MATEMATIKA III — 2 UNI

Zapiski za ustni izpit

Šolsko leto 2011/2012
Izvajalec Gregor Dolinar

Avtor dokumenta Jernej Podlipnik
Damjan Sirnik

UREJANJE DOKUMENTA	
VERZIJA	01.01
DATUM	12.02.2012

OPOMBE

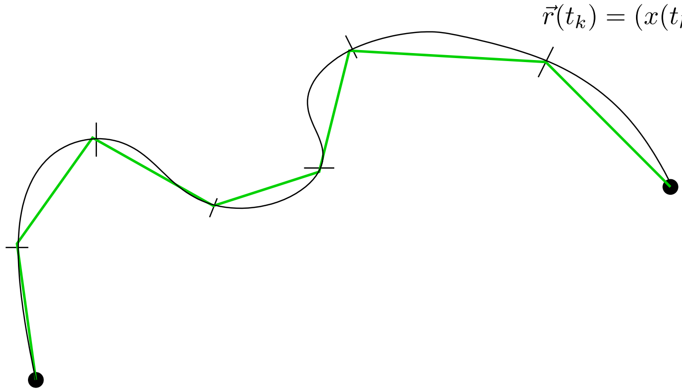
Priprava na ustni izpit iz Matematike III *

Jernej Podlipnik, Damjan Sirnik

12. februar 2012

1. **Ločna dolžina krivulje v prostoru**

   Izračunati moramo ločno dolžino krivulje



Slika 1: Skica k ločni dolžini krivulje

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2}$$

Uporabimo Lagrangeov izrek

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 (t_{k+1} - t_k)^2 + (y'(\xi_k))^2 (t_{k+1} - t_k)^2 + (z'(\xi_k))^2 (t_{k+1} - t_k)^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2) + (z'(\xi_k))^2}\, (t_{k+1} - t_k)$$

in v limiti

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t$$

*Verzija 0.1a, neprečiščeno besedilo. To delo je oblikovano s programskim paketom LaTeXv operacijskem sistemu Linux

Se pravi, seštejemo majhne delčke, s katerimi aproksimiramo našo krivuljo v prostoru.

Pomagamo si lahko tudi z naravno parametrizacijo krivulje v prostoru. Naravni parameter s je tak parameter, da je dolžina krivulje od začetne točke 0 do točke $T(x(s), y(s), z(s))$ enaka vrednosti s.

2. **Tangenta na krivuljo v prostoru**

   Tangenta je premica, ki najbolje aproksimira krivuljo v dani točki. Za opis premice potrebujemo točko in smerni vektor. Točko že imamo $r(t_0)$. Določiti moramo še smerni vektor.

$$k_t = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

3. **Ploskve v prostoru**

   Ploskve v prostoru lahko opišemo na več različnih načinov

   (a) Eksplicitni zapis
   Ploskev je predstavljena z grafom funkcije $z = f(x, y)$. Naprimer: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

   (b) Implicitni zapis ploskve
   Naj bo F funkcija treh spremenljivk x, y in z. Enačba $F(x, y, z) = 0$ potem določa ploskev v prostoru. Naprimer: $F(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$, to je enačba sfere.

   (c) Parametrični zapis
   Vsako koordinato točke na ploskvi opišemo s funkcijo odvisno od dveh parametrov, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ in $z = z(u, v)$.

   Naprimer: $\begin{array}{ll} x = \cos\varphi\cos\vartheta & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = \sin\varphi\cos\vartheta & -\pi \le \vartheta \le \pi \\ z = \sin\vartheta & \varphi,\ \vartheta \text{ parametra} \end{array}$

   Če je z nekim parametričnim zapisom res podana ploskev, preverimo tako, da izračunamo naslednji izraz

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

   pri čemer je $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$ pa sta ustrezna parcialna odvoda. Če je $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$, potem je z $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ podana ploskev v prostoru.

4. **Normala na ploskev**

   Naj bo ploskev podana v parametrični oziroma vektorski obliki

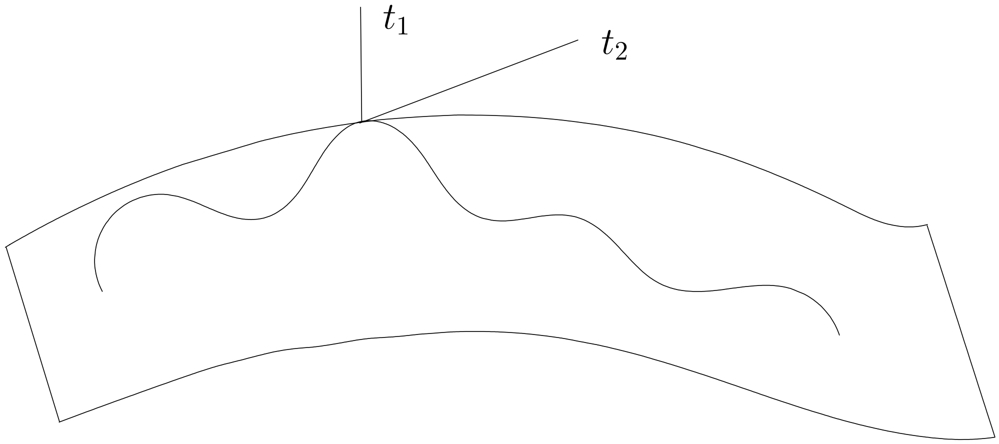
$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

   Če fiksiramo enega izmed parametrov, drugi pa se spreminja nam tak zapis določa krivuljo na ploskvi. Naprimer: $\vec{r}_1(u) = \vec{r}(u, v_0)$, $\vec{r}_2(v) = \vec{r}(u_0, v)$

   Omenjene krivulje, kjer je eden izmed parametrov fiksen, drugi pa se spreminja imenujemo koordinatne krivulje. Koordinatna krivulja leži na ploskvi (slika 2).

   Če zapišemo parameter u kot funkcijo parametra t in parameter v prav tako kot funkcijo t, dobimo

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$$



Slika 2: Skica koordinatne kirvulje in njene tangente

to pa je enačba krivulje (saj imamo samo en parameter), ki leži na ploskvi $\vec{r}(u, v)$.

Določimo smer tangente za to krivuljo

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v}$$

Ugotovili smo, da vse tangente na krivuljo, (ki ležijo na ploskvi in grejo skozi isto točko) ležijo v isti ravnini, določeni z vektorjema $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$.

