MATEMATIKA II — 1 UNI

Zapiski predavanj

Šolsko leto	2010/2011
Izvajalec	Gregor Dolinar
Avtor dokumenta	Damjan Sirnik
Skeniranje	Damjan Sirnik

STROMAR.SI
DRUŠTVO ELEKTROTEHNIKOV

UREJANJE DOKUMENTA	
VERZIJA	01.01
DATUM	23.5.2012

OPOMBE

MATE TOMŠIČ, MRAMOR-KOSTA, ČREL "REŠENE NALOGE ZA VSŠ", ZLOBEC-KOSTA _ ZBIRKA NALOG

16 3 GANI
21-27. TUTNG

22.02.11

LINEARNA ALGEBRA

Determinanta - preslikava, ki vsaki kvadratni matriki $n \times n$ priredi realno oz. kompleksno
↳ Predpis, ki vsakemu elementu iz neke množice priredi...
št. priredi realno oz. kompleksno št.

$$\text{Det}: \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

1	1	2
7	3/4	5
12	7	19

Determinanta je def. rekurzivno z pomočjo razvoja po katerikoli vrstici

Naslednji člen sledi iz prejšnjega

a_{ij} → i-ta vrstica, j-ti stolpec

$n=1$: $\det[a_{11}] = a_{11}$

$n=2$: $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det[a_{22}] + (-1)^{1+2} a_{12} \cdot \det[a_{21}]$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n=3$: $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \cdot \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix}$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \cdot \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + a_{13}a_{21}a_{32} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Pri reč determinante si lahko pomagamo na nasl. način

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

4. Splošni izrek

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} D_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} D_{1n}$$

Pri čemer je D_{ij} determinanta take slike $(n-1)\times(n-1)$ ki jo dobimo tako, da v prvotni $n\times n$ prečrtamo i-to vrstico in j-ti stolpec

Izraz $(-1)^{i+j} D_{ij}$ imenujemo kofaktor

OPOMBA Det. krajše zapišemo:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

PP:

$$\det\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -2\cdot 1 + 8\cdot 4 = \underline{18}$$

$$-1(1\cdot 1+2\cdot 3) - 0 + \quad 6 - 1$$

$$\det\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1(1\cdot 1+2\cdot 3) - 0(\cdot) + 3(2\cdot 3 - 1\cdot 1)$$

$$= \cancel{7} -7 \cdot -18 = 25$$

LASTNOSTI

1.) Vrednost se ne spremeni če zamenjamo vlogo vrstic/stolpca

PP: $\det\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 4 & 8 \\ 11 & 13 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 3 & 7 & 11 & 0 \\ -1 & -2 & 13 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 3 \\ 5 & 8 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

→ Prezrcalimo elemente čez diagonalo

2.) Če zamenjamo dve vrstici (katerikoli) – tudi za stolpce – se determinanti spremeni predznak

PP: $\det\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -\det\begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 5 & 7 & 6 \\ -2 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

3.) Faktor, ki je skupen vsem elementom ene vrstice lahko izpostavimo

PP: $\det\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & -12 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & -12 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 2\cdot 3\det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 2\det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

4.) Če sta dve vrstici enaki je vr. determinante 0 – enako velja za stolpce   23.2.11

PP: $\det\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 0$

DOKAZ: (je preprost)

Denimo, da ima $n \times n$ shema dve vrstici enaki

Potem je determinanta te sheme enaka D, hkrati pa lahko v shemi zamenjamo vrstici, ki sta enaki in je determinanta sheme z zamenjanima potem

vrstici po tretji 2.) enaka −D.
Torej shema z zamenjanima enakima vrsticama je enaka sami sebi $D=-D$

$$2D=0$$
$$D=0$$

5.) Vrednost determinante se ne spremeni, če k poljubni vrstici (stolpcu) prištejemo večkratnik katerekoli druge vrstice (stolpca)

PP: $\det\begin{bmatrix}1&-2&0&1\\1&3&1&0\\2&-4&0&1\\-1&2&1&0\end{bmatrix} \overset{V_2-V_1}{=} \det\begin{vmatrix}1&-2&0&1\\0&5&1&-1\\2&-4&0&1\\-1&2&1&0\end{vmatrix} \overset{V_3-2V_1,\ V_4+V_1}{=} \det\begin{vmatrix}1&-2&0&1\\0&5&1&-1\\0&0&0&-1\\0&0&1&1\end{vmatrix}$

$$=1\det\begin{vmatrix}5&1&-1\\0&0&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot\det\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot1=5$$

