

MATEMATIKA II

1 UNI

Zapiski avditornih vaj

Šolsko leto 2007 / 2008
Izvajalec Melita Hajdinjak

Avtor dokumenta Aljoša Praznik
Skeniranje Blaž Potočnik



UREJANJE DOKUMENTA

VERZIJA	01.00
DATUM	27.11.2010

OPOMBE

Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

glavna
diagonala

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 + 0 + 0 - 4 - 0 - 0 = -3$$

1. Izračunaj determinanto

$$a.) \begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1+a^2} & \frac{1+a^2}{1+a} \end{vmatrix} = \frac{1+a^2}{1-a} \cdot \frac{1+a^2}{1+a} - \frac{2a}{1-a^2} \cdot \frac{2a}{1-a^2} = \frac{(1+a^2)^2}{1-a^2} - \frac{4a^2}{(1-a^2)^2} =$$

$$= \frac{(1-a^2)(1+a^2) - 4a^2}{(1-a^2)^2}$$

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 1, -1$$

$$b.) \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 2+i \\ 1-i & 0 & 1+2i \\ 2-i & 1-2i & 0 \end{vmatrix} = R=2$$

2. Za katere vrednosti t je determinanta enaka 0?

$$a. \begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t+4 \end{vmatrix} = (t-1)(t+5)(t+4) + 54 + 54 - 18(t+5) + 18(t-1) + 5(t-4) =$$

$$= (t-1)(t+5)(t+4) + 108 - 18t - 90 + 18t - 18 + 5t - 20 =$$

$$= (t-1)(t+5)(t+4) + 9(t-4)$$

$$= (t-4)(9 + (t-1)(t+5))$$

$$= (t-4)(9 + t^2 + 5t - t - 5) = (t-4)(t^2 + 4t + 4) =$$

$$= (t-4)(t+2)^2 \quad t=4 \quad t=-2$$

3. Za katere vrednosti x je det. enaka 0?

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & x^4 & x^6 \end{vmatrix}$$

$$R: x_1=0, x_2=1, x_3=-1$$

$$4. 24x^4 - 22x^3 - 11x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$R: x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}, x_3=-\frac{1}{4}, x_4=\frac{2}{3}$$

Razvoj determinante po vrstici ali stolpcu

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

A_{ij} — poddeterminanta, ki jo dobimo tako, da prečtamo i -to vrstico in j -ti stolpec. (vr. in st. elementa a_{ij})

Razvoj po i -ti vrstici

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Razvoj po j -tem stolpcu

Pravila za rač. determinant

• det. je enaka 0, če:

- ① kakšna vrstica = 0 ali kakšen stolpec = 0
- ② 2 vrstici ali 2 stolpca enaka
- ③ vrstica je večkratnik kakšne druge vrstice ali stolpec je večkratnik kakšnega drugega stolpca

• det. zamenja predznak, če zamenjamo 2 vrstici oz. 2 stolpca

• det se ne spremeni, če:

- ① če jo transponiramo (= zrkaliti čez glavno diagonalo, zamenjati vlogo vrstic in stolpcev)
- ② kaki vrstici prištejemo večkratnik kake druge vrstice oz. kakemu stolpcu prištejemo večkratnik kakšnega drugega stolpca

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{isto velja za stolpce}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{isto velja za stolpce}$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \boxed{A_2} & \\ 0 & & \boxed{A_n} \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

www.stromar.si

bločna det

1	1	0	0	0	0	0
0	1	6	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	0	0	1	0	3	1
0	0	0	3	1	2	6
0	0	5	5	1	5	
0	0	0	2	1	3	4

princ. bločne det

5. Izračunaj determinante, tako da jih razvijеш po stolpcu ali vrstici.

$$a.) \begin{vmatrix} +1 & -2 & +1 \\ -5 & 0 & -2 \\ +3 & -1 & +4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 14 - 1 \cdot (-7) = -21$$

$$b.) \begin{vmatrix} 15 & 25 & 40 \\ 1 & 3 & 28 \\ 5 & 2 & 24 \end{vmatrix} = 2620$$

$$c.) \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1044 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 100 & 327 \\ 1044 & 100 & 443 \\ -342 & 100 & 621 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 246 & 10 & 327 \\ 1044 & 10 & 443 \\ -342 & 1 & 621 \end{vmatrix}$$

2. stolpec

lahko odštejemo 3. st.

iz 2. st.
izpostavimo 100

$$= 100 \begin{vmatrix} +246 & -1 & 327 \\ -768 & +0 & 116 \\ -588 & -0 & 294 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} -1 & 768 & 116 \\ -588 & 294 & 0 \end{vmatrix} =$$

2. vrst - 1. vrst.

3. vrst - 1. vrst.

razvoj po
2. stolpcu

$$= -100 \cdot 294 \begin{vmatrix} 768 & 116 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -100 \cdot 294 (768 + 232) = -100 \cdot 294 \cdot 1000 = -29400000$$

iz 2. vrst.
izpostavimo 294

6. Izračunaj determinante

$$a.) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

3.vr. + 2x2 vrstica

4.vr. - 2x3 vrstica

$$b.) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 118$$

$$c.) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Kramerjevo pravilo za reševanje sistemov linearnih enačb

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

če je det. sistema

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ potem so rešitve sistema}$$

$x_j = \frac{D_j}{D}$, kjer je D_j det., ki jo dobimo tako, da j-ti stolpec v det. D zamenjamo z vektorjem $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

7. Reši sistem s pomočjo Kramerjevega pravila

$$3y + 2x = z + 1$$

$$2x + 3y - z = 1$$

$$3x + 2z = 8 - 5y$$

$$3x + 5y + 2z = 8$$

$$3z - 1 = x - 2y$$

$$-x + 2y + 3z = 1$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -22$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -66$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 22$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -44$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-66}{-22} = 3$$

$$y_1 = \frac{D_2}{D} = \frac{22}{-22} = -1$$

$$z_1 = 2$$

8. Za vezje na sliki poišči tokove I_1 , I_2 in I_3 v posameznih tokotrojih.

$$R_1 = 1 \Omega$$

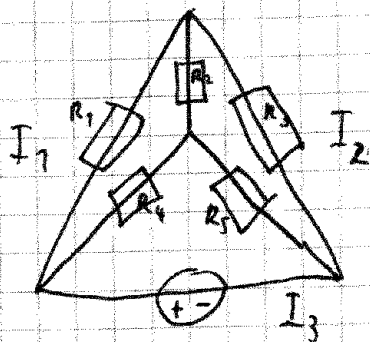
$$R_2 = 2 \Omega$$

$$R_3 = 2 \Omega$$

$$R_4 = 2 \Omega$$

$$R_5 = 3 \Omega$$

$$U = 1,5 \text{ V}$$



$$U = I \cdot R$$

$$I_1 = 0,52 \text{ A}$$

$$I_2 = 0,49 \text{ A}$$

$$I_3 = 0,8 \text{ A}$$

Skalarni produkt vektorjev

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

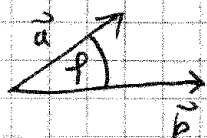
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$$

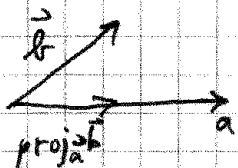
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}|$$



Skalarni produkt komp. vekt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + a_3 \vec{b}_3$$

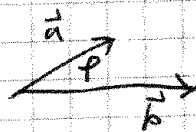
9. Izračunaj skalarni produkt

$$(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}), \text{ kjer je } \vec{a} \perp \vec{b}, |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3.$$

$$R: 13$$

10. Izračunaj skalarni produkt

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b}), \text{ kjer je } \varphi = \frac{\pi}{3}, |\vec{a}|=4, |\vec{b}|=6.$$



$$\begin{aligned} (3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b}) &= 15\vec{a}\vec{a} - 18\vec{a}\vec{b} - 10\vec{a}\vec{b} + 12\vec{b}\vec{b} \\ &= 15 \cdot 4^2 - 18 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 6^2 = 336 \end{aligned}$$

11. Dano sta vektorja $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ in $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
Položi kot med njima ter pravokotni projekciji enega na drugega.

$$\vec{u} = (2, 2, 0)$$

$$\vec{v} = (2, 1, 1)$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 + 2 + 0 = 6$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4 + 4 + 0} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\cos \varphi = \frac{6}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

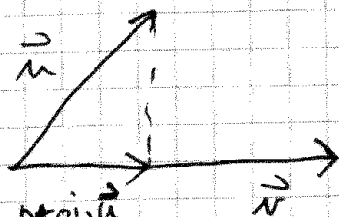
$$\vec{u} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}|$$

$$|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{u}| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{u} = |\text{proj}_{\vec{u}} \vec{u}| \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \right) \leftarrow \text{enotska smer } \vec{u} = \sqrt{2} \cdot \frac{(2, 2, 0)}{2\sqrt{2}} = (1, 1, 0)$$

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = |\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}| \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(2, 2, 0)}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4} (2, 2, 0) = \frac{3}{2} (1, 1, 0)$$



12. Dama sta vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$. Izračunaj kot med njima

$$(\vec{p} + 3\vec{q}) \perp (7\vec{p} - 5\vec{q})$$

$$(\vec{p} - 4\vec{q}) \perp (7\vec{p} - 2\vec{q})$$

$$R: \frac{\pi}{3}$$

25.02.2008

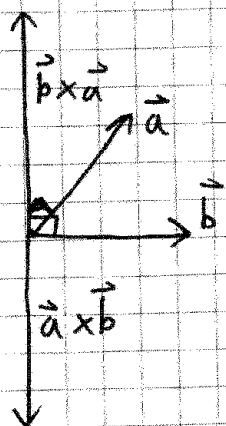
Vektorski produkt

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (a_2 b_3 - b_2 a_3, -(a_1 b_3 - b_1 a_3), a_1 b_2 - b_1 a_2)$$



SMER: $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$; desni vijak

DOLŽINA: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je ploščina paralelograma, ki ga $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} : \text{antikomutativnost}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

1. Izračunaj vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ in $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \right) = (7, -8, 13)$$

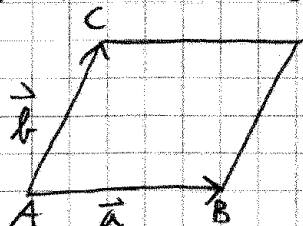
$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = (-7, 8, -13)$$

2. Izračunaj ploščino paralelograma ki ga oklepata vektorja $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ in $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$

$$R: 49$$

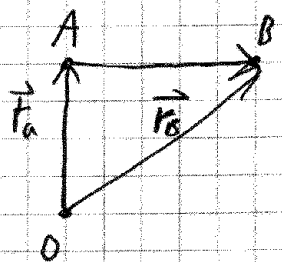
3. Izračunaj ploščino trikotnika z oglišči $A(1, 0, 1)$, $B(2, 2, 1)$, $C(4, -3, -2)$. Določi še kot α .

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} P_{\square}$$



$$\vec{a} = \vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (2, 2, 1) - (1, 0, 1) = (1, 2, 0)$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (4, -3, -2) - (1, 0, 1) = (3, -3, -3)$$



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-9)^2} = \sqrt{36 + 9 + 81} = \sqrt{126} = 3 \cdot \sqrt{14}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-6, 3, -9)$$

$$P_{\Delta} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{3}$$

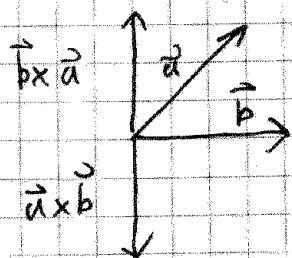
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

$$3\sqrt{14} = \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{3} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{3}}$$

$$\alpha = 104^\circ 58'$$

4. Poišči vektor dolžine 1, ki je pravokoten na vektorja $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ in $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. koliko rešitev ima naloga?



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2)$$

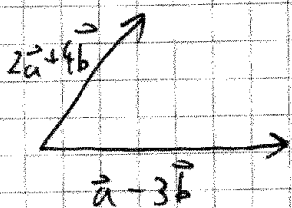
$$\vec{b} \times \vec{a} = (-1, 1, 2)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6}$$

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{(1, -1, -2)}{\sqrt{6}}$$

$$\vec{n}_2 = \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b} \times \vec{a}|} = \frac{(-1, 1, 2)}{\sqrt{6}}$$

5. Kolikšna je ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja $2\vec{a} + 4\vec{b}$ in $\vec{a} - 3\vec{b}$, če je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa je $\pi/6$?

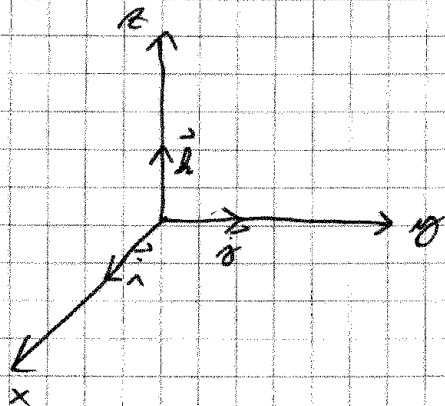


$$p_{\square} = |(2\vec{a} + 4\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})|$$

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + 4\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b}) &= 2\vec{a} \times \vec{a} - 6\vec{a} \times \vec{b} + 4\vec{b} \times \vec{a} - 12\vec{b} \times \vec{b} \\ &= \underset{0}{\downarrow} - 6\vec{a} \times \vec{b} - 4\vec{a} \times \vec{b} - \underset{0}{\downarrow} \\ &= -10\vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

$$p_{\square} = |-10\vec{a} \times \vec{b}| = 10|\vec{a} \times \vec{b}| = 10 \cdot |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6}$$

6. Poenostavi izraz $\vec{i} \times (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j}) + \vec{k} \times \vec{i}$



$$\begin{aligned} & \vec{i} \times \vec{i} - \vec{i} \times 2\vec{j} + \vec{i} \times \vec{k} - \vec{j} \times \vec{i} - \vec{j} \times \vec{k} + \vec{k} \times \vec{i} + \vec{k} \times \vec{j} + \vec{k} \times \vec{i} = \\ & = -\vec{i} \times \vec{k} - 2\vec{j} \times \vec{k} - 2\vec{i} \times \vec{j} + \vec{i} \times \vec{j} = \\ & = \vec{j} - 2\vec{i} - \vec{k} \end{aligned}$$

Mišani produkt

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

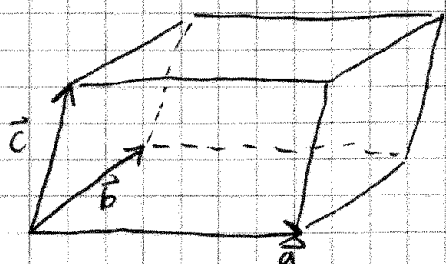
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skalarni} \\ \text{produkt}}}{\vec{a}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vektorski} \\ \text{produkt}}}{(\vec{b} \times \vec{c})}$$

$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \text{volumen paralelepipeda, ki ga oklepajo vektorji } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}.$



$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

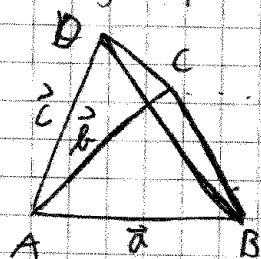
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ komplanarni (ležijo v isti ravnini)}$$

7. Izračunaj volumen paralelepipeda, ki ga oklepajo vektorji $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ in $\vec{c} = 4\vec{j} + \vec{k}$.

$$R: 23$$

8. Izračunaj volumen tristrane piramide z oglišči $A(1, -1, 2)$, $B(4, 3, 2)$, $C(4, 4, 4)$, $D(1, 5, -1)$.

Namig: $V_{\text{piramide}} = \frac{1}{6} V_{\text{paralelepipeda}}$



$$V_{\text{para.}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -45 - 36 + 36 = |-45| = 45$$

$$\vec{a} = \vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (3, 4, 0)$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (3, 5, 2)$$

$$\vec{c} = \vec{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (0, 6, -3)$$

$$V_{\text{pir}} = \frac{1}{6} V_{\text{para.}} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}$$

9. Dani so vektorji $\vec{a} = (x, 1, 4)$, $\vec{b} = (1, -2x, 0)$ in $\vec{c} = (3x, -3, 4)$. Določi parameter x tako, da bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ 1 & -2x & 0 \\ 3x & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & -2x \\ 3x & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2x^2 - 3 + 6x^2 - 1) = 4(4x^2 - 4) = 16(x-1)(x+1) = 0$$

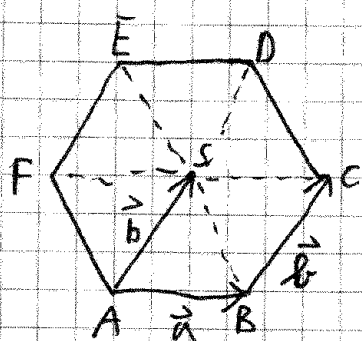
$$R: x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

10. Pokaži, da vektorji $\vec{a} = (m, 1, 1)$, $\vec{b} = (m+2, 1, 1)$ in $\vec{c} = (-m, 1, -1)$ za nobeno vrednost parametra m ne ležijo v isti ravnini.

D.N.

Vektorji v ravnini

1.1. Dan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$. Označimo $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{BC}$. Izrazi z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorje $\vec{AC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, $\vec{BE}$, $\vec{AE}$, $\vec{BF}$ in $\vec{DF}$.



$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{CD} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{AD} = 2\vec{b}$$

$$\vec{BE} = 2 \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{AE} = \vec{b} + \vec{b} - \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{BF} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{a} = \vec{b} - 2\vec{a}$$

$$\vec{DF} = -\vec{a} - \vec{b}$$

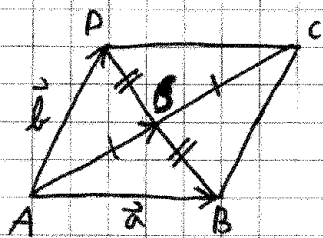
12. Izračunaj ploščino in notranje kote Δ z oglišči $A(5, 4, 2)$, $B(0, 7, -5)$ in $C(3, -2, 1)$.

$$R: p = \frac{1}{2}\sqrt{3402}, \alpha = 90^\circ 59', \beta = 34^\circ 46', \gamma = 54^\circ 15'$$

13. V trikotniku ABC leži točka M na stranici BC , tako da velja $\frac{|BM|}{|MC|} = 2$. Izrazi vektor $\vec{AM}$ z vektorjema $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{AC}$.

$$R: \vec{AM} = \frac{2}{2+1}\vec{b} + \frac{1}{2+1}\vec{c}$$

14. Dokaži, da se diagonali v paralelogramu razpolovljata.



$$\vec{AS} = k \cdot \vec{AC} = k \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{AS} = \vec{AB} + \vec{BS} = \vec{a} + l \cdot \vec{BD} = \vec{a} + l \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + l(\vec{b} - \vec{a})$$

$$(k-1+l)\vec{a} + (k-l)\vec{b} = \vec{0}$$

linearna kombinacija
vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$

$$\boxed{t_1 \vec{a} + t_2 \vec{b}}$$

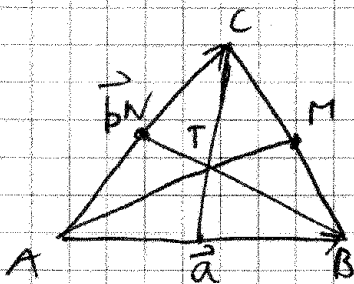
$$k-1+l=0$$

$$k-l=0$$

$$2k-1=0$$

$$k = \frac{1}{2}, l = \frac{1}{2}$$

15. Dokaži, da se težišnice trikotnika razpolovljata na $\frac{2}{3}$ svojih dolžin.



$$\vec{AT} = k \cdot \vec{AM} = k \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{BC} \right) = k \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) \right)$$

$$\vec{AT} = \vec{AB} + \vec{BT} = \vec{a} + l \cdot \vec{BN} = \vec{a} + l \cdot \left(-\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right)$$

$$k \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} \right) = \vec{a} + l \cdot \left(-\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2}k - 1 + l \right) \vec{a} + \left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l \right) \vec{b} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{2}k - 1 + l = 0$$

$$\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l = 0$$

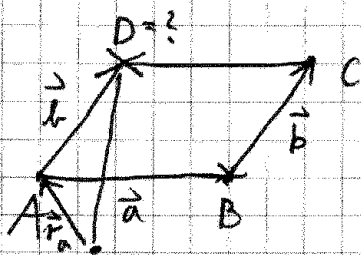
$$l = \frac{2}{3}, k = \frac{2}{3}$$

18

16. Dokaži, da daljica, ki povezuje eno oglišče paralelograma z razpoloviščem nasprotne stranice deli diagonalo v razmerju 1:2.

D.N.

