalu (0,1)

$$P(Y_3) = \int_0^1 p_X(x)dx = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2}}\int_0^1 e^{-\sqrt{2}\frac{x}{\sigma_X}}dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_X}}) \tag{1.1}$$

Iz podane verjetnosti izračunamo σ_X

$$\sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{-\ln(1-2\cdot 0{,}316)} = \sqrt{2} \tag{1.2}$$

Enota standardne deviacije je volt saj so meje na abscisni kavantizatorske karakteristike v voltih, torej $\sigma_X = 1{,}41$ V.

Entropijo $H(Y)$ izračunamo iz verjetnosti posameznih nivojev. Srednja vrednost vhodnega signala je

$$\mu = \overline{X} = 0 \tag{1.3}$$

zato velja

$$\begin{aligned} P(Y_2) &= P(Y_3) = 0{,}316 \\ P(Y_1) &= P(Y_4) = 0{,}5 - P(Y_3) = 0{,}184 \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} H(Y) &= \sum_{i=1}^{4} P(Y_i)\frac{1}{\log_2 P(Y_i)} = -\frac{2}{\log 2}(0{,}316\cdot\log 0{,}316 + 0{,}184\cdot\log 0{,}184) = \\ &= 1{,}95 \text{bit/simbol} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Naloga 2

Najmanjša stopnica Δ_{min} v neenakomernem A/D pretvorniku (13 segmentni *A*-zakon) znaša 2 mV. Kolikšen je relativni nivo (dBr) točke telefonskega sistema, v kateri bi ga lahko uporabili za pretvorbo analognih v digitalne signale, da bi ustrezal CCITT predpisom o izkrmilni meji (T_{max} = 3,14dBm0)?

Rešitev:

Doseg izračunamo iz znane zveze

$$V = \Delta_{min} \cdot 16 \cdot 128 = \Delta_{min} \cdot 2^{11} = 2\text{mV} \cdot 2048 = 4{,}096\ \text{V} \tag{2.1}$$

Doseg izrazimo v dBm, pri čemer uporabimo referenčno upornost 600 Ω, ki se uporablja v telefoniji

$$V[\text{dBm}] = 10\log\frac{V[\text{V}]^2}{R \cdot 1\text{mW}} = 10\log\frac{4{,}096^2}{0{,}6} = 14{,}46\,\text{dBm} \tag{2.2}$$

Standardizirani doseg v referenčno točki dobimo iz podatka T_{max}, ki predstavlja maksimalno efektivno vrednost nepopačenega sinusnega signala, ko temenska napetost doseže doseg kavantizatorja (A/D pretvornika).

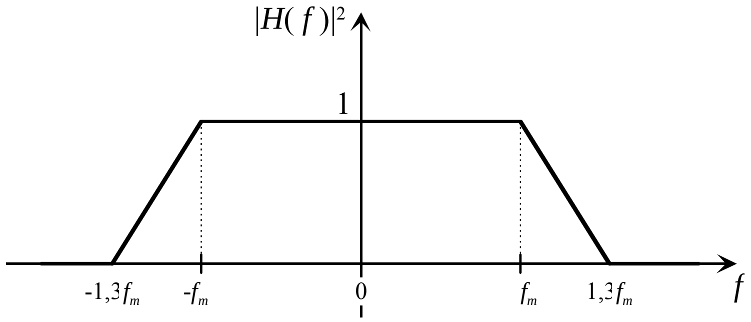
$$V[\text{dBm}0] = T_{max}[\text{dBm}0] + 3\,\text{dB} = 6{,}14\,\text{dBm}0 \tag{2.3}$$

Relativni nivo A/D pretvornik po A-zakonu, je razlika med dejanskimi signali izraženimi v dBm in predpisanimi v enoti dBm0.

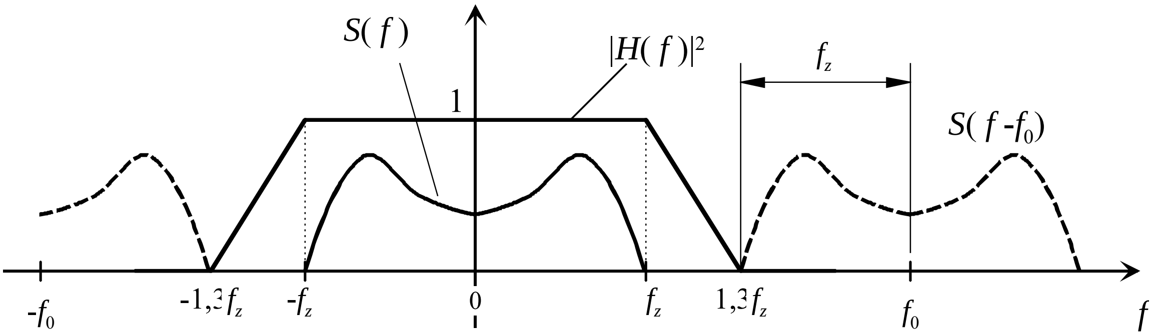
$$V[\text{dBr}] = V[\text{dBm}] - V[\text{dBm0}] = 14{,}46\,\text{dBm} - 6{,}14\,\text{dBm0} = 8{,}32\,\text{dBr} \tag{2.4}$$

Naloga 3

Določite minimalno vzorčno frekvenco f_0 za popolno rekonstrukcijo signala z gornjo mejno frekvenco f_z = 10 kHz! Kolikšna je efektivna napetost izhodne kvantizacijske napake, če je velikost stopnice enakomernega kvantizatorja 1 mV. Za rekonstrukcijo (dušenje zrcalnih frekvenc) regularno vzorčenega signala imamo na voljo nizko sito s podanim močnostnim frekvenčnim odzivom.



Rešitev:



Slika 3.1 – Spekter regularno vzorčenega signala pred rekonstrukcijo z nizkim sitom

Na sliki spektra vzorčenega signala vidimo, da lahko z danim filtrom izsejemo originalni signal, če velja

$$f_0 \geq 1{,}3\, f_z + f_z = 2{,}3\, f_z = 23\,\text{kHz} \tag{3.1}$$

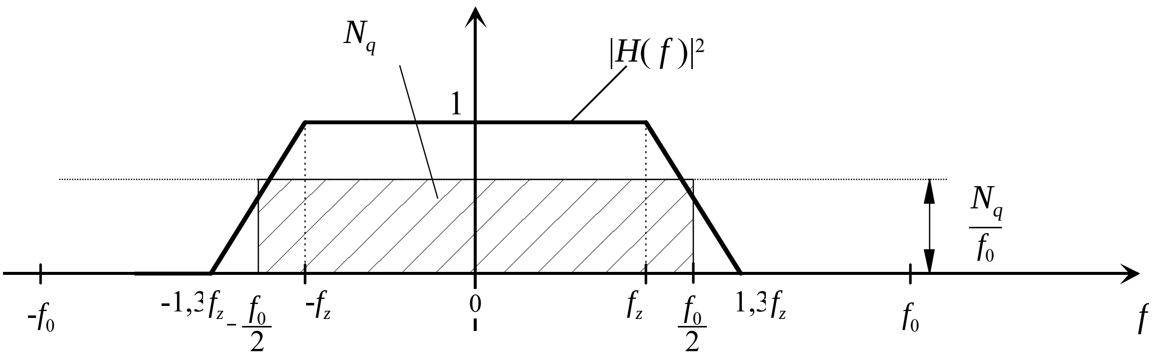
Moč izhodne kvantizacijske napake je določena rekonstrukcijskim nizkim filtrom in gostoto močnostnega spektra kvantizacijskega šuma, ki znaša

$$S(f) = \left(\frac{\tau}{T_0}\right)^2 \frac{N_q}{f_0} = \frac{N_q}{f_0} \tag{3.2}$$

pri čemer vzamemo za širino izhodnih regularno vzorčenih impulzov kar $\tau = T_0$. Širina τ sicer vpliva na velikost izhodnega signala in šuma, vendar ne vpliva na njuno razmerje.

Normalizirana moč zrnatega popačenja enakomernega kvantizatorja je določena z velikostjo stopnice

$$N_q = \frac{\Delta^2}{12} \tag{3.3}$$



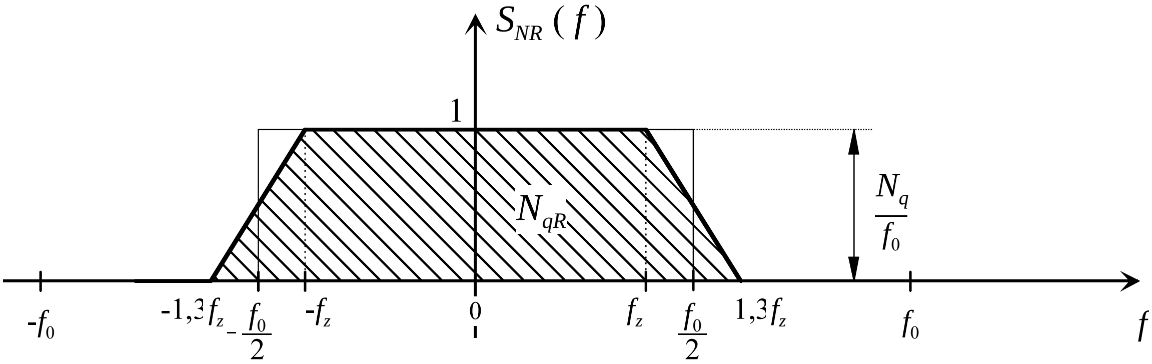
Slika 3.2 – Močnostni spekter kvantizacijske napake na vhodu rekonstrukcijskega filtra z močnostnim frekvenčnim odzivom $|H(f)|^2$

Normalizirana moč izhodne kvantizacijske napake je

$$N_{qR} = \int_{-1{,}3 f_z}^{1{,}3 f_z} S_{NR}(f)\,df = \int_{-1{,}3 f_z}^{1{,}3 f_z} \frac{N_q}{f_0} \cdot |H(f)|^2\,df = \frac{N_q}{f_0}(1{,}3\, f_z + f_z) = N_q \frac{2{,}3\, f_z}{f_0}\,. \tag{3.4}$$

Izračunano minimalno frekvenco vzorčenja f_0 (3.1) vstavimo v (3.4) in dobimo

$$N_{qR} = N_q = \frac{\Delta^2}{12} \tag{3.5}$$



Slika 3.3 – Gostota močnostnega spektra na izhodu rekonstrukcijskega nizkega filtra. Ploščina šrafiranega lika (trapeza) predstavlja izhodno moč kvantizacijske napake

$$U_{NqR} = \sqrt{N_{qR}} = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{1\text{mV}}{\sqrt{12}} = 0,288\text{mV} \tag{3.6}$$

Ker je vzorčevalna frekvenca minimalna glede na dano karakteristiko nizkega sita, je moč izhodne kvantizacijske napake enaka vrednosti N_q določeni z enačbo (3.3), kjer ni upoštevan vpliv vzorčenja in karakteristike izhodnega filtra.