ZGLEDA UPORABE

1.) DOLOČANJE PROSTORNINE PARALELPIPEDA

2.) ISKANJE REŠITEV SISTEMA LINEARNIH ENAČB S POMOČJO CRAMERJEVEGA PRAVILA
Oglejmo si to pravilo na primeru:

PP: $3x+4y+2z=-7$
$x-y+4z=1$
$2x+2y+10z=0$

Sistem 3 enačb z 3 neznankami rešimo tako da izr. 4 determinante velikosti 3×3 in sicer

$D_0=\begin{vmatrix}3&4&2\\1&-1&4\\2&2&10\end{vmatrix}$ $D_x=\begin{vmatrix}-7&4&2\\1&-1&4\\0&2&10\end{vmatrix}$ ~~$D_y=\begin{vmatrix}-7&3&2\\1&1&4\\0&2&10\end{vmatrix}$~~ ~~$D_z=\begin{vmatrix}-7&3&4\\1&1&-1\\0&2&2\end{vmatrix}$~~

$D_y=\begin{vmatrix}3&-7&2\\1&1&4\\2&2&10\end{vmatrix}$ $D_z=\begin{vmatrix}3&4&-7\\1&-1&1\\2&2&0\end{vmatrix}$

$=3(-18)-4\cdot2+2\cdot4$
$=-54$

$D_x = -7(-18) - 4 \cdot 10 \cdot 10 - 122 = 90$

$D_y = -3(10) + 7(10-8) + 2(-2) = 40$

$D_z = 3(-2) - 4(-2) - 7 \cdot 4 = -26$

$\Rightarrow$ Ker je $D \neq 0$ je rešitev sistema

$x = \frac{D_x}{D_0}$ $\quad y = \frac{D_y}{D_0}$ $\quad z = \frac{D_z}{D_0}$

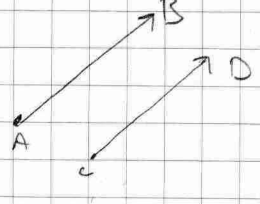
$x = \frac{90}{-54} = -\frac{5}{3}$ $\quad y = \frac{40}{-54} = -\frac{20}{27}$ $\quad z = \frac{-26}{-54} = \frac{13}{27}$

Če je $D_0 = 0$: Potem sistem nima nobene rešitve ali pa ima neskončno rešitev

VEKTORJI

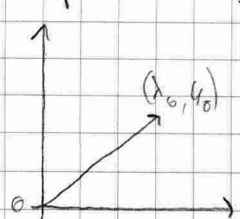
23.2.11

Def: Geometrijski objekt, ki ima poleg velikosti tudi smer; imenujemo usmerjena daljica ~~od točke A do~~.



Vse usmerjene daljice, ki jih lahko z vzporednim premikom prestavimo ena na drugo, predstavljajo en in isti vektor.

Vekt. ima neko določeno velikost in dolžino in se ne spremeni če ga vzporedno premaknemo.



Če hočemo enolično opisati vektor ga vzporedno premaknemo tako da je njegov začetek v koordinatnem izhodišču, pravimo da je krajevni vektor. Vektor je določen s končno točko. To pomeni da lahko identificiramo točke v prostoru in vektorje.

Naj bo dan vektor $\vec{r} = (x_0, y_0, z_0)$. Potem je njegova dolžina

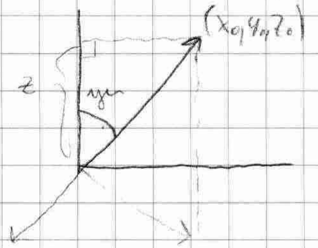
$$|\vec{r}| = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$$

Vektor od točke $A(x_1, y_1, z_1)$ do točke $B(x_2, y_2, z_2)$ označimo z

$\vec{AB}$ velja $\vec{AB}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

Oglejmo si še, kaj je s smerjo vektorja $\vec{r} = (x_0, y_0, z_0)$

Določi kote med vektorjem in koordinatnimi osmi



Torej je $\cos\gamma = \dfrac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$