17. Dani so tri oglišča paralelograma ABCD: A(1, -2, 0), B(2, 1, 3) in C(-2, 0, 5). Izračunaj oglišče D, ploščino paralelograma in dolžino diagonale BD.



$$\vec{AB} = \vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{BC} = \vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{r}_D - \vec{r}_A = \vec{AD} = \vec{BC} = \vec{b}$$

$$\vec{r}_D = \vec{BC} + \vec{r}_A = -3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \quad D(-3, -3, 2)$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = |(9, -14, 11)| = \sqrt{9^2 + (-14)^2 + 11^2} = \sqrt{81 + 196 + 121} = \sqrt{398}$$

18. Dan je Δ z oglišči $A(2, 0, 1)$, $B(7, -2, 3)$, $C(0, 4, 2)$. Določi težišče $T\Delta$, vektor z začetkom v razpolovišču S od AB in koncem v težišču.

$$R: \vec{r} = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$$

$$T(1, \frac{2}{3}, 2)$$

$$\vec{ST} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, 0)$$

19. Vektorji $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \alpha\vec{k}$ so robovi paralelepipeda.

a.) Izračunaj prostornino.

b.) Poišči vektor visine, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

c.) Določi tisto vrednost α , $-2 \leq \alpha \leq 1$, za katero je prostornina največja oz. najmanjša.

$$a.) V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \left| \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \right| = |\alpha^3 + 1 + 1 - \alpha - \alpha - \alpha| =$$

$$= |\alpha^3 - 3\alpha + 2|$$

$$b.) \text{ smer visine: } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = (1-\alpha, 1-\alpha, \alpha^2-1) =$$

$$\vec{n} =$$

dolžina protja smer

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{(1-\alpha)(1, 1, -\alpha-1)}{\sqrt{(1-\alpha)^2(1+1+(-\alpha-1)^2)}} = \frac{(1-\alpha)(1, 1, -\alpha-1)}{|1-\alpha|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}$$

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 0 \cdot |\vec{n}|$$

$$|\vec{n}| = \frac{V}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{|\alpha^3 - 3\alpha + 2|}{|1-\alpha|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}$$

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \cdot |\vec{n}| = \frac{(1-\alpha)(1, 1, -\alpha-1)}{|1-\alpha|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}} \cdot \frac{|\alpha^3 - 3\alpha + 2|}{|1-\alpha|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}$$

$$\vec{n} = \frac{|\alpha^3 - 3\alpha + 2|(1, 1, -\alpha-1)}{(1-\alpha)^2 \sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}$$

03.03.2008

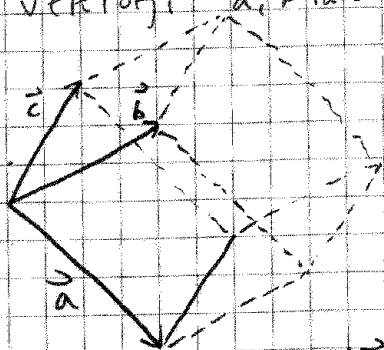
20. Vektorji $\vec{a} = \alpha \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \alpha \vec{j} + \vec{k}$ in $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \alpha \vec{k}$ so robovi paralelepipeda.

a.) Izračunaj prostornino paralelepipeda.

$$V = \alpha^3 - 3\alpha + 2$$

b.) Poišči vektor višine, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

c.) Določi tisto vrednost $-2 \leq \alpha \leq 1$, za katero je prostornina par. največja ozi. najmanjša. Kaksni so pri min. prostornini vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.



b.) smer $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = (1-\alpha, 1-\alpha, \alpha^2-1) = (\alpha-1)(-1, -1, \alpha+1)$

vektor = enotska smer · dolžina

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(\alpha-1)^2(1+1+(\alpha+1)^2)} = \sqrt{(\alpha-1)^2(\alpha^2+2\alpha+3)} = |\alpha-1|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}$$

• enotska smer $\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{(\alpha-1)(-1, -1, \alpha+1)}{|\alpha-1|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}$

• dolžina $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \alpha^3 - 3\alpha + 2$

$V = \text{osnova ploskve} \cdot \text{višina} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{v}|$

$$|\vec{v}| = \frac{\alpha^3 - 3\alpha + 2}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{\alpha^3 - 3\alpha + 2}{|\alpha-1|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}}$$

$$\vec{v} = \text{enotska smer} \cdot |\vec{v}| = \frac{(\alpha-1)(-1, -1, \alpha+1)}{|\alpha-1|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}} \cdot \frac{\alpha^3 - 3\alpha + 2}{|\alpha-1|\sqrt{\alpha^2+2\alpha+3}} =$$

$$\vec{v} = \frac{(\alpha-1)(\alpha^3 - 3\alpha + 2)(-1, -1, \alpha+1)}{(\alpha-1)^2(\alpha^2+2\alpha+3)} = \frac{(\alpha-1) \cdot (\alpha^2+\alpha-2)(-1, -1, \alpha+1)}{(\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha+3)}$$

$$\vec{v} = \frac{\alpha^2+\alpha-2}{(\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha+3)} (-1, -1, \alpha+1)$$

21

$$c.) V'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x-1)(x+1) = 0$$

stacionarne točke

$$\boxed{x_1 = 1} \quad x_2 = -1$$

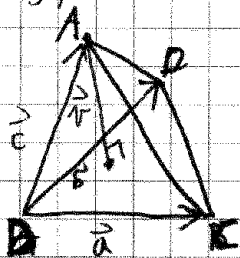
$$V''(x) = 6x$$

$$V''(1) = 6 > 0 \quad \text{lokalni min.}$$

$$V''(-1) = -6 < 0 \quad \text{lokalni max.}$$

$$V=0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ so komplanarni}$$

21. Dana so oglišča tristrane piramide $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$, $D(3,7,2)$. Izračunaj vektor višine skozi oglišče A.



• smer: $\vec{a} = \vec{AC} = (4, -1, -2)$ $\vec{c} = (-2, -3, -4)$

$\vec{b} = \vec{BD} = (1, 4, -3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (11, 10, 17)$$

enotska smer $\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{(11, 10, 17)}{\sqrt{121 + 100 + 289}} = \frac{(11, 10, 17)}{\sqrt{510}}$

• dolžina $V = \frac{1}{3}$ osh. pl. • višina $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{v}|$

$$V = \frac{1}{6} V_{\text{parale.}} = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -120$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \cdot |\vec{v}| = \frac{(11, 10, 17)}{\sqrt{510}} \cdot \frac{120}{\sqrt{510}}$$

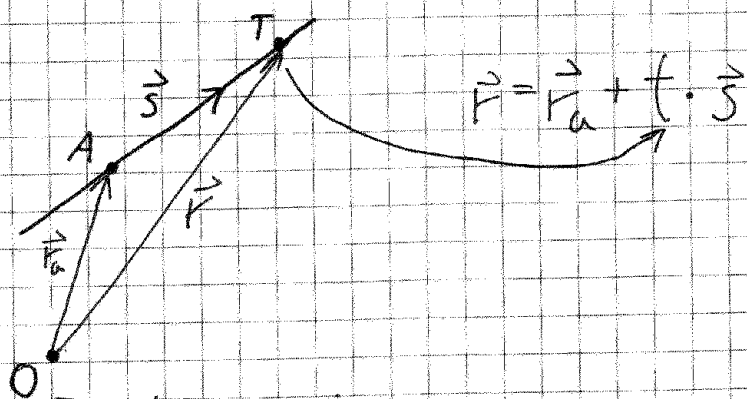
$$|\vec{v}| = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{120}{\sqrt{510}}$$

$$\vec{v} = \frac{120}{510} (11, 10, 17)$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{4}{17} (11, 10, 17)}$$

- Analitična geometrija

Premica v prostoru (točka; smernik)



Enačba premice

• vektorska oblika $\vec{r} = \vec{r}_a + t \cdot \vec{s}$

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t (s_1, s_2, s_3)$$

• parametrična oblika

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t s_1 \\ y &= a_2 + t s_2 \\ z &= a_3 + t s_3 \end{aligned}$$

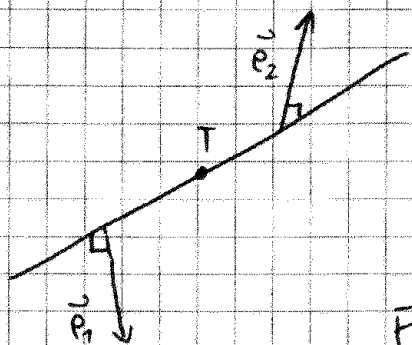
• kanonična oblika

$$t = \frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3}$$

1. Zapiši enačbo premice, ki gre skozi točko $T(1, 0, -7)$ in je vzporedna vektorju $\vec{e} = (2, 1, -5)$. Enačbo premice zapiši v vseh treh oblikah.

D.N.

2. Zapiši enačbo premice, ki gre skozi točko $T(1,1,1)$ in je pravokotna na vektorje $\vec{e}_1 = (2, 1, 1)$ in $\vec{e}_2 = (3, 3, 0)$.

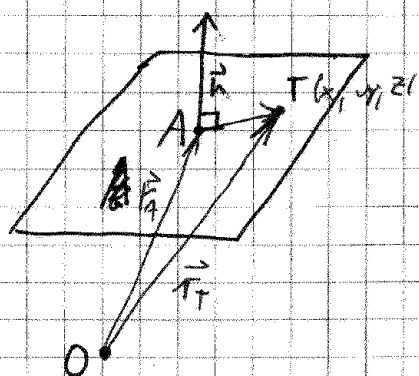


$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3, +3, +3)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_T + t\vec{j}$$

$$\vec{r} = (1, 1, 1) + t(-3, 3, 3)$$

Ravnina v prostoru (točka, normala)



$$\vec{AT} \perp \vec{n} : \vec{AT} \cdot \vec{n} = 0$$

Enačba ravnine

• vektorska oblika

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0$$

$$((x, y, z) - (a_1, a_2, a_3)) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$$

• implicitna oz. splošna oblika

$$(x, y, z) \cdot (n_1, n_2, n_3) = (a_1, a_2, a_3) \cdot (n_1, n_2, n_3)$$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d \quad d = \vec{r}_A \cdot \vec{n}$$

3. Zapiši enačbo ravnine, ki gre skozi točko $T(2, -3, 5)$ in je pravokotna na vektor $\vec{n} = (1, -3, 2)$. To enačbo tudi norčitaš

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0$$

$$d = \vec{r}_A \cdot \vec{n}$$

$$d = 2 + 9 + 10 = 21$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_A \cdot \vec{n}$$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

$$x - 3y + 2z = 21$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

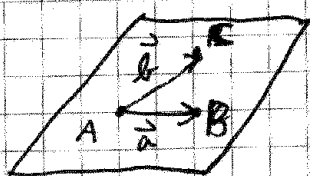
$$\frac{x - 3y + 2z}{\sqrt{14}} = \frac{21}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{14}} - \frac{3y}{\sqrt{14}} + \frac{2z}{\sqrt{14}} = \frac{21}{\sqrt{14}}$$

4. Zapiši enačbo ravnine, ki gre skozi točko $T(2, 3, -1)$ in je vzporedna ravnini $x - 3y - 2z = 9$.

$$R: x - 3y - 2z = -5$$

5. Zapiši enačbo ravnine skozi točke $A(0, 0, 0)$, $B(4, -2, 1)$ in $C(2, 4, -3)$.



$$\vec{AB} = \vec{a} = (4, -2, 1)$$

$$\vec{AC} = \vec{b} = (2, 4, -3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (2, 14, 20) = 2(1, 7, 10)$$

$$x \cdot n_1 + y \cdot n_2 + z \cdot n_3 = \vec{r}_A \cdot \vec{n}$$

$$1x + 7y + 10z = d$$

$$x + 7y + 10z = 0$$

$$d = \vec{r}_A \cdot \vec{n}$$

$$d = 0$$

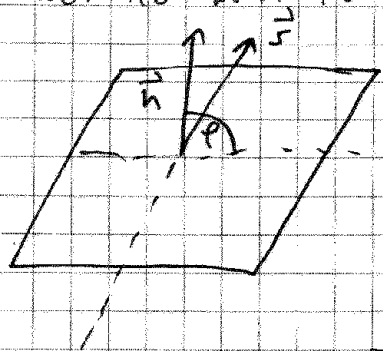
6. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točko $P(0,1,2)$ in je vzporedna premici $x = y - 2 = z + 3$ in $x + 1 = y = z + 2$.

$$R: -x + y = 1$$

7. Določi kot med ravninama (normalna) $x - 4y + 8z = 8$ in $x + z = 6$.

$$R: \pi/4$$

8. Določi kot med ravnino $x - z = 5$ in premico $x - z = y - 1, z = 3$.



$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{kot}(\vec{n}, \vec{s})$$

$$\vec{n} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{s} = (1, 1, 0)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = |\vec{n}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

9. Določi presečišče ravnin $x + y + z = 3$, $x + 2y + 3z = 6$ in $2x - y + z = 2$.

$$R: T(1, 1, 1)$$

10. Določi presečišče ravnin $x - 3y + 5z = 1$ in $2x + y - z = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y + 5z = 1 \quad / \cdot 2 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right\} -$$

$$-7y + 11z = 0$$

$$z = \frac{7}{11}y$$

prezame vlogo t parametra

$$x = a_1 + t s_1$$

$$y = a_2 + t s_2$$

$$z = a_3 + t s_3$$

$$y = y$$

$$x =$$

$$x = 1 + 3y - 5z$$

$$x = 1 + 3y - 5\left(\frac{7}{11}y\right)$$

$$x = 1 + 3y - \frac{35}{11}y$$

$$x = 1 - \frac{2}{11}y$$

Enačba premice ($y \rightarrow t$)

$$z = \frac{7}{11}t$$

$$y = t$$

$$x = 1 - \frac{2}{11}t$$

11. Katere ^{ravnina} točka gre skozi točko $T(1, 2, -1)$ in skozi presečišče ravnin $2x - z = -1$ in $4y + 2z = 2$.

$$\begin{aligned} 2x - z &= -1 \\ 4y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

$$4x + 4y = 0$$

$$x = -y$$

$$z = 1 - 2y$$

$$x = -y$$

$$y = y$$

$$z = 1 - 2y$$

Premica:

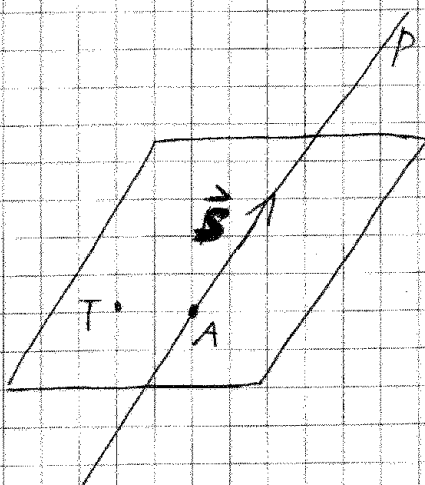
$$x = -t$$

$$y = t$$

$$z = 1 - 2t$$

$$A(0, 0, 1)$$

$$S(-1, 1, -2)$$



$$\vec{AT} = (1, 2, -1) - (0, 0, 1) = (1, 2, -2)$$

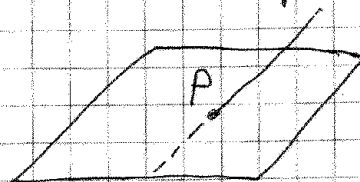
$$\vec{n} = \vec{AT} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 4, 3)$$

$$-2x + 4y + 3z = d \quad d = \vec{r}_T \cdot \vec{n} = (1, 2, -1) \cdot (-2, 4, 3) = 3$$

$$\boxed{-2x + 4y + 3z = 3}$$

12. Določi točko v kateri premica $2x = \frac{3y+3}{5} = 4z-1$ prebode ravnino $2x + 3y + 4z = 74$.

$$t = \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{3(y+1)}{\frac{5}{3}} = \frac{(z - \frac{1}{4})}{\frac{1}{4}}$$



PARAF. DOLIKA

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{5}{3}t - 1 \\ z = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \end{cases}$$

DOBIMO TOČKO

$$P\left(\frac{8}{7}, \frac{59}{27}, \frac{23}{28}\right)$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}t\right) + 3 \cdot \left(\frac{5}{3}t - 1\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\right) = 74$$

$$t + 5t - 3 + t + 1 = 74$$

$$7t = 76$$

$$t = \frac{76}{7}$$

13. Določí presečišče premie $\vec{r}_1 = (1, 2, 0) + t(1, 1, 1)$ in $\vec{r}_2 = (2, 3, 1) + s(0, 3, -1)$.

$$x = 1 + t$$

$$x = 2$$

$$P_1: y = 2 + t$$

$$P_2: y = 3 + 3s$$

$$z = t$$

$$z = 1 - s$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = 1 + t = 2 \\ y = 2 + t = 3 + 3s \\ z = t = 1 - s \end{matrix}}$$

$$t = 1$$

$$s = 0$$

Ali zadošča tudi 2 enačbi?

$$2 + 1 = 3 + 3 \cdot 0 \quad \checkmark$$

$$P(2, 3, 1)$$

14. Kolikšen mora biti parameter x , da se premici $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

in $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{4}$ sekata? Določí presečišče!

$$R: x = 1 \quad T\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Razdalje

a.) Razdalje med točko in ravnino

$$T(x_0, y_0, z_0) \quad \Pi: ax+by+cz=d$$

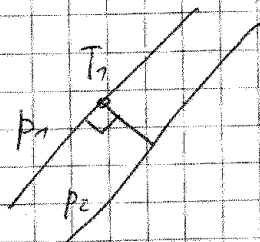
$$d(T, \Pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

b.) Razdalja med točko in premico

T točka, p premica, s točka T_0 in smerni vektorjen $\vec{s}$

$$d(T, p) = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{T_0T}|}{|\vec{s}|} \quad \text{višina!}$$

c.) Razdalja med vzporednima premicama (p_1, p_2 premici, T_1 točka na p_1)



$$d(p_1, p_2) = d(T_1, p_2)$$

d.) Razdalja med nevzporednima premicama (p_1, p_2 premici, T_1 točka na p_1 , T_2 točka na p_2)

$$d(p_1, p_2) = \frac{\|\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{F}\|}{\|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\|}$$

15. Izračunaj oddaljenost točk $A(0,0,0)$, $B(1,-1,0)$ in $C(3,5,8)$ od ravnine $\Pi: 2x+3y+4z=-1$.

$$R: d(A, \Pi) = \frac{1}{\sqrt{29}} \quad d(B, \Pi) = 0 \quad d(C, \Pi) = \frac{38}{\sqrt{29}}$$

16. Daj sta ravnini $\Pi_1: 72x+9y-20z=29$ in $\Pi_2: 16x-12y+15z+9=0$. Določi točko, ki leži na osi y in je enako oddaljena od ravnin Π_1 in Π_2 .

$$T(0, y, 0) \quad d(T, \Pi_1) = d(T, \Pi_2)$$

$$\frac{|9y-29|}{\sqrt{744+81+400}} = \frac{|-12y+9|}{\sqrt{256+144+225}}$$

$$\frac{|9y-29|}{25} = \frac{|-12y+9|}{25}$$

$$|9y-29| - |-12y+9| = 0$$

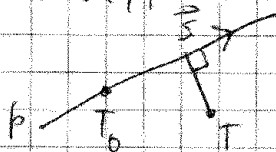
$$R: T_1(0, \frac{4}{3}, 0) \\ T_2(0, -\frac{20}{3}, 0)$$

17. Izračunaj oddaljenost točk $A(0,0,0)$ in $B(2,2,0)$ od premice

$$p: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5}$$

$$\vec{s} = (4, 3, 5)$$

$$d(T, p) = \frac{|\vec{s} \times \vec{ToA}|}{|\vec{s}|}$$



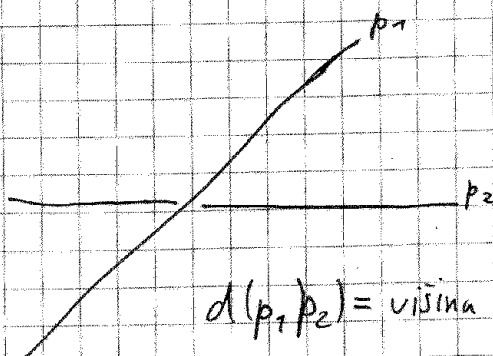
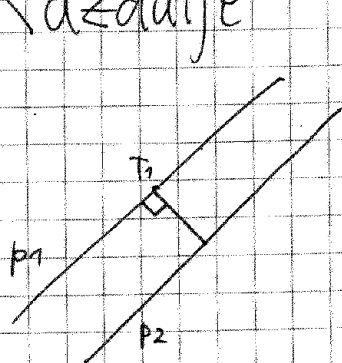
$$d(A, p) = \frac{|\vec{s} \times \vec{ToA}|}{|\vec{s}|} = \frac{|(-6, 3, 3)|}{|(4, 3, 5)|} = \frac{\sqrt{36+9+9}}{\sqrt{76+9+25}} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{110}} = \frac{3\sqrt{6}}{5\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{66}}{55}$$

$$\vec{ToA} = (0, 0, 0) - (1, 0, 2) = (-1, 0, -2)$$

$$\vec{s} \times \vec{ToA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-6, 3, 3)$$

11.03.2008

Razdalje

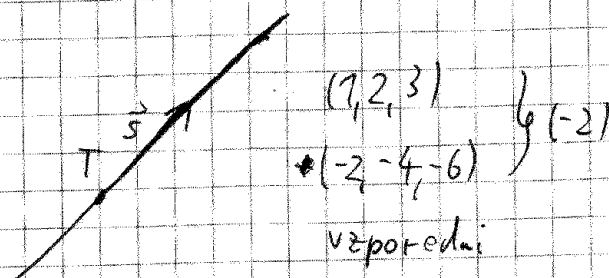


$d(p_1, p_2) = \text{visina paralelepipeda}$

18. Izračunaj razdaljo med prenicama.

a) $p_1: x-2=2y=z+1$
 $p_2: x+1=2y=z-2$

b) $p_1: x=2y=z$
 $p_2: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{3}$



a) $\vec{s}_1 = (1, \frac{1}{2}, 1)$ $\vec{s}_2 = (1, \frac{1}{2}, 1)$
 $T_1 (2, 0, -1)$ $T_2 (-1, 0, 2)$

$$\frac{x-a_1}{s_1} = \frac{y-a_2}{s_2} = \frac{z-a_3}{s_3}$$

$d(p_1, p_2) = d(T_1, p_2)$

$d(T_1, p_2) = \text{visina paralelograma}$

$p = |\vec{s}_2| \cdot d(T_1, p_2) = |\vec{s}_2 \times \vec{T_2 T_1}|$

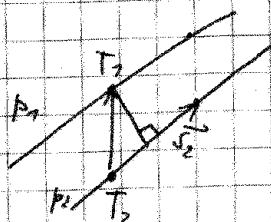
$d(T_1, p_2) = \frac{|\vec{s}_2 \times \vec{T_2 T_1}|}{|\vec{s}_2|}$

$|\vec{s}_2| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$\vec{T_2 T_1} = (2, 0, -1) - (-1, 0, 2) = (3, 0, -3)$

$\vec{s}_2 \times \vec{T_2 T_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-\frac{3}{2}, 6, -\frac{3}{2})$

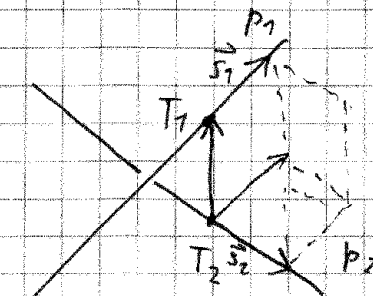
$d(T_1, p_2) = \frac{|(-\frac{3}{2}, 6, -\frac{3}{2})|}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{9}{4} + 36 + \frac{9}{4}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{162}{4}}}{\frac{3}{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}$



b) $\vec{s}_1 = (1, \frac{1}{2}, 1)$ $\vec{s}_2 = (2, 1, 3)$

ista vřporadni

$d(p_1, p_2)$ = viřina paralelepipeda



$$V = |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| \cdot d(p_1, p_2) = |(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{T}_2 - \vec{T}_1)|$$

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{T}_2 - \vec{T}_1)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

$$T_1(0, 0, 0) \quad T_2(1, 0, -1)$$

$$\vec{T}_2 - \vec{T}_1 = (-1, 0, 1)$$

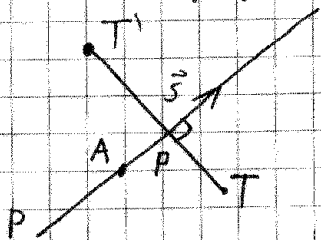
$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{T}_2 - \vec{T}_1) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (\frac{1}{2}, -1, 0)$$

$$\rightarrow d(p_1, p_2) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 0}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

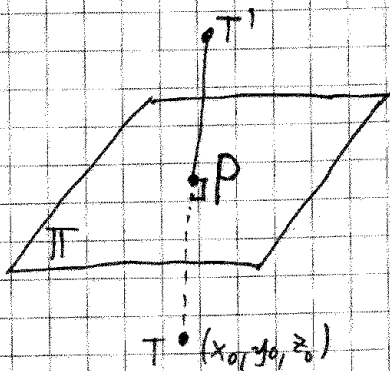
- Zrcaljenje

a.) zrcaljenje točke čez premico



$$\vec{F}_{T'} = \vec{F}_T + \vec{TT'} = \vec{F}_T + 2\vec{TP} = \vec{F}_T + 2 \cdot \left(\frac{\vec{AT} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s} - \vec{AT} \right)$$

b.) zrcaljenje točke čez ravnino

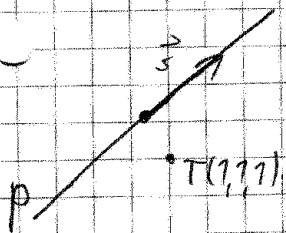


$$\vec{F}_{T'} = \vec{F}_T + \vec{TT'} = \vec{F}_T + 2\vec{TP} =$$

$$\vec{F}_{T'} = \vec{F}_T + 2d(T, \pi) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$d(T, \pi) = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

19. Določi zrcalno točko k točki $T(1,1,1)$ glede na premico, ki je presečišče ravnin: $x+y+z=2$ in $x+y-z=2$



$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y-z=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 2 \\ x &= 2-y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2-y \\ y &= y \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2-t \\ y &= t \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(2,0,0) \\ \vec{s} &= (-1, 1, 0) \end{aligned}$$

$$\vec{AT} = \vec{F}_T - \vec{F}_A = (-1, 1, 1)$$

$$\vec{AT} \cdot \vec{s} = (-1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 0) = 2$$

$$\vec{F}_{T'} = (1, 1, 1) + 2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right) (-1, 1, 0) - (-1, 1, 1) = (1, 1, 1) + 2 \cdot (-1, 1, 0) - (-1, 1, 1) =$$

$$\vec{F}_{T'} = (1, 1, 1) + 2 \cdot (0, 0, -1) = (1, 1, -1)$$

20. Poišči simetrično točko k točki $T(4, 2, 4)$ glede na ravnino $\Pi: 2x + y + 2z = 9$. Izračunaj še projekcijo P točke T na ravnino Π .