Naloga 4

Na vhod 18-bitnega kvantizatorja s simetričnim dosegom $V^+ = V^- = 5$ V je priključen signal z Laplaceovo distribucijo. Z voltmetrom (izmeničnim) izmerimo na vhodu efektivno napetost 2,2 dBm. Izračunajte enosmerno komponento vhodnega signala $\overline{X}$, če na izhodu izmerimo moč prekoračitvenega popačenja N_P = -19 dBm!

Rešitev:

Zrnato kvantizacijsko popačenje je popolnoma zanemarljivo v primerjavi s prekoračitvenim. Za normalizirano moč zrnatega popačenja s simetričnim dosegom velja izraz

$$N_{qz} = \frac{\Delta^2}{12} = \left(\frac{2V}{2^n}\right)^2 \frac{1}{12} = \frac{V^2}{3\cdot 2^{2n}} \tag{4.1}$$

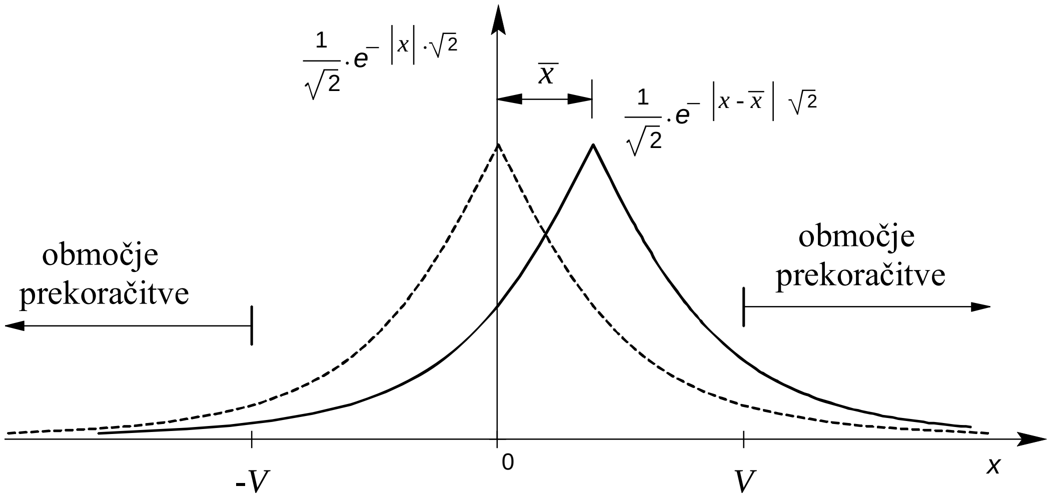
Za lažjo primerjavo zrnato popačenje izrazimo v dBm

$$\begin{aligned} N_{qz}[\text{dBm}] &= 10\log\frac{N_{qz}}{R_{REF}\cdot 1\text{mW}} = 10\log\frac{1}{3\cdot 2^{2n}}\frac{V^2}{R_{REF}\cdot 1\text{mW}} = \\ &= -10\log 3 - n\cdot 20\log 2 + 10\log\frac{V^2}{R_{REF}\cdot 1\text{mW}} = \\ &= -4,77\,\text{dB} - n\cdot 6,02 + 10\log\frac{25\text{V}^2}{0,6\text{V}^2} = -96,9\,\text{dBm} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Izračun zrnatega popačenja je na tem mestu podan zgolj zaradi razjasnitve, da na izhodu pomerimo le prekoračitveno popačenje N_P, ki ga izračunamo s podano porazdelitveno funkcijo.

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\frac{|x-\bar{x}|}{\sigma_X}} \tag{4.3}$$

$$N_P = \int_{-\infty}^{V^-} (x-V^-)^2 p_X(x)dx + \int_{V^+}^{\infty} (x-V^+)^2 p_X(x)dx \tag{4.4}$$



Slika 4.1 – Laplaceova porazdelitev gostote verjetnosti za naključno spremenljivko z enosmerno komponento ($\bar{x} \neq 0$)

Z upoštevanjem simetričnosti dosega in porazdelitve (4.3) dobimo

$$\begin{aligned} N_P &= \int_{-\infty}^{-V} (x+V)^2 p_X(x)dx + \int_{V}^{\infty} (x-V)^2 p_X(x)dx = \\ &= \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{-V} (x+V)^2 e^{\sqrt{2}\frac{x-\bar{x}}{\sigma_X}} dx + \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2}} \int_{V}^{\infty} (x-V)^2 e^{-\sqrt{2}\frac{x-\bar{x}}{\sigma_X}} dx = \\ &= A + B \end{aligned} \tag{4.5}$$

V prvem integralu za negativno območje vpeljemo zamenjavo

$$\begin{aligned} &x+V = -t \ ; \quad x = -V \to t = 0; \ \ x = -\infty \to t = \infty \\ &x = -t - V \ ; \quad dx = -dt \end{aligned} \tag{4.6}$$

Integral A s to zamenjavo postane

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2}} \int_0^{\infty} t^2 e^{\sqrt{2}\frac{(-t-V-\bar{x})}{\sigma_X}} dx = e^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \cdot e^{-\sqrt{2}\frac{\bar{x}}{\sigma_X}} \cdot \left(\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2}} \int_0^{\infty} t^2 e^{-\sqrt{2}\frac{t}{\sigma_X}} dx \right) = \\ &= \frac{\sigma_X^2}{2} e^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \cdot e^{-\sqrt{2}\frac{\bar{x}}{\sigma_X}} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Izraz znotraj oklepaja v (4.7) predstavlja srednjo kvadratno vrednost spremenljivke za pozitivne vrednosti naključne spremenljivke brez enosmerne vrednosti. Tega integrala ni potrebno računati saj σ_X nastopa kot parameter porazdelitve. S podobno substitucijo

$$t = x - V \tag{4.8}$$

izračunamo integral B

$$B = \frac{\sigma_X^2}{2} e^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \cdot e^{\sqrt{2}\frac{\overline{x}}{\sigma_X}} \tag{4.9}$$

S tem dobimo izraz za moč prekoračitvene napake

$$N_p = \sigma_X^2 e^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \cdot \frac{e^{\sqrt{2}\frac{\overline{x}}{\sigma_X}} + e^{-\sqrt{2}\frac{\overline{x}}{\sigma_X}}}{2} = S e^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{2}\frac{\overline{x}}{\sigma_X}\right), \tag{4.10}$$

kjer S predstavlja normalizirano moč signala (kvadrat efektivne vrednosti). Iz podatkov dobimo

$$\left(\frac{N_p}{S}\right)[\mathrm{dB}] = N_p[\mathrm{dBm}] - S[\mathrm{dBm}] = N_p[\mathrm{dBm}] - X_{ef}[\mathrm{dBm}] = -21{,}2\,\mathrm{dB} \tag{4.11}$$

oziroma

$$\frac{N_p}{S} = 10^{-\frac{21{,}2}{10}} = 7{,}58 \cdot 10^{-3} \tag{4.12}$$

Iz (4.10) dobimo

$$\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}\frac{\overline{x}}{\sigma_X}\right) = \frac{N_p}{S} e^{\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} = 7{,}58 \cdot 10^{-3} e^{\sqrt{2}\frac{5\mathrm{V}}{1\mathrm{V}}} = 8{,}93 \tag{4.13}$$

$$\overline{x} = \frac{1\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \operatorname{Arch}(8{,}93) = \underline{2\mathrm{V}} \tag{4.14}$$

Do izraza (4.10) za moč prekoračitve lahko pridemo tudi na osnovi izraza za signal brez enosmerne komponente (predavanja, vaje)

$$N_p = S e^{-\sqrt{2}\frac{V}{\sigma_X}} \tag{4.15}$$

in slike 2.1. Lahko si mislimo, da postane doseg za pozitivne signale manjši $V - \overline{x}$ za negativno stran pa večji $V + \overline{x}$. Dokler velja

$$|\overline{x}| < V \tag{4.16}$$

vsaka stran prispeva polovico napake, ki velja za simetrično porazdelitev. Od tod sledi

$$N_p = \frac{1}{2} S e^{-\sqrt{2}\frac{V+\overline{x}}{\sigma_X}} + \frac{1}{2} S e^{-\sqrt{2}\frac{V-\overline{x}}{\sigma_X}} \tag{4.17}$$

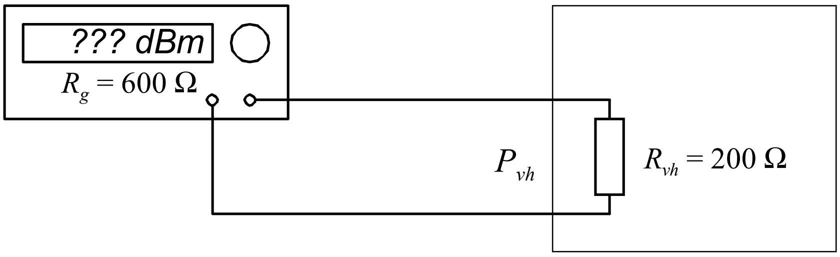
Naloge 1. kolokvija z rešitvami

DIGITALNE KOMUNIKACIJE I

Datum: 8. 12. 2005

Naloga 1

Nastavitev napetosti generatorja sinusnega signala z notranjo upornostjo $R_g = 600\ \Omega$ je pravilna, če je izhod zaključen s prilagojenim bremenom. Izračunajte nastavitev napetosti na generatorju v dBm, da bo moč signala na vhodu $P_{vh} = 30$ dBm! Vhodna upornost je $R_{vh} = 200\ \Omega$.