To ravnino imenujemo tangnetna ravnina ploskve v dani točki in ta ravnina najbolje aproksimira ploskev v dani točki. Določena je s točko in normalo $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

(a) Če je ploskev podana v parametrični obliki, je normala na tangentno ravnino $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

(b) Če je ploskev podana eksplicitno $z = f(x, y)$, potem to pomeni, da za parametra izberemo kar x in y. Potem je

$$\begin{aligned} \vec{r}(x, y) &= (x, y, f(x, y)) \\ \vec{r}_x(x, y) &= (1, 0, f_x(x, y)) \\ \vec{r}_y(x, y) &= (0, 1, f_y(x, y)) \\ \vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1) \end{aligned}$$

Uvedemo novo oznako $f_x = z_x = p$, $f_y = z_y = q$. Torej je $\vec{n} = (-p, -q, 1)$

(c) Če je ploskev podana implicitno $F(x, y, z) = 0$. Če izrazimo spremenljivko z s pomočjo x in y, torej $z = z(x, y)$, potem dobimo $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Parcialno odvajamo po x in y, ter dobimo

$$p = -\frac{F_x}{F_z} \quad q = -\frac{F_y}{F_z}$$

Normala je potem, ko jo pomnožimo z F_z

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)$$

Vpeljimo še naslednje oznake za parametrično podano ploskev $\vec{r}(u, v)$:

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u \\ F &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \\ G &= \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \end{aligned}$$

Hitro se lahko prepričamo da je

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

Torej je enotska normala na ploskev dana za enačbo

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

5. **Integrali odvisni od parametra**

Naj bo f zvezna funkcija dveh spremenljivk x in y, spremenljivka x leži na intervalu $[a, b]$, spremenljivka y pa na intervalu $[c, d]$. Določeni integral

$$\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

je potem odvisen samo od spremenljivke y, torej je funkcija spremenljivke y.

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Integral (enačba 1) imenujemo integral s parametrom, spremenljivko y pa parameter tega integrala.

Oglejmo si kakšne lastnosti ima integral s parametrom, torej funkcija (enačba 2).

<u>Izrek</u>

Naj bo f zvezna funkcija dveh spremenljivk, potem je funkcija F (enačba 2) zvezna funkcija.

<u>Dokaz</u>

Oglejmo si, koliko se spremeni vrednost funkcije F, če se vrednost parametra spremeni za malo (za h):

$$|F(y+h) - F(y)| = |\int_a^b f(x, y+h)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x|$$

$$= |\int_a^b (f(x, y+h) - f(x, y))\,\mathrm{d}x| \leq \int_a^b |f(x, y+h) - f(x, y)|\,\mathrm{d}x \underset{h \to 0}{=} 0$$

Torej je F zvezna funkcija.

6. **Odvod integrala s parametrom**

Izrek

Če je funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}$ zvezna na intervalu $[a,b]$ in intervalu $[c,d]$ kot funkcija parametra y. Potem je integral s parametrom (enačba 2) odvedljiva funkcija in velja

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Dokaz

$$\begin{aligned}
\frac{F(y+h)-F(y)}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\int_a^b f(x,y+h)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{h}\int_a^b \big(f(x,y+h)-f(x,y)\,\mathrm{d}x\big) \\
&= \int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,\mathrm{d}x \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_a^b f_y(x,y)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Izrek

Naj bo

$$F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

f_y zvezna funkcija, u, v zvezno odvedljivi. Sledi

$$F'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x + f(v(y),y)v'(y) - f(u(y),y)u'(y)$$

Skica dokaza

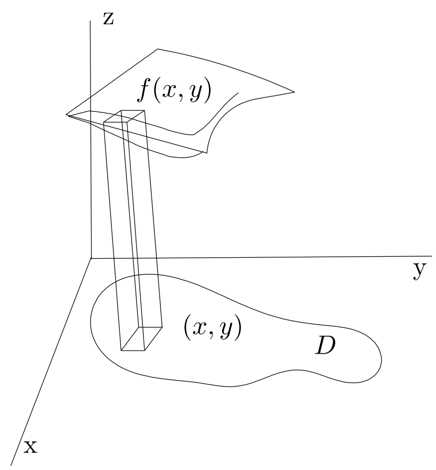
$$F(y) = G(y, v(y), u(y))$$
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$$

V drugem in tretjem členu na desni strani nastopada odvod integrala od zgornje meje ter odvod integrala od spodnje meje. Pri odvodu integrala od spodnje meje dobimo minus.

$$F'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f_y(x,y)\,\mathrm{d}x + f(v,y)v' - f(u,y)u'$$

7. **Dvojni integral**

Dvojni integral je dvodimenzionalna posplošitev določenega integrala funkcije ene spremenljivke.



Slika 3: Dvojni integral

Naj bo $f : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zvezna funkcija spremenljivk x in y na območju D. Torej: $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$

Graf funkcije f je ploskev v prostoru, prostornino med območjem D in grafom funkcije f lahko izračunamo na naslednji način:

Območje D razdelimo na manjša disjunktna podobmočja D_i. Na vsakem izmed podobmočij si izberemo neko točko(x_i, y_i). Definiramo integralsko vsoto

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \mathrm{pl}(D_i)$$

Če obstaja limita integralskih vsot, ko gre $n \to \infty$ in gre ploščina vseh podobmočji proti nič, potem to limito imenujemo dvojni integral funkcje f in pišemo

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \mathrm{pl}(D_i) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \mathrm{pl}(D_i) = \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

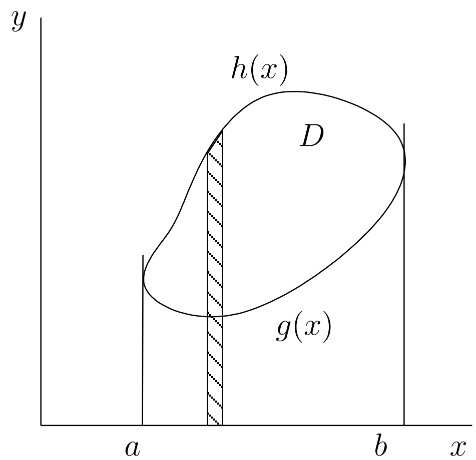
8. **Prevedba dvojnega integrala na dvakratnega**

Dvojni integral računamo tako, da ga prevedemo na dvakratni integral. Oglejmo si idejo, kako izepljemo prevedbo dvojnega integrala na dvakratni integral v posebnem primeru lepega območja (slika 4).

Funkcija $f : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Napišemo integralsko vsoto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot pl(D_i) &= \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}, \tilde{y})(x_{i+1} - x_i)(h(\xi_i) - g(\xi_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{g(\xi_i)}^{h(\xi_i)} f(\tilde{x}, y)\, \mathrm{d}y (x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

Ko gre $\Delta x \to 0$



Slika 4: K prevedbi dvojnega integrala

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

9. **Zamenjava vrstnega reda integriranja**

   <u>Izrek</u>

   Naj bo f zvezna funkcija dveh spremenljivk $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$. Potem obstaja integral funkcije $F(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ in velja

   $$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

   Torej lahko zamenjamo vrstni red integriranja funkcije dveh spremenljivk. Če imamo pri tem integralu meji konstantni pri prvem pa odvisne od paramatra, potem lahko mejo $u = u(x)$ opišemo kot funkcijo $v = v(y)$, pri tem pa druga meja postane konstanta.

   Primer:

   $$\int_a^b \left(\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{v_1(y)}^{v_2(y)} f(x, y)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

   Velikokrat tudi pišemo

   $$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_c^d\ \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x$$

10. **Uvedba novih spremenljivk v dvojni integral**

    Naj bo D območje na ravnini (x, y). Opisali bi ga radi s pomočjo novih koordinat u in v. Torej: $x = x(u, v)$ in $y = y(u, v)$.