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_T + 2 \tilde{\lambda}(T, \Pi) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (4, 2, 4) + \frac{18}{9} (2, 1, 2) =$$

predznačena
razdalja T do
ravnine

$$2x + y + 2z = 9 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, 2)$$

$$\tilde{\lambda}(T, \Pi) = \frac{2 \cdot 4 + 2 + 2 \cdot 4 - 9}{|\vec{n}|} = \frac{9}{|\vec{n}|}$$

$$\star (4, 2, 4) + (4, 2, 4) = \underline{\underline{(8, 2, 8)}}$$

$$\vec{r}_P = \vec{OP} = \vec{OT} + \vec{TP} = (4, 2, 4) + (2, 1, 2) = (6, 3, 6)$$

$$\tilde{\lambda}(T, \Pi) \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{9}{|\vec{n}|} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (2, 1, 2)$$

21. Zapiši enačbo premice, ki je simetrična premici $\frac{x-1}{2} = \frac{2y-4}{2} = z$ glede na ravnino $x - 2y + 2z = 7$.

Matrike

$$A = \begin{matrix} m \times n \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} m \times n \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{vrstice} \quad \text{stolpci} \end{matrix}$$

Operacije na matrikah

a.) Množenje s skalarjem

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

b.) Seštevaje po komponentah (pogoji: matriki morata biti enakih dimenzij)

c.) Transponiranje (zamenjamo vrstice in stolpce = zrcalimo čez glavno diagonalo)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

d.) Konjugiranje (za kompleksne matrike)

$$A^* = \overline{A}^T \quad \text{konjugiranje kompleksnih števil}$$

e.) Množenje matrik

$$A \cdot B = C \quad \text{številko stolpcev 1. matrike} = \text{številu vrstic 2. matrike}$$

$$m \times n = n \times k \quad m \times k$$

C_{ij} = skalarni produkt i -te vrstice matrike A in j -tega stolpca matrike B .

f.) Sled (kvadratne) matrike (vsota diagonalnih elem.)

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

1. Dana je kompleksna matrika. Zapiši A^T in A^* !

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -3i & -4+i \\ -2-i & 6 & 7 & 2+6i \end{bmatrix}$$

2. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

Izračunaj $4A - B^T$ in $2A^T + 3B$

$$4A - B^T = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 16 & -4 \\ 20 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 17 & -2 \\ 18 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A^T + 3B = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 10 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 6 & -6 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 16 \\ 6 & -8 & 22 \end{bmatrix}$$

3. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Izračunaj $A \cdot B$ in $B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \\ 9 & 22 & 15 & -8 \\ -4 & -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Izračunaj produkt vstičnega vektorja $A = [1 \ 2 \ 3]$ in stolpčnega vektorja $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$R: A \cdot B = 6$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Izračunaj $f(A)$, če je $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 7$ in $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$f(A) = \overset{3 \times 3}{\cancel{A^5}} - \overset{3 \times 3}{\cancel{2A^4}} - \overset{3 \times 3}{\cancel{A^3}} + 4A^2 + 7 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{identiteta}}}{I}$$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^4 = A^5$$

$$f(A) = 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

6. Ali lahko določimo parametra a in b , tako, da postta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} b & a & 5 \\ 9 & a & a \\ a & 8 & a \end{bmatrix} \text{ komutirali?}$$

Komutirata $A \cdot B = B \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & a & 5 \\ 9 & a & a \\ a & 8 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+18-a & 3a-8 & 5+a \\ 9+3a & a+24 & 4a \\ ab+18+4a & a^2+2a+32 & 11a \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} b+5a & 2b+a+10 & 3a-b+20 \\ a^2+9 & 3a+18 & 7a-9 \\ a^2+a & 4a+8 & 3a+24 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{b}+18-a = \cancel{b}+5a$$

$$18 = 6a$$

$$a = 3$$

$$3a-8 = 2b+a+10$$

$$9-8 = 2b+13$$

$$-72 = 2b$$

$$b = -36$$

$$AB \neq BA$$

OBRNLJIVE MATRIKE IN INVERZI

Kvadratna matrika A je obrnljiva (= nesingularna = ima inverz) če obstaja matrika A^{-1} , tako da velja $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Če matrika ni obrnljiva pravimo, da je singularna.

Matriko A^{-1} imenujemo inverz matrike A .

Velja:

1. Identiteta je enota za matrično množenje: $A \cdot I = I \cdot A = A$.

2. Matrika A je singularna $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

3. Izračun inverzne matrike (metoda kofaktorja):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T, \quad \tilde{A} = \text{matrika kofaktorja}$$

$\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ ← $\begin{matrix} \text{poddeterminanta k} \\ \text{elementu } a_{ij} \end{matrix}$

7. Poišči inverze danim matrikam.

a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}^T = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$\tilde{A}$

b) D.W.

$$B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

c) $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \tilde{C}^T$$

$$\det C = 6$$

$$C^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} +(-10) & -5 & +4 \\ -36 & +22 & -(26) \\ +32 & -13 & +(-19) \end{bmatrix}^T \begin{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \end{matrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -10 & -56 & 32 \\ 5 & 22 & -13 \\ 4 & 26 & -14 \end{bmatrix}$$

Rang matrice

Rang $r(A)$ matrice $A^{m \times n}$ je enak številu linearno neodvisnih stolpcev oz. vrstic.

Velja $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

Rang matrice se ne spremeni, če:

- dve vrstici med seboj zamenjamo
- vrstico pomnožimo s poljubnim nen ničelnim skalarjem
- če vrstici prištejemo poljubni večkratnik katere druge vrstice

8. Določi rang matrice.

a.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ vse vrstice z različnim številom 0 na začetku

$$\begin{array}{c} \sim \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{array} \right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 11 & 1 \end{array} \right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

2. vr. - 3. vr.

3x3 vr. - 1 vr.

3 vr. + 4x2 vr.

$$r(A) = 3$$

↑
ima poln rank

17.03.2008

Rang matrice

1. zamenjava vrstic
2. vrstico pomnožimo z nenulnim številom
3. vrstici prištejemo večkratnik kakšne druge vrstice

$$c) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 4 & -9 & 13 \\ -1 & 3 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 2vr - 1vr \\ 3vr - 2vr \\ 4vr + 1vr \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -9 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \sim 3vr - 2 \times 2vr \\ 4vr - 2vr \end{matrix}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{4vr - 2 \times 3vr} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

rang = št. nenulnih vrstic !

rang = 4.

g) Poišči 2 pri katerem ima matrika A najmanjši rang.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 20 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R: 2=0 \quad r(A)=2$$

Gaussova eliminacija - računanje inverza

$$\left[A \mid I \right] \xrightarrow[\text{operacije, ki ohranjajo rang}]{\text{transformacija}} \left[I \mid A^{-1} \right]$$

$$\text{hpr. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- I. 0 pod diagonalo
- II. 0 nad diagonalo
- III. 1 po diagonali

1.) Z Gaussovo eliminacijo izračunaj inverz matrike.

a.) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ -8 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

I. ničle pod diagonalo $8 \times 1v - 3 \times 3v$

$\sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim 1v. + 2v.$

II. ničle nad diagonalo $2v. + 10 \times 3v.$
 $1v. + 5 \times 3v.$

$\sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -6 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} :(-3) \\ :(-1) \\ :(-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} A^{-1} \end{matrix}$

III. ničle nad diagonalo

$R: A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b.) $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} 2 \times 3v. + 1v. \\ 3 \times 3v. - 4 \times 2v. \end{matrix}$

I. ničle pod diagonalo

$\sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 3 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \times 1v. + 3v. = 34 \\ 1 \times 2v. + 3v. = 51 \\ 1 \times 3v. = 17 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 17 & 3 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} :(-34) \\ :(-51) \\ :17 \end{matrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{17} & \frac{4}{17} & \frac{6}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{17} & \frac{9}{17} & \frac{12}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{17} & \frac{-4}{17} & \frac{6}{17} \end{bmatrix} = B^{-1}$

Sistemi linearnih enačb

Cramerjevo pravilo: samo za kvadratne sisteme

m enačb za n neznank:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$Ax = b$$

↑
matrika
koeficientov

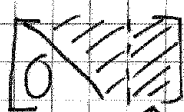
↑
vektor
neznank

↑
vektor
desne strani

Gaussova eliminacija

$$R = [A : b]$$

transponiramo
operacije, ki
ohranjajo rang



↑
rešitve direktno
izračunamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{array} \right]$$

Rešljivost

1. $Ax = b$ je rešljiv $\Leftrightarrow r(A) = r(R) = r$

2. če je $r = n = \text{št. neznank} \Rightarrow 1$ rešitev

3. če je $r < n = \text{št. neznank} \Rightarrow$ neskončno rešitev
($n - r$)-parametričen rešitev

$$\begin{array}{l} x = 1 + z \\ y = 2 \\ \mathbb{R} \ni z = \text{poljuben} \end{array}$$

2. Reši sisteme linearnih enačb:

a) D.W.
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= 13 \end{aligned}$$

R:
$$\begin{aligned} x &= 7 \\ y &= 5 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 5 \\ x - 2y + 3z &= 2 \\ 4x - y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{2 \times \text{vr.} - 1 \times \text{vr.} \\ 3 \times \text{vr.} - 2 \times 1 \text{vr.}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -1 \\ 0 & -7 & 8 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow{3 \times \text{vr.} - 2 \times \text{vr.}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right]$$

$0 \neq -8$
ni rešljiv!

$r(A) = 2$

$r(R) = 3$

sistem nima rešitve $r(A) \neq r(R)$

c)
$$\begin{aligned} 2x + 2y - z + t &= 4 \\ 4x + 3y - z + 2t &= 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t &= 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t &= 6 \end{aligned}$$

$$R = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{2 \times \text{vr.} - 2 \times 1 \text{vr.} \\ 3 \times \text{vr.} - 4 \times 1 \text{vr.} \\ 2 \times 4 \text{vr.} - 3 \times 1 \text{vr.}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{3 \times \text{vr.} - 3 \times 2 \text{vr.} \\ 2 \times 4 \text{vr.} - 3 \times 1 \text{vr.}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right]$$

$r(A) = 4$

$r(R) = 4$

sistem je rešljiv

$n = 4 = r$: 1 rešitev

Poenostavljen sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z + t &= 4 \\ -y + z &= -2 \\ -2z &= 2 \\ 2t &= -2 \end{aligned}$$

R:
$$\begin{aligned} t &= -1 \\ z &= -1 \\ y &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} d.) & 2x + 3y + 2z & = 2 \\ & x + 2y - 3z & = 3 \\ & x + y + 5z & = -1 \end{array}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & | & 2 \\ 1 & 2 & -3 & | & 3 \\ 1 & 1 & 5 & | & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2 \times 2. \text{ vr.} - 1. \text{ vr.}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -8 & | & 4 \\ 0 & -1 & 8 & | & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{3. \text{ vr.} + 2. \text{ vr.}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -8 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

$$r(R) = 2$$

rešljiv sistem

$$r = 2$$

$$n = 3$$

1-parametrični rešitev

Poenostavljen siste.

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$y - 8z = 4$$

parameter

$$y = 4 + 8z$$

z = poljuben

$$x = \frac{1}{2}(2 - 3y + 2z) = \frac{1}{2}(2 - 12 - 24z - 2z) = \frac{1}{2}(-10 - 26z)$$

$$R: \begin{array}{l} x = -5 - 13z \\ y = 4 + 8z \\ z = \text{poljuben} \end{array}$$

1-param. rešitev

$$\begin{array}{rcl} e.) & x + y + 2z + 3u - v & = 5 \\ & x + 2y + z + 5u - v & = 5 \\ & -x + y - 4z + 2u & = -3 \\ & 2x - y + 7z - 2u & = 6 \end{array}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & | & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & -1 & | & 5 \\ -1 & 1 & -4 & 2 & 0 & | & -3 \\ 2 & -1 & 7 & -2 & 0 & | & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 2. \text{ vr.} - 1. \text{ vr.} \\ 3. \text{ vr.} + 1. \text{ vr.} \\ 4. \text{ vr.} - 2 \times 1. \text{ vr.} \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & -1 & | & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & 2 & | & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 3. \text{ vr.} - 2 \times 2. \text{ vr.} \\ 4. \text{ vr.} + 3 \times 2. \text{ vr.} \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = 3$$

$$r(R) = 3$$

rešljiv

$$r = 3$$

$$n = 5$$

2-parametrični rešitev

www.stromar.si

Poenostavljene enačbe:

$$x + y + 2z + 3u - v = 5$$

$$y - z + 2u = 0$$

$$u - v = 2$$

$$u = 2 + v$$

v = poljuben

$$y = z - 2u = z - 4 - 2v$$

z = poljuben

$$x = 5 - y - 2z - 3u + v = 5 - z + 4 + 2v - 2z + 6 - 3v + v = -3z + 3$$

Algebra

$$R: \begin{cases} x = 3 - 3z \\ y = -4 + z + 2v \\ z = \text{poljubno} \\ u = 2 + v \\ v = \text{poljubno} \end{cases}$$

2-parametrična rešitev

3. Obravnavaj rešljivost sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \lambda x = 9 \\ \lambda x + 2\lambda y - z = 2 \end{cases}$$

λ : ni rešljiv
 λ : 1 rešitev
 λ : para. rešitev

$$R = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{3 \cdot \text{vr.} - 2 \cdot \text{vr.}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 1 & 7 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{3 \cdot \text{vr.} - \lambda \cdot 1 \cdot \text{vr.}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda & 2 - \lambda & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} -1 - \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{sistem nima rešitve} \\ r(A) = 2 \neq 3 = r(R) \end{array} \right\}$$

2) $\lambda \neq -1$; $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ rešljiv sistem: $r = 3$, $n = 3 \Rightarrow 1$ rešitev

$\lambda = 0 \Rightarrow$ različni rangi $\Rightarrow$ ni rešljiv sistem

R : $\lambda = 0$, $\lambda = -1 \Rightarrow$ ni rešitve

$\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1 \Rightarrow 1$ rešitev

Izrazi rešitev sistema pri $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2\lambda y + z = 7 \\ (-1 - \lambda)z = 2 - \lambda \end{cases}$$

$$z = \frac{2 - \lambda}{-1 - \lambda}, \quad \lambda \neq -1$$

$$y = \frac{z - 7}{-2\lambda} = \frac{\frac{2 - \lambda}{-1 - \lambda} - 7}{-2\lambda} = \frac{-6\lambda - 9}{2\lambda(2 + \lambda)}, \quad \lambda \neq 0, \lambda \neq -1$$

$$x = \frac{1 - 2y - z}{1} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{-6\lambda - 9}{2\lambda(2 + \lambda)} - \frac{2 - \lambda}{-1 - \lambda}}{1} = \frac{9(2 + \lambda)}{2\lambda(2 + \lambda)} = \frac{9}{2\lambda}, \quad \lambda \neq 0$$

4. Katerega pogoju morajo zadoščati parametri a, b in c , da bo spodnji sistem enačb rešljiv? Reši sistem za vrednosti parametrov $a=12, b=-8$ in $c=-\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - 4x_2 &= -1 \\ 7x_1 + 10x_2 &= a \\ 5x_1 + 6x_2 &= -b \\ 3x_1 - 16x_2 &= 2c \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 10 & 1 & a \\ 5 & 6 & 1 & -b \\ 3 & -16 & 1 & 2c \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 10 & 1 & a \\ 5 & 6 & 1 & -b \\ 3 & -16 & 1 & 2c \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 2.vr. - 3 \times 1.vr. \\ 3.vr. - 7 \times 1.vr. \\ 4.vr. - 5 \times 1.vr. \\ 5.vr. - 3 \times 1.vr. \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 14 & -2 & 7 \\ 0 & 38 & -6 & a+7 \\ 0 & 26 & -4 & -b+5 \\ 0 & -4 & -2 & 2c+3 \end{bmatrix} \xrightarrow{:7} \sim} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 38 & -6 & a+7 \\ 0 & 26 & -4 & -b+5 \\ 0 & -4 & -2 & 2c+3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 3.vr. - 19 \times 2.vr. \\ 4.vr. - 13 \times 2.vr. \\ 5.vr. + 2 \times 2.vr. \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & a-12 \\ 0 & 0 & -8 & -b-8 \\ 0 & 0 & 5+2c & 5+2c \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2$
 $r(R) = 2$
 $a - 12 = 0$
 $-b - 8 = 0$
 $5 + 2c = 0$

$\begin{aligned} a &= 12 \\ b &= -8 \\ c &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$

 $= R$

D.N. Reši: $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$

5. Določi parameter k , tako da bo sistem rešljiv

$$\begin{aligned} -x - y - z &= -1 \\ -y + 3z &= 3 \\ 3x + 2y + kz &= 3 \end{aligned}$$

$$R: k \neq 6$$

6. Katerega pogoju morajo zadoščati parametri a, b, c , da bo spodnji sistem rešljiv? Reši sistem za vrednosti $a=-12, b=7$ in $c=-9$.

$$\begin{aligned} 2x - 7y - 7z &= a \\ -x + 2y + 3z &= b \\ x + y - 2z &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R: a + 3b + c &= 0 \\ x &= -7y - 13 \\ y &= \text{poljubno} \\ z &= -3y - 2 \end{aligned}$$

Homogeni sistem linearnih enačb

$$Ax=b \Rightarrow Ax=0$$

$$\left[A \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad r(A)=r(R) \\ \text{sistem je vedno rešljiv}$$

Velja:

1. Trivialna rešitev $(0,0,0,\dots,0)$ vedno obstaja
2. Kvadratni sistem ima netrivialno rešitev $\Leftrightarrow \det A=0$
3. če je enačb manj kot neznanh (poddoločeni sistem), netrivialna rešitev vedno obstaja
4. če sta x in y različni rešitvi $\Rightarrow z=\alpha x+\beta y$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) rešitev sistema

⑦ Preveri, ali ima sistem netrivialno rešitev in jo izračunaj

$$\begin{aligned} x+3y-2z &= 0 \\ x-8y+8z &= 0 \\ 3x-2y+4z &= 0 \end{aligned}$$

$$\det A=0 \Leftrightarrow \exists \text{ netrivialna rešitev}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -32 - 48 + 4 + 72 + 16 - 12 = \underline{0}$$

ima netrivialno rešitev

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 0 \\ 1 & -8 & 8 & | & 0 \\ 3 & -2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 10 \\ 0 & -11 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vedno ostanejo, izpustimo

$$\begin{aligned} x+3y-2z &= 0 \\ -11y+10z &= 0 \end{aligned}$$

1 parametrična rešitev:

$$z = \frac{11}{10} y$$

$y = \text{poljuben}$

$$x = 2z - 3y = \frac{11}{5} y - 3y = -\frac{4}{5} y$$

trivialna, če $y=0$
drugače netrivialna

MATRIČNE ENAČBE

① DN: Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Poišči matriko

X , za katero velja $4A - 3X = B$

$$R: X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

② DN: Reši enačbo $Ax = b$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Interpretiramo kot sistem lin enačb.

$$R = [A:b] \rightsquigarrow [0 \equiv \equiv]$$

$$R: x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

③ Reši matrično enačbo $AX = B$, kjer sta $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ in

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$3 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 3$

$$[A:B] \rightsquigarrow [I:X]$$

op. ali ohranjajo rang.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 3 & 9 & 7 \\ 4 & -3 & 3 & | & 1 & 11 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & | & 7 & 5 & 7 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & | & 9 & 3 & 7 \\ 0 & -10 & 2 & | & -18 & -6 & -14 \end{bmatrix}$$

$4 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 0$
 $1 - 3 \times 3$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & | & 9 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rešitev ne obstaja, ne moremo pri delat ničel po diagonali

deljenje = množenje z inverzom

$$A^{-1} \cdot / AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

ni inverza kadar $\det A = 0$

④ Poišči matrično enačbo $XA=B$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AX=B$$

$$XA=B \leftarrow ?$$

$$XA=B \quad |A^{-1}$$

$$X=B \cdot A^{-1}$$

$$X=B \cdot A^{-1}$$

$$X=B \cdot A^{-1}$$

$$XA=B \quad |()^T \rightarrow (XA)^T = B^T$$

$$A^T X^T = B^T \rightarrow \text{transponiranje obrne vrstni red}$$

$$[A^T | B^T] \rightsquigarrow [I | X^T] \quad \text{Nič pod diagonalo}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 9 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 14 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 16 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -26 & -18 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 2ga - 1va \\ 3ja - 3 \cdot 2ga \end{array}$$

$$3ja + 2 \cdot 2ga$$

Nič nad diagonalo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 13 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & -22 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} 1:2 \\ 1:(-1) \\ 1:(-1) \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} 1 \times 3ja - 2ga \\ 2 \times 3ja + 1va \end{array}$$

$$3 \times 2ga + 1va$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⑤ Reši matrično enačbo $AXB=C$, kjer so

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} / AXB &= C \\ XB &= A^{-1}C \quad / B^{-1} \\ X &= A^{-1}CB^{-1} \end{aligned}$$

D.N.

$$R: X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

VEKTORSKI PROSTORI IN LINEARNE PRESLIKAVE

- linearna neodvisnost vektorja

Množica vektorjev $x_1, \dots, x_n \in V$ je linearno neodvisna, če velja

$$\underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}_{\text{linearna kombinacija}} = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_n = 0$$

$$\vec{x} \quad \vec{y} \quad \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = 0 \quad \vec{x} \quad \vec{y}$$

⑥ Ali so dani vektorji $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ linearno neodvisni.

$$\text{lin. komb: } \alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0$$

homogen sistem v matričnem obliki

$$x_1 = \dots = x_n = 0$$

samo trivialna
rešitev hom. sist. $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 10 & 7 & 6 \end{bmatrix} = 100 + 280 + 72 - 56 - 150 - 240 = 6 \neq 0$$

Sledi: vektorji so linearno neodvisni.

⑦ Ali so vektorji $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix}$ linearno neodvisni.

če so, zapiši drugi vektor kot linearno kombinacijo 1ga in tretjega vektorja.

$$\alpha = -1/2 \quad \beta = 1/2 \quad \text{D.N.}$$

Baza vektorskega prostora

To je vsaka največja množica linearno neodvisnih vektorjev.

Št. vektorjev v bazi = dimenzija prostora.