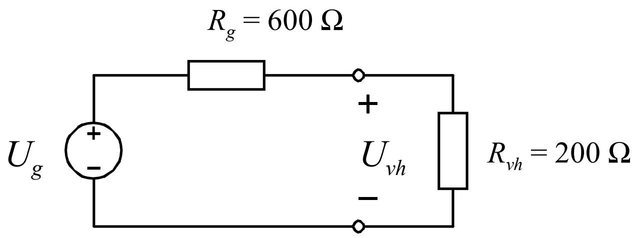
Rešitev:

Napetost na vhodu izračunamo iz moči in vhodne upornosti:

$$P_{vh} = 30\,\text{dBm} = 1\text{mW} \cdot 10^{\frac{30}{10}} = 1\text{W} \tag{1.1}$$

$$P_{vh} = \frac{U_{vh}^2}{R_{vh}} \Rightarrow U_{vh} = \sqrt{R_{vh} \cdot P_{vh}} = \sqrt{200\Omega \cdot 1\text{W}} = 14{,}14\text{V} \tag{1.2}$$

Generator ima notranjo upornost 600 Ω, zato moramo izračunati napetost napetostnega generatorja s pomočjo Théveninovega nadomestnega vezja.



Slika 1.1 – Nadomestno vezje za izračun napetosti U_g

$$U_g = \frac{R_g + R_{vh}}{R_{vh}} U_{vh} = 4 \cdot 14{,}14\text{V} = 56{,}56\text{V} \tag{1.3}$$

Pri pravilni zaključitvi z bremenskim uporom 600 Ω, dobimo na uporu polovično napetost. Iz moči na uporu izračunamo pravilno nastavitev generatorja.

$$P = \left(\frac{U_g}{2}\right)^2 \frac{1}{R_g} = \frac{(28{,}28\text{V})^2}{600\Omega} = 1{,}33\text{W} \tag{1.4}$$

$$P_{[\text{dBm}]} = 10\log\frac{P}{1\text{mW}} = 10\log\frac{1{,}33\text{W}}{1\text{mW}} = \underline{31{,}2\,\text{dBm}} \tag{1.5}$$

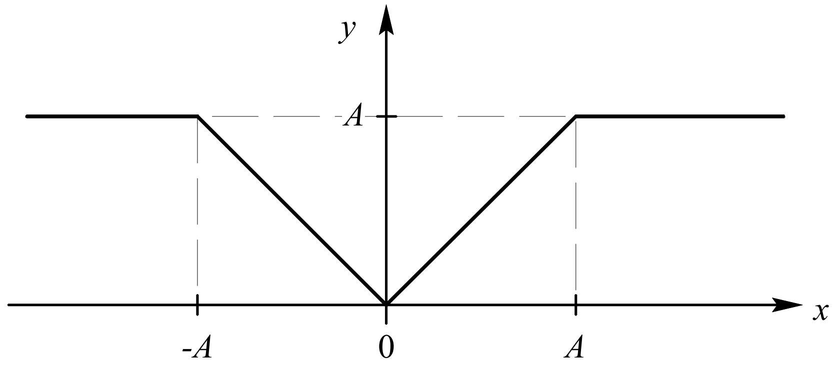
Naloga 2

Signal z Laplaceovo porazdelitvijo gostote verjetnosti ($\mu_X = \overline{X} = 0$, $\sigma_X = 3$ V) merimo z dvovalnim usmerniškim vezjem, ki ima karakteristiko:

$$u_{iz} = \begin{cases} |u_{vh}| & |u_{vh}| < A \\ A & |u_{vh}| > A \end{cases}$$

Kolikšno napetost kaže enosmerni voltmeter, če velja $A = 4$ V?

Rešitev:



Slika 2.2 - Karakteristika usmerniškega vezja

Enosmerni voltmeter na izhodu meri povprečno vrednost izhodnega signala, ki je sorazmeren absolutni vrednosti vhodne napetosti oziroma je enaka A, če po absolutni vrednosti večja od A.

$$U = \mathrm{E}[\,y\,] = \mathrm{E}[\,f(x)\,] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_X(x) dx \tag{2.1}$$

Ker sta $f(x)$ in $p_X(x)$ sodi funkciji, lahko račun poenostavimo in računamo le za pozitivne vrednosti.

$$\begin{aligned} U &= 2\int_0^{\infty} f(x) p_X(x) dx = 2\int_0^{A} x\, p_X(x) dx + 2\int_0^{\infty} A\, p_X(x) dx = \\ &= \frac{2}{\sigma_X \sqrt{2}} \int_0^{A} x\, e^{-\sqrt{2}\frac{x}{\sigma_X}} dx + \frac{2A}{\sigma_X \sqrt{2}} \int_A^{\infty} e^{-\sqrt{2}\frac{x}{\sigma_X}} dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sigma_X} \left[-\frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} x\, e^{-\sqrt{2}\frac{x}{\sigma_X}} \Bigg|_0^A + \frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} \int_0^{A} e^{-\sqrt{2}\frac{x}{\sigma_X}} dx + \left(-\frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} A \right) e^{-\sqrt{2}\frac{x}{\sigma_X}} \Bigg|_A^{\infty} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sigma_X} \left[-\frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} A\, e^{-\sqrt{2}\frac{A}{\sigma_X}} + \left(-\frac{\sigma_X^2}{2} e^{-\sqrt{2}\frac{x}{\sigma_X}} \right) \Bigg|_0^A + \frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} A e^{-\sqrt{2}\frac{A}{\sigma_X}} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_X \left(1 - e^{-\sqrt{2}\frac{A}{\sigma_X}} \right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$U = \overline{Y} = \frac{\sqrt{2}}{2} 3\mathrm{V} \left(1 - e^{-\sqrt{2}\frac{4\mathrm{V}}{3\mathrm{V}}} \right) = 1{,}799\mathrm{V} = \underline{1{,}8\mathrm{V}} \tag{2.3}$$

Naloga 3

Naključen stacionaren proces ima podano gostoto močnostnega spektra z izrazom

$$S_X(f) = \begin{cases} 5 & |f| \leq \dfrac{20}{2\pi} \\ 0 & \text{drugod} \end{cases}$$

Izračunajte srednjo kvadratno vrednost in avtokorelacijo podanega procesa!

Rešitev:

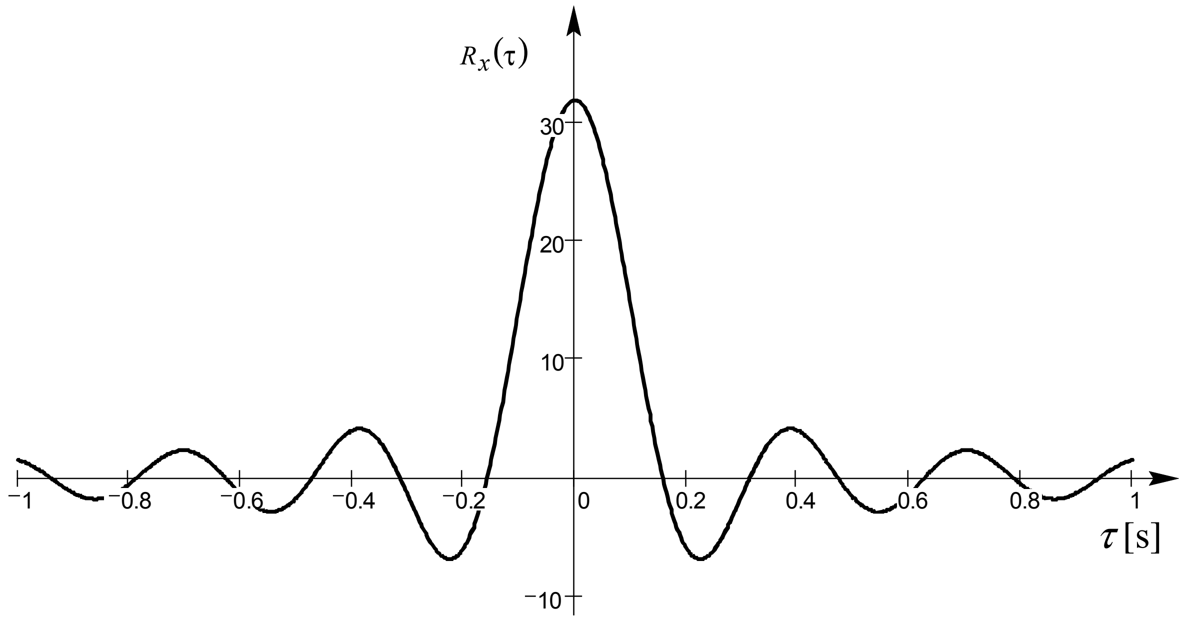
$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)e^{j2\pi f\tau}df \tag{3.1}$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-20}^{20} 5e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{5}{2\pi}\frac{e^{j\omega\tau}}{j\tau}\Bigg|_{-20}^{20} = \frac{5}{\tau\pi}\frac{e^{j20\tau}-e^{-j20\tau}}{2j} = \frac{5}{\tau\pi}\sin 20\tau \tag{3.2}$$

$$R_x(\tau) = \frac{100}{\pi}\frac{\sin 20\tau}{20\tau} \tag{3.3}$$

Srednja kvadratna vrednost naključnega procesa oziroma njegova normalizirana moč signala je vrednost avtokorelacije v izhodišču

$$\overline{X^2} = P_X = R_X(0) = \frac{100}{\pi}\lim_{\tau\to 0}\frac{\sin 20\tau}{20\tau} = \frac{100}{\pi} = 31,83 \tag{3.4}$$

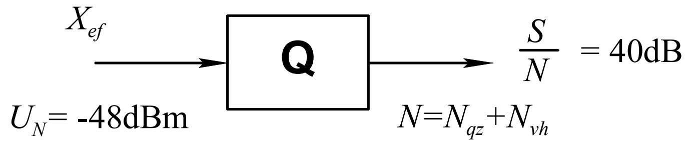


Slika 3.1 – Graf avtokorelacijske funkcije podanega frekvenčno omejenega naključnega procesa

Naloga 4

Na izhodu 10-bitnega kvantizatorja s simetričnim dosegom V = 5V izmerimo razmerje med močjo signala močjo šuma S/N = 40 dB. Kolikšna je moč vhodnega signala, če je na vhodu poleg signala prisoten tudi šum z efektivno napetostjo U_N = -48 dBm? Pri izračunu predpostavite, da ni prekoračitve obsega kvantizatorja!