    Da bo opis v novih koordinatah imel smisel, mora ena točka iz območja opisanega z x in y pripadati natanko eni točki omočja opisanega z u in v. Z drugimi besedami, preslikava med obema območjema mora biti bijektivna.

Kako vemo, da je preslikava, to je transformacija koordinat v redu, torej bijektivna?

<u>Izrek</u>

Transformacija koordinat je v redu, torej preslikava med območjema je bijektivna, če Jacobijeva determinanta različna od nič

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

Dokaz opustimo

Vpeljava novih spremenljivk se pozna v integralu na naslednji način

$$\iint_S f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(u,v)|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

V nekaterih primerih lahko dano območje v ravnini opišemo z drugimi spremenljivkami na preprostejši način. Naprimer s polarnimi spremenljikami, za katere velja $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$, Jacobijeva deterimananta pa je $J = r$. Ta uvedba nam pride prav pri 'okroglih' definicijskih območjih.

11. **Uporaba dvojnega integrala v geometriji**

    (a) Prostornina med grafom funkcije in ravnino

    Prostornina območja med ravnino (x,y) in ploskvijo, dano s predpisom $z = f(x,y)$ nad območjem D je enaka:

    $$\text{prostornina} = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

    Prostornina območja med ploskvama $z = f_1(x,y)$ in $z = f_2(x,y)$, za katere velja $f_1 \geq f_2$

    $$\text{prostornina} = \iint_D (f_1(x,y) - f_2(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

    (b) Ploščina ravninskega območja D

    $$\text{ploščina}\,\mathrm{D} = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

    (c) Površina ploskve

    $$\underbrace{\text{pl}\,S}_{\text{površina majhnega delčka na ploskvi}} = \underbrace{\text{pl}\,\omega}_{\text{projekcija tega delčka na ravnino }(x,y)} \underbrace{\sqrt{p^2+q^2+1}}_{\text{dolžina normale}}$$

    $$\text{površina ploskve} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ pl\ \omega_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p^2+q^2+1}\cdot \text{pl}\,\omega_k = \iint_D \sqrt{p^2+q^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

    Površina ploskve, za ploskev dano v parametrični obliki $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, je dana z enačbo

    $$\text{površina} = \iint_\omega \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

    kjer so: $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$ in $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$.

12. **Posplošeni dvojni integral**

(a) Integracijsko območje neomejeno

V prvem primeru si oglejmo dvojni integral na omejenem podobmočju D_r in če obstaja limita dvojnih integralov

$$\iint_{D_r} f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

ko gre ploščina $D \backslash D_r \to 0$, potem to limito imenujemo posplošeni integral na območju D in pišemo

$$\lim_{D \backslash D_r \to 0} \iint_{D_r} f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(b) Funkcija je neomejena

Ko funkcija v neki točki ni definirana (ni omejena) to točko izrežemo iz območja skupaj z neko okolico D_ε. Če obstaja limita dvojnih integralov, potem to limito imenujemo posplošeni integral na območju D in pišemo

$$\lim_{D_\varepsilon \to 0} \iint_{D \backslash D_\varepsilon} f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

13. **Trojni integral**

Naj bo dana funkcija $f : V \mapsto \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Trojni integral funkcije f na območju V definiramo na podoben način kot dvojni integral. Območje V razdelimo na majhna disjunktna podobmočja, na vsakem podobmočju izračunamo vrednost funkcije v eni točki in nato definiramo integralsko vsoto

$$\sum_i f(x_i, y_i, z_i) \cdot \text{prostornina } V_i$$

Če obstaja limita integralskih vsot jo imenujemo trojni integral in pišemo

$$\iiint_{V_i} f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Trojni integral lahko izračunamo tako, da ga prevedemo na trikratnega.

$$\iiint_{V} f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b\ \mathrm{d}x\ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\ \mathrm{d}y\ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\ \mathrm{d}z$$

Pri pretvorbi trojnega integrala na trikratnega lahko izberemo šest različnih vrstnih redov integriranja pri trikratnemu.

14. **Uvedba novih koordinat v trojni integral**

V veliko primerih integriranja integral ni 'lep'. V takih primerih je smiselno uvesti nove koordinate. V trojni integral uvedemo nove koordinate na podoben način kot v dvojni integral. Preslikava med območjema izražena v enih in v drugih koordinatah mora biti bijektivna, v tem primeru je Jacobijeva determinanta različna od nič, integral v novih koordinatah pa je

$$\iiint_{V} f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{W} f(u, v, w)\ |J|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

Pri čemer Jacobijevo determinano izračunamo na naslednji način

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

Velikokrat uporabljamo:

- Sferične koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z &= r\sin\vartheta \\ J &= r^2\cos\vartheta \end{aligned}$$

- Cilindrične koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \\ J &= r \end{aligned}$$

15. **Uporaba trojnega integrala v mehaniki**

(a) Masa območja V, ki ima gostoto podano s funkcijo $\rho : V \mapsto \mathbb{R}$; $\rho = \rho(x, y, z)$

$$m = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(b) Naj ima območje V gostoto ρ. Potem lahko zapišemo integralsko vsoto za težišče

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i \rho(x_i, y_i, z_i) \underbrace{\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i}_{\Delta V_i}$$

in v limiti

$$x_0 = \frac{\iiint_V x\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

Podobno določimo še koordinate za y in z:

$$y_0 = \frac{\iiint_V y\rho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} \quad z_0 = \frac{\iiint_V z\rho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

(c) Vztrajnostni moment. Imamo masno točko z maso m in kotno hitrostjo ω. Želimo izračunati kinetično energijo telesa, ki se vrti okrog osi z.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho_i \omega^2 (x_i^2 + y_i^2)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i = \iiint_V \frac{1}{2}\rho(x, y, z)\omega^2(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\iiint_V \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}_{\text{vztrajnostni moment pri vrtenju okoli osi } z}$$

16. **Operator nabla**

    Operator nabla označujemo z ∇ in je definiran s predpisom

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

    Torej je gradient skalarnega polja: $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot f$.

    Divergenca vektorskega polja: $\nabla \cdot \vec{v}$.

    Rotor vektorskega polja: rot $\vec{v} = \nabla \times \vec{v}$.

17. **Gradient skalarnega polja**

    Gradient je preslikava, ki nekemu skalarnemu polju priredi vektorsko polje. Natančneje. Naj bo $f : V \mapsto \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^3$, odvedljiva skalarna funkcija. Potem je gradient te funkcije vektorsko polje definirano s predpisom

$$\text{grad } f = V \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$\text{grad } f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

    Pri vektorski analizi večkrat uporabljamo zapis z operatorjem nabla (∇).

$$\nabla f = \text{grad } f$$

    Normala tangentne ravnine na ploskev je enaka gradientu te ploskve.

$$\vec{n} = \text{grad } f$$

    Dokaz

    Implicitno podano ploskev $f(x,y,z) = 0$. Krivulja na ploskvi

$$\vec{r}(t) \Rightarrow f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \ \ (\clubsuit)$$

    Odvajamo enačbo ($\clubsuit$) na t in dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big)\Big(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\Big) = 0$$

$$\text{grad } f\dot{\vec{r}} = 0$$

    Gradient ploskve je pravokotnen na smerni vektor tangente poljubne krivulje na ploskvi. Torej je grad f enak normali tangentne ravnine.