Standardna baza v $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

⑧ Pokaži, da vektorji $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tvorijo

bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Nato zapiši vektor $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ kot linearno komb. vektorjev x_1, x_2, x_3 .

• dovolj = dimenzija prostora = 3 ✓

• lin neodvisni $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{lin. neodvisni} \rightarrow \text{trojica bazis}$

$$y = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{sistem lin. enaob.}$$

rešimo

$$y = x_1 + x_2 + x_3$$

3.1.03.2008

Linearne preslikave

Preslikavo $\gamma: U \rightarrow V$ imenujemo linearna preslikava med vektorskima prostoroma U in V če velja:

$$\gamma(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \cdot \gamma(\vec{x}) + \beta \gamma(\vec{y})$$

(linearna kombinacija) (linearna kombinacija)

npr: $\gamma(x, y, z) = (y, z)$

$$\gamma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

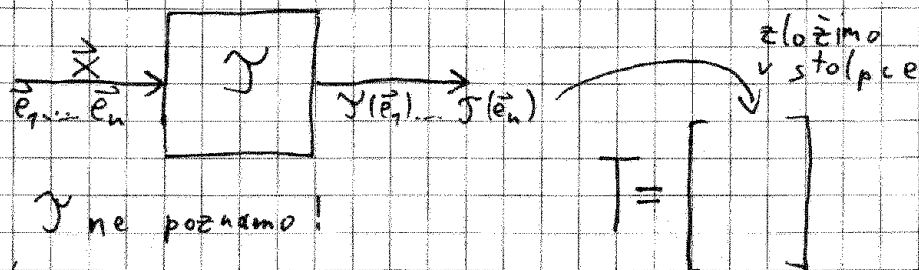
npr: $\gamma(\vec{x}) = 2\vec{x}$
 $\gamma(\vec{x}) = -\vec{x}$

Standardna baza $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

slike $\gamma(\vec{e}_1), \dots, \gamma(\vec{e}_n)$

γ pripada matrika

$$T = \begin{bmatrix} \gamma(\vec{e}_1) & \dots & \gamma(\vec{e}_n) \end{bmatrix}, \text{ ki ima v stolpcih slike standardne baze.}$$



Velja: Slike vektorja s γ damo tako, da matriko T pomnožimo z $\vec{x}$!

$$\gamma(\vec{x}) = T \cdot \vec{x}$$

1. Linearna preslikava preslika standardne baze vektorje v vektorje $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. V kateri vektor se preslika $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ matrika linearne preslikave}$$

$$T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ -6 \end{bmatrix}$$

2. Poišči matriko linearne preslikave v standardni bazi, ki preslika vektorje $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ v vektorje $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Določi se sliko vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$!

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ matrična enačba}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= C \\ A \cdot B \cdot B^{-1} &= C \cdot B^{-1} \\ A &= C \cdot B^{-1} \end{aligned}$$

Izračun B^{-1} !

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{2 \cdot R_1 \\ 3 \cdot R_1 - R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{4 \cdot R_1 + R_2 \\ 4 \cdot R_1 - 5 \cdot R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -5 & 4 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{1 \cdot R_2 \\ 1 \cdot R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 8 & 5 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -36 & -24 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -5 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{4 \cdot R_1 + R_2 \\ 4 \cdot R_1 - R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -36 & -24 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -5 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{1 \cdot R_2 \\ 1 \cdot R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5 & -4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$A = C \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -9 & -6 & 5 \\ 7 & 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45 & -32 & 28 \\ -8 & -5 & 5 \\ -37 & -25 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} -58 \\ -17 \\ 21 \end{bmatrix}$$

3. Dan je vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$. Preslikava T preslika vektor $\vec{v}$ v

vektor $\vec{a} \times \vec{v}$. Dokaži, da je preslikava γ linearna in poišči njeno matriko v standardni bazi. Kateri vektor se preslika v $\begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$.

$$\gamma(\vec{v}) = \vec{a} \times \vec{v} ; \gamma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

γ linearna preslikava

$$\begin{aligned} \bullet \gamma(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) &= \vec{a} \times (\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \vec{a} \times \alpha \vec{x} + \vec{a} \times \beta \vec{y} \\ \bullet \alpha \gamma(\vec{x}) + \beta \gamma(\vec{y}) &= \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{x}) + \beta \cdot (\vec{a} \times \vec{y}) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{preslikavo je} \\ \text{linearna} \end{array} \right\}$$

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma(\vec{i}) = \vec{a} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, -5)$$

$$\gamma(\vec{j}) = \vec{a} \times \vec{j} = (1, 0, 2)$$

$$\gamma(\vec{k}) = \vec{a} \times \vec{k} =$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$TX = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{linearni sistem} \\ \text{v matričnem obliki} \end{array}$$

$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & 15 \\ -1 & 0 & -2 & -7 \\ -5 & 2 & 0 & -5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \\ -5 & 2 & 0 & -5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$r(A) = 2$$

$$r(R) = 2$$

$r(A) = r(R)$
 $n = 3 \Rightarrow 1$ parametrična rešitev

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_3 &= -7 \\ x_2 + 5x_3 &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 15 - 5x_3 \\ x_3 &= \text{poljubna} \\ x_1 &= 7 - 2x_3 \end{aligned}$$

$$R \cdot X = \begin{bmatrix} 7 - 2x_3 \\ 15 - 5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}$$

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Lastni vektor kvadratne matrice $A^{n \times n}$ je $x \neq 0$ za katerega velja:

$$Ax = \lambda x \quad (\text{ohranijo smer}) \rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

kjer je λ skalar in ga imenujemo lastna vrednost.
Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma matrice A :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

A po diagonali odštejemo λ .

Lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti λ , dobimo kot netrivialne rešitve homogenega sistema:

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

4. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$R: \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Lastne vrednosti

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 - (1+\lambda) =$$
$$= (1+\lambda)(1-\lambda^2-2) = (1+\lambda)(-1-\lambda^2) = -(1+\lambda)(1+i)(1-i)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -i \\ \lambda_3 = i \end{bmatrix}$$

Lastne vrednosti so lahko tudi kompleksne.

Lastni vektorji $(A - \lambda I)x = 0$

$$\lambda_1 = -1: \begin{bmatrix} 1+1 & -1 & -1 \\ 1 & -1+1 & 0 \\ 1 & 0 & -1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

homogeni sistem

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & : & 0 \\ 0 & -1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Iščemo netrivialne rešitve

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3 \\ x_3 &= \text{parameter} \\ x_1 &= \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 = 1$$

lastni vektor za $\lambda_1 = -1$

$$\boxed{\lambda_2 = -i} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1+i & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1+i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1+i & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x_1 + (-1+i)x_2 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 \\ x_3 &= \text{poljuben} \\ x_1 &= (1-i)x_2 = (1-i)x_3 \end{aligned}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_3 = i} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$R: \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 3 \end{aligned} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

Lastne vrednosti

$$\det(A - \lambda I) = 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda+2)^2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= -2 \\ \lambda_3 &= -2 \end{aligned}$$

Lastni vektorji

$$\boxed{\lambda_1 = 4} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 4 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -12x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 2x_2 \\ x_2 &= \text{poljuben} \\ x_1 &= 2x_2 - x_2 = x_2 \end{aligned} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{2,3} = -2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\vec{v}-\vec{v}} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$$

$r=1, n=3 \Rightarrow 2$ -param. rešitev

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - x_3 \\ x_2 &= \text{poljuben} \\ x_3 &= \text{poljuben} \end{aligned}$$

$$\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$$

$$\vec{v}_3 = (-1, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} x_2=1 & \quad x_3=0 \\ x_2=0 & \quad x_3=1 \end{aligned}$$

2. lin. neodvisna vektorja, ki določata linearni podprostor za $\lambda_{2,3} = -2$.

8. Določi parameter a , tako da bo 0 lastna vrednost matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)(3-\lambda)(-7-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 4a(2-\lambda) = 0 \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(-7-\lambda) - 4a(2-\lambda) = 0 \\ &= (2-\lambda)((3-\lambda)(-7-\lambda) - 4a) = (2-\lambda)(-3-3\lambda+2+\lambda^2-4a) = 0 \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3-4a) \end{aligned}$$

$$\lambda = 0$$

$$2 \cdot (-3-4a) = 0$$

$$-6 - 8a = 0$$

$$8a = -6$$

$$a = -6/8 = -3/4$$

Potenčne vrste

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$$

↑
središče vrste

npr. $\sum x^n, a_n=1, a=0$

Konvergenčni radij potenčne vrste izračunamo takole:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

div. $\leftarrow R \quad R \rightarrow$ div.

$a-R \quad a \quad a+R$

Velja:

- 1.) Potenčna vrsta konvergira za $x \in (a-R, a+R)$
- 2.) Potenčna vrsta divergira za $x < a-R$ in $x > a+R$.
- 3.) V krajnjih $x = a-R$ in $x = a+R$ določimo konv. tako kot konvergenco številskih vrst.

Spomnimo se kriterijev za konv. številskih vrst.

a.) vrste s pozitivnimi členi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$

• kvocienčni $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\left\{ \begin{array}{l} \rho < 1: \text{konv.} \\ \rho > 1: \text{diver.} \\ \rho = 0: \text{odpove} \end{array} \right.$

• korenski $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$

• primerjalni kriterij $0 \leq a_n \leq b_n$ od nekeje napre

$\rightarrow \sum b_n$ konv. $\rightarrow \sum a_n$ konv.

$\rightarrow \sum a_n$ dive. $\rightarrow \sum b_n$ dive.

b.) alternirajoče vrste: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n; a_n \geq 0$

• Leibnizov kriterij: Alt. vrsta $\sum (-1)^n a_n$ konvergira, če zaporedje a_n od nekeje naprej monotonno pada proti 0

07.04.2008

Potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

↑
središče vrste

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow \text{konvergenčni polmer}$$

$$\begin{array}{c} \text{div.} \quad \xleftarrow{R} \quad \xrightarrow{R} \quad \text{div.} \\ \text{---} \quad \text{konv.} \quad \text{---} \\ a-R \quad a \quad a+R \end{array}$$

1. Določiti konvergenčni polmer potenčne vrste in izračunaj vsoto vrste v središču.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2^n} \right) (x-3)^n$ $a=3$ $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n^2}{2^n}}{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 \cdot n^2}{n^2 + 2n + 1 \cdot n^2} = 2$$

$$\begin{array}{c} \text{konvergenca} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ 1 \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

$$x=3: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (3-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \cdot 0^n = \frac{0^2}{2^0} \cdot 0^0 + 0 + 0 \dots = 0$$

$$\boxed{0^0 = 1; 0^x = 0, x \neq 0}$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} x^n$ $a=0$ $a_n = \frac{10^n}{n!}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{10^n}{n!}}{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n (n+1)!}{10^{n+1} n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty$$

vrsta konvergenca povsod

$$x=0: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} 0^n = \frac{10^0}{0!} 0^0 = 1$$

2. Določi konvergenčno območje potenčnih vrst.

a.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+4}$ $R: [-2, 0)$

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$ $a=0, a_n = \frac{n!}{100^n}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n!}{100^n}}{\frac{(n+1)!}{100^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 100^{n+1}}{(n+1)! \cdot 100^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{n+1} = 0$$

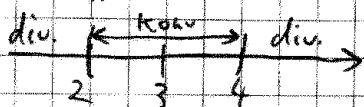


$x=0: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} 0^n = \frac{0!}{100^0} \cdot 0^0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$ konvergirata (vsota = končna)

R : konv. območje $\{0\}$

c.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-3)^n$ $a=3, a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n (n+2)}{(-1)^{n+1} (n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$



Vemo: vrsta konv. za $x \in (2, 4)$

vrsta div. za $x < 2$ in $x > 4$

Za krajšici intervala $(2, 4)$ preverimo posebej!

$x=2: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ harmonična vrsta

$\sum \frac{1}{n+1}$ harmonična vrsta, ki divergira

$x=4: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (4-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ alternirajoča vrsta

Leibnitzov kriterij

$\cdot \frac{1}{n+1}$ pada $\checkmark$
 $\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ $\checkmark$

$\Rightarrow$ konvergirata

R : konv. območje: $[2, 4]$

Ponavljanje

$$\textcircled{1} \begin{array}{c|cccc|cccc} 2 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -2 & -2 & 6 & 2 \end{array} \xrightarrow{1-3\text{vr.}} \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 6 & 4 \end{array} \xrightarrow{4\text{st.}-1\text{st.}} \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 6 & 4 \end{array} \xrightarrow{\text{razvoj po 1. vrstici}} 1 \cdot \begin{array}{c|ccc} 5 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{array} =$$

- vrstica + k × druga vrstica
- zamenjana vrstici → spremenjeni predznaki
- sosednji ∇

razvoj po 1. vrstici

- vrstico pomnožimo z nen ničelnim številom ⇒ determinanta se pomnoži z m

$$\uparrow \begin{vmatrix} 0 & -10 & -9 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & 8 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -10 & -9 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} = -(-80 + 108) = \underline{\underline{-28}}$$

lvr. - 5 × 2vr.

~~lvr. - 5 × 2vr.~~

lvr. + 2 × 2vr.

$$\textcircled{2} \text{ Reši matrično enačbo } XA^T = B, \text{ kjer sta } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 5 \\ 12 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

Operacije, ki ohranjajo rang (sistemi, matr. enačbe, inverz, rang)

- vrstico možno z nen ničelnim št.
- vrstice lahko premešamo
- vrstici lahko pristavimo vektorske druge

$$AX = B \quad [A:B] \longrightarrow [I:X]$$

$$AX = B \quad [A:B] \longrightarrow [I:X]$$

$$XA^T = B / ()^T$$

$$AX^T = B^T \longrightarrow [A:B^T] \sim [I:X^T]$$

$$[A:B^T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

① 0 pod diagonalo
2 × 3vr. - 1vr.

3vr. - 2vr.

② 0 nad diagonalo
2 × 2vr. - 3vr.
1vr. - 3 × 2vr.

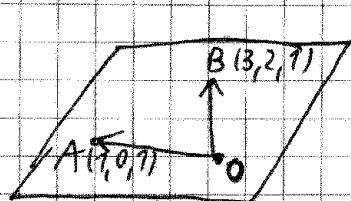
$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7vr. + 2vr.

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. kol. iz mat 2, 2003

- ① Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točki $(1,0,1)$, $(3,2,1)$, če veš da poteka skozi koordinatno izhodišče.



$$\vec{a} = \vec{OA} = (1, 0, 1)$$

$$\vec{b} = \vec{OB} = (3, 2, 1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 2, 2) = 2(-1, 1, 1) \Rightarrow \vec{n} = (-1, 1, 1)$$

ravnina: $ax + by + cz = d$ $\vec{n} = (a, b, c)$ $d = \vec{n} \cdot \vec{r}_A$

$$-x + y + z = d, \quad d = \vec{n} \cdot (0, 0, 0) = 0$$

$$R: -x + y + z = 0$$

premica $\frac{x-a}{s_1} = \frac{y-b}{s_2} = \frac{z-c}{s_3}$ $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ $A(a, b, c)$

- ② Kateremu pogoju morajo ustrezati parametri a, b in c , da bo sistem $x + 2y + z = a$ rešljiv za izbiri $a=1, b=1, c=-2$.

$$2x + z = b$$

$$-x - 6y - 2z = c$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 : a \\ 2 & 0 & 1 : b \\ -1 & -6 & -2 : c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 : a \\ 0 & -4 & -1 : b-2a \\ 0 & -4 & -1 : a+c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 : a \\ 0 & -4 & -1 : b-2a \\ 0 & 0 & 0 : 3a+c-b \end{bmatrix}$$

$$2 \text{ vr.} - 2 \cdot 1 \text{ vr.}$$

$$3 \text{ vr.} + 1 \text{ vr.}$$

$$3 \text{ vr.} - 2 \cdot 1 \text{ vr.}$$

Pogoj: $3a + c - b = 0$ (rang enaka = sistem je rešljiv)

$$1-2-1$$

$$a=1, b=1, c=-2$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 : 1 \\ 0 & -4 & -1 : -1 \\ 0 & 0 & 0 : 0 \end{bmatrix}$$

$$x + 2y + z = 1$$

$$-4y - z = -1$$

1-parametrična rešitev

$$\begin{matrix} r=2 \\ h=3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \text{ par.}$$

$$z = 1 - 4y$$

$$y = \text{poljubna}$$

$$x = 1 - 2y - z \Rightarrow x = 2y$$

3) Določí parameter a tako, da posta -3 in 5 lastni vrednosti matrike: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix}$. Za ta izbor pat. a poišči vse lastne vrednosti in vektorje zg. matrike.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & a & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ a & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot ((-1-\lambda)(3-\lambda) - a) =$$

razvoj po prvem stolpcu $= (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 3 - a) = 0$

$\lambda = -3$
 $\lambda = 5$

$\lambda = -3: 9 + 6 - 3 - a = 0 \Rightarrow a = 12$
 $\lambda = 5: 25 - 10 - 3 - a = 0 \Rightarrow a = 12$

Lastne vrednosti: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -3$ $\lambda_3 = 5$.

Lastni vektorji:

$\lambda_1 = 1$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$3 \text{ vr.} + 6 \times 2 \text{ vr.}$ $2 \text{ vr.} + 1 \text{ vr.}$ $3 \text{ vr.} + 8 \times 2 \text{ vr.}$

$2y - 2z = 0$
 $-z = 0$
 $z = 0$
 $y = 0$
 $x = \text{poljuben}$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -3$ $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ z = -2y \end{cases}$

$3 \text{ vr.} - 6 \times 2 \text{ vr.}$

$y = \text{poljuben}$
 $x = \frac{1}{2}(z - y) = -\frac{3}{2}y$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 5$ $\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 12 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -6y + z = 0 \\ z = 6y \end{cases}$

$3 \text{ vr.} + 2 \times 2 \text{ vr.}$

$y = \text{poljuben}$
 $x = \frac{1}{2}(y - z) = -\frac{5}{2}y$

$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$

④ Določi konvergenčni polmer vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n n^4}{2^{2n}}$.

$$a=1 \quad a_n = \frac{n^4}{2^{2n}}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^4}{2^{2(n+1)}}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)^4} \cdot 1}{\sqrt[n+1]{2^{2(n+1)}}}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$



1. Kolokvij Mat II, 2002

④ Poišči matriko, ki pripada linearni preslikavi $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$. Preslikava A je določena s predpisom $A\vec{x} = \vec{x} \times (1, -1, 1)$.

slike stan. baze

$$A = \begin{bmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3: \vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$$

stand. baza.

$$A(\vec{i}) = \vec{i} \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, -1)$$

$$A(\vec{j}) = \vec{j} \times (1, -1, 1) = (1, 0, -1) \quad A(\vec{k}) = \vec{k} \times (1, -1, 1) = (-1, 1, 0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

katere vektor se preslika v vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{z}$

takšen $\vec{y}$ ne obstaja

$$A \cdot \vec{y} = \vec{z}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ sistem lin. enačb (matrični zapis)}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ -1 & -1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{bmatrix}$$

3 vr. - 1 vr.

3 vr. + 2 vr.

Alketa

ni rešitve

1. kol. iz MAT 2, 2006

② Izračunaj kot med premico $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{7} = \frac{z-3}{7}$ in ravnino

$$\Pi: x+2y+z=9.$$

$$\vec{n} = (1, 2, 1)$$

$$\vec{s} = (2, 7, 7)$$

$$A(1, -2, 3)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{kot}(\vec{n}, \vec{s})$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| |\vec{s}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

14.04.2008

Taylorjeva vrsta (primer potence vrste)

Razvoj funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = a$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \quad \text{ostanek}$$

Taylorjev polinom stopnje n

Taylorjev polinom (stopnje n) je najboljši polinomski približek (stopnji n) dane funkcije.

Razvoj nekaterih elementarnih funkcij okrog točke $x=0$.

a.) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; |x| < \infty$ - konvergira povsod

b.) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; |x| < \infty$

c.) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; |x| < \infty$

d.) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; |x| < 1$

e.) Binomska formula: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n; |x| < 1$
 $\uparrow$ binomski simbol

f.) Geometrijska vrsta: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; |x| < 1$

1. Razvij funkcijo v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 in določi območje konvergence vrste:

a) $f(x) = e^{-2x}$

1. način: po definiciji $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-0)^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x} && \rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= e^{-2x}(-2) && \rightarrow f'(0) = -2 \\ f''(x) &= e^{-2x}(-2)^2 && \rightarrow f''(0) = (-2)^2 \\ f'''(x) &= e^{-2x}(-2)^3 && \rightarrow f'''(0) = (-2)^3 \\ &\vdots && \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = e^{-2x}(-2)^n \rightarrow f^{(n)}(0) = (-2)^n$$

Taylorjeva vrsta okrog ničle

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-2)^n}{n!}}_{a_n} x^n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-2)^n}{n!}}{\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{-2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = \infty$$

Konv. območje: $|x| < \infty$

2. način: pomagamo si z znanim razvojem

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty$$

$$e^{-2x} = 1 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!}, \quad \begin{matrix} |-2x| < \infty \\ |x| < \infty \end{matrix} \quad / : 2$$

b) $g(x) = x^2 e^{-x^2}$

$$x^2 e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} (x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}}_{a_{2n+2}} x^{2n+2} = \sum a_n x^n$$

Konv. območje: $\begin{matrix} |-x^2| < \infty \\ |x|^2 < \infty \\ |x| < \infty \end{matrix} \quad \checkmark$

$$c.) h(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \stackrel{\text{Partialni ulomki}}{=} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A \cdot (x-3) + B \cdot (x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

Binomska: $(1+x)^\alpha = \sum \binom{\alpha}{n} x^n; |x| < 1$

Geometrijska: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; |x| < 1$

$$1 = Ax - 3A + Bx - 2B$$

x: $0 = A + B$

konst: $1 = -3A - 2B$

$$1 = 3B - 2B \Rightarrow B = 1 \quad A = -1$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} - \frac{1}{3(1-\frac{x}{3})}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{x^n}{2^n} - \frac{1}{3} \frac{x^n}{3^n} \right) = *$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} |\frac{x}{2}| < 1 & |\frac{x}{3}| < 1 \\ |x| < 2 & |x| < 3 \end{array}} \text{ PRESEK}$$

Konu. območje: $|x| < 2$

$$* = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n$$

d.) $i(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad R: i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}; |x| < 1$

e.) $j(x) = \arcsin x \quad \text{namig: } \arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$j(x) = \int i(x) dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} dx \quad \begin{array}{l} \text{Taylorjeva vrsta } i(x) \\ \text{zamenjamo integral} \\ \text{in vsoto} \end{array}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \int x^{2n} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) \quad |x| < 1$$

2. Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okoli točke x_0 . Določi tudi območje konvergence.

a.) $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $x_0 = 1$

$$R: f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)}{2} (x-1)^n; |x-1| < 1$$

b.) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$; $x_0 = 1$ $\sum a_n (x-1)^n$

$$f(x) = \frac{1}{(x+3)^3} = (x+3)^{-3} = (4+(x-1))^{-3} = \left(4 \cdot \left(1 + \frac{x-1}{4}\right)\right)^{-3} = \frac{1}{4^3} \left(1 + \frac{x-1}{4}\right)^{-3} =$$

Binomska formula

$$\alpha \Rightarrow -3$$

$$x \Rightarrow \frac{x-1}{4}$$

$$= \frac{1}{4^3} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} \left(\frac{x-1}{4}\right)^n = *$$

$$|x-1| < 4 \Rightarrow |x-1| < 4$$

$$* = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} \frac{1}{4^{n+3}} (x-1)^n$$

$$\binom{-3}{n} =$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\binom{20}{3} = \text{št. različnih trojk iz množice 20 točk}$$

Binomski simboli

$$m, n \in \mathbb{N}: \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! (m-n)!} = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1) \cancel{(m-n)!}}{n! \cancel{(m-n)!}}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}: \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$

$$\binom{\alpha}{1} = \alpha$$

$$\binom{-3}{n} = \frac{-3 \cdot (-4) \cdot \dots \cdot (-2-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+2)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot \frac{(n+2)!}{2}}{n!} =$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot (n+2)(n+1)}{2}$$

c.) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}; x_0=2$

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax-A+Bx+B}{x^2-1}$$

kon: $\begin{cases} A+B=1 \\ -A+B=0 \\ A=B \\ A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$

$$f(x) = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} = *$$

geo: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; |x| < 1$

$$* = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{((x-2)+3)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x-2)+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3(1+\frac{x-2}{3})} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x-2)} =$$

$$= \frac{1}{6} \frac{1}{1-(-\frac{x-2}{3})} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-(-(x-2))} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-(x-2))^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{3^n} + \frac{1}{2} (-1)^n (x-2)^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n (x-2)^n \right) \left(\frac{1}{6 \cdot 3^n} + \frac{1}{2} \right) = a_n$$

$$\left| -\frac{(x-2)}{3} \right| < 1$$

$$|x-2| < 1$$

$$|-(x-2)| < 3$$

$$|x-2| < 1$$

$$|x-2| < 3$$

PRESEK

Opnočje konv: $|x-2| < 1$

3. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj vrednost $\frac{1}{\sqrt{e}}$ na tri decimalke natančno.

$$e^{-\frac{1}{2}}$$

$f(x) = e^x \leftarrow$ Taylorjeva vrsta okrog $a=0$
 $f(-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad |x| < \infty$$

$$e^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \dots$$

Računanje približkov

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} = 0,5$$

$$s_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2!} = 0,625$$

$$s_4 = s_3 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3!} = 0,60416$$

$$s_5 = s_4 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^4}{4!} = 0,60677$$

$$s_6 = s_5 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{5!} = 0,60651$$

$$R: \frac{1}{\sqrt{e}} = 0,606$$

4. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto funkcije $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ do vključno potence x^3 izračunaj približno vrednost korena $\sqrt{198}$.