Rešitev:



Velikost stopnice enakomernega kvantizatorja s simetričnim dosegom je

$$\Delta = \frac{2 \cdot V}{2^n} = \frac{2 \cdot 5\text{V}}{2^{10}} = 9,67\text{mV} \tag{4.1}$$

Normalizirana moč zrnatega kvantizacijskega popačenja je

$$N_{qz} = \frac{\Delta^2}{12} = 7,94 \cdot 10^{-6}\,\text{V}^2 \tag{4.2}$$

Na izhodu se moč vhodnega šuma in zrnatega kvantizacijskega popačenja seštevata. Normalizirano moč vhodnega šuma izračunamo z upoštevanjem referenčne vrednosti upornosti 600 Ω. Iz moči šuma v dBm izračunamo najprej moč v W

$$N_{vh} = -48\,\text{dBm} = 1\text{mW} \cdot 10^{-4,8} = 1,58 \cdot 10^{-8}\,\text{W}\,, \tag{4.3}$$

ki jo lahko izrazimo tudi kot srednjo kvadratno vrednost oziroma kot kvadrat efektivne napetosti vhodnega šuma

$$N_{vh}[\text{V}^2] = U_{Nvh}^2 = P_{Nvh} \cdot R = 1,58 \cdot 10^{-8}\,\text{W} \cdot 600\Omega = 9,6 \cdot 10^{-6}\,\text{V}^2 \tag{4.4}$$

Skupni izhodni šum

$$N_{izh} = N_{qz} + N_{vh} = 1,74 \cdot 10^{-5}\,\text{V}^2 \tag{4.5}$$

Izhodno razmerje S/N = 40 dB predstavlja razmerje 10^4, od tod dobimo kvadrat efektivne napetosti signala

$$S = \left(S/N \right) N = 10^4 \cdot 1,74 \cdot 10^{-5}\,\text{V}^2 = 0,174\text{V}^2 \tag{4.6}$$

Efektivna vrednost signala je

$$X_{ef} = \sqrt{S} = 0,417\text{V} \tag{4.7}$$

Moč vhodnega signala v dBm lahko izrazimo iz normalizirane moči (4.6)

$$S_{[\text{dBm}]} = 10\log\frac{S_{[\text{W}]}}{1\text{mW}} = 10\log\frac{X_{ef}^2}{R \cdot 1\text{mW}} = 10\log\frac{0,174\text{V}^2}{0,6\text{V}^2} = \underline{-5,36\,\text{dBm}} \tag{4.8}$$

Naloge 2. kolokvija z rešitvami

DIGITALNE KOMUNIKACIJE I

Datum: 17. 1. 2006

Naloga 1

Izračunajte napetostni obseg V (v voltih in dBm) 13-segmentnega kvantizatorja po A-zakonu, če je moč kvantizacijskega popačenja praznega kanala -73,6 dBmp (psofometrična meritev) na upornosti 600 Ω.

Rešitev:

Normalizirana moč šuma praznega kanala je povezana z velikostjo najmanjše stopnice kvantizatorja

$$N_0 = \frac{\Delta_{min}^2}{4} \tag{1.1}$$

Ker je moč N_0 podan v dBmp, jo najprej izrazimo v dBm

$$N_0[\text{dBm}] = N_0[\text{dBmp}] + 3,6\,\text{dB} = -70\,\text{dBm}\,, \tag{1.2}$$

kar lahko izrazimo tudi v vatih

$$N_0[\text{W}] = 1\text{mW} \cdot 10^{-7} = 10^{-10}\,\text{W}\,. \tag{1.3}$$

Ker je šum praznega kanala izražen (izmerjen) glede na standardno referenčno upornost 600 Ω, se (1.1) spremeni v

$$N_0[\text{W}] = \frac{\Delta_{min}^2}{4R_{ref}} \;\Rightarrow\; \Delta_{min} = \sqrt{4R_{ref}N_0} = \sqrt{4 \cdot 600\Omega \cdot 10^{-10}\,\text{W}} = 0,489\text{mV} \tag{1.4}$$

Med dosegom in velikostjo minimalne stopnice kvantizatorja po A-zakonu velja zveza

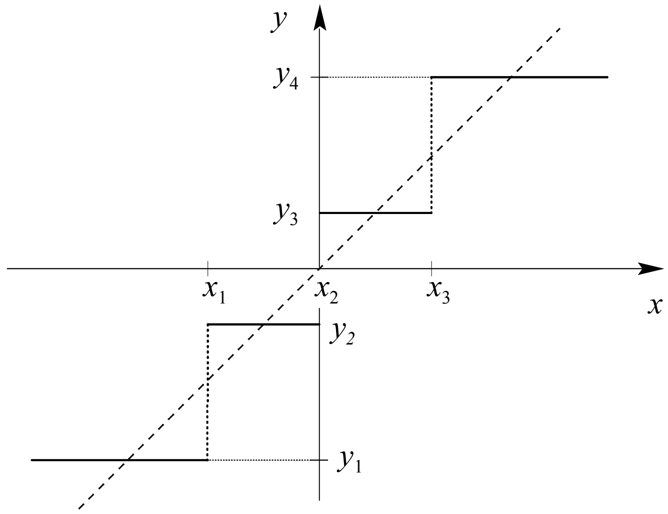
$$V = 2^{11} \cdot \Delta_{min} = \underline{1,0\,\text{V}}\,. \tag{1.5}$$

Na koncu izračunamo še doseg v dBm

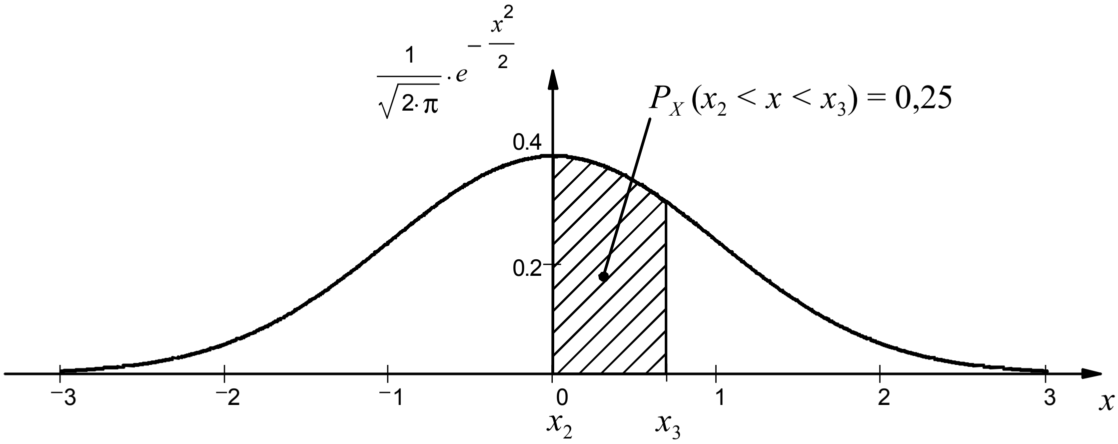
$$V[\text{dBm}] = 10\log\frac{V^2}{1\text{mW} \cdot 600\Omega} = 10\log\frac{1\text{V}^2}{0,6\,\text{V}^2} = \underline{2,2\,\text{dBm}} \tag{1.6}$$

Naloga 2

Informacijski signal z Gaussovo distribucijo in efektivno napetostjo 1 (volt) želimo kvantizirati s 4-nivojskim (2-bitnim) kvantizatorjem. Določite decizijske meje x_1 … x_4 tako, da bodo vsi izhodni nivoji enako pogosti. Za določene meje izračunajte izhodni nivo y_4 tako, da bo kvantizacijska napaka najmanjša!



Rešitev:



Slika 2.1 – Graf normalne porazdelitve s prikazom verjetnosti za področje med x_2 in x_3

Področje signala razdelimo na štiri področja, na katerih je nahajanje signala enako verjetno. To pomeni, da ploščina pod funkcijo gostote verjetnosti na intervalih (x_{i-1}, x_i) povsod ena četrtina.

Za normalno porazdelitev (Gaussovo) ne moremo verjetnosti analitično izraziti, zato za določitev mej uporabimo tabelirane vrednosti iz matematičnega priročnika. Verjetnostni integral je tabeliran za vrednosti $x > 0$ zato najprej določimo x_3.

$$P_X(x_2 < x < x_3) = \Phi(x_3) - \Phi(x_2) = 0{,}25\,. \tag{2.1}$$

Iz simetričnosti zlahka določimo, da je $x_2 = 0$. Ker je $\Phi(0) = 0{,}5$ dobimo

$$\Phi(x_3) = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0{,}675 \tag{2.2}$$

Vrednosti verjetnostnega integrala so tabelirane za normirano verjetnostno spremenljivko s $\sigma = 1$, kar je tudi efektivna (σ_x) vrednost vhodnega signala. Z upoštevanjem simetričnosti intervalov dobimo vektor decizijskih mej

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\infty, -0.675, 0, 0.675, \infty) \tag{2.3}$$

Za določene meje je optimalni izhodni nivo kvantizatorja, ki da najmanjšo moč kvantizacijske napake, dan kot centroid intervala (x_{i-1}, x_i)

$$y_i = \frac{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} x\, p_X(x)dx}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p_X(x)dx} \tag{2.4}$$

Za nivo y_4 dobimo integral

$$y_4 = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_3}^{\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_3^2}{2}} = 1{,}27\,, \tag{2.5}$$

kjer smo upoštevali, da je vrednost imenovalca v (2.4) enaka verjetnosti, ki zanaša ¼. Integral (2.5) rešimo s substitucijo

$$\frac{x^2}{2} = t \quad \Rightarrow \quad x\,dx = dt \tag{2.6}$$

Naloga 3

Kolikšno je relativno dušenje spektra regularno vzorčenega signala ($\tau = T_0$) v dB, ki zajema frekvenčni pas od 9 kHz do 16 kHz? Frekvenco vzorčenja izberite tako, da je za prenos signala potrebna najnižja bitna hitrost *R*, rekonstrukcijski filter pa je fizikalno uresničljiv. Izračunajte to slabljenje tudi za polovico krajši čas zadrževanja!