18. **Smerni odvod skalarnega polja**

Zanima nas, kaj se dogaja z vrednostjo skalarne funkcije v določeni smeri.

Oglejmo si izraz

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(x+sb_1,y+sb_2,z+sb_3)-f(x,y,z)}{s}=(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s})$$

$$(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})\cdot(b_1,b_2,b_3)=\nabla f\cdot\vec{b}=\text{grad } f\cdot\vec{b}$$

Skalarno polje f se v točki T najhitreje spreminja v smeri

$$\text{grad}f|_T$$

19. **Potencial - potencialna funkcija vektorskega polja**

Nekatera vektorska polja lahko zapišemo kot gradient nekega skalarnega polja, torej

$$\vec{v}=\text{grad}f$$

Taka polja potem imenujemo potencialno vektorsko polje, skalarno funkcijo f pa potencial.

Vektorsko polje je potencialno, če je rotor vektorskega polja enak nič

$$\text{rot } v=0$$

20. **Divergenca vektorskega polja**

Divergenca je operator, ki vektorskemu polju priredi skalarno polje s predpisom

$$\text{div}\vec{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Divergenco zapišemo z operatorjem nabla kot $\nabla\cdot\vec{v}$.

Trditev

Izračunajmo sedaj divergenco gravitacijskega vektorskega polja

$$\vec{p}=-c\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Vemo da je $\vec{p}=\text{grad } f=\text{grad } c\frac{1}{r}$, torej je div $\vec{p}=\Delta c\frac{1}{r}$. ($\Delta$ = Laplace). Računamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\, x}\Big(-c\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\Big) &= -c\,\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-x\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\\ &= -c\,\frac{r^3-3x^2r}{r^6}=-v\frac{r^3-3x^2}{r^5}\end{aligned}$$

Sledi:

$$\text{div }\vec{p}=-\frac{c}{r^5}(r^2-3x^2+r^2-3y^2+r^2-3z^2)=-\frac{c}{r^5}(3r^2-3(x^2+y^2+z^2))=0$$

Dobimo div $\vec{v}=0$ oziroma $\Delta c\frac{1}{r}=0$.

Definicija

Če za vektorsko polje $\vec{v}$ velja, da je div $\vec{v}=0$, potem pravimo da je $\vec{v}$ solenoidalno.

21. **Rotor vektorskega polja**

Naj bo $\vec{v}$ 'lepo' vektorsko polje $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) : D \mapsto \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Potem je rotor preslikava, ki vektorsko polje preslika v neko drugo vektorsko polje dano s predpisom

$$\text{rot}\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Z operatorjem nabla se rotor zapiše rot $\vec{v} = \nabla \vec{v}$.

<u>Trditev</u>

$$\text{rot}\Big(\text{grad}\ f\Big) = \vec{0}$$

22. **Laplaceov operator**

Laplaceov operator skalarno funkcijo f preslika v skalarno funkcijo

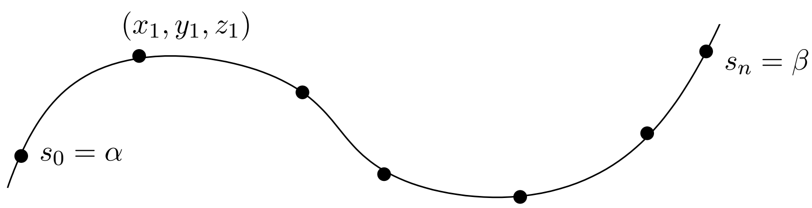
$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

Parcialno diferencialno enačbo $\Delta f = 0$ imenujemo Laplaceova diferencialna enačba.

Laplaceov operator lahko zapišemo z operatorjem nabla kot $\Delta = \nabla \cdot \nabla$.

23. **Krivuljni integral prve vrste**

Naj bo $\vec{r} = \vec{r}(s)$ krivulja v prostoru $\mathbb{R}$ dana v parametrični obliki in parametrizirana z naravnim parametrom. Dana naj bo še sklarna funkcija $f : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, pri čemer je lahko D kar enako krivulji.



Slika 5: Skica k krivuljnem integralu 1. vrste

Krivuljo $\vec{r}(s)$ razdelimo na manjše dele, na vsakem delu si izberemo neko vrednost. Definiramo integralsko vsoto

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \qquad \underbrace{(s_k - s_{k-1})}_{s \text{ naravni parameter, } (\vec{r}(s_k)) - \vec{r}(s_{k-1}))\ \mathrm{d}r}$$

Če obstaja limita integralskih vsot, ko gre $n \to \infty$ in $s_k - s_{k-1} \to 0$ za vsak k, potem to limito imenujemo krivuljni integral prve vrste in pišemo

$$\int_C f(x, y, z)\ \mathrm{d}s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta s \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)(s_k - s_{k-1})$$

Neposredno iz definicije sledi, da za krivuljni integral veljajo podobne lastnosti kot za ostale integrale

$$\int_C f\ \mathrm{d}s + \int_C g\ \mathrm{d}s = \int_C (f+g)\ \mathrm{d}s$$

$$\int_C c\cdot f\ \mathrm{d}s = c\int_C f\ \mathrm{d}s$$

$$\int_{\substack{C_1\bigcup C_2\\ C_1\bigcap C_2=\emptyset}} f\ \mathrm{d}s = \int_{C_1} f\ \mathrm{d}s + \int_{C_2} f\ \mathrm{d}s$$

Če je krivulja izražena z nekim parametrom t, torej

$$\begin{array}{lll} x = x(t) & \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & \mathrm{d}x = \dot{x}\mathrm{d}t \\ y = y(t) & & \\ z = z(t) & & \end{array}$$

Potem dobimo: $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\ \mathrm{d}t$. Sledi

$$\int_\alpha^\beta f(x(s),y(s),z(s))\ \mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\ \mathrm{d}t$$

Opomba

Smer integriranja je določena z izbiro parametra, s katerim je parametrizirana krivulja. Po krivulji se premikamo v smeri naraščujočega parametra.