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k ; |x| < 1$$

binomska
vrsta

$$= \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)x^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{3}\right)x^3$$

$$\sqrt{198} = 198^{\frac{1}{2}} = (1+197)^{\frac{1}{2}}$$

$n=2$

$x=197 \notin$ ne leži v konv. območju $\square$

$$\sqrt{198} = (2+196)^{\frac{1}{2}} = \left(196\left(\frac{2}{196}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 14 \cdot \left(1+\frac{1}{98}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$x = \frac{1}{98}$ leži v konv. območju,
 $n=2$

$$= 14 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{98} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right) \frac{1}{98^2} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{3}\right) \frac{1}{98^3}\right)$$

$$= 14 \cdot \left(1 + \frac{1}{196} + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!} \cdot \frac{1}{98^2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{3!} \cdot \frac{1}{98^3}\right) = 14,07247...$$

5. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{4x^2}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots) - 1 - 2x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \dots\right)}{4x^2} \cdot x^2$$

$x \rightarrow \infty$ največja potenca

$x \rightarrow 0$ najmanjša potenca

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \frac{8x}{3!} + \frac{16x^2}{4!} + \dots}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

6. Z uporabo T. vrste izračunaj naslednje integrale na tri decimalke natančno.

$$\begin{aligned}
 \text{a.) } \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx \\
 &= \cancel{9.41} + \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right]_0^2 = \\
 &= 2 - \frac{8}{3 \cdot 3!} + \frac{32}{5 \cdot 5!} - \frac{2^7}{7 \cdot 7!} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 2 \\
 s_2 &= 2 - \frac{8}{3 \cdot 3!} = 1,555\dots \\
 s_3 &= s_2 + \frac{32}{5 \cdot 5!} = 1,60888\dots \\
 s_4 &= s_3 - \frac{2^7}{7 \cdot 7!} = 1,60526\dots \\
 s_5 &= s_4 + \frac{2^9}{9 \cdot 9!} = 1,60547\dots
 \end{aligned}$$

$$R: \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1,605$$

$$\text{b.) } \int_0^1 \cos x^2 dx \quad R: 0,904$$

21.04.2008

Fourierjeva vrsta

Razvoj funkcije $f(x)$ ki je periodična s periodo T (ali podana na intervalu (t_0, t_0+T)):

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x))$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$\frac{1}{T}$ perioda ali dolžina intervala

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x) dx$$

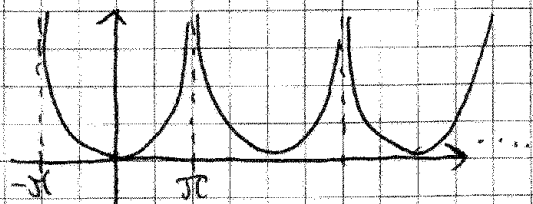
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x) \cos(n\omega_0 x) dx \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x) \sin(n\omega_0 x) dx$$

Velja: + če je funkcija $f(x)$ soda, je njena Fourierjeva vrsta sestavljena samo iz kosinusov in konstante ($b_n = 0$)
+ če je funkcija $f(x)$ liha, je njena Fourierjeva vrsta sestavljena samo iz sinusov ($a_0 = 0, a_n = 0$)

Če je funkcija $f(x)$ definirana na intervalu $(0, a)$, jo lahko razvijemo v Fourierjevo vrsto kot:

- funkcijo s periodo a - navadna Fourierjeva vrsta
- soda funkcija s periodo $2a$ - soda nadaljevanje (kosinusna F. vrsta)
- liha funkcija s periodo $2a$ - liha nadaljevanje (sinusna F. vrsta)

1. Razvij funkcijo $f(x) = x^2$ v Fourierjevo vrsto na intervalu $(-\pi, \pi)$



$$f(x) \text{ soda: } f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x)$$

$$T = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{6\pi} (\pi^3 + \pi^3) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2 \cos(nx)}_{\text{sodo}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx =$$

per partes: $u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$
 $dv = \cos(nx) dx \rightarrow v = -\frac{1}{n} \sin(nx)$

$$= \frac{2}{\pi} \left(x^2 \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n} \sin(nx) 2x dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{n} \sin(n\pi) - \frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n} \left(-x \frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n} \cos(nx) dx \right) =$$

$$\begin{cases} \sin n\pi = 0 \\ \cos n\pi = (-1)^n \end{cases}$$

p.p.: $u = x \rightarrow du = dx$
 $dv = \sin(nx) dx \rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos(nx)$

$$= -\frac{4}{\pi n} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_0^\pi \right) = -\frac{4}{\pi n} \left(-\frac{\pi}{n} (-1)^n \right) =$$

$$= \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

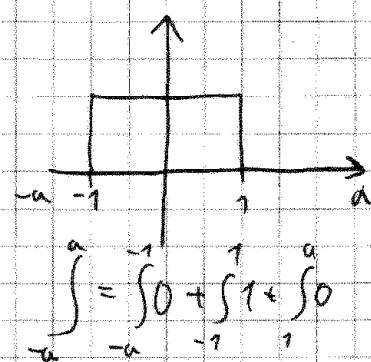
$$R: f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx)$$

2. Razvij funkcijo $f(x) = \begin{cases} x; & 0 \leq x \leq \pi \\ 0; & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$ v Fourierjevo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

$$R: f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right)$$

3. Razvij funkcijo $f(x) = \begin{cases} 0 & -a \leq x \leq -1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq a \end{cases}$ v Fourierjevo vrsto

na intervalu $[-a, a]$, kjer je $a \in \mathbb{R}^+$, $a > 1$



soda: $b_n = 0$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}$

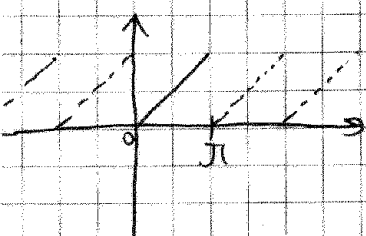
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2a} \int_{-1}^1 1 dx = \frac{1}{2a} \cdot 2 = \frac{1}{a}$$

$$a_n = \frac{2}{2a} \int_{-1}^1 1 \cos\left(n \frac{\pi}{a} x\right) dx = \frac{1}{a} \frac{a}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right) \Big|_{-1}^1 =$$

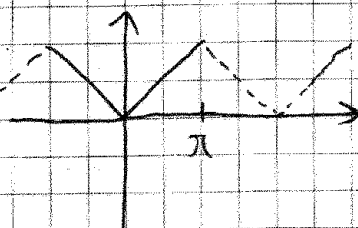
$$= \frac{1}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{a}\right) + \frac{1}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{a}\right) = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)$$

$$R: \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

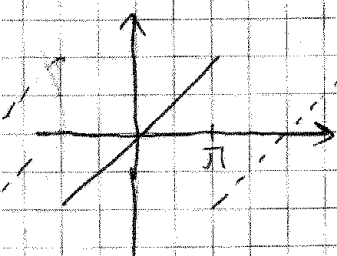
4. Razvij funkcijo $f(x)=x$, ki je dana na intervalu $[0, \pi]$ najprej v sinusno, nato v kosinusno, potem pa še v navadno Fourierjevo vrsto.



navadna Fou. vrsta
 $f(x)=x$ na $[0, \pi]$



Kosinusna F. vrsta
 $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \pi \\ -x & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$
na $[-\pi, \pi]$



sinusna F. vrsta
 $f(x)=x$ na $[-\pi, \pi]$

A) sinusna F. vrsta: $f(x)=x$ na $[-\pi, \pi]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 x); a_0=0, a_n=0 \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx =$$

liho liho
sodna

per partes $u=x \rightarrow du=dx$
 $dv=\sin(nx) dx \rightarrow \frac{1}{n} dv = -\cos(nx) \frac{1}{n}$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-x \cdot \frac{1}{n} \cos(nx) \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} (-1)^n \right) =$$

$$= -\frac{2}{n} (-1)^n$$

$$R: \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n} \right) (-1)^n \sin(nx)$$

B) cosinusna

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad f(x) = \begin{cases} -x & ; -\pi \leq x \leq 0 \\ x & ; 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad \text{na } [-\pi, \pi]$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(nx) dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \sin(nx)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \sin(nx) \right)_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} \cos(nx) \right)_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$$

$$R: f(x) \approx \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx$$

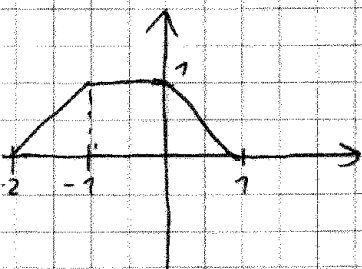
C) NAVADNA (D.N)

$$R: \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2nx)$$

5. Razvij funkcijo $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ v cosinusno Fourierjevo vrsto.

$$R: f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4n^2)\pi} \cos(2nx)$$

6. Razvij funkcijo $f(t)$ v Fourierjevo vrsto na intervalu $[-2, 2]$.



$$R: f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) - \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \right)$$

Funkcije več spremenljivk

Funkcija n spremenljivk je funkcija $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x_1, \dots, x_n) = y$.

7. Poišči in nariši def. območje funkcije 2 spremenljivk.

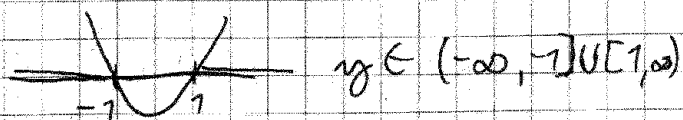
a) $f(x, y) = \frac{x - 5xy}{3\sqrt{y - x^2}}$ $\mathbb{R}: Df = \{(x, y); y > x^2\}$

b) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$

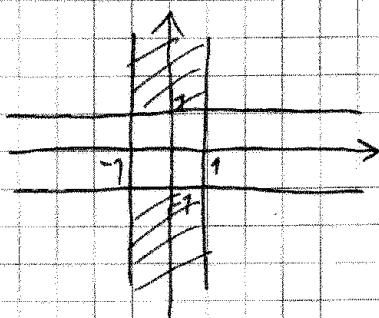
$$Df = \{(x, y); 1 - x^2 \geq 0 \text{ in } y^2 - 1 \geq 0\}$$

pogoji $1 - x^2 \geq 0$ $x \in [-1, 1]$

$y - 1 \geq 0$ $(y - 1)(y + 1)$



$$Df = \{(x, y); x \in [-1, 1] \text{ in } y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$$



Nivojske krivulje ali nivojuice

Nivojske krivulje funkcije $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $z = f(x, y)$, so krivulje $f(x, y) = C$ v def. območju funkcije f , na katerih zavzame f konstantno vrednost C .

8. Izračunaj in nariši nivojske krivulje funkcije dveh spremenljivk

a.) $f(x, y) = x \cdot y$

$f(x, y) = C$

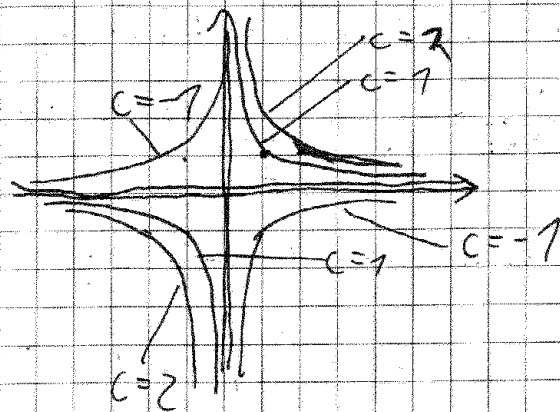
$C = 0: \begin{matrix} x \cdot y = 0 \\ x = 0 \text{ ali } y = 0 \\ \text{y os} \quad \text{x os} \end{matrix} \left. \begin{matrix} \text{koordinatai} \\ \text{kriz} \end{matrix} \right\}$

$C = 1: \begin{matrix} x \cdot y = 1 \\ y = \frac{1}{x} \end{matrix} \text{ hiperbola}$

$C = 2: \begin{matrix} x \cdot y = 2 \\ y = \frac{2}{x} \end{matrix}$

itd.

$C = -1: \begin{matrix} x \cdot y = -1 \\ y = -1/x \end{matrix}$



b.) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$

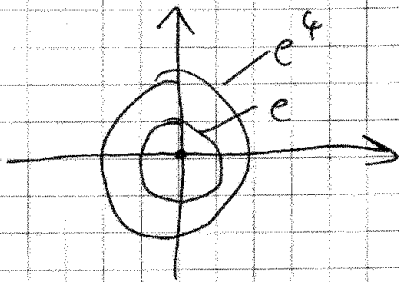
$C = 0: e^{x^2 + y^2} = 0 \text{ prazen}$

$C = 1: e^{x^2 + y^2} = 1$

$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \text{ koor. ish}$

$C = e: x^2 + y^2 = 1 \text{ kroznica s polmerom 1}$

$C = e^4: x^2 + y^2 = 4 \quad R = 2$



Partialni odvodi

Funkcijo $f(x_1, \dots, x_n)$ lahko odvajamo na vsako spremenljivko $x_1, \dots, x_n$ posebej. Ko odvajamo f po spremenljivki x_i , obravnavamo vse ostale spremenljivke x_j ($j \neq i$) kot konstante.

Partialni odvod funkcije $f(x_1, \dots, x_n)$ po spremenljivki x_i :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i+h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i-h, x_{i+1}, \dots, x_n)}{h}$$

Totalni dif. funkcije f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

9. Poišči parcialne odvode in totalni dif. funkcije:

a.) $f(x, y) = (x^3 - y^2)^2$

R: $df = 6x^2(x^3 - y^2)dx - 4y(x^3 - y^2)dy$

b.) $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2) \cdot y$

$$f_{x'} = y \cdot \cos(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (2x) = 2xy \cdot \cos(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$f_{y'} = \cos(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2y \cdot y + \sin(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 1 = 2y^2 \cos(x^2 + y^2 + z^2) + \sin(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$f_{z'} = y \cos(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2z$$

R: $df = f_{x'} dx + f_{y'} dy + f_{z'} dz = 2xy \cos(x^2 + y^2 + z^2) dx + (\sin(x^2 + y^2 + z^2) + 2y^2 \cos(x^2 + y^2 + z^2)) dy + 2y z \cos(x^2 + y^2 + z^2) dz$

05.05.2008

Poisci ptve parciales odvođe in totalni diferencijal.

$$c.) f(x, y, z) = \arcsin \frac{xy}{z} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \arcsin \frac{xy}{z} + \ln (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_x' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \frac{y}{x} + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x}_{\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}} - \frac{x \sqrt{z^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)}$$

$$f_y' = \frac{x}{\sqrt{z^2 - x^2 y^2}} - \frac{y}{(x^2 + y^2)}$$

$$f_z' = \frac{z}{(z^2 + x^2 y^2)} \cdot (-2 x y) + 0 = -\frac{x y}{z \cdot \sqrt{z^2 - x^2 y^2}}$$

$$df = f_x' dx + f_y' dy + f_z' dz$$

$$df = \left(\frac{xy}{\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{xy}{\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy - \frac{xy}{z\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}} dz$$

1. S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost izraza $\sqrt{2,04^2 + 2,08^2 - 1}$.
najhi sprejembi koordinat

Přibližek z diferenciálom: $f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + \underbrace{f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k}_{\text{diferencial}}$

$$f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^2 - 1} = (x^3 + y^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$(a, b) = (2, 3)$$

$$h = 0,04$$

$$K = -0.02$$

$$f_{x'} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2$$

$$f_y' = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y$$

$$f(2, 3) = 4$$

$$f_x'(2,3) = \frac{3}{2}$$

$$f_y'(2,3) = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{2.04^2 + 2.98^2} \approx f(2,3) + f_x'(2,3) \cdot 0.04 + f_y'(2,3) \cdot (-0.02)$$

$$= 4 + \frac{3}{2} \cdot 0.04 + \frac{3}{4} \cdot (-0.02)$$

$$= 4 + 0,06 - 0,075 = \underline{\underline{4,045}}$$

2. S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost izraza $(-1.99)^3 + \ln 1.03$
 R: -7,09

3. Določi funkcijo $z = z(x, y)$, če veš, da je:

a.) $z_x = \cos(x \cdot y) \cdot y + \frac{2x}{y} \Rightarrow z(x, y) = \int z_x dx = \int (\cos(x \cdot y) \cdot y + \frac{2x}{y}) dx =$
 $z(0, 1) = 2$
 $= y \cdot \sin(x \cdot y) \cdot \frac{1}{y} + \frac{2}{y} \cdot \frac{x^2}{2} + c(y)$
 $z(x, y) = \sin(x \cdot y) + \frac{x^2}{y} + c(y)$
 $z(0, 1) = c(1) = 2$

R: $z(x, y) = \sin(x \cdot y) + \frac{x^2}{y} + 2$

b.) $z_x = \cos x \cdot \cos y$
 $z_y = -1 - \sin x \sin y$
 $z(0, 1) = -1$

R: $z(x, y) = \sin x \cos y - y$

4. Izračunaj parcialna odvoda $\frac{\partial z}{\partial u}$ in $\frac{\partial z}{\partial v}$ posredno podane funkcije $z(x, y) = x^3 - y^2$, kjer sta $x(u, v) = u \cos v$ in $y(u, v) = \ln \frac{u+v}{u-v}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u$$

$$z(x, y) \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3x^2 \cdot \cos v - 2y \cdot \frac{u-v}{u+v} \cdot \frac{1(u-v) - (u+v) \cdot 1}{(u-v)^2} = 3x^2 \cdot \cos v + \frac{4uy}{u^2 - v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 3x^2 \cdot (-u \sin v) - 2y \cdot \frac{u-v}{u+v} \cdot \frac{v-v + u+v}{(u-v)^2} = -3x^2 \cdot u \sin v - \frac{4uy}{u^2 - v^2}$$

Višji parcialni odvodi

$f(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow n$ različnih parcialnih odvodov 1. reda: $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$
 n^2 (različnih) parcialnih odvodov 2. reda: $f_{x_i x_j}$
 $f_{x_i x_j}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$
 $f_{x_i x_j}'' = f_{x_j x_i}''$

Vrstni red odvajanja pri mešanih odvodi 2. reda ni pomemben, če odvodi obstajajo in so zvezne funkcije:

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

$$f_{x_1 x_2 x_3} = f_{x_2 x_3 x_1} = f_{x_3 x_1 x_2} = \dots$$

5. Poišči vse parcialne odvode 1. in 2. reda za funkcijo $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$. Izračunaj tudi $f_{xy}(1, 0)$.

$$\begin{aligned}
 f_x' &= \frac{1}{x^2 + y} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + y} \\
 f_y' &= \frac{1}{x^2 + y} \\
 f_{xy}' &= \frac{-2x \cdot 2x}{(x^2 + y)^2} + \frac{1}{x^2 + y} \cdot 2 = \frac{-4x^2 + 2x^2 + 2y}{(x^2 + y)^2} = \frac{-2x^2 + 2y}{(x^2 + y)^2} \\
 f_{yy}' &= \frac{-1}{(x^2 + y)^2} \\
 f_{yx}' &= \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}
 \end{aligned}$$

$$f_{xy}''(1, 0) = -2$$

6. Izračunaj $f_{yzz}(1, 0, 1)$ za funkcijo $f(x, y, z) = y \cdot \ln(x^2 + z^4)$.

$$R: f_{yzz}(1, 0, 1) = \frac{1}{2}$$

Ekstremi funkcij več spremenljivk

$f(x, y)$



Edini kandidati za lokalne ekstreme so stacionarne ali kritične točke funkcije $f(x_1, \dots, x_n)$. To so tiste točke, kjer so vsi prvi parcialni odvodi enaki 0

$$f'x_1 = 0, f'x_2 = 0, \dots, f'x_n = 0$$

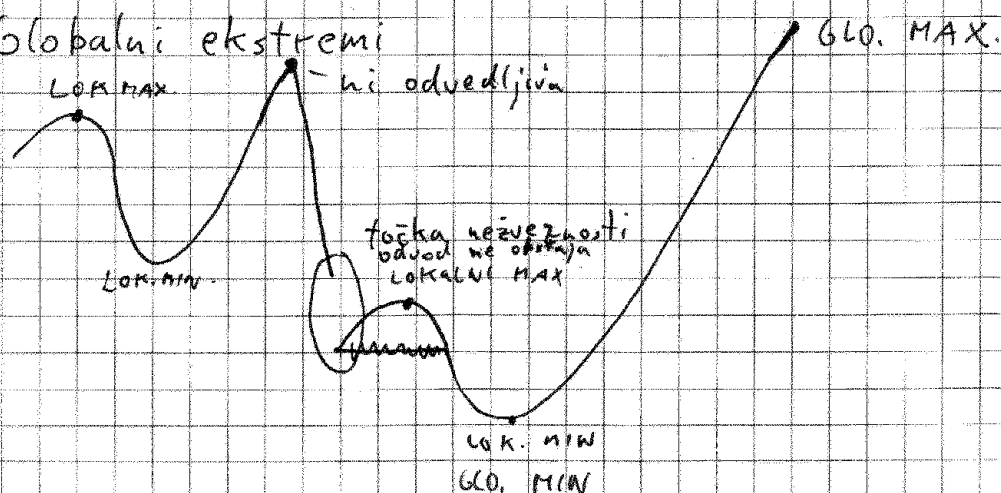
Naj bo $f(x, y)$ funkcija dveh spremenljivk. S pomočjo Hessejeve matrice (matrika 2. odvodov) ugotovimo, ali je v dani stacionarni točki res lokalni ekstrem funkcije $f(x, y)$

$$H_f = \text{Hess}_f = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

Za stacionarno točko (a, b) tedaj velja:

- Če je $\det H_f(a, b) > 0$, je v (a, b) lokalni ekstrem.
 - Če je $f''_{xx}(a, b) > 0$, je v (a, b) lokalni minimum
 - Če je $f''_{xx}(a, b) < 0$, je v (a, b) lokalni maksimum
 - Če je $f''_{xx}(a, b) = 0$, je lokalni ekstrem težje karakterizirati
- Če je $\det H_f(a, b) < 0$, v (a, b) ni ekstrema ampak je sedlo
- Če je $\det H_f(a, b) = 0$, je lokalni ekstrem težje karakterizirati

Globalni ekstremi



kandidati za globalne ekstreme:

- stacionarne točke
- točke neodvedljivosti
- robne točke definicijskega območja

7. Določi lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

stacionarne točke:

$$f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = x^2$$

$$f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x^2 - x &= 0 \\ x^4 - x &= 0 \\ x(x^3 - 1) &= 0 \\ x(x-1)(x^2+x+1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_1 = 0 \\ x_2 = 1 & y_2 = 1 \end{array}$$

$T(0,0)$ } 2 stacionarni
 $T(1,1)$ } točki

Hessejeva matrika:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 6x \\ f''_{xy} &= -3 \\ f''_{yy} &= 6y \end{aligned}$$

$$H_f = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

Karakterizacija ekstremov:

$$T_1(0,0): \det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

$\Rightarrow T_1$ ni lok. ekstrem

$$T_2(1,1): \det H_f(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$$

$\Rightarrow T_2$ je lok. ekstrem

$$f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$$

$\Rightarrow T_2$ je lok. minimum

8. Poišči stacionarne točke funkcije treh spremenljivk
 $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

R: $T(2, 1, 1)$

9. Določi lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

R: $T, (\frac{1}{2}, -1)$ lok. min

$\uparrow$

10. Določi lokalne ekstreme funkcije $z = z(x, y)$, ki je podana implicitno kot $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
 krogle



eksplicitno: $z(x, y) =$

stacionarne točke:

$$z_x' = 2x + 2z \cdot z_x' = 0 \Rightarrow z_x' = -\frac{x}{z}$$

$$z_y' = 2y + 2z \cdot z_y' = 0 \Rightarrow z_y' = -\frac{y}{z}$$

$$z_x' = 0, z_y' = 0$$

$$\begin{matrix} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{matrix} \quad T(0, 0)$$

Hessejeva matrika

$$z_{xx}'' = 2 + 2(z_x' z_x' + z z_{xx}'') = 0 \Rightarrow z_{xx}'' = \frac{-1 - z_x'^2}{z}$$

$$z_{xy}'' = 2 \cdot (z_y' z_x' + z z_{xy}'') = 0 \Rightarrow z_{xy}'' = \frac{-z_x' z_y'}{z}$$

$$z_{yy}'' = 2 + 2(z_y' z_y' + z z_{yy}'') = 0 \Rightarrow z_{yy}'' = \frac{-1 - z_y'^2}{z}$$

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{-1 - z_x'^2}{z} & \frac{-z_x' z_y'}{z} \\ \frac{-z_x' z_y'}{z} & \frac{-1 - z_y'^2}{z} \end{bmatrix}$$

Karak. stac. točk:

$$T(0, 0) \quad \det H_f(0, 0) = \begin{vmatrix} \frac{-1}{z(0,0)} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{z(0,0)} \end{vmatrix} =$$

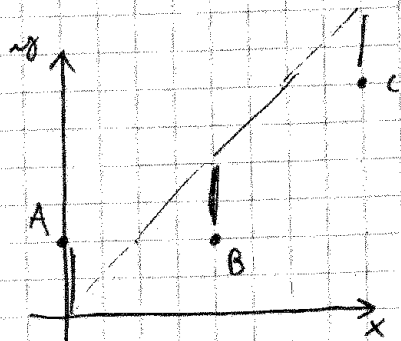
$$= \frac{1}{z^2(0,0)} > 0$$

$\Rightarrow T(0, 0)$ je lok. ekstrem

$$z(0, 0) \quad z^2(0, 0) = 4 \quad z(0, 0) = \pm 2$$

$$z_{xx}''(0, 0) = \frac{1}{z(0,0)} = \begin{cases} -\frac{1}{2} < 0 \text{ lokalni max.} \\ \frac{1}{2} > 0 \text{ lok. min.} \end{cases}$$

17. Poišči premico $y = ax + b$, za katero je vsota kvadratov
 vertikalnih odmakov od točk $A(0,1)$, $B(2,1)$ in $C(4,3)$ minimalna



$$\sum (ax_i + b - y_i)^2$$

$\underbrace{ax_i + b}_{\text{vrednost na premici}}$ $\underbrace{y_i}_{\text{2. koordinata točke } (x_i, y_i)}$

$$\begin{aligned}
 f(a, b) &= \underbrace{(a \cdot 0 + b - 1)^2}_A + \underbrace{(a \cdot 2 + b - 1)^2}_B + \underbrace{(a \cdot 4 + b - 3)^2}_C = (b-1)^2 + (2a+b-1)^2 + (4a+b-3)^2 \\
 &= \cancel{6a^2 + 3b^2 + 72ab - 28a - 10b + 11} + b^2 - 2b + 1 + 4a^2 + b^2 - 2b + 1 + 16a^2 + b^2 - 6b + 9 + 8a(b-3) \\
 &= 20a^2 + 3b^2 + 72ab - 28a - 10b + 11
 \end{aligned}$$

$$f'_a = 40a + 72b - 28 = 0 \quad / :4$$

$$f'_b = 6b + 72a - 10 = 0 \quad / :2$$

$$\begin{cases} 10a + 3b - 7 = 0 \\ 3b + 6a - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad b = \frac{2}{3}$$

$T(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ edina stac. točka $\Rightarrow$ lok. min

$$R: y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$$

Vezani ekstremi

Dana je funkcija $f(x,y)$. Zanimajo nas ekstremi nad krivuljo $g(x,y)=0$. Takšni ekstremi, rečemo jim vezani ekstremi, lahko nastopijo v stacionarnih točkah Lagrangeove funkcije:

$$F(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

Lagrangeov multiplikator

$$g(x,y)=0$$

vez ali pogoj

12. Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y)=x+2y$ na krivulji $x^2+y^2=5 \rightarrow x^2+y^2-5=0$ u ravni v pro.
 krožnica $g(x,y)$ vez

Lagrangeova funkcija

$$F(x,y;\lambda) = x+2y + \lambda(x^2+y^2-5)$$

$$\begin{aligned} F_x' &= 1 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2\lambda} \\ F_y' &= 2 + 2\lambda y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda} \\ F_\lambda' &= x^2 + y^2 - 5 = 0 \text{ vez} \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 5 = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 5 = 0 \quad / \cdot 4\lambda^2$$

$$1 + 4 - 20\lambda^2 = 0$$

$$5 = 20\lambda^2$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

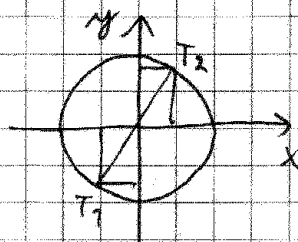
$$T_1(-1, -2), \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$T_2(1, 2), \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

$$f(T_2) = 5 \text{ max}$$

$$f(T_1) = -5 \text{ min}$$

2. stacionarni točki



DELOVNI LISTI ~~ZADOLŽENOSTI~~ AUDITORNIH VAS - GLEJ PO POGlavjih

12. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (UNI)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2008

VEZANI EKSTREMI FUNKCIJ – NADALJEVANJE

1. naloga:^{DN} Poišči vezane ekstreme funkcije $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, kjer je vez podana z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lagrangeova funkcija je

$$F(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Iskani vezani ekstremi lahko nastopijo v stacionarnih točkah Lagrangeove funkcije:

$$F_x = 1 + 2\lambda x = 0$$

$$F_y = -2 + 2\lambda y = 0$$

$$F_z = 2 + 2\lambda z = 0$$

$$F_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Iz prvih treh enačb lahko izrazimo neznanke x, y, z in dobimo:

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda}, \quad z = -\frac{1}{\lambda}.$$

Sledi $y = -2x$ in $z = 2x$, kar lahko vstavimo v zadnjo enačbo:

$$x^2 + 4x^2 + 4x^2 - 1 = 0.$$

Dobimo $x^2 = \frac{1}{9}$ in zato $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Izračunamo še pripadajoče koordinate y in z in dobimo dve stacionarni točki:

$$T_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$

$$T_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Ker zvezna funkcija na kompaktnem območju (v tem primeru sfera s polmerom 1) zavzame oba ekstrema (vezani minimum in vezani maksimum), moramo le še izračunati obe funkcijski vrednosti v stacionarnih točkah:

$$f\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -3,$$

$$f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3,$$

kar pomeni, da funkcija f zavzame minimum v točki T_1 (manjša funkcijska vrednost) in maksimum v točki T_2 (večja funkcijska vrednost).

Rezultat: $T_1(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$: vezani minimum in $f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -3$, $T_2(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$: vezani maksimum in $f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 3$.

2. naloga: Poišči vezane ekstreme funkcije $f(x, y, z) = x^2 - 14x + y^2 - 8y + 48 + z^2 - 8z$, kjer je vez podana z neenačbo $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Ker je vez (ki je v tem primeru krogla) podana z neenačbo, jo moramo razdeliti na dva dela:

- a.) $x^2 + y^2 + z^2 < 1$: notranjost krogle,
- b.) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$: plašč krogle (sfera).

Kandidati za vezane ekstreme funkcije $f(x, y, z)$ so zato:

- a.) Stacionarne točke funkcije $f(x, y, z)$, ki ležijo v notranjosti krogle (tj. zadoščajo neenačbi $x^2 + y^2 + z^2 < 1$).

Stacionarne točke funkcije $f(x, y, z)$ so rešitev sistema enačb:

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x - 14 = 0, \\ f'_y &= 2y - 8 = 0, \\ f'_z &= 2z - 8 = 0. \end{aligned}$$

Dobimo eno samo stacionarno točko $T_0(7, 4, 4)$. Ker ta točka ne leži v notranjosti krogle, tj. ne zadošča neenačbi $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, ni kandidat za iskane vezane ekstreme. V tem koraku tokrat nismo našli nobene točke, v kateri bi funkcija $f(x, y, z)$ ob dani vezi lahko zavzela maksimalno ali minimalno vrednost.

- b.) Stacionarne točke Lagrangeove funkcije

$$F(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z),$$

kjer je $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ vez, ki se nanaša na sfero s polmerom 1.

Poiščimo torej stacionarne točke Lagrangeove funkcije

$$F(x, y, z; \lambda) = x^2 - 14x + y^2 - 8y + 48 + z^2 - 8z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

ki jih dobimo kot rešitev sistema enačb:

$$\begin{aligned} F'_x &= 2x - 14 + \lambda \cdot 2x = 0, \\ F'_y &= 2y - 8 + \lambda \cdot 2y = 0, \\ F'_z &= 2z - 8 + \lambda \cdot 2z = 0, \\ F'_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Sistem lahko npr. rešimo, tako da iz prvih treh enačb izrazimo spremenljivke x, y, z in dobljene izraze (odvisne samo od λ) vstavimo v zadnjo enačbo:

$$\begin{aligned}x &= \frac{7}{1+\lambda}, \\y &= \frac{4}{1+\lambda}, \\z &= \frac{4}{1+\lambda}, \\ \left(\frac{7}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{4}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{4}{1+\lambda}\right)^2 - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Iz zadnje enačbe dobimo dve vrednosti: $\lambda_1 = 8$ in $\lambda_2 = -10$. Sledita stacionarni točki:

$$\begin{aligned}T_1 &\left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right), \\T_2 &\left(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}\right).\end{aligned}$$

Dobili smo torej dva kandidata, v katerih funkcija $f(x, y, z)$ lahko doseže vezana ekstrema. To sta točki T_1 in T_2 . Ker zvezna funkcija na kompaktnem območju (v tem primeru kroglja s polmerom 1) zavzame oba ekstrema (vezani minimum in vezani maksimum), moramo le še izračunati obe funkcijski vrednosti v stacionarnih točkah:

$$\begin{aligned}T_1 : \quad f\left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right) &= 31, \\T_2 : \quad f\left(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}\right) &= 67.\end{aligned}$$

Sledi, da funkcija f zavzame minimum v točki T_1 (manjša funkcijska vrednost) in maksimum v točki T_2 (večja funkcijska vrednost).

Rezultat: $T_1\left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$: vezani minimum in $f\left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right) = 31$, $T_2\left(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}\right)$: vezani maksimum in $f\left(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}\right) = 67$.

3. naloga:^{DN**} Poišči najmanjšo in največjo vrednost funkcije $z = e^{-x^2-y^2}$ na območju $|x| + |y| \leq 1$.

Dano območje je kvadrat v ravnini z oglišči $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ in $(1, 0)$. Iščemo najmanjšo in največjo vrednost funkcije na tem kvadratu. Ti dve vrednosti lahko nastopita kot lokalna ekstrema v notranjosti kvadrata ali pa kot vezana ekstrema na robu kvadrata. Najprej poiščimo lokalne ekstreme v notranjosti kvadrata. Stacionarne točke, ki so kandidati za lokalne ekstreme, so točke, v katerih so prvi parcialni odvodi enaki 0:

$$\begin{aligned}z_x &= e^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) = 0 \\z_y &= e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) = 0\end{aligned}$$

Ker doseže funkcija e^x samo pozitivne vrednosti, iz zgornjih enačb sledi $x = 0$ in $y = 0$. Edina stacionarna točka je zato $T_1(0, 0)$. Ta točka leži v notranjosti kvadrata, zato je

kandidat za iskano najmanjšo oz. največjo vrednost. Če ne bi ležala v območju, bi jo iz obravnave izključili, zdaj pa jo moramo obravnavati kot morebitno iskano točko. Ker bo na koncu pomembno samo, kje je največja in kje najmanjša vrednost funkcije (izračunati bo treba funkcijske vrednosti), ni nujno, da zdaj ugotovimo, ali je v tej točki lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Zdaj poiščimo še vezane ekstreme na robu območja, na straneh kvadrata. Vse štiri stranice opisuje enačba $g(x) = |x| + |y| - 1 = 0$. To je vez Lagrangeove funkcije:

$$Z(x, y; \lambda) = e^{-x^2-y^2} + \lambda(|x| + |y| - 1).$$

Kandidati za vezane ekstreme so stacionarne točke Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} Z_x &= -2xe^{-x^2-y^2} + \lambda|x|'_x = 0 \\ Z_y &= -2ye^{-x^2-y^2} + \lambda|y|'_y = 0 \\ Z_\lambda &= |x| + |y| - 1 = 0 \end{aligned}$$

Pri tem je $|x|'_x$ odvod $|x|$ po spremenljivki x in $|y|'_y$ odvod $|y|$ po spremenljivki y . Bodimo pazljivi na to, da $|x|$ in $|y|$ v točki 0 nista odvedljiva (leva in desna odvoda nista enaka, imamo špico). To pomeni, da moramo kot potencialne kandidate za iskane točke obravnavati tudi točke $T_2(0, 1)$, $T_3(1, 0)$, $T_4(0, -1)$ in $T_5(-1, 0)$, torej ravno oglišča kvadrata. Drugje pa velja:

$$|x|'_x = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases} \quad |y|'_y = \begin{cases} 1; & y > 0 \\ -1; & y < 0 \end{cases}$$

Iz prvih dveh enačb zgornjega sistema sledi:

$$\begin{aligned} 2xe^{-x^2-y^2} &= \lambda|x|'_x \\ 2ye^{-x^2-y^2} &= \lambda|y|'_y \end{aligned}$$

Če obe enačbi delimo, dobimo zvezo:

$$\frac{x}{y} = \frac{|x|'_x}{|y|'_y} \quad \text{oz.} \quad x|y|'_y = y|x|'_x.$$

Iz tretje enačbe zgornjega sistema za stacionarne točke v vsakem primeru sledi

$$2|x| = 1 \quad \text{oz.} \quad |x| = \frac{1}{2}.$$

Sedaj ločimo dve možnosti:

$$\begin{aligned} x \text{ in } y \text{ sta enako predznačena: } & x = y \Rightarrow T_6\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), T_7\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\ x \text{ in } y \text{ sta različno predznačena: } & x = -y \Rightarrow T_8\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), T_9\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Zdaj moramo samo še preveriti, kakšne so funkcijske vrednosti v dobljenih devetih točkah:

$$f(0, 0) = 1 \Rightarrow \text{največja vrednost na danem območju v } T_1(0, 0),$$

$$f(0, 1) = e^{-1} \Rightarrow \text{najmanjša vrednost na danem območju v } T_2(0, 1),$$

$f(1, 0) = e^{-1} \Rightarrow$ najmanjša vrednost na danem območju v $T_3(1, 0)$,

$f(0, -1) = e^{-1} \Rightarrow$ najmanjša vrednost na danem območju v $T_4(0, -1)$,

$f(-1, 0) = e^{-1} \Rightarrow$ najmanjša vrednost na danem območju v $T_5(-1, 0)$,

$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$ v $T_6(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ni ekstremne vrednosti,

$f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$ v $T_7(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ni ekstremne vrednosti,

$f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$ v $T_8(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ni ekstremne vrednosti,

$f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$ v $T_9(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ni ekstremne vrednosti.

Rezultat: $T_1(0, 0)$: največja vrednost na danem območju $f(0, 0) = 1$; $T_2(1, 0)$, $T_3(0, 1)$, $T_4(-1, 0)$, $T_5(0, -1)$: najmanjša vrednost na danem območju $f(1, 0) = f(0, 1) = f(-1, 0) = f(0, -1) = e^{-1}$.

DIFERENCIALNE ENAČBE

OSNOVNI POJMI

Diferencialna enačba reda n je zveza med neodvisno spremenljivko x , odvisno spremenljivko y ter njenimi odvodi $y', y'', \dots, y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Pri tem je $y' = \frac{dy}{dx}$.

Red diferencialne enačbe je stopnja najvišjega odvoda.

Rešitev diferencialne enačbe $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ na intervalu $[a, b]$ je vsaka funkcija $g(x)$, ki je na intervalu $[a, b]$ n -krat odvedljiva in za katero za vsak $x \in [a, b]$ velja $F(x, g(x), g'(x), \dots, g^{(n)}(x)) = 0$ (zadošča diferencialni enačbi).

Rešitev diferencialne enačbe n -tega reda je n -parametrična družina funkcij.

Cauchyjeva naloga ali *začetni problem* imenujemo diferencialno enačbo skupaj z začetnimi pogoji. Rešitev začetnega problema je ena sama funkcija (parametre iz splošne rešitve začetni pogoji določijo).

4. naloga: Kateri diferencialni enačbi pripada družina krožnic $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$?

Podana je 3-parametrična družina funkcij. Parametri so a , b in r , torej obe koordinati središča in polmer. Diferencialna enačba, katere splošna rešitev bo dana družina krožnic, bo zato 3. reda, kar pomeni, da bo stopnja najvišjega odvoda, ki ga bo vsebovala, enaka 3.

Do iskane diferencialne enačbe pridemo, tako da dano enačbo odvajamo po edini neodvisni spremenljivki x (implicitno!) in se pri tem znebimo vseh treh parametrov. Ko jo odvajamo prvič, dobimo:

$$2(x - a) + 2(y - b)y' = 0 \quad \text{oz.} \quad x - a + (y - b)y' = 0.$$

Zdaj odvajamo še drugič (bodimo pazljivi na zadnji člen v vsoti, ki ga moramo odvajati kot produkt dveh funkcij), da dobimo:

$$1 + y'y' + (y - b)y'' = 0.$$

Ostal nam je le še en parameter b . Če enačbo ponovno odvajamo v tej obliki, se ga ne bomo znebili. Treba je enačbo zapisati tako, da b ne bo nastopal v produktu z y, y' ali y'' . Na primer tako, da $y - b$ iz enačbe izrazimo:

$$y - b = -\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Odvajajmo še zadnjič:

$$y' = -\frac{2y'y''y'' - (1 + y'^2)y'''}{y''^2}.$$

Dobljena diferencialna enačba je brez parametrov, samo še poenostavimo jo:

$$3y'y''^2 = (1 + y'^2)y''.$$

Rezultat: $3y'(y'')^2 = (1 + (y')^2)y'''$.

5. naloga.^{DN} Pokaži, da je družina funkcij $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ rešitev diferencialne enačbe $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Namig: Funkcijo odvajamo in vstavimo v diferencialno enačbo.

Dana 2-parametrična družina funkcij je rešitev diferencialne enačbe 2. reda, če ji zadošča, tj. če funkcijo y vstavimo v levo stran diferencialne enačbe, moramo dobiti 0. Preden lahko to naredimo, moramo izračunati še y' in y'' , ki v enačbi nastopata:

$$\begin{aligned} y &= C_1e^x + C_2e^{2x}, \\ y' &= C_1e^x + 2C_2e^{2x}, \\ y'' &= C_1e^x + 4C_2e^{2x}. \end{aligned}$$

Funkcije y, y', y'' sedaj vstavimo v levo stran diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= (C_1e^x + 4C_2e^{2x}) - 3(C_1e^x + 2C_2e^{2x}) + 2(C_1e^x + C_2e^{2x}) \\ &= C_1e^x + 4C_2e^{2x} - 3C_1e^x - 6C_2e^{2x} + 2C_1e^x + 2C_2e^{2x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sledi, da je podana družina funkcij res splošna rešitev diferencialne enačbe.

DIFERENCIALNE ENAČBE PRVEGA REDA

Začetni problem (Cauchy-jeva naloga) je v primeru diferencialnih enačb 1. reda takšne oblike:

$$F(x, y, y') = 0,$$

$$y(x_0) = y_0.$$

DIFERENCIALNE ENAČBE Z LOČLJIVIMA SPREMENLJIVKAMA

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$y' = f(x)g(y) \text{ oz. } f(x)dx = g(y)dy.$$

Navodilo za reševanje: Vstavimo $y' = \frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo.