Rešitev:

Analogni signal je pasovno omejen s frekvencama f_s = 9 kHz in f_z = 16 kHz. Ker je pasovna širiina manjša od spodnje mejne frekvence, lahko uporabimo nižjo frekvenco vzorčenja kot bi sledila iz WKS teorema o vzorčenju. Z pasovno omejene signale velja:

$$k = \mathrm{int}\left[\frac{f_z}{f_z - f_s}\right] = \mathrm{int}\left[\frac{16}{7}\right] = 2 \tag{3.1}$$

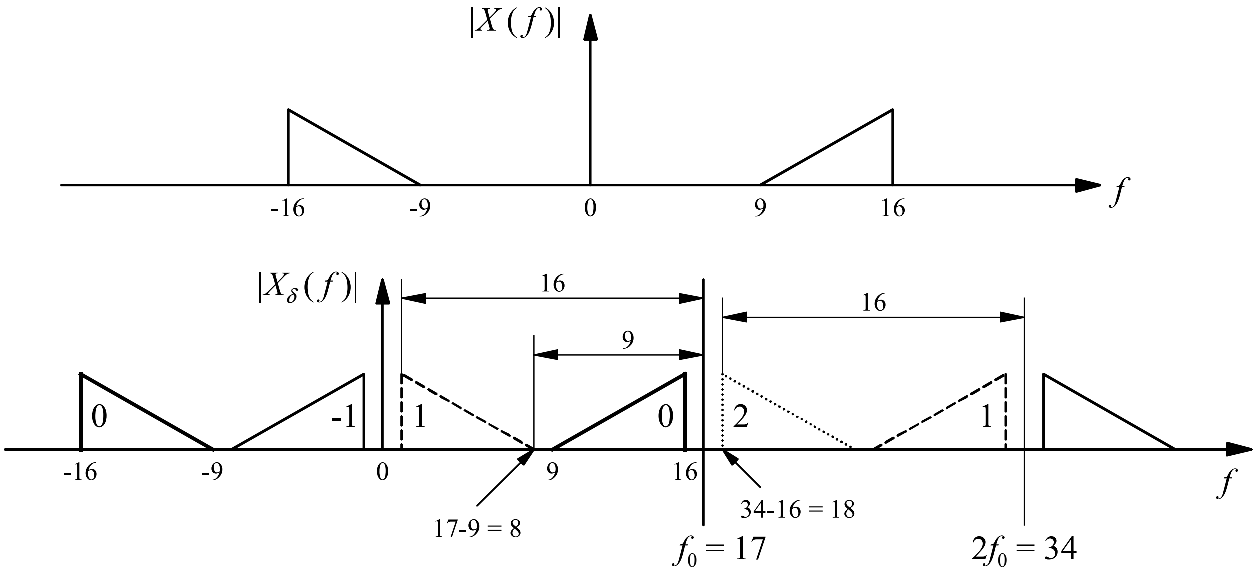
$$\frac{2f_z}{k} \le f_0 \le \frac{2f_s}{k-1} \tag{3.2}$$

Iz (3.1) in (3.2) dobimo pogoj za najnižjo možno frekvenco f_0, kjer v spektru vzorčenega signala ne pride do prekrivanja spektrov, to pa omogoča brezizgubno rekonstrukcijo originalnega signala.

$$16\text{kHz} \le f_0 \le 18\text{kHz} \tag{3.3}$$

Najbolj logična izbira za frekvenco f_0 je sredina intervala možnih frekvenc, saj se pri mejnih vrednostih posamezni frekvenčni pasovi že stikajo.

Izbrano vzorčno frekvenco f_0 = 17 kHz preverimo na grafu na sliki 3.2, ki prikazuje spekter regularno vzorčenega signala. V kolikor izberemo frekvenco 16 kHz, se stikata spektra originalnega signala in zrcalni frekvenčni pas okoli $2\times f_0$ = 32 kHz. Fizikalna uresničljivost zahteva prehodni frekvenčni pas med prepustnim in zapornim področjem.



Slika 3.2 – Simbolična predstavitev spektrov
zgoraj: originalnega signala
spodaj: idealno vzorčenega signala

Kot je iz slike 3.2 razvidno, je razdalja med osnovnim in zrcalnimi spektri 1 kHz oziroma 2 kHz na spodnji oziroma zgornji frekvenčni meji.

Relativno slabljenje spektra regularno vzorčenega signala na zgornji frekvenci, določa absolutna vrednost frekvenčnega odziva zadrževalnega vezja s $\tau = T_0$. Za $f < f_0$ velja

$$\left|H(f)\right| = \tau \operatorname{sinc}(\tau f) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{f_0}\right) = \frac{\sin \pi \frac{f}{f_0}}{\pi f}, \tag{3.4}$$

od tod dobimo

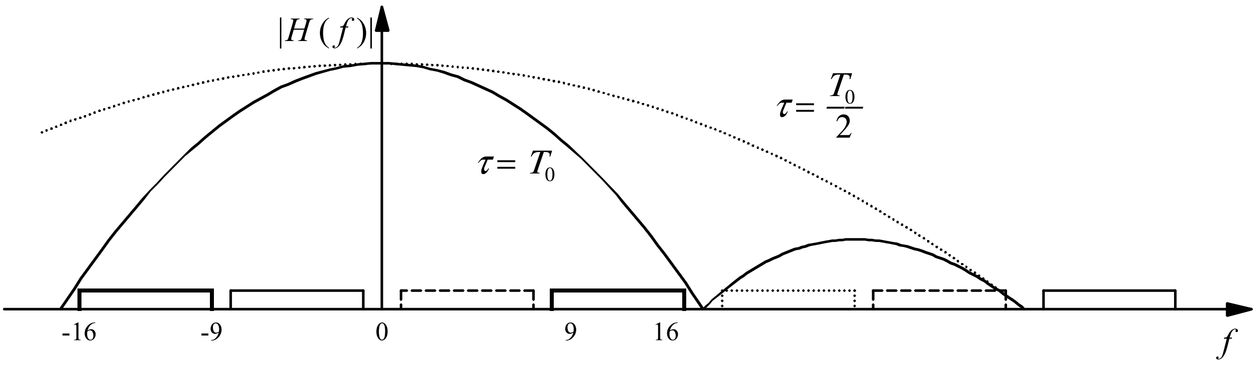
$$\left|\frac{H(f_z)}{H(f_s)}\right| = \frac{f_s}{f_z} \frac{\sin \pi \frac{f_z}{f_0}}{\sin \pi \frac{f_s}{f_0}} = \frac{9}{16} \frac{\sin \pi \frac{16}{17}}{\sin \pi \frac{9}{17}} = 0,097 \tag{3.5}$$

oziroma

$$\left|\frac{H(f_z)}{H(f_s)}\right| [\mathrm{dB}] = 20 \log 0,097 = -19,67\,\mathrm{dB}. \tag{3.6}$$

Če skrajšamo izhodne impulze na polovico periode, se dušenje bistveno zmanjša

$$\left|\frac{H(f_z)}{H(f_s)}\right| = \frac{f_s}{f_z} \frac{\sin \pi \frac{f_z}{2f_0}}{\sin \pi \frac{f_s}{2f_0}} = 0,758 = -2,4\,\mathrm{dB}. \tag{3.7}$$



Slika 3.3 – Frekvenčni odziv zadrževalnega vezja

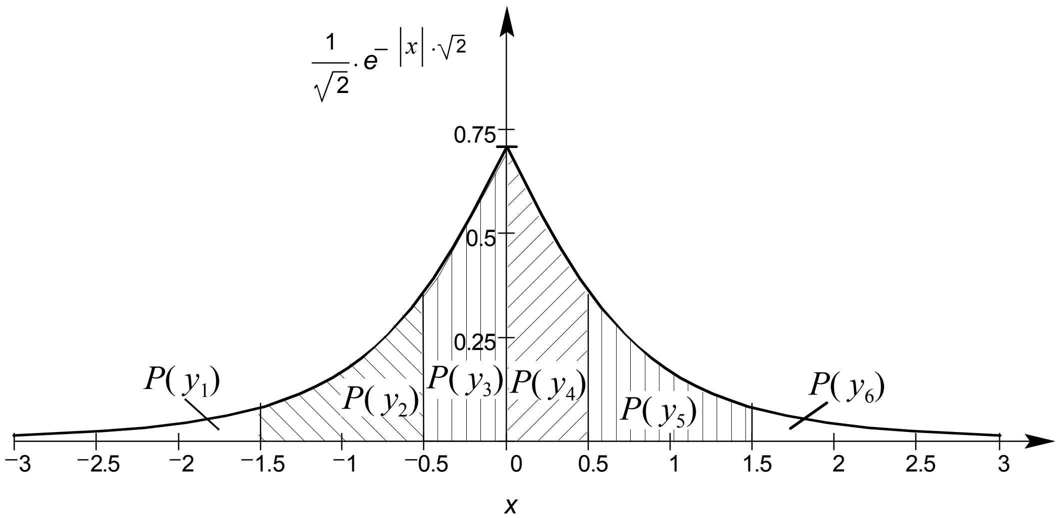
Naloga 4

Signal z efektivno napetostjo 1V, srednjo vrednostjo nič in Laplaceovo distribucijo kvantiziramo s šestnivojskim neenakomernim kvantizatorjem. Določite Huffmanovo kodo za izhodne kode Y_i (i = 1, 2, …6), če velja:

$$x_{i-1} < x \le x_i \;\Rightarrow\; Y_i$$
$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_6) = (-\infty,\ -1{,}5\text{V},\ -0{,}5\text{V},\ 0\text{V},\ 0{,}5\text{V},\ 1{,}5\text{V},\ \infty),$$

kjer je $\mathbf{x}$ vektor decizijskih nivojev. Koliko znaša povprečno število bitov na simbol $\overline{n}$? Kolikšna je entropija informacijskega vira $H(Y)$?