24. **Krivuljni integral druge vrste**

Naj bo krivulja $\vec{r}$ dana v parametrični obliki, torej $\vec{r} = \vec{r}(t)$ in naj bo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorsko polje, definirano vsaj na krivulji $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Krivuljni integral druge vrste je potem definiran kot

$$\int_C \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{s} = \int_a^b (v_1(t), v_2(t), v_3(t)) \cdot \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\ \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b (v_1(t), v_2(t), v_3(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))\ \mathrm{d}t = \underbrace{\int_a^b (v_1(t)\dot{x}(t) + v_2(t)\dot{y}(t) + v_3(t)\dot{z}(t))\ \mathrm{d}t}_{\text{skalarni produkt vektorskega polja s tangento}}$$

25. **Greenova formula**

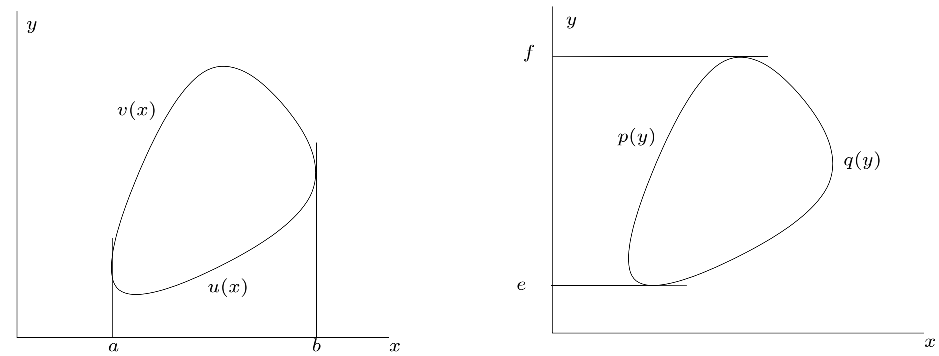
Naj bo C odsekoma gladka sklenjena krivulja v ravnini (x, y). Naj bosta f in g parcialno zvezno odvedljivi funkciji na omejenem območju D, katerega rob je krivulja C. Potem velja

$$\oint_C f\ \mathrm{d}x + g\ \mathrm{d}y = \iint_D (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Integriramo v pozitivni smeri. Torej Greenova formula povezuje integral druge vrste in dvojni integral. Krivulja C je sklenjena in je rob območja D.

Skica dokaza

Greenove formule samo za 'lepa' območja, ki jih lahko preprosto opišemo z dvema funkcijama



Slika 6: Greenova formula

Izračunajmo integral

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \,\mathrm{d}x \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \int_a^b (f(x,v(x)) - f(x,u(x)))\,\mathrm{d}x = \star$$

$\vec{r}_1(t) = (t, u(t))$... spodnji del območja parametriziran s t
$\vec{r}_2(t) = (t, v(t))$... zgornji del območja parametriziran s t

$$\begin{aligned}\star &= \int_a^b f(x,v(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,u(x))\,\mathrm{d}x = -(\int_a^b f(x,u(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,v(x))\,\mathrm{d}x) \\ &= -(\int_{C_1} f\,\mathrm{d}x + \int_{C_2} f\,\mathrm{d}x) = -\oint_C f\,\mathrm{d}x \qquad (3)\end{aligned}$$

Podobno izpeljemo, da je

$$\iint_D \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_c g\,\mathrm{d}y \qquad (4)$$

Steštejemo enačbo(3) in enačbo (4) ter dobimo Greenovo formulo.

26. **Neodvisnost krivuljnega integrala od poti**

Krivuljni integral druge vrste $\int_C \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_C v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z$ je neodvisen od poti, če je njegova vrednost enaka ne glede na to po kateri (poti) krivulji pridemo iz začtne v končno točko

Izrek

Naj bo $\vec{v}$ zvezno vektorsko polje na območju D. Potem je integral $\int_C \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r}$ neodvisen od poti na območju D natanko tedaj, ko je $\vec{v}$ na D potencialno vektorsko polje. Torej $\vec{v} = \operatorname{grad} u$, za neko skalarno polje u.

Opomba

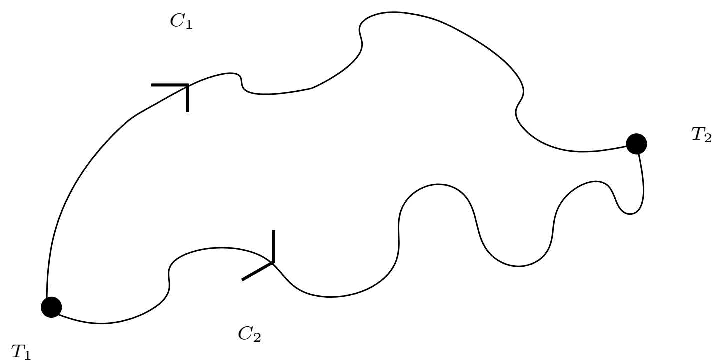
Izraz $v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z$ je eksakten, če obstaja skalarno polje u, da je $\mathrm{d}u = v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z$, tako skalarno polje pa obstaja, če je u potencial vektorskega polje $\vec{v}$. Sledi, da je

$$\int_C \operatorname{grad} u\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_C \mathrm{d}u = u|_{T_z}^{T_k}$$

Izrek

Krivuljni integral $\int_C \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{r}$ je na območju D neodvisen od poti natanko tedaj, ko je krivuljni integral $\oint_C \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{r}$ po zaključeni krivulji C_1 z območja D enak 0 za vsako sklenjeno krivuljo C_1 iz D.

Dokaz - je preprost



Slika 7: K neodvisnosti krivuljnega integrala od poti

$$\int_{C_1} \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_2} \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{r} \Rightarrow \int_{C_1} \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{r} - \int_{C_2} \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

Sledi

$$-\int_{-C_1} \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{r} - \int_{C_2} \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0 \Rightarrow \oint_c \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

27. **Ploskovni integral 1. vrste**

Naj bo S gladka ploskev in naj bo v vsaki točki definirana tangentna ravnina. Naj bo S tudi orientirana ploskev (ploskev ima dve strani, na drugo stran pridemo samo čez rob).

Naj bo u skalarno polje definirano na S. Potem S razdelimo na manjše parcele in definiramo integralsko vsoto

$$\sum_{i=1}^{n} u(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathrm{pl}(S_i)$$

Če obstaja limita integralskih vsot, ko gre $n \to \infty$ in površina parcel proti nič, potem to limito imenujemo ploskovni integral 1. vrste in pišemo

$$\iint_s u\, \mathrm{d}S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathrm{pl}(S_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} u(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathrm{pl}(S_i)$$

Izračun ploskovnega integrala:

Ploskev S najprej parametriziramo in upoštevamo, da izračunamo površino po formuli

$$\mathrm{pl}\, S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Torej je

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Ploskovni integral 1. vrste, pa s pomočjo dvojnega integrala izračunamo po formuli

$$\iint_S f\,\mathrm{d}S = \iint_D f\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

28. **Ploskovni integral 2. vrste**

Pri računanju tega integrala, ki ga imenujemo tudi pretok vektorskega polja skozi ploskev S, na pretok vpliva samo tisti del vektorskega polja, k je v smeri normale na ploskev, torej pravokotna projekcija vektorskega polja na normalo.