6. naloga: Reši diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama:

a.) $y' = e^{x+y}$

Najprej se prepričajmo v to, ali ima dana diferencialna enačba res ločljivi spremenljivki, tj. ali lahko desno stran zapišemo kot produkt funkcije spremenljivke x in funkcije spremenljivke y :

$$y' = e^x e^y.$$

Sedaj namesto y' vstavimo $\frac{dy}{dx}$ in dobimo:

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^y.$$

V naslednjem koraku ločimo spremenljivki, tj. enačbo preoblikujemo v obliko $f(x)dx = g(y)dy$:

$$\begin{aligned} dy &= e^x e^y dx \quad [\text{množimo z } dx] \\ e^{-y} dy &= e^x dx \quad [\text{množimo z } e^{-y}] \\ \int e^{-y} dy &= \int e^x dx \quad [\text{integriramo enačbo}] \\ -e^{-y} &= e^x + C \quad [\text{konstanto je treba dodati le na eni strani}] \end{aligned}$$

Rešiti diferencialno enačbo pomeni poiskati funkcijo y , če se le da, v eksplisitni obliki. Zato zgornjo enačbo pomnožimo z -1 in jo logaritmirajmo:

$$\ln e^{-y} = \ln(-e^x - C) \implies y = -\ln(-e^x - C).$$

Rezultat: $y(x) = -\ln(-e^x - C)$

b.) $y' = e^{x+y}$, $y(0) = 1$ (začetni pogoj)

Dan je začetni problem ali Cauchyjeva naloga. Ker je diferencialna enačba enaka tisti iz naloge 6 a.), lahko splošno rešitev kar prepišemo:

$$y(x) = -\ln(-e^x - C).$$

Rešitev začetnega problema dobimo, tako da v splošni rešitvi upoštevamo še začetni pogoj $y(0) = 1$. Torej:

$$1 = -\ln(-e^0 - C) = -\ln(-1 - C).$$

Sedaj sledi

$$-1 - C = e^{-1} \text{ oz. } C = -1 - e^{-1}.$$

Rešitev začetnega problema je sedaj funkcija $y(x) = -\ln(-e^x + 1 + e^{-1})$.

Rezultat: $y(x) = -\ln(-e^x + 1 + e^{-1})$

HOMOGENE DIFERENCIALNE ENAČBE

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ oz. } F\left(y', \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Navodilo za reševanje: Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = \frac{y}{x}$, tj. za nastavek vzamemo $y = xu$ (sledi $y' = u + xu'$), dobimo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama.

7. naloga: Reši homogeno diferencialno enačbo $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

Najprej se prepričajmo v to, ali je dana diferencialna enačba res homogena, tj. ali lahko, ko izrazimo y' , desno stran zapišemo tako, da se spremenljivki x, y pojavljata samo v kvocientu $\frac{y}{x}$:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Diferencialna enačba je torej homogena, zato (namesto y) uvedemo novo neodvisno spremenljivko:

$$u = \frac{y}{x}.$$

Sledi $y = xu$ in $y' = u + xu'$ (u je zdaj funkcija spremenljivke x , zato je njen odvod enak u'). Po zamenjavi dobimo:

$$u + xu' = u + \operatorname{tg} u \text{ oz. } xu' = \operatorname{tg} u.$$

Vemo, da je to diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Iščemo funkcijo $u(x)$. Dif. enačbe tega tipa rešujemo, tako da namesto odvoda u' vstavimo $\frac{du}{dx}$:

$$x \frac{du}{dx} = \operatorname{tg} u.$$

Ločimo spremenljivki:

$$\begin{aligned} x du &= \operatorname{tg} u dx \quad [\text{množimo z } dx] \\ \frac{du}{\operatorname{tg} u} &= \frac{dx}{x} \quad [\text{delimo z } x \text{ in s } \operatorname{tg} u] \\ \int \frac{du}{\operatorname{tg} u} &= \int \frac{dx}{x} \quad [\text{integriramo enačbo}] \end{aligned}$$

Posebej integrirajmo levo stran, saj integral ni elementaren:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\operatorname{tg} u} &= \int \frac{\cos u \, du}{\sin u} = \left[\text{namesto } \operatorname{tg} u \text{ smo napisali } \frac{\sin u}{\cos u} \right] \\ &= \int \frac{dt}{t} = \left[\text{vpeljali smo novo spremenljivko } t = \sin u \Rightarrow dt = \cos u \, du \right] \\ &= \ln t + C = \ln \sin u + C \end{aligned}$$

Vrnimo se na reševanje diferencialne enačbe (enakost nedoločenih integralov):

$$\ln \sin u = \ln x + \ln D.$$

Pri tem smo namesto dveh konstant pisali samo eno in še to v obliki $\ln D$, ki je bolj primerna takrat, ko imamo opravka z logaritmi (če pri integriranju vsaj enkrat dobimo logaritem). Ta zapis bo včasih ključnega pomena na poti do rešitve!

Sledi

$$\ln \sin u = \ln Dx \quad \text{oz.} \quad \sin u = Dx \quad \text{in} \quad u = \arcsin Dx.$$

To je rešitev diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama, rešitev začetne diferencialne enačbe je tedaj:

$$y = xu = x \arcsin Dx.$$

Rezultat: $y(x) = x \arcsin(Dx)$.

8. naloga: Reši homogeno diferencialno enačbo $(xy' - y)^2 = x^2 - y^2$.

Najprej se prepričajmo v to, ali je dana diferencialna enačba res homogena, tj. ali lahko, ko izrazimo y' , desno stran zapišemo tako, da se spremenljivki x, y pojavljata samo v kvocientu $\frac{y}{x}$:

$$\begin{aligned} xy' - y &= \pm \sqrt{x^2 - y^2}, \\ y' &= \frac{y}{x} \pm \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x}, \\ y' &= \frac{y}{x} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}. \end{aligned}$$

Diferencialna enačba je torej homogena, zato (namesto y) uvedemo novo neodvisno spremenljivko:

$$u = \frac{y}{x}.$$

Sledi $y = xu$ in $y' = u + xu'$ (u je zdaj funkcija spremenljivke x , zato je njen odvod enak u'). Po zamenjavi dobimo:

$$u + xu' = u \pm \sqrt{1 - u^2} \quad \text{oz.} \quad xu' = \pm \sqrt{1 - u^2}.$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama (iščemo funkcijo $u(x)$). Dif. enačbe tega tipa rešujemo, tako da namesto odvoda u' vstavimo $\frac{du}{dx}$.

$$x \frac{du}{dx} = \pm \sqrt{1 - u^2}.$$

Ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\begin{aligned} x du &= \pm \sqrt{1 - u^2} dx \quad [\text{množimo z } dx] \\ \pm \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} &= \frac{dx}{x} \quad [\text{delimo z } \pm \sqrt{1 - u^2} \text{ in z } x] \\ \pm \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} &= \int \frac{dx}{x} \quad [\text{integriramo enačbo}] \\ \pm \arcsin u &= \ln x + \ln C \quad [\text{konstanto spet napišemo v obliki } \ln C] \\ \arcsin u &= \pm \ln Cx \\ u &= \pm \sin(\ln Cx) \end{aligned}$$

To je rešitev diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama, rešitev začetne diferencialne enačbe je tedaj:

$$y = xu = \pm x \sin(\ln Cx).$$

Rezultat: $y(x) = \pm x \sin(\ln Cx)$.

LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE 1. REDA

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne enačbe, y_p pa neka partikularna rešitev (zadošča diferencialni enačbi).

A. Homogeni del (dobimo y_h):

$$p(x)y' + q(x)y = 0$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Dobimo rešitev $y_h = Cg(x)$.

B. Nehomogeni del (dobimo y_p):

$$p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Rešujemo z metodo *variacija konstante*: Za nastavek vzamemo $y_p = C(x)g(x)$ (konstanto iz rešitve homogenega dela variiramo), ga odvajamo $y' = C'(x)g(x) + C(x)g'(x)$ in vstavimo v diferencialno enačbo. Iz dobljene enačbe izračunamo $C(x)$.

9. naloga: Reši linearno diferencialno enačbo $xy' - 2y = 2x^4$ z začetnim pogojem $y(1) = 2$.

Vemo, da je splošna rešitev linearne diferencialne enačbe oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne enačbe, y_p pa partikularna rešitev.

A. Homogeni del (računamo y_h):

$$xy' - 2y = 0$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Namesto odvoda y' torej vstavimo $\frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\begin{aligned}x \frac{dy}{dx} &= 2y \\x dy &= 2y dx \\ \frac{dy}{y} &= 2 \frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= 2 \int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= 2 \ln x + \ln C \\ \ln y &= \ln x^2 + \ln C \\ \ln y &= \ln Cx^2 \\ y &= Cx^2\end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela je torej $y_h = Cx^2$.

B. Nehomogeni del (računamo y_p):

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Rešujemo z metodo variacija konstante. Ker je rešitev homogenega dela $y_h = Cx^2$, za nastavek vzamemo $y_p = C(x)x^2$ (konstanto iz y_h variiramo). Nastavek odvajamo:

$$\begin{aligned}y &= C(x)x^2, \\ y' &= C'(x)x^2 + C(x) \cdot 2x.\end{aligned}$$

Sedaj y in y' vstavimo v dif. enačbo in izračunamo $C(x)$:

$$\begin{aligned}x(C'(x)x^2 + C(x) \cdot 2x) - 2C(x)x^2 &= 2x^4, \\ C'(x)x^3 &= 2x^4, \\ C'(x) &= 2x, \\ C(x) &= \int 2x dx = x^2 + D.\end{aligned}$$

Ker iščemo samo eno (partikularno) rešitev, lahko vzamemo $D = 0$ in dobimo $C(x) = x^2$. Iz nastavka sedaj dobimo partikularno rešitev $y_p = C(x)x^2 = x^4$.

Splošna rešitev diferencialne enačbe je

$$y = y_h + y_p = Cx^2 + x^4.$$

Poiščimo še rešitev začetnega problema. Upoštevajmo začetni pogoj $y(1) = 2$:

$$2 = C + 1 \implies C = 1 \implies y = x^2 + x^4.$$

Rezultat: $y(x) = x^4 + x^2$.

10. naloga: Reši linearno diferencialno enačbo $x^2y' + xy + 1 = 0$.

Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne enačbe, y_p pa partikularna rešitev. Enačbo najprej uredimo, tj. zapišimo jo v obliki $p(x)y' + q(x)y = r(x)$:

$$x^2y' + xy = -1.$$

A. Homogeni del (računamo y_h):

$$x^2y' + xy = 0$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Namesto odvoda y' torej vstavimo $\frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\begin{aligned}x^2 \frac{dy}{dx} &= -xy \\x^2 dy &= -xy dx \\\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\\int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} \\\ln y &= -\ln x + \ln C \\\ln y &= \ln \frac{C}{x} \\y &= \frac{C}{x}\end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela je torej $y_h = \frac{C}{x}$.

B. Nehomogeni del (računamo y_p):

$$x^2y' + xy = -1.$$

Rešujemo z metodo variacija konstante. Ker je rešitev homogenega dela $y_h = \frac{C}{x}$, za nastavek vzamemo $y_p = \frac{C(x)}{x}$ (konstanto iz y_h variiramo). Nastavek odvajamo:

$$\begin{aligned}y &= \frac{C(x)}{x}, \\y' &= \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}.\end{aligned}$$

Sedaj y in y' vstavimo v dif. enačbo in izračunamo $C(x)$:

$$x^2 \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + x \frac{C(x)}{x} = -1,$$

$$C'(x)x - C(x) + C(x) = -1,$$

$$C'(x) = -\frac{1}{x},$$

$$C(x) = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln x + D.$$

Ker iščemo samo eno (partikularno) rešitev, lahko vzamemo $D = 0$ in dobimo $C(x) = -\ln x$. Iz nastavka sedaj dobimo partikularno rešitev $y_p = \frac{C(x)}{x} = -\frac{\ln x}{x}$.

Splošna rešitev diferencialne enačbe je

$$y = y_h + y_p = \frac{C}{x} - \frac{\ln x}{x}.$$

Rezultat: $y(x) = \frac{C}{x} - \frac{\ln x}{x}$.

BERNOULLIJEVE DIFERENCIALNE ENAČBE

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)y^\alpha.$$

Navodilo za reševanje: Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = y^{1-\alpha}$, jo odvajamo $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, vstavimo v enačbo in dobimo linearno diferencialno enačbo 1. reda.

11. naloga: Reši Bernoullijevo diferencialno enačbo $(x+1)(yy' - 1) = y^2$.

Preverimo najprej, ali je dana dif. enačba res Bernoullijeva:

$$(x+1)(yy' - 1) = y^2$$

$$(x+1)yy' - (x+1) = y^2 \quad [\text{delimo z } y]$$

$$(x+1)y' - (x+1)\frac{1}{y} = y$$

$$(x+1)y' - y = (x+1)y^{-1}$$

Vidimo, da je res Bernoullijeva in $\alpha = -1$. Navodilo za reševanje pravi, da moramo (namesto y) uvesti novo odvisno spremenljivko:

$$u = y^{1-\alpha} = y^2,$$

$$u' = 2yy'.$$

Iz oblik u in u' vidimo, da bo najlažje, če ju vstavimo v obliko diferencialne enačbe, ki je v zgornjem postopku preoblikovanja enačbe zapisana kot druga:

$$(x+1)yy' - (x+1) = y^2,$$

$$(x+1)\frac{u'}{2} - (x+1) = u.$$

Vemo, da smo na ta način dobili linearno diferencialno enačbo 1. reda, ki v klasični obliki izgleda takole:

$$(x+1)u' - 2u = 2(x+1).$$

Iščemo rešitev $u(x)$.

A. Homogeni del (računamo u_h):

$$(x+1)u' - 2u = 0$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Namesto odvoda u' torej vstavimo $\frac{du}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\begin{aligned}(x+1)\frac{du}{dx} &= 2u \\(x+1)du &= 2u dx \\ \frac{du}{u} &= 2\frac{dx}{x+1} \\ \int \frac{du}{u} &= 2 \int \frac{dx}{x+1} \\ \ln u &= 2 \ln(x+1) + \ln C \\ \ln u &= \ln C(x+1)^2 \\ u &= C(x+1)^2\end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela je torej $u_h = C(x+1)^2$.

B. Nehomogeni del (računamo u_p):

$$(x+1)u' - 2u = 2(x+1).$$

Rešujemo z metodo variacija konstante. Ker je rešitev homogenega dela $u_h = C(x+1)^2$, za nastavek vzamemo $u_p = C(x)(x+1)^2$ (konstanto iz u_h variiramo). Nastavek odvajamo:

$$\begin{aligned}u &= C(x)(x+1)^2, \\ u' &= C'(x)(x+1)^2 + C(x) \cdot 2(x+1).\end{aligned}$$

Sedaj u in u' vstavimo v dif. enačbo in izračunamo $C(x)$:

$$(x+1)(C'(x)(x+1)^2 + C(x) \cdot 2(x+1)) - 2C(x)(x+1)^2 = 2(x+1).$$

$$C'(x)(x+1)^3 = 2(x+1),$$

$$C'(x) = \frac{2}{(x+1)^2},$$

$$C(x) = \int \frac{2}{(x+1)^2} dx = \int 2(x+1)^{-2} dx = 2 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + D.$$

Ker iščemo samo eno (partikularno) rešitev, lahko vzamemo $D = 0$ in dobimo $C(x) = -\frac{2}{x+1}$. Iz nastavka sedaj dobimo partikularno rešitev

$$u_p = C(x)(x+1)^2 = -\frac{2}{x+1}(x+1)^2 = -2(x+1).$$

Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe 1. reda je

$$u = u_h + u_p = C(x+1)^2 - 2(x+1).$$

Rešitev začetne Bernoullijeve dif. enačbe dobimo iz zveze $u = y^2$. Torej,

$$y = \pm\sqrt{u} = \pm\sqrt{C(x+1)^2 - 2(x+1)}.$$

Rezultat: $y(x) = \pm\sqrt{C(x+1)^2 - 2(x+1)}.$

EKSAKTNE DIFERENCIALNE ENAČBE

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \text{ kjer je } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

V tem primeru obstaja taka funkcija $z(x, y)$, da je

$$dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Splošna rešitev eksaktne diferencialne enačbe je torej dana implicitno z enačbo $z(x, y) = C$. Do rešitve pa pridemo, tako da rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} z'_x &= P(x, y) \\ z'_y &= Q(x, y). \end{aligned}$$

12. naloga:^{DN} Ali je diferencialna enačba $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$ eksaktna? Če je eksaktna, jo reši.

Za eksaktno dif. enačbo mora biti izpolnjen pogoj

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pri nas sta

$$P(x, y) = 2xy \text{ in } Q(x, y) = x^2 - y^2,$$

zato sledi:

$$P'_y = 2x,$$

$$Q'_x = 2x.$$

Pogoj je izpolnjen in dif. enačba je eksaktna. Do rešitve $z(x, y) = C$ pridemo, tako da rešimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} z'_x &= P(x, y) = 2xy, \\ z'_y &= Q(x, y) = x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi

$$z(x, y) = \int z'_x dx = \int 2xy dx = 2y \frac{x^2}{2} + D(y) = yx^2 + D(y).$$

Dobljeno funkcijo $z(x, y)$ sedaj parcialno odvajamo po y :

$$z'_y = x^2 + D'_y.$$

Iz druge enačbe zgornjega sistema sledi:

$$x^2 - y^2 = x^2 + D'_y,$$

kar pomeni, da je $D(y)$, ki je le funkcija y , enaka:

$$D'_y = -y^2 \implies D(y) = \int D'_y dy = - \int y^2 dy = -\frac{y^3}{3} \quad (\text{konstante ne pišemo}).$$

Sledi

$$z(x, y) = yx^2 + D(y) = yx^2 - \frac{y^3}{3}$$

in rešitev eksaktne dif. enačbe je

$$yx^2 - \frac{y^3}{3} = C.$$

Rezultat: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \implies$ enačba je eksaktna, $x^2y - \frac{y^3}{3} = C$.

13. naloga: Določi parameter a , tako da bo enačba $2x \ln y + \frac{x^a}{y} y' = 0$ eksaktna, in jo reši.

V enačbo najprej namesto y' vstavimo $\frac{dy}{dx}$ in jo ustrezno preoblikujemo:

$$2x \ln y + \frac{x^a}{y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$2x \ln y dx + \frac{x^a}{y} dy = 0.$$

Da bo dana dif. enačba eksaktna, mora veljati

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pri nas sta

$$P(x, y) = 2x \ln y \text{ in } Q(x, y) = \frac{x^a}{y},$$

zato sledi:

$$P'_y = \frac{2x}{y},$$
$$Q'_x = \frac{ax^{a-1}}{y}.$$

Vidimo, da je pogoj izpolnjen, če je $a = 2$. Rešimo torej eksaktno dif. enačbo

$$2x \ln y dx + \frac{x^2}{y} dy = 0.$$

Do rešitve $z(x, y) = C$ pridemo, tako da rešimo naslednji sistem enačb:

$$z'_x = P(x, y) = 2x \ln y,$$
$$z'_y = Q(x, y) = \frac{x^2}{y}.$$

Iz prve enačbe sledi

$$z(x, y) = \int z'_x dx = \int 2x \ln y dx = 2 \ln y \frac{x^2}{2} + D(y) = x^2 \ln y + D(y).$$

Dobljeno funkcijo $z(x, y)$ sedaj parcialno odvajamo po y :

$$z'_y = \frac{x^2}{y} + D'_y.$$

Iz druge enačbe zgornjega sistema sledi:

$$\frac{x^2}{y} = \frac{x^2}{y} + D'_y,$$

kar pomeni, da je $D(y)$ enaka:

$$D'_y = 0 \implies D(y) = \int D'_y dy = 0 \text{ (konstante ne pišemo).}$$

Sledi

$$z(x, y) = x^2 \ln y + D(y) = x^2 \ln y$$

in rešitev eksaktne dif. enačbe je

$$x^2 \ln y = C.$$

Rezultat: $a = 2$, $z(x, y) = x^2 \ln y$, $x^2 \ln y = C$, $y = e^{\frac{C}{x^2}}$.

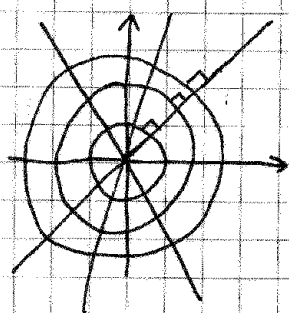
19.05.2008

~ Ortogonalne trajektorije

Dana je 1-parametrična družina krivulj.

$$F(x, y, c) = 0$$

Ortogonalne trajektorije so vse krivulje, ki sekajo dano družino pod pravim kotom.



$$y^2 + x^2 = r^2$$

Ortogonalne trajektorije = sop. prečnice skozi središče krožnic

$$F(x, y, c) = 0$$

$y' = \frac{dy}{dx}$ dif. enačba $f(x, y) = \text{tangen. naklonskega kota}$

$$y_T' = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{f(x, y)} = \text{tangen. naklonskega kota ort. traj.}$$

$\Rightarrow$ ortog. traj. so rešitve te dif. enačbe

1. Dana je družina krivulj $xy = C(x^2 + 1)$. Poišči ortog. trajek.!

Določi še tisto trajektorijo, ki gre skozi $T(7, \frac{7}{4})$.

$$R: y = \pm \sqrt{-\frac{x^2}{2} + \ln x + C}, \quad y = \pm \sqrt{-\frac{x^2}{2} - \ln x + \frac{9}{16}}$$

2. Dana je družina krivulj $x + y = Ce^{xy}$. Poišči tisto ortog. traj., ki gre skozi točko $T(0, 5)$.

$$x + y = Ce^{xy}$$

$$C = \frac{x+y}{e^{xy}} \quad | \quad ()'$$

$$0 = \frac{(1+y')e^{xy} - (x+y)e^{xy} \cdot xy'}{e^{2xy}}$$

$$0 = (1+y')e^{xy} - (x+y)e^{xy} \cdot xy'$$

$$y'(e^{xy} - (x+y)e^{xy}) = -e^{xy}$$

$$y' = -\frac{1}{1-(x+y)} = \frac{1}{x+y-1} = \text{smerni koef. tangente}$$

$$y_T' = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{\frac{1}{x+y-1}} = 1-x-y = \text{smerni koef. tangente ort. traj.}$$

$$y' = -x - y + 1$$

$$\boxed{y' + y = 1 - x} \quad (\text{lin. dif. enačba prvega reda})$$

$$R: y = y_h + y_p$$

a.) Homogeni del (izračunaj y_h)

$$y' + y = 0 \quad \text{dif. enačba z loč. spren.}$$

$$y = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow dy = -y dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int dx$$

$$\ln y = -x + \ln C$$

$$\ln \frac{y}{C} = -x$$

$$\frac{y}{C} = e^{-x} \Rightarrow y_h = C \cdot e^{-x}$$

b.) Nehomogeni deli (računamo y_p)

$$\text{variacija konstante} \Rightarrow \text{nastavek } \boxed{y_p = C e^{-x}}$$

$$y' = C' e^{-x} + C e^{-x} (-1)$$

$$\text{vstavimo } C' e^{-x} - C e^{-x} + C e^{-x} = 1 - x$$

$$C' e^{-x} = 1 - x$$

$$C' = (1 - x) e^x$$

$$C = \int (1 - x) e^x dx \quad \text{p.p.}$$

$$u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$$

$$dv = e^x dx$$

$$v = e^x$$

$$C = (-x + 1) e^x - \int e^x dx = (-x + 1) e^x + e^x = (2 - x) e^x$$

$$y_p = C(x) e^{-x} = (2 - x) e^x \cdot e^{-x} = 2 - x$$

$$R: y = y_h + y_p = \underline{C e^{-x} + 2 - x} \quad \text{ortogonalno traj.}$$

$$T(0,5) =$$

$$5 = C + 2 \Rightarrow C = 3$$

$$y = 3e^{-x} + 2 - x$$

Linearne dif. enačbe višjih redov

- a.) ločljive spreme.
- b.) homogene
- c.) lin. 1. reda
- d.) Bernulijeva
- e.) eksaktna

f.) Homogene lin. dif. enačbe s konst. koeficienti

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Reševanje = nastavek $y = e^{\lambda x}$ (odvajamo + vstavimo)

• dobimo karakteristično enačbo

$$a_n \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - rešitve te enačbe

• splošni rešitev

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

3. Reši enačbo $y'' - 4y' + 3y = 0$

nastavek: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$
 $y_2 = 2e^{\lambda_2 x}$
 $y = \lambda^2 e^{\lambda x}$

vstavimo: $\lambda^2 e^{\lambda x} - 4\lambda e^{\lambda x} + 3e^{\lambda x} = 0 \quad / : e^{\lambda x}$

$\boxed{\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0}$ - karakt. enačba

$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = 1$
 $\lambda_2 = 3$

R: $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

4. Reši enačbo $y'' - 2y' + y = 0$

R: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$

5. Poišči rešitev dif. enačbe $y''' - y'' - y' + y = 0$, ki zadošča pogojem $y(0) = 2$, $y(1) = -e - \frac{1}{e}$, $y'(0) = 0$

Karak. enačba: $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$$\lambda^2(\lambda - 1) - 1(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_{1,2} = 1$ dvojna!
 $\lambda_3 = -1$
 $e^x, x \cdot e^x, x^2 \cdot e^x, \dots$
 dvojna trojna

R: $y = C_1 e^x + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$

~~$y = C_1 e^x + C_3 e^{-x}$~~

Splošna rešitev: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}$
 $y' = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}$

$y(0) = 2: 2 = C_1 + C_3$

$y(1) = -e - \frac{1}{e}: -e - \frac{1}{e} = C_1 e + C_2 e + C_3 e^{-1}$

$y'(0) = 0: 0 = C_1 + C_2 - C_3$

$-e - \frac{1}{e} = C_3 e^{-1} + C_3 e \Rightarrow C_3 = \frac{-e - \frac{1}{e}}{\frac{1}{e} + e} = -1$

$C_3 = -1$
 $C_1 = 3$
 $C_2 = -4$

R: $y = 3e^x - 4xe^x - e^{-x}$

6. Reši enačbo $y'' - 4y' + 5y = 0$

Kar. enačba: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$$

$$R: y = C_1 \cdot e^{(2+i)x} + C_2 \cdot e^{(2-i)x}$$

Eulerjeva formula $e^{ip} = \cos p + i \sin p$

$$y = C_1 e^{2x} \cdot e^{ix} + C_2 e^{2x} \cdot e^{-ix} = C_1 e^{2x} (\cos x + i \sin x) + C_2 e^{2x} (\cos x - i \sin x)$$

$$y = e^{2x} \cdot \cos x \underbrace{(C_1 + C_2)}_{D_1} + e^{2x} \sin x \underbrace{(C_1 i - C_2 i)}_{D_2}$$

$$y = D_1 e^{2x} \cos x + D_2 e^{2x} \sin x$$

g.) Nehomogene lin. dif. enačbe s konst. koef

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = p(x)$$

Splošna rešitev: $y = y_h + y_g$

a.) Homogeni del (računamo y_h):

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

T.j. homogena lin. dif. enač. s konst. koef (tip f.)