Rešitev:



Slika 4.4 – Laplaceova porazdelitev in grafična predstavitev verjetnosti posameznih simbolov

Najprej izračunamo verjetnosti posameznih simbolov Y_i iz gostote verjetnosti in mej intervalov. Ker je porazdelitev simetrična, računamo verjetnosti za intervale na pozitivni strani.

$$P_Y(y_6) = P_Y(y_1) = \int_{x_5}^{x_6} p_X(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1,5}^{\infty} e^{-\sqrt{2}\cdot x}\,dx = \frac{1}{2}\Big[-e^{-\sqrt{2}\cdot x}\Big]_{1,5}^{\infty} = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}\cdot 1,5} = 0,06 \qquad (4.1)$$

$$P_Y(y_5) = P_Y(y_2) = \int_{x_4}^{x_5} p_X(x)\,dx = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}\cdot 0,5} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}\cdot 1,5} = 0,1865 \tag{4.2}$$

$$P(y_4) = P(y_3) = 0,5 - \left[P(y_5) + P(y_6)\right] = 0,253 \tag{4.3}$$

Z izračunanimi verjetnostmi izhodnih nivojev s Huffmanovim postopkom določimo kode Y_i, s katerimi kodiramo posamezni nivo. Rezultat postopka je strnjen v tabeli 4.1.

Tabela 4.1 – Verjetnosti izhodnih nivojev in Huffmanova koda

i	$P(y_i)$	Y_i	n_i
1	0,06	1101	4
2	0,1865	00	2
3	0,253	10	2
4	0,253	01	2
5	0,1865	111	3
6	0,06	1100	4

Povprečno število bitov na simbol

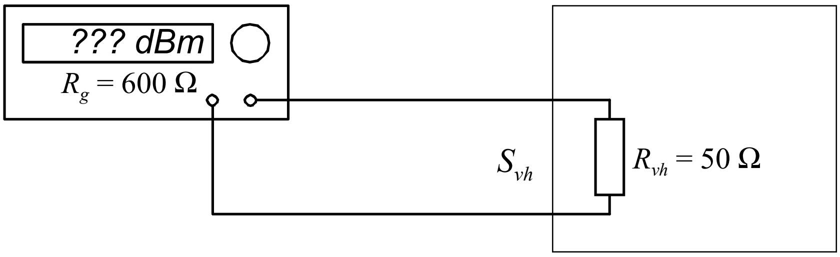
$$\overline{n} = \sum_{i=1}^{6} n_i P(Y_i) = \underline{2,42 \text{ bit/simbol}} \tag{4.4}$$

Entropija informacijskega izvora

$$H(Y) = \sum_{i=1}^{6} P(Y_i)\log_2 \frac{1}{P(Y_i)} = -\frac{1}{\log 2}\sum_{i=1}^{6} P(Y_i)\log P(Y_i) = \underline{2,395 \text{ bit/simbol}} \tag{4.5}$$

Naloga 1

Nastavitev napetosti generatorja sinusnega signala z notranjo upornostjo $R_g = 600\ \Omega$ je pravilna, če je izhod zaključen s prilagojenim bremenom. Izračunajte nastavitev napetosti na generatorju v dBm, da bo moč signala na vhodu $S_{vh} = 3$ dBm! Vhodna upornost je $R_{vh} = 50\ \Omega$.



Slika 1.1 – Povezava generatorja na vhod

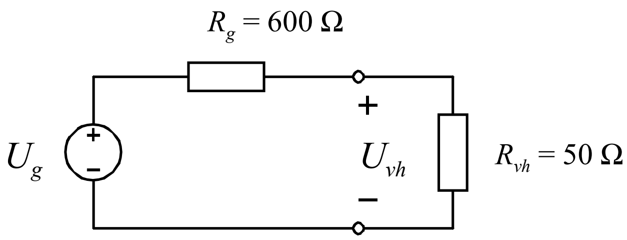
Rešitev:

Napetost na vhodu izračunamo iz moči in vhodne upornosti:

$$P_{vh} = 3\,\text{dBm} = 1\text{mW} \cdot 10^{\frac{3}{10}} = 2\text{mW} \tag{1.1}$$

$$P_{vh} = \frac{U_{vh}^2}{R_{vh}} \Rightarrow U_{vh} = \sqrt{R_{vh} \cdot P_{vh}} = \sqrt{50\Omega \cdot 2\text{mW}} = 0{,}316\text{V} \tag{1.2}$$

Generator ima notranjo upornost 600 Ω, zato moramo izračunati napetost napetostnega generatorja s pomočjo Théveninovega nadomestnega vezja.



Slika 1.2 – Nadomestno vezje za izračun napetosti U_g

$$U_g = \frac{R_g + R_{vh}}{R_{vh}} U_{vh} = 13 \cdot 0{,}316\text{V} = 4{,}11\text{V} \tag{1.3}$$

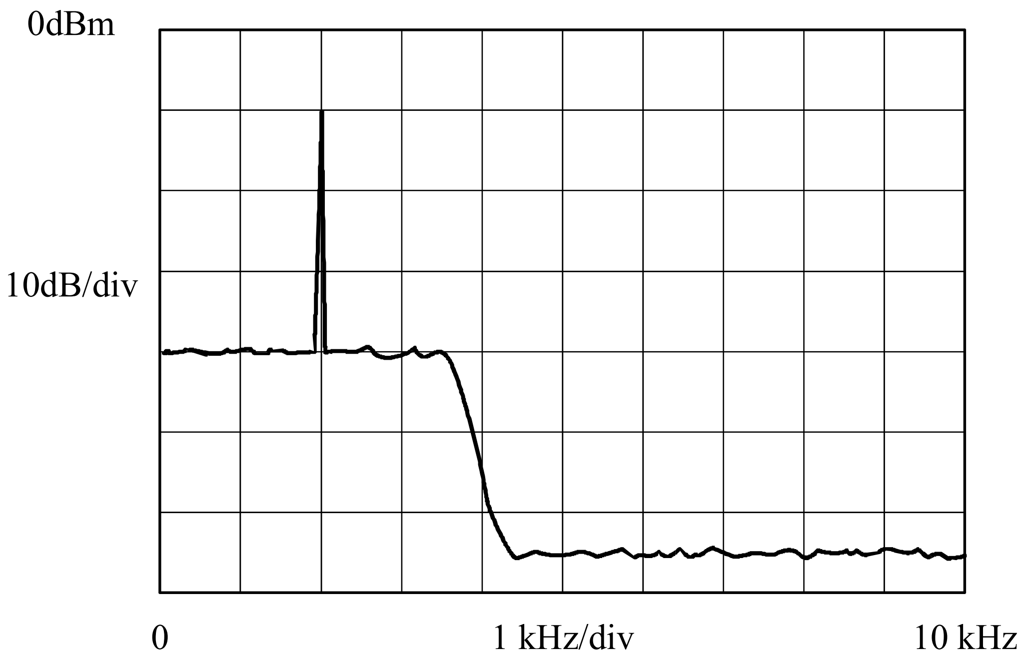
Pri pravilni zaključitvi z bremenskim uporom 600 Ω, dobimo na uporu polovično napetost. Iz moči na uporu izračunamo pravilno nastavitev generatorja.

$$P = \left(\frac{U_g}{2}\right)^2 \frac{1}{R_g} = \frac{(2{,}05\text{V})^2}{600\Omega} = 7\text{mW} \tag{1.4}$$

$$P_{[\text{dBm}]} = 10\log\frac{P}{1\text{mW}} = 10\log\frac{7\text{ mW}}{1\text{mW}} = \underline{8{,}45\,\text{dBm}} \tag{1.5}$$

Naloga 2

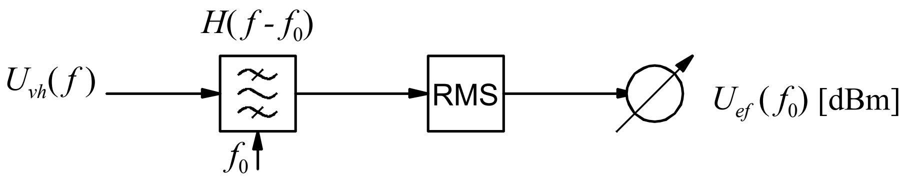
Na zaslonu spektralnega analizatorja prikazuje spekter napetosti na izhodu komunikacijskega sistema. Izračunajte razmerje med močjo signala S in močjo šuma N v dB na opazovanem frekvenčnem pasu. Sistem testiramo s sinusno napetostjo s frekvenco 2 kHz. Šum predstavljajo vse druge komponente izhodnega spektra. Šumna pasovna širina filtra spektralnega analizatorja je B_N = 100 Hz.



Slika 2.1 – Slika na zaslonu spektralnega analizatorja

Rešitev:

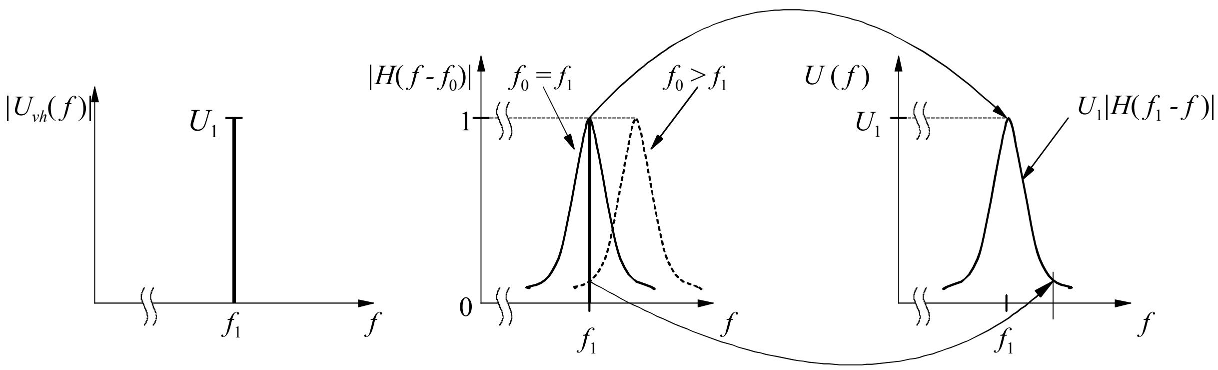
Spektralni analizator predstavlja selektiven voltmeter, ki meri napetost v ozkem frekvenčnem območju okoli pasovnega sita s centralno frekvenco f_0, ki se spreminja v nastavljenem območju. Rezultat, ki ga vidimo na zaslonu, predstavlja moč oziroma efektivno napetost signala na izhodu pasovnega filtra, ki ima maksimum (center) pri tej frekvenci. Bločna shema spektralnega analizatorja je prikazana na sliki 2.2.