Ploskovni inegral druge vrste je potem

$$\iint_S \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{\nu}\,\mathrm{d}S$$

$\vec{\nu}$ je enotska normala na ploskev. Ko ploskev S parametriziramo dobimo

$$\iint_D \vec{v}\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_D \vec{v}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_D \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

V posebnem primeru, ko ploskev S parametriziramo s spremenljivkama x in y, dobimo

$$\iint_S \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{v}\frac{(p, q, -1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \vec{v}(p, q, -1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

29. **Gaussov izrek**

Naj bo S gladka zaključena ploskev in naj bo V območje v prostoru, ki ga ta ploskev omejuje. Naj bo $\vec{v}$ odvedljivo vektorsko polje, definirano na območju V z robom S. Potem velja

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_S \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

Ideja dokaza Gaussovega izreka, ko je S še posebaj lepa ploskev, to pomeni, da vsaka premica vzporedna z eno izmed koordinatnih osi, seka ploskev S največ dvakrat (krogla). Oglejmo si izraz

$$\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\overline{S}}\Big(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial v_3}{\partial z}\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\overline{S}}(v_3(x, y, z_2(x, y)) - v_3(x, y, z_1(x, y)))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \underbrace{\iint_{S_2} v_3 n_3 \mathrm{d}S}_{\text{zgornji del ploskve}} - \underbrace{\iint_{S_1} v_3 n_3 \mathrm{d}S}_{\text{spodnji del ploskve}} = \iint_S v_3 n_3 \mathrm{d}S$$

Podobno dobimo

$$\iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S v_1 n_1 \mathrm{d}S$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_2}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S v_2 n_2 \mathrm{d}S$$

Izraze seštejemo in dobimo Gaussovo formulo.

30. **Stoeksov izrek**

Naj bo C gladka sklenjena krivulja, ki omejuje neko ploskev S v prostoru. Naj bo $\vec{v}$ odvedljivo vektorsko polje. Potem je

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{v}\ \mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{r}$$

Krivulja C je rob ploskve S.

Ploskev S projeciramo na ravnino (x, y) in dobimo neko območje v ravnini. Za to območje lahko uporabimo Greenovo formulo. Podobno naredimo projekciji na (x, z) in (y, z) ravnini in uporabimo Greenovo formulo tudi na teh projekcijah. Te Tri Greenove formule 'seštejemo' in dobimo Stoeksovo formulo.

31. **Zveza med Stokesovim izrekom in Greenovo formulo**

Greenova formula je poseben primer Stoeksove formule.

Naj bo $\vec{v} = (f(x, y), g(x, y), 0)$. Ploskev S naj bo območje v ravnini (x, y). Oglejmo si, kaj pravi Stokesov izrek v tem primeru

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{v}\ \underbrace{\mathrm{d}\vec{S}}_{\vec{v}\ \mathrm{d}S} = \oint_C \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{r} = \oint_c f(x, y)\ \mathrm{d}x + g(x, y)\ \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(x, y) & g(x, y) & 0 \end{vmatrix} = (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})$$

Sledi

$$\iint_S (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_c f(x, y)\ \mathrm{d}x + g(x, y)\ \mathrm{d}y$$

32. **Analitična funkcija**

Funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, je analitična v $z_0 \in D$, če je v z_0 odvedljiva, hkrati pa obstaja še neka okolica z_0, tako da je f odvedljiva tudi v vsaki točki iz te okolice.

Denimo, da je funkcija f odvedljiva v točki z_0. Torej v z_0 obstaja limita diferenčnega kvocienta

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Ker obstaja limita, moramo dobiti isto vrednost, neglede na to, po kateri poti se bližamo z_0. Oglejmo si, kaj dobimo če gremo proti z_0 po dveh poteh. (z leve in desne ter od zgoraj in spodaj)

(a) Sprehodimo se vodoravno. Vemo, da je $z = x + iy$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Pri vodoravni poti je $\Delta z = \Delta x$.

Naj bo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ in $z_0 = x_0 + iy_0$. Sledi

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

(b) Sprehodimo se nato $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, pri navpični $\Delta z = i\Delta y$. Sledi

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$
$$= \frac{1}{i}(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Ker moramo v obeh primerih dobiti enak rezultat (saj obstajajo limite diferenčnega kvocienta), je

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Sledi

$$u_x = v_y \quad \text{in} \quad v_x = -u_y$$

Ti dve enačbi imenujemo Cauchy-Riemannov pogoj.

33. **Cauchy-Riemannovi enačbi**

Izrek

Naj bo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funkcija kompleksne spremenljivke. Potem je f analitična funkcija v z_0 natanko tedaj, ko v točki $z_0 = x_0 + iy_0$ velja Cauchy-Riemnov pogoj

$$u_x = v_y \quad \text{in} \quad v_x = -u_y$$

(glej še obrazložitev pri prejšni točki)

34. **Harmonična funkcija** Tisti pogoj.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

35. **Konstrukcija funkcije** e^z

$$f(z) = e^z = e^x(\cos x + i \sin x)$$

Zahteve funkcije:

- $e^z = e^x$ za vsa kompleksna števila z, ki imajo imaginarni del enak 0 (torej se kompleksna in eksponentna funkcija ujema z eksponentno funkcijo realnih števil)

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z = e^z$
- e^z je analitična funkcija

Zapišimo

$$e^z = u(x,y) + iv(x,y)$$

Odvajamo in dobimo (kar sledi iz druge zahteve)

$$u_x(x,y) + iv_x(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Sledi

$u_x = u$  in $v_x = v$  $\Longrightarrow u(x,y) = G(y)e^x$

Sedaj upoštevamo tretjo zahtevo, torej za u in v velja Cauchy-Riemanov pogoj $u_x = v_y$  in $u_y = -v_x$

$$v = v_x = -u_y = -G'(y)e^x$$

$v = ($  $)v_x = -u_y = -G'(y)e^x$

$$v_y = v_{xy} = -G''(y)e^x$$

$v_y = ($  $)u_x = ($  $)u = G(y)e^x$

Sledi: $G(y)e^x = -G''(y)e^x$, torej $G''(y) + G(y) = 0$

$G = A\sin y + B\cos y$

Sledi, da je:

$$e^z = e^x(A\sin y + B\cos y) + ie^x(-A\cos y + B\sin y)$$

Upoštevamo še, da je $e^z = e^x$ za $y = 0$, torej

$$e^z = e^x(A\cdot 0 + B\cdot 1) + ie^x(-A\cos y + B\sin y)$$

$$1 = B - iA \implies A = 0\ ,\ B = 1$$

Sledi:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Velja:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

$$|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Opazimo da je

$$e^{i\varphi} = e^{i\varphi + 2k\pi}$$

Torej $f(z) = e^z$ ni injektivna.

36. **Funkcije** $\cos z$**,** $\sin z$**,** cosh$z$**,** sinh$z$ **in** $\log z$

- Kaj je z inverzom $f(z) = e^z$?? Kaj bi bil logaritem kompleksne spremenljivke? Zapišemo

  $$w = \log z$$

  Potem mora veljati $e^w = z$
  Sledi
  (a) $e^u = |z|$ in zato $u = \log |z|$
  (b) $e^{iv} = e^{i\varphi}$ in zato $v = \varphi + 2k\pi$
  Sledi

  $$\log z = \log |z| + i(\varphi + 2k\pi)$$

  To ni funkcija, saj je k poljuben, torej ni enolično določena. Če vzamemo $k = 0$, dobimo glavno vrednost logaritma. To je inverzna funkcija funkcije e^z zožene na območje, kjer je e^z injektivna. Definiramo potenco kompleksnega števila z^w, pri čemer $z, w \in \mathbb{C}$. Potem je definarna s pomočjo eksponentne funkcije

  $$z^w = e^{w \log z}$$

- $$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

- $$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

- $$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

- $$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

- $$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Veljajo vse običajne zveze med temi funkcijami.