A.) Nehomogeni del (računamo y_g)

Rešujemo z metodo inteligentnega ugibanja ali nedoločnih koef.

V splošnem, če je $p(x) = e^{\alpha x} \cdot \underbrace{(P_1(x) \cos(\beta x) + Q_2(x) \sin(\beta x))}_{\substack{\text{polinom 1. stopnje} \quad \text{polinom 2. stopnje}}}$,

potem za nastavek vzamemo naslednje

$$y_g = x^k e^{\alpha x} (R_m(x) \cos(\beta x) + S_m(x) \sin(\beta x))$$

kjer je k večkratnost ničle $\alpha + i\beta$ v karak. enačbi homogenega dela.

če je $b(x)$ vsota več različnih členov zgotaj obliko, je tudi nastavek y_p vsota posameznih nastavkov

7. Reši enačbo $y'' - 5y' - 6y = \cos x + e^{2x}$.

R: $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x} - \frac{7}{74} \cos x - \frac{5}{74} \sin x - \frac{1}{72} e^{2x}$

8. Reši začetni problem $y'' - 2y' - 3y = x^2$, $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.

R: $y = \frac{29}{108} e^{3x} + \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{3} x^2 + \frac{4}{9} x - \frac{74}{27}$

9. Reši enačbo $y'' + y = 4 \sin x + 1$

R: $y = y_h + y_p$

a.1 Homogeni del (y_h):

$y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

$y_h = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} \Rightarrow D_1 \cos x + D_2 \sin x$

$e^{it}, e^{-it} \rightarrow \cos t, \sin t$

$e^{i\beta t}, e^{-i\beta t} \rightarrow \cos(\beta t), \sin(\beta t)$

$\alpha = 0$
 $i = 0$
 $j = 0$
 $\beta = 0$
 $k = 0$
 $k = \alpha + i\beta = 0 + i = i$

0-ni rešitev karak. enačbe

$k = 1$, ker se i 1-krat pojavi v kar. rešitvi

b.1 Nehomogeni del (y_p)

nastavek: $y_p = x(A \cos(x) + B \sin(x)) + C$

• polinom $\Rightarrow$ polinom (lahko višje st, odvisno od k)

• $\sin ax, \cos ax \Rightarrow x^k(A \sin(ax) + B \cos(ax))$

• $e^{ax} \Rightarrow x^k e^{ax}$

$y_p = x(A \cos(x) + B \sin(x)) + C$ nastavek

nedoločeni koef.

$y' = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin(x) + B \cos(x))$

$y'' = -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x + x(-\cos(x) - B \sin(x))$

ustavina

$$\cancel{-2A \sin x + 2B \cos x - Ax \cos x - Bx \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x + C = 4 \sin x + 1}$$

$$\sin x: -2A = 4$$

$$\cos x: 2B = 0 \Rightarrow B = 0, A = -2, C = 1$$

$$\text{konstante: } C = 1$$

$$y_p = x \cdot (-2 \cos x) + 1 = -2x \cos x + 1$$

$$\underline{R: y = y_h + y_p}$$

10. Reši enačbo $y''' - y = -3e^x$

$$y = y_h + y_p$$

a.) Homogeni del (y_h):

$$y''' - y = 0$$

$$\lambda^3 - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})x} + C_3 e^{(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2})x}$$

$$y_h = C_1 e^x + D_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + D_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

b.) Nehomogeni del (y_p)

postavka: $y_p = A x^k e^x$

$$\alpha = 1$$

$$\alpha = 0$$

$$k = \text{veikratnost} \quad \boxed{\alpha + \beta i = 1}$$

Pukratna ničla kar. enačbe $\Rightarrow k = 1$
če dvojna $k = 2$

$$y_p = A x e^x$$

$$y_p' = A e^x + A x e^x$$

$$y_p'' = 2A e^x + A x e^x$$

$$y_p''' = 3A e^x + A x e^x$$

$$\text{vstavimo: } 3Ae^x + \cancel{Axe^x} - (\cancel{Ae^x} + \cancel{Axe^x}) = -3e^x$$

$$2Ae^x = -3e^x$$

$$\underline{\underline{A = -\frac{3}{2}}}$$

$$y_p = Axe^x = -\frac{3}{2}xe^x$$

$$R: y = y_h + y_p$$

$$11. \text{ Reši enačbo } y'' - y = (2x+1) \cdot \cos \frac{x}{2}$$

a.) Homogeni del (y_h):

$$y'' - y = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

$$y_h = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$

b.) Nehomogeni del

nastavek:

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

$$\alpha + \beta i = \frac{1}{2}i \text{ ni ničla kat. enačbe } \Rightarrow k = 0$$

$$y_p = (Ax+B) \cos \frac{x}{2} + (Cx+D) \sin \frac{x}{2}$$

$$y' = A \cos \frac{x}{2} - (Ax+B) \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + (C \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2}(Cx+D) \cos \frac{x}{2})$$

$$y'' = -\frac{1}{2}A \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2}A \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{4}(Ax+B) \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2}C \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2}C \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{4}(Cx+D) \sin \frac{x}{2}$$

$$\text{vstavimo: } -A \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{4}Ax \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{4}B \cos \frac{x}{2} + C \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{4}Cx \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{4}D \sin \frac{x}{2} - A \cos \frac{x}{2} - B \sin \frac{x}{2} - Cx \sin \frac{x}{2} - D \sin \frac{x}{2} =$$

$$= 2x \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$$

$$\sin \frac{x}{2}: -A = \frac{1}{4}D - D = 0 \Rightarrow D = 2$$

$$\cos \frac{x}{2}: -\frac{1}{4}B + C - B = 1 \Rightarrow B = -\frac{4}{5}$$

$$x \sin \frac{x}{2}: -\frac{1}{4}C - C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$x \cos \frac{x}{2}: -\frac{1}{4}A - A = 2 \Rightarrow A = -\frac{8}{5}$$

$$y_p = (-\frac{8}{5}x - \frac{4}{5}) \cos \frac{x}{2} + (2) \sin \frac{x}{2}$$

$$R: y = y_h + y_p$$

115

- Eulerjeve enačbe (h.)

$$a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

Reševanje: • nastavek: $y = x^z$

• karakteristična enačba ($z_1, \dots, z_n$ - rešitve kar. enačbe)

• rešitev $y = C_1 x^{z_1} + C_2 x^{z_2} + \dots + C_n x^{z_n}$

12. Reši enačbo $x^2 y'' - x y' - 3y = 0$

nastavek: $y = x^z \rightarrow$ odvajamo + vstavimo

- kar. enačba: $z(z-1) - z - 3 = 0$

$$z^2 - 2z - 3 = 0$$

$$(z-3)(z+1) = 0$$

$$z_1 = 3, z_2 = -1$$

R: $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-1}$

13. Reši enačbo $x^2 y'' - x y' + y = 0$

R: $y = C_1 x + C_2 x \ln x$

- 14. Reši enačbo $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 7x y' - 8y = 0$

kar. enačba: $z(z-1)(z-2) - 3z(z-1) + 7z - 8 = 0$

$$z^3 - 3z^2 + 2z - 3z^2 + 3z + 7z - 8 = 0$$

$$z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0$$

$$(z-2)(z+2)(z+2) = 0$$

$$z_{1,2,3} = 2 \text{ trojna}$$

R: $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 + C_3$

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + C_3 x^2 \ln^2 x$$

15. Reši enačbo $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$

$$2(2-1) + 3 \cdot 2 + 5 = 0$$

$$2^2 + 2 \cdot 2 + 5 = 0$$

~~$$2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}$$~~

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

$$R: y = C_1 x^{-1+2i} + C_2 x^{-1-2i} =$$

$$y = C_1 x^{-1} \boxed{x^{2i}} + C_2 x^{-1} \boxed{x^{-2i}}$$

$$\boxed{x^{ip} = e^{\ln x \cdot ip} = e^{ip \ln x} =}$$

$$y = C_1 x^{-1} (\cos(2 \ln x) + i \sin(2 \ln x)) + C_2 x^{-1} (\cos(2 \ln x) - i \sin(2 \ln x)) = \cos(p \ln x) + i \sin(p \ln x)$$

$$y = D_1 x^{-1} \cos(2 \ln x) + D_2 x^{-1} \sin(2 \ln x)$$

26.05.2008

2. Reši dif. enačbo $y''' = 2 + \sin x$

$$y'' = \int (2 + \sin x) dx = 2x - \cos x + A$$

$$y' = \int (2x - \cos x + A) dx = x^2 - \sin x + Ax + B$$

$$y = \int (x^2 - \sin x + Ax + B) dx = \frac{x^3}{3} + \cos x + A \frac{x^2}{2} + Bx + C$$

Metoda za zniževanje reda dif. enačb

- če enačba ne vsebuje odvisne spr. y , ampak samo njene odvode, red dif. enačbe znižamo tako, da namesto y uvedemo novo spremenljivko npr.

$$u = y'$$

2. Reši dif. enačbo $(1-x^2)y'' - xy' = 0$

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$x^2 y'' + x y' + \dots$$

- ne vsebuje y

$$\begin{cases} u = y' \\ u' = y'' \end{cases}$$

$$(1-x^2)u' - xu = 0$$

$$u' = \frac{xu}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} \cdot u$$

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{tip A.}$$

z ločl. spremenljivk

$$u' = \frac{x}{1-x^2} \cdot u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{x}{1-x^2} \cdot dx$$

$$du = \frac{x}{1-x^2} \cdot u \cdot dx \quad / : u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{x}{1-x^2} \cdot dx$$

$$\ln u = \int \frac{-dt}{2t}$$

$$\begin{aligned} t &= 1-x^2 \\ dt &= -2x dx \end{aligned}$$

$$\ln u = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln t + \ln C$$

$$\ln u = \ln \left(C \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$u = C \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \frac{C}{\sqrt{t}} = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$R: y = \int u dx = \int \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} dx = C \arcsin x + D$$

3. Reši dif. enačbo $\cos x \cdot y''' + \sin x \cdot y'' = \sin x$. 3. red

$$\begin{aligned} u &= y'' \\ u' &= y''' \\ \Rightarrow \cos x \cdot u' + \sin x \cdot u &= \sin x \end{aligned}$$

1. red

LIN. DIF. E. 1. REDA
 $p(x)y' + q(x)y = r(x)$

$$u = u_h + u_p$$

1.) Homogeni del (u_h)

$$\cos x \cdot u' + \sin x \cdot u = 0 \quad \text{ločljivi spre.}$$

$$\boxed{u' = \frac{du}{dx}} \Rightarrow \cos x \frac{du}{dx} = -\sin x \cdot u \quad / \cdot dx$$

$$\cos x \cdot du = -\sin x \cdot u \cdot dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int -\frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\ln u = \int \frac{dt}{t}$$

$$\ln u = \ln t + \ln C$$

$$u_h = C \cdot t = C \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x \cdot dx \end{aligned}$$

2.) Nehomogeni del (u_p)

nastavek: $u_p = f(x) \cdot \cos(x) \leftarrow u_h = C \cdot \cos x$

$$u' = C' \cos x - C \sin x$$

vstavimo:

$$\cos x \cdot (C' \cos x - C \sin x) + \sin x \cdot C \cos x = \sin x$$

$$C' \cos^2 x = \sin x$$

$$C' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$C = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x \cdot dx \end{aligned}$$

$$C = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2} dt$$

$$C = -\frac{t^{-1}}{-1} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}$$

$$u_p = C \cdot \cos x = 1$$

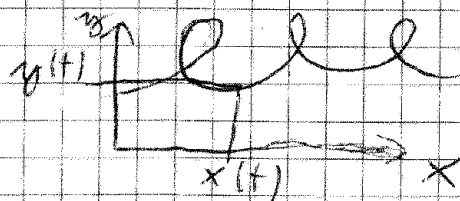
$$\begin{aligned} u &= y'' \\ y' &= \int u dx = \int (C \cos x + 1) dx \\ y' &= C \sin x + x + D \\ y &= \int (C \sin x + x + D) dx \\ y &= -C \cos x + \frac{x^2}{2} + Dx + E \end{aligned}$$

$$R: u = u_h + u_p = \underline{\underline{C \cdot \cos x + 1}}$$

Sistemi dif. enačb (s konst. koef.)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax + By \\ \dot{y}(t) &= Cx + Dy\end{aligned}$$

$x(t), y(t)$ funkciji časa



Reševanje: • nastavek: $Ax^{2+} = x$
 $By^{2+} = y$

• ko vstavimo nastavek v sistem dif. enačb, dobimo homogen sistem dveh linearnih enačb za neznanki A in B (2 po parameter)

• to homogen sistem ima netrivialno rešitev, kadar je det. koef. sistema $= 0$.

$\Rightarrow$ dobimo enačbo za 2

4. Reši sistem dif. enačb. $\dot{x} = 2x - y$
 $\dot{y} = -x + 2y$

skupaj z začetnim pogojem $x(0) = 7, y(0) = -3$.

5. Reši sistem dif. enačb $\dot{x} = -3x - y$
 $\dot{y} = x - y$

nastavek

$$\begin{aligned}x &= Ae^{2t} \rightarrow \dot{x} = A \cdot e^{2t} \cdot 2 \\ y &= Be^{2t} \rightarrow \dot{y} = B \cdot e^{2t} \cdot 2\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned}x &= Ae^{2t} \\ y &= Be^{2t}\end{aligned}} \right\} 2 \text{ parametera}$$

vstavimo

$$A \cdot 2e^{2t} = -3Ae^{2t} - Be^{2t} \quad : / e^{2t}$$

$$B \cdot 2e^{2t} = A \cdot e^{2t} - Be^{2t} \quad : / e^{2t}$$

$$A \cdot 2 = -3A - B$$

$$B \cdot 2 = A - B$$

$$(2+3)A + B = 0$$

$$-A + (2+1)B = 0$$

A, B - neznanki, 2 parameter-i

$$\begin{vmatrix} 2+3 & 1 \\ -1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0$$

pogoj za netrivialno rešitev

$$(2+3)(2+1) + 7 = 0$$

$$2^2 + 4 \cdot 2 + 4 = 0$$

Alta

120

$$(λ+2)^2 = 0$$

$$λ_{1,2} = -2 \text{ dvojni!}$$

Dopolnjen nastavek:

$$x = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-2t} t$$

$$y = B_1 e^{-2t} + B_2 e^{-2t} t$$

4 parametri; 2 preveč

Dopolnjen nastavek je enkrat odvajano in ustvarimo (ena dif. enačba je (okrajšano dovolj))

$$\dot{y} = x - y$$

$$\dot{y} = -2B_1 e^{-2t} - 2B_2 e^{-2t} t + B_2 e^{-2t}$$

$$\downarrow -2B_1 \boxed{e^{-2t}} - 2B_2 \boxed{e^{-2t} t} + B_2 e^{-2t} = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-2t} t - B_1 e^{-2t} - B_2 e^{-2t} t$$

$$e^{-2t} : -2B_1 + B_2 = A_1 - B_1$$

$$e^{-2t} t : -2B_2 = A_2 - B_2$$

$$A_1 = B_2 - B_1$$

$$A_2 = -B_2$$

$$R: x = (B_2 - B_1) e^{-2t} = B_2 e^{-2t} t$$

$$y = B_1 e^{-2t} + B_2 e^{-2t} t$$

Ponavljjanje

2. KOLOKVIJ (2003)

① V Taylorjevo vrsto okoli $x_0 = 1$ razvij funkcijo $f(x) = -\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ in določi konv. območje vrste.

Geometrijska vrsta

~~$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; |x| < 1$$~~

PARCIALNI ULOMKI

$$\frac{-1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$-1 = Ax - 3A + Bx - 2B$$

$$x^1: 0 = A + B$$

$$x^0: -1 = 3A - 2B$$

$$\boxed{\begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \end{matrix}}$$

DA UPOŠTEVAMO SREDIŠČE

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-3)} = \frac{1}{(x-1)-1} - \frac{1}{(x-1)-2} =$$

$$f(x) = \sum a_n (x-1)^n = \frac{1}{(x-1)-1} - \frac{1}{(x-1)-2} = -\frac{1}{1-(x-1)} + \frac{1}{2(1-\frac{x-1}{2})}$$

$$* = -\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) (x-1)^n$$

$|x-1| < 1$ $|\frac{x-1}{2}| < 1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) (x-1)^n$$

$$\begin{matrix} |x-1| < 1 \\ |x-2| < 2 \end{matrix}$$

$$|x-1| < 1 \text{ oz } x \in (0, 2)$$

2) Funkcija $f(x) = \frac{x}{2}$, podana na intervalu $[0, \pi]$ razvijemo v Fourierjevo vrsto kot funkcijo s periodo π .

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x))$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\pi} f(x) \cos(n\omega_0 x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{\pi} f(x) \sin(n\omega_0 x) dx$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot \pi^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \cos(2nx) dx = \frac{1}{\pi}$$

p.p. $u = x \Rightarrow du = dx$
 $dv = \cos(2nx) dx \Rightarrow v = \frac{1}{2n} \sin(2nx)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{1}{2n} x \sin(2nx) \right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{2n} \sin(2nx) dx \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} \cos(2nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi n} (1 - 1) = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \sin(2nx) dx = \frac{1}{\pi}$$

p.p. $u = x \Rightarrow du = dx$
 $dv = \sin(2nx) dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2n} \cos(2nx)$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{2n} x \cos(2nx) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{2n} \cos(2nx) dx \right) =$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} \sin(2nx) \Big|_0^{\pi} \right) = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{2n} \quad \text{R. } f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n} \right) \sin(2nx)$$

3. Poišči lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x \cdot y / (1 + x + y)$
stacionarne točke

$$f'_x = y(1+x+y) + xy = 0$$

$$f'_y = x(1+x+y) + xy = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} xy + y^2 + 2xy = 0 \\ x + x^2 + 2xy = 0 \end{array} \right\} -$$

$$y - x + y^2 - x^2 = 0$$

$$(y-x) + (y-x)(y+y) = 0$$

$$(y-x)(1+x+y) = 0$$

I. $y = x$

II $1+x+y=0$

I. $x + x^2 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x(1+3x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{1}{3}$

$T_1(0, 0) \quad T_2(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

II $x \cdot y = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ali } y=0$
 $y=-1 \quad x=-1$

$T_3(0, -1)$

$T_4(-1, 0)$

$$f''_{xx} = y + y = 2y$$

$$f''_{yy} = 2x$$

$$f''_{xy} = 1+x+y + y + x = 2x+2y+1$$

det Hesse $\begin{bmatrix} 2y & 2x+2y+1 \\ 2x+2y+1 & 2x \end{bmatrix}$ MAX

$T_1(0, 0)$

$T_2(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

$T_3(0, -1)$

$T_4(-1, 0)$

$-1 < 0$ ni ekst.

$\frac{1}{3} > 0$ jeekstrem

$-1 < 0$ ni ekst.

$-1 < 0$ ni ekst.

4. Poišči rešitev zač. problema

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

Nehomogeno lin. dif. en. s konst. koef.

$$y = y_h + y_p$$

1.) Homogeni

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Karak. enačba:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$$



2.) Nehomogeni: del (ypl)
nastavek:

$$y_p =$$

$$e^{3x} \rightarrow \alpha + i\beta = 3 \text{ ni ničla kar. enačbu} \Rightarrow A e^{3x}$$

$$5e^x \rightarrow \alpha + i\beta = 1 \text{ je ničla kar. enačbe} \Rightarrow B x e^x$$

$$y_p = A e^{3x} + B x e^x$$

$$y' = 3A e^{3x} + B e^x + B x e^x$$

$$y'' = 9A e^{3x} + 2B e^x + B x e^x$$

$$\text{vstavimo } 9A e^{3x} + 2B e^x + B x e^x - 3(3A e^{3x} + B e^x + B x e^x) + 5e^x = e^{3x} + 5e^x$$

$$e^{3x}: 9A - 9A + 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$e^x: 2B - 3B = 5 \quad B = -5$$

$$x e^x: B - 3B + 2B = 0$$

$$y_p = \frac{1}{2} e^{3x} - 5x e^x$$

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} e^{3x} - 5x e^x$$

$$y(0) = 4: 4 = c_1 + c_2 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = -c_1 \quad c_1 = -\frac{1}{2}$$