Slika 2.2 – Poenostavljena shema spektralnega analizatorja

Pasovno sito ima ozek prepustni pas okoli centralne frekvence f_0, ki jo lahko spreminjamo na želenem intervalu.

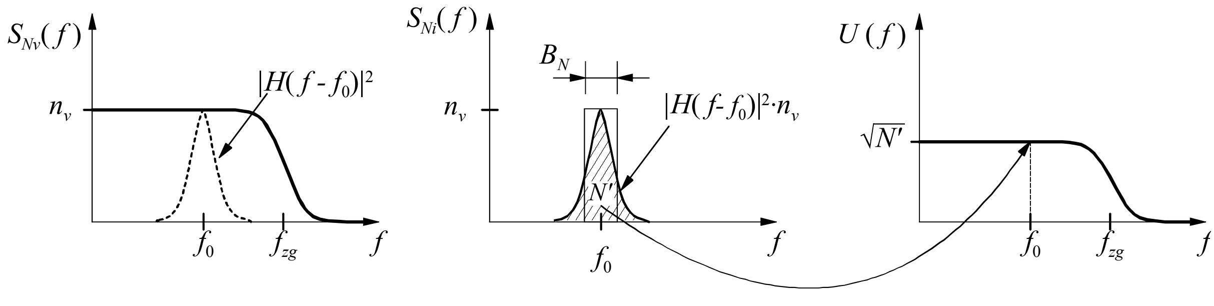
Pri meritvi čistega harmoničnega signala je informacija o amplitudi oz efektivni vrednosti frekvenčne komponente, podana z lokalnim maksimumom odziva $U(f)$, ki ga vidimo na zaslonu. Teoretično neskončno ozka spektralna črta vhodnega signala se razširi na frekvenčni odziv pasovnega sita. Interakcijo med pasovnim sitom in spektralno črto na vhodu prikazujejo grafi na sliki 2.3.



Slika 2.3 – Izmerjeni spekter pri meritvi harmoničnega signala

Zaradi velikega razpona amplitud med posameznimi frekvenčnimi pasovi so spektri prikazani v logaritmični enoti dBm.

Pri meritvi šuma je na vhodu porazdeljen spekter z gostoto močnostnega spektra $S_{Nv}(f)$. Če je ta gostota konstantna na frekvenčnem intervalu, ki je znatno večji od pasovne širine filtra, jo lahko preračunamo na osnovi šumne (ekvivalentne) pasovne širine B_N.



Slika 2.4 – Meritev signala s porazdeljenim spektrom

Merilni rezultat na zaslonu predstavlja moč oziroma efektivno napetost na izhodu pasovnega filtra, ki je določena z vhodno gostoto in šumno pasovno širino. Dokler je centralna frekvenca pasovnega sita f_0 nižja od gornje mejne frekvence f_{zg} šuma

$$f_0 < f_{zg}\,, \tag{2.1}$$

izračunamo izhodno moč z enačbo

$$N' = \int_0^\infty S_{Ni}(f)df = \int_0^\infty \left|H(f-f_0)\right|^2 n_v\, df = n_v \int_0^\infty \left|H(f-f_0)\right|^2 df = n_v B_N\,, \tag{2.2}$$

kjer je B_N šumna pasovna širina filtra. Moč N' je enaka X_{ef}^2 na vhodu detektorja. Napetost oziroma moč pri posamezni frekvenci f_0, ki jo vidimo na zaslonu, je podana dBm. Iz vrednosti N' v dBm izračunamo najprej gosto močnostnega spektra n_v v dBm/Hz, iz nje pa moč celotnega šuma. Preračune izvedemo v logaritemskih enotah.

Gostoto močnostnega spektra vhodnega šuma dobimo iz (2.2)

$$n_v = \frac{N'}{B_N}\ [\mathrm{W/Hz}]\,. \tag{2.3}$$

Gostota n_v v dBm/Hz predstavlja moč v spektralnem pasu širine 1Hz izražene v dBm

$$n_v[\mathrm{dBm/Hz}] = 10\log\left(\frac{n_v \cdot 1\,\mathrm{Hz}}{1\mathrm{mW}}\right) = 10\log\left(\frac{N'}{1\mathrm{mW}}\frac{1\,\mathrm{Hz}}{B_N}\right) = \\ = 10\log\left(\frac{N'}{1\mathrm{mW}}\right) - 10\log\left(\frac{B_N}{1\,\mathrm{Hz}}\right) = N'[\mathrm{dBm}] - 10\log\left(\frac{B_N}{1\,\mathrm{Hz}}\right) \tag{2.4}$$

Iz slike 2.1 na zaslonu odčitamo $N' = -40$ dBm. Z upoštevanjem (2.4) in podane šumne pasovne širine $B_N = 100$ Hz izračunamo

$$n_v = -40\,\mathrm{dBm} - 10\log 100 = -60\,\mathrm{dBm/Hz} \tag{2.5}$$

Na podoben način izračunamo celotno moč šuma, pri čemer uporabimo odčitek $f_{zg} = 4000$ Hz in poenostavljen izračun

$$N = n_v \cdot f_{zg} \;\; [\mathrm{W}] \tag{2.6}$$

oziroma

$$N[\mathrm{dBm}] = 10\log\left(\frac{N}{1\mathrm{mW}}\right) = 10\log\left(\frac{n_v \cdot 1\,\mathrm{Hz}}{1\mathrm{mW}}\right) + 10\log\left(\frac{f_{zg}}{1\,\mathrm{Hz}}\right) = \\ = -60\,\mathrm{dBm} + 10\log 4000 = -60\,\mathrm{dBm} + 36\,\mathrm{dB} = -24\,\mathrm{dBm} \tag{2.7}$$

Razmerje med močjo signala in celotnega šuma v dB je torej

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{dB}} = 10\log\frac{S}{N} = 10\log\frac{S}{1\mathrm{mW}} - 10\log\frac{N}{1\mathrm{mW}} = S_{(\mathrm{dBm})} - N_{(\mathrm{dBm})} = \\ = -10\,\mathrm{dBm} - (-24\,\mathrm{dBm}) = \underline{14\,\mathrm{dB}} \tag{2.8}$$

Naloga 3

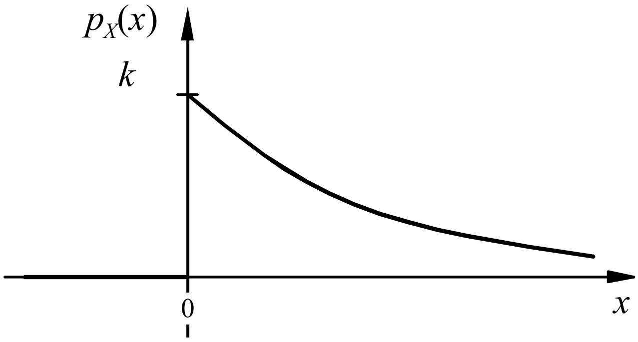
Za naključno spremenljivko velja za $x \geq 0$

$$p_X(x) = k\, e^{-\frac{x}{a}}.$$

Za negativne vrednosti je $p_X(x) = 0$. Določite konstanti k in a, če velja $\sigma_X = 1$.

Rešitev:

Graf podane porazdelitve gostote verjetnosti je prikazan na sliki 3.5. Ploščina pod krivuljo mora biti 1. Iz tega pogoja določimo konstanto k.



Slika 3.5 – Graf podane distribucije

$$\int_0^\infty k e^{-\frac{x}{a}} dx = k\left(-a e^{-\frac{x}{a}}\right)\Bigg|_0^\infty = ka = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{a} \tag{3.1}$$

Parameter a v porazdelitvi določimo iz definicije standardne deviacije

$$\sigma_X^2 = \mu_2 = \overline{\left(x - \overline{x}\right)^2} = \overline{(x^2)} - (\overline{x})^2 \tag{3.2}$$

Povprečno vrednost izračunamo iz porazdelitve z upoštevanjem (3.1)

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_X(x) dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty x e^{-\frac{x}{a}} dx = \frac{1}{a}\left(-a e^{-\frac{x}{a}} x \Bigg|_0^\infty + a\int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}} dx\right) = -a e^{-\frac{x}{a}}\Bigg|_0^\infty = a\,. \tag{3.3}$$

Integral v (3.3) izračunamo po metodi *per partes*. Srednjo kvadratno vrednost izračunamo na podoben način, pri čemer si lahko pomagamo z rezultatom (3.3).

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, p_X(x) dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty x^2\, e^{-\frac{x}{a}} dx = -e^{-\frac{x}{a}} x^2 \Bigg|_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\frac{x}{a}} dx = 2a\,\overline{x} = 2a^2 \tag{3.4}$$

Rezultata (3.3) in (3.4) vstavimo v (3.2) in izračunamo parameter a.

$$\sigma_X^2 = 1 = 2a^2 - a^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \tag{3.5}$$

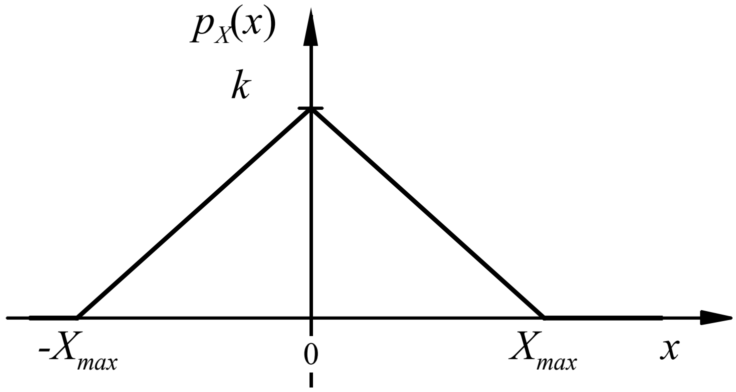
Porazdelitev

$$p_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{za } x \geq 0 \\ 0 & \text{za } x < 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

ima torej srednjo vrednost $\overline{x} = 1$ in $\sigma_X = 1$.

Naloga 4

Izračunajte verjetnost, da je absolutna vrednost signala večja od efektivne! Porazdelitev gostote verjetnosti $p_X(x)$ je podana s spodnjim grafom. Konstanto k določite sami.