37. **Integracija v kompleksni ravnini ne nujno analitičnih funkcij**

Naj bo C 'gladka, lepa' krivulja v kompleksni ravnini. Naj bo f funkcija kompleksne spremenljivke. Njen integral po krivulji C definiramo s pomočjo integralskih vsot

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

Če obstaja limita integralskih vsot, ko gre $\Delta z_k \to 0$ in $n \to \infty$, potem jo imenujemo integral funkcije kompleksne spremenljivke po krivulji C in pišemo

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z$$

Kako izračunati integral $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z$?

Zapišimo

$$\begin{aligned} z = &\quad x + iy \rightsquigarrow \mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y \\ f(z) = &\qquad u(x,y) + iv(x,y) \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\ \mathrm{d}z &= \int_C (u(x,y) + iv(x,y))(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \\ &= \int_C u(x,y)\ \mathrm{d}x + iv(x,y)\mathrm{d}y + i\int_C v(x,y)\ \mathrm{d}x + u(x,y)\ \mathrm{d}y \\ &= \int_C (u(x,y) - v(x,y))\ \mathrm{d}\vec{r} + i\int_C (v(x,y) - u(x,y))\ \mathrm{d}\vec{r} \end{aligned}$$

Dobimo dva krivuljna integrala druge vrste, ki ga rešimo tako, da krivuljo parametriziramo, se pravi $x = x(t)$, $y = y(t)$, upoštevamo $\mathrm{d}x = \dot{x}\ \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = \dot{y}\ \mathrm{d}t$ in dobimo običajni integral

$$\int_\alpha^\beta (u(x(t),y(t))\dot{x} - v(x(t),y(t))\dot{y})\ \mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta (v(x(t),y(t))\dot{x} + u(x(t),y(t))\dot{y})\ \mathrm{d}t$$

Na tak način znamo izračunati integral funkcije kompleksne spremenljivke. V tem primeru **ni nujno**, da je funkcija zelo lepa (t.j. analitična).

Naprimer na tak način zamo izračunati $\int_C \overline{z}\ \mathrm{d}z$ po neki krivulji C.

Velja:

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z + \int_C g(z)\ \mathrm{d}z = \int_C (f(z) + g(z))\ \mathrm{d}z$$

$$\int_C \alpha \cdot f\ \mathrm{d}s = \alpha \int_C f\ \mathrm{d}s$$

$$\int_{\substack{C_1 \bigcup C_2 \\ C_1 \bigcap C_2 = \emptyset}} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\ \mathrm{d}z$$

38. **Integral funkcije** (5)

$$\frac{1}{(z - z_0)^n} \tag{5}$$

Izračunajmo, pri tem bomo uporabili formulo $z - z_0 = re^{i\varphi}$, kjer je C krožnica s polmerom r in središčem v z_0 in $\mathrm{d}z = re^{i\varphi} i\ \mathrm{d}\varphi$

$$\oint_{C_0} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}\ \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)^{n+1} re^{i\varphi} i\ \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{r^n} i \int_0^2 2\pi e^{-in\varphi}\ \mathrm{d}\varphi = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$$

Če je $n \neq 0$, dobimo kot rezultat integrala sinus in kosinus, ki sta periodični funkciji s periodo 2π. Torej je v tem primeru integral enak 0.

Če je $n = 0$, dobimo $\frac{i}{r}\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi i$.

Torej je integral, sedaj napisano tako kakor v vprašanju enak

$$\oint_{C_0} \frac{1}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{če } n = 1 \\ 0 & \text{če } n \neq 1 \end{cases}$$

Območje je enostavno povezano, če lahko sklenjeno krivuljo skrčimo v točko. Enostavna sklenjena krivulja sama sebe ne seka.

39. **Cauchy-jeva integralska formula**

Izrek

Naj bo f analitična funkcija na območju D in naj bo f' zvezna na robu območja D, ki naj bo sklenjena krivulja C. Naj bo $z_0 \in D$. Potem je

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z$$

Opomba

Izrek pove, da je katerakoli vrednost analitične funkcije f na območju D natanko določena z vrednostmi funkcije na robu območja C.

Dokaz

Ker je funkcija

$$\frac{f(z)}{z-z_0}$$

analitična povsod na območju med krivuljo C in krožnico C_0 s središčem v z_0, hitro sledi, da je

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z = \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z$$

Vemo, da je

$$\oint_{C_0} \frac{1}{z-z_0} \, \mathrm{d}z = 2\pi i$$

Sledi

$$\oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z = \oint_{C_0} \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z = \underbrace{\oint_{C_0} \frac{f(z_0)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z}_{f(z_0)2\pi i} + \oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z \qquad (6)$$

Pokažimo, da je integral

$$\oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z = 0$$

Ocenimo, in pri drugem $\leq$ upoštevamo da je f analitična, torej zvezna, če krogec $f(z) - f(z_0) \leq \varepsilon$ in C_0 dovolj majhen

$$|\oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z| \leq \oint_{C_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}\,\mathrm{d}z \leq \oint_{C_0} \frac{\varepsilon}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{\varepsilon}{r}\oint_{C_0}\,\mathrm{d}z = \varepsilon 2\pi$$

Če je polmer r krožnice C_0 dovolj majhen potem lahko ocenimo, da je

$$|\oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z| \leq \varepsilon 2\pi$$

Za pojubno majhen ε, torej

$$\oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 0$$

Sledi po enačba (6), da je

$$\oint_{C} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0) \cdot 2\pi i$$

torej, je končna formula enaka

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

40. **Integracijska formula za** $f^{(n)}(z_0)$

<u>Izrek</u>(Cauchyjeva integralska formula, posplošena)

Če je f analitična funkcija na 'lepem' območju D z robom C, potem za poljubno notranjo točko $z_0 \in D$ velja

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

Torej so za analitično funkcijo f analitične tudi vse funkcije $f^{(n)}$.

Torej je analitčna funkcija, torej odvedljiva, je avtomatično neskončnokrat odvedljiva.

<u>Skica dokaza</u>

Računamo

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\Big(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\Big) \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i \Delta z}\oint_{C} \frac{f(z) \cdot (z - z_0) - f(z) \cdot (z - z_0 - \Delta z)}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)}\,\mathrm{d}z \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i \Delta z}\oint_{C} \frac{f(z)\Delta z}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,\mathrm{d}z = f'(z_0)
\end{aligned}$$

Na enak način izpeljemo formulo za višje odvode.