Slika 4.1 – Porazdelitev gostote verjetnosti

Rešitev:

Porazdelitev gostote verjetnosti mora izpolnjevati pogoj

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1 \tag{4.1}$$

Integral v(4.1) predstavlja ploščino pod porazdelitvijo, ki jo izrazimo s pravili za ploščino trikotnika

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = \frac{1}{2}k \cdot 2X_{max} = 1 \;\Rightarrow\; k = \frac{1}{X_{max}}. \tag{4.2}$$

Porazdelitev $p_X(x)$ sedaj zapišemo v obliki

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{X_{max}}\left(1 - \dfrac{|x|}{X_{max}}\right) & \text{za} \quad |x| \le X_{max} \\ 0 & \text{za} \quad |x| > X_{max} \end{cases} \tag{4.3}$$

Ker je porazdelitev simetrična (soda funkcija spremenljivke x), je srednja vrednost naključne spremenljivke nič (integral lihe funkcije $x\,p_X(x)$ na simetričnem intervalu je nič)

$$\overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p_X(x)dx = 0\,. \tag{4.4}$$

Kvadrat efektivne vrednosti je enak srednji kvadratni vrednosti

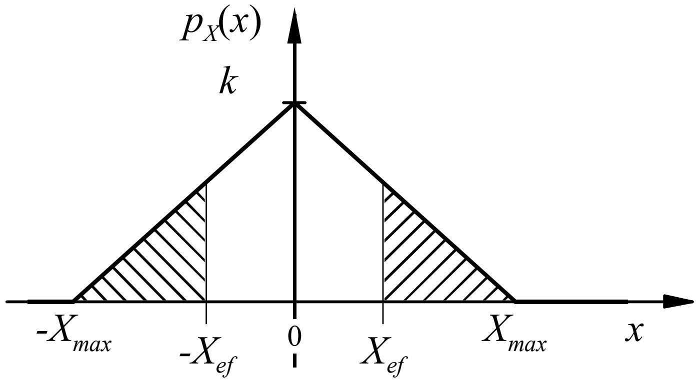
$$X_{ef}^2 = \overline{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} x^2 p_X(x)dx\,. \tag{4.5}$$

Ker je porazdelitev simetrična, smo izračun $\overline{X^2}$ poenostavili z integracijo za pozitivne vrednosti naključne spremenljivke. Z upoštevanjem (4.3) dobimo

$$\begin{aligned}\overline{X^2} &= 2\int_0^{X_{max}} x^2 \frac{1}{X_{max}}\left(1-\frac{x}{X_{max}}\right)dx = \frac{2}{X_{max}}\int_0^{X_{max}}\left(x^2-\frac{x^3}{X_{max}}\right)dx = \\ &= \frac{2}{X_{max}}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4X_{max}}\right]_0^{X_{max}} = 2X_{max}^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{X_{max}^2}{6}\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$X_{ef} = \frac{X_{max}}{\sqrt{6}} = 0,408X_{max} \tag{4.7}$$

Zahtevana verjetnost je enaka ploščini pod funkcijo gostote verjetnosti na intervalih ($-X_{max}$, $-X_{ef}$) in (X_{ef}, X_{max}), ki je prikazana na sliki 4.2 s šrafiranjem.



Slika 4.2 – Šrafirana ploščina predstavlja verjetnost $P_X(|X| \geq X_{ef})$

$$P(|X| > X_{ef}) = 2\int_{\frac{X_{max}}{\sqrt{6}}}^{X_{max}} p(x)dx = 2\int_{\frac{X_{max}}{\sqrt{6}}}^{X_{max}} \frac{1}{X_{max}}\left(1-\frac{x}{X_{max}}\right)dx \tag{4.8}$$

Z zamenjavo $t = \dfrac{x}{X_{max}}$ preide integral (4.8) v preprostejšo obliko

$$P(|X| > X_{ef}) = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{6}}}^{1}(1-t)dt = 2\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{6}}}^{1} = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{12}\right) = 0,35 = 35\% \tag{4.9}$$

Naloga 5

Govorni signal kvantiziramo z enakomernim kvantizatorjem s simetričnim dosegom. Koliko znaša minimalno potrebno število bitov *n* tega kvantizatorja, da bo razmerje moči signala in kvantizacijske napake boljše kot 30 dB? Za govorni signal predpostavljamo dinamično področje X_{max}/X_{min} = 35 dB in Laplaceovo distribucijo.

Rešitev:

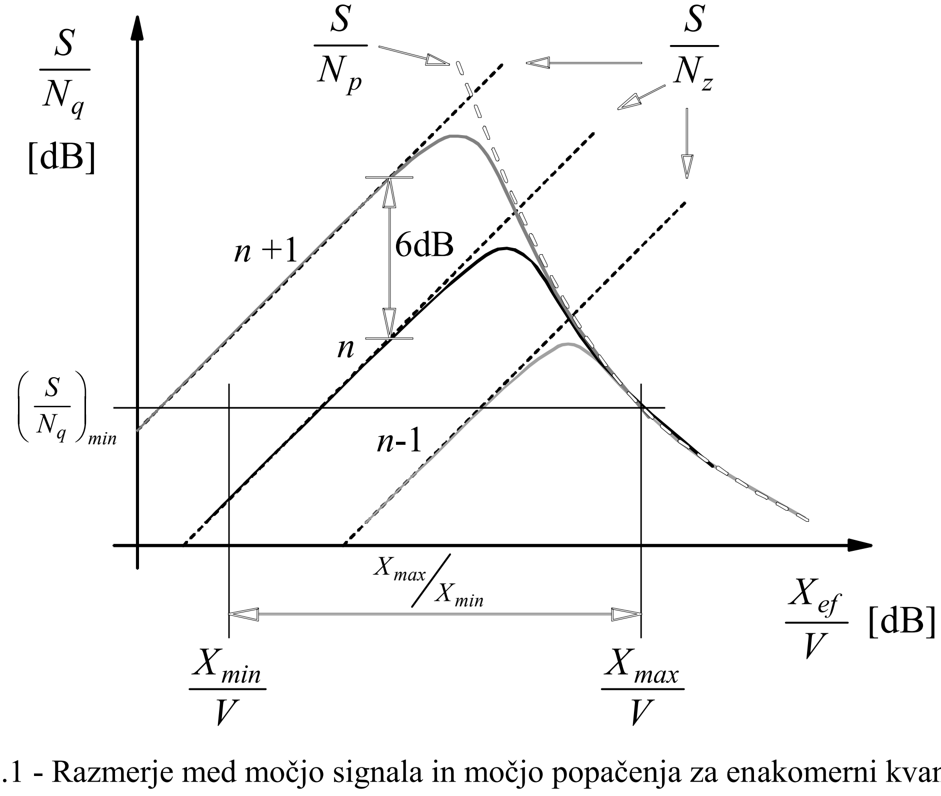
Na sliki 4.1 je prikazan potek razmerja med močjo signala in močjo kvantizacijske napake v odvisnosti od razmerja med efektivno vrednostjo signala in dosegom za enakomeren kvantizator s simetričnim dosegom. Moč prekoračitvene napake N_p ni odvisna od števila nivojev, na katere je razdeljen obseg kvantizatorja, temveč od razmerja med dosegom in efektivno vrednostjo signala ter od porazdelitvene funkcije. Moč prekoračitvene napake za Laplaceovo distribucijo je podana z

$$N_p = S \cdot e^{-\sqrt{2}\frac{V}{X_{ef}}} \tag{5.1}$$

in iz (5.1) izrazimo razmerje

$$\frac{S}{N_p} = e^{\sqrt{2}\frac{V}{X_{ef}}} \tag{5.2}$$

Iz grafa na sliki 5.1 je razvidno, da je skupno razmerje S/N_q za velike signale določeno le s prekoračitvenim popačenjem, zato določimo maksimalno izkrmiljenje X_{max}/V iz (5.2) z upoštevanjem minimalnega zahtevanega razmerja S/N_q = 30 dB. Ker gre za razmerje moči nam, to predstavlja faktor 1000, ki ga uporabimo v (5.2)



Slika 5.1 - Razmerje med močjo signala in močjo popačenja za enakomerni kvantizator. Parameter *n* označuje število bitov v kodni besedi za zapis kvantizirane vrednosti vzorca.

$$\frac{X_{max}}{V} = \frac{\sqrt{2}}{\ln \frac{S}{N_p}} = \frac{\sqrt{2}}{\ln 1000} = 0,204 \tag{5.3}$$

Rezultat raje izrazimo v dB

$$\left(\frac{X_{max}}{V}\right)_{\text{dB}} = 20 \log \frac{X_{max}}{V} = 20 \log 0,204 = -13,77\,\text{dB}\,. \tag{5.4}$$

Potrebno število bitov kvantizatorja določimo iz minimalnega izkrmiljenja $(X_{min}/V)_{\text{dB}}$, ki ga dobimo iz zahtevanega dinamičnega območja X_{max}/X_{min} = 35 dB in rezultata (5.4)

$$\begin{aligned}\left(\frac{X_{min}}{V}\right)_{\text{dB}} &= 20 \log \frac{X_{min}}{V} = 20 \log \left(\frac{X_{max}}{V}\frac{X_{min}}{X_{max}}\right) = 20 \log \frac{X_{max}}{V} - 20 \log \frac{X_{max}}{X_{min}} = \\ &= \left(\frac{X_{max}}{V}\right)_{\text{dB}} - \left(\frac{X_{max}}{X_{min}}\right)_{\text{dB}} = -13,77\,\text{dB} - 35\,\text{dB} = -48,77\,\text{dB}\end{aligned} \tag{5.5}$$

Za enakomerni kvantizator s simetričnim dosegom uporabimo izraz za razmerje $(S/N_z\,)_{\text{dB}}$ na spodnji meji dinamičnega območja

$$\left(\frac{S}{N_z}\right)_{\text{dB}} = 4,77\,\text{dB} + 6,02\,\text{dB} \cdot n + \left(\frac{X_{min}}{V}\right)_{\text{dB}} \geq 30\,\text{dB}\,, \tag{5.6}$$

in izračunamo minimalno število bitov

$$n \geq \frac{74}{6,02} = 12,3\,. \tag{5.7}$$

Ker je število bitov lahko le celo število, je končni rezultat prvo celo število, ki zadostuje pogoju (5.7) $n = 13$. S tem številom bitov in z njim povezanim številom nivojev ima kvantizator nekoliko večje dinamično območje, kot ga naloga zahteva.