41. **Laurentova vrsta**

(a) Funkcijska vsta funkcije kompleksne spremenljivke je oblike

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + ...$$

Konvergenčni radij

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right|$$

(b) Taylorjeva vrsta funkcije kompleksne spremenljivke

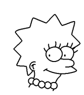
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad f(z)\text{...analitična}$$

(c) Laurentova vrsta

Naj bo f analitična na dveh koncentričnih krožnicah C_1 in C_2 ter na kolobarju med njima.

Potem se da funkcija f zapisati v obliki Laurentove vrste

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n}_{} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z - z_0)^n}}_{}$$

Pri čemer so

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(w)(w - z_0)^{n-1} \,\mathrm{d}w$$

krivulja C pa je skelnjena krivulja, znotraj kolobarja, ki objema singularnost z_0.

Prvi del Laurentove vrste () imenujemo regularni del, drugi del () pa glavni del Laurentove vrste.

Člen c_1 v Laurentovi vrsti imenujemo residiuum funkcije f v točki z_0 okrog katere smo razvili Laurentovo vrsto.

Laurentovo vrsto lahko zapišemo tudi v obliki

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Pri čemer je $a_{-n} = c_n$, torej

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w$$

42. **Residdum, singularnosti vrste**

Residuum funkcije f v točki z_0 je koeficient a_{-1} pri členu $(z-z_0)^{-1}$ pri razvoju funkcije v Laurentovo vrsto okrog točke z_0.

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

Pogoj: analitičnost funkcije f na koncentričnih krogih.

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1}$$

Denimo da ima funkcija f v točki z_0 singularnost, potem ločimo tri vrste singularnosti.

(a) Če so vsi členi c_n, $n = 1, 2, 3, ...$ pri razvoju funkcije f v Laurentovo vrsto v okolici z_0, enaki nič, potem je z_0 odpravljiva singularnost.

(b) Če so vsi členi c_n, $n = n_0, n_1, ..$ enaki nič, $c_{n1} \neq 0$, je v z_0 pol n-tega reda.

(c) Če je neskončno členov c_n različnih od 0, je v z_0 bistvena singularnost.

Računanje residuov:

(a) Če ima funkcija f v točki z_0 pol prve stopnje, računamo

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$

(b) Če ima funkcija f v točki z_0 pol m-te stopnje, računamo

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \big((z-z_0)^m f(z)\big)$$

43. **Izrek o residuih**

Naj bo f analitična na območju D razen v končno monogo singularnih točkah znotraj območja D. Potem je

$$\oint_{C=\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_i} f(z)$$

z_i...singularnost znotraj krivulje

44. **Računanje realnih integralov s pomočjo integracije v kompleksnem**

(a) Integral racionalne funcije izrazov $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Pri čemer je R racionalna funkcija, naprimer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi - 1}{2 + \sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \tag{7}$$

Take integrale lahko izračunamo s pomočjo izreka o residuumih. Uvedemo novo spremenljivko $z = e^{i\varphi} \rightsquigarrow \mathrm{d}z = e^{i\varphi} i \, \mathrm{d}\varphi$ in zato

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} \end{aligned}$$

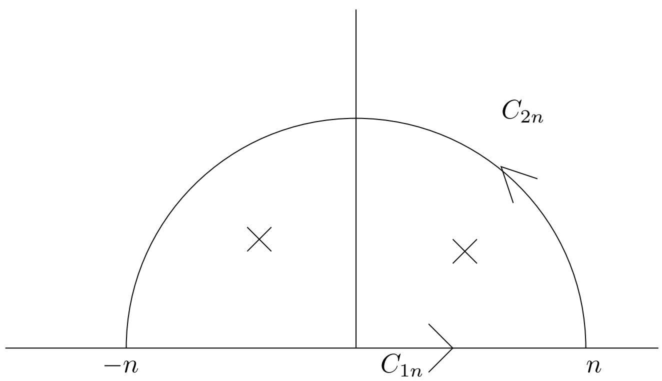
Pomenbno, ker integriramo od 0 do 2π, v kompleksnem integriramo $e^{i\varphi}$ od 0 do 2π, to pa je ravno krožnica s polmerom 1, torej zaključena krivulja. V konkretnem primeru (enačba 7) dobimo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi - 1}{2 + \sin\varphi} \, \mathrm{d}\varphi = \oint_C \frac{(\frac{z+z^{-1}}{2})^2 - 1}{2 + (\frac{z+z^{-1}}{2i})} \frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

(b) Računanje integralov racionalne funkcije, pri čemer je stopnja v imenovalcu vsaj za 2 večja od stopnje v števcu, na intervalu $[-\infty, \infty]$. Naprimer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2x} \, \mathrm{d}z$$

Pišemo $z = x$ in definiramo krivuljo C_n na naslednji način (slika 8).



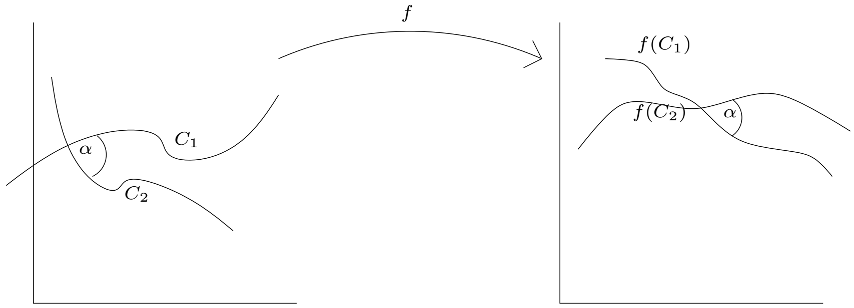
Slika 8: Skica k ločni dolžini krivulje

C_n je zaključena krivulja, torej je integral $\oint_{C_n} f(z) \, \mathrm{d}z$ enak vsoti residuumov znotraj krivulje.
Razdelimo krivuljo C_n na dva dela C_{1n} in C_{2n}. Potem je

$$\underbrace{\oint_{C_n} f(z) \, \mathrm{d}z}_{\sum \text{Res zgornje polravnine}} = \underbrace{\int_{C_{1n}} f(z) \, \mathrm{d}z}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x} + \underbrace{\int_{C_{2n}} f(z) \, \mathrm{d}z}_{0}$$

45. **Konformne preslikave**

Konformna preslikava je preslikava $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, ki ohranja kote in orientacijo.



Slika 9: Konformna preslikava

Naj bo f analitična funkcija. Potem je f konformna preslikava, razen v točkah, kjer je $f'(z) = 0$.

Primeri konforminh preslikav:

- $f(z) = w_0 + z$, translacija
- $f(z) = ze^{i\varphi}$, rotacija
- $f(z) = r \cdot z$, razteg
- $f(z) = \frac{1}{z}$, inverzija

46. **Lomljena linearna transformacija**

Möbesuva ali lomljena linearna transformacija je preslikava oblike

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

pri čemer $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Izrek

Möbisova preslikava je kompozitum translacija, rotacije, raztega in inverzije.

Möbisuva preslikava preslika množico krožnic in premic v množico krožnic in premic.