Vektor (x_0, y_0, z_0) oklepa z osjo z

kot $\gamma = \arccos\dfrac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$

Podobno

$\cos\alpha = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$ kot z osjo x

$\cos\beta = \dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$ kot z osjo y

Kosinuse teh kotov imenujemo smerni koeficienti

RAČUNANJE Z VEKTORJI

Naj bosta $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ in $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ vektorja v $\mathbb{R}^3$

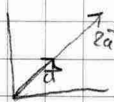
Potem def:

VSOTA

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

MNOŽENJE S SKALARJEM

$$\gamma\cdot\vec{a}=(\gamma a_1,\ \gamma a_2,\ \gamma a_3)$$



Neko št

Velja: • $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

• $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

• $\vec{a}+0=\vec{a}$

$0 = (\vec{0},\vec{0},\vec{0})$

$\vec{a}+(-\vec{a})=0$

$\gamma(\vec{a}+\vec{b})=\gamma\vec{a}+\gamma\vec{b}$

$(\gamma+\beta)\vec{a}=\gamma\vec{a}+\beta\vec{a}$ → DISTRIBUTIVNOST

2a01:260:4003:300::/56

2a01:260:4003:339::dead:beef

VEKTORSKI PROSTOR

Neprazna množica V imenujemo vekt. prostor če sta za elemente te množice def. dve operaciji – množenje s skalarjem
– seštevanje

in veljajo za ti dve operaciji naslednje lastnosti:

- $a+b=b+a \quad a,b \in V$
- $(a+b)+c=a+(b+c) \quad a,b \in V$
- Obstaja element $0 \in V$ tako da je $a+0=a$ za vsak $a \in V$
- za vsak $a \in V$ obstaja vek $-\vec{a}$ tako da je $\vec{a}+(-\vec{a})=0$
- $\gamma(a+b)=\gamma a+\gamma b \quad \gamma \in \mathbb{R},\ a,b \in V$
- $(\gamma+\beta)a=\gamma a+\beta a \quad \gamma,\beta \in \mathbb{R},\ a \in V$
- $1 \cdot a=a$ za vsak $a \in V$, $1 \in \mathbb{R}$

PR:

① $V=\{a=(a_1,a_2,\dots,a_n) \mid (a_1,a_2,\dots,a_n \in \mathbb{R}\}$

② V je množica funkcij $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$

③ V je množica vseh matrik

Def:

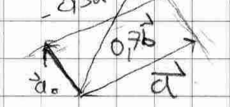
vekt. prostora

1.3.11

Naj bodo $a_1, a_2, \dots a_n \in V$ in $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Potem izraz $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \in V$ imenujemo linearna kombinacija elementov $a_1, a_2, \dots a_n$

Def: Podmnožica V_1 množice V, tako $V_1 \subseteq V$ je linearno ~~neodvisna~~ odvisna, če obstaja v V_1 nek element a_0, ki ga lahko zapišemo kot linearno kombinacijo ostalih elementov iz V_1



$V = \{\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{b}\}$ linearno odvisna

DEF: Množica V_1 je linearno neodvisna, če ni linearno odvisna

BAZA

DEF: Naj bo V vektorski prostor, potem je B baza vekt. prostora V, če velja:

1.) B je linearno neodvisna množica

2.) Vsak element iz V se da zapisati kot linearna kombinacija elementov iz B.

PR:

1.) Vektorji v $\mathbb{R}^3$, tako $V = \{(a_1, a_2, a_3) ; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$$B = \{\underset{\vec{i}}{(1,0,0)}, \underset{\vec{j}}{(0,1,0)}, \underset{\vec{k}}{(0,0,1)}\}$$

velja: $(-7, \frac{5}{2}, 6) = -7\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} + 6\vec{k}$

OPOMBA: Baza vekt. prostora ni nujno enolično določena

PP2: V so vektorji v $\mathbb{R}^3$

$B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

je tudi baza V

$\vec{i} = (1,0,0)$

$\vec{j} = (1,1,0) - (1,0,0)$

$\vec{k} = (1,1,1) - (1,1,0)$

$-7(1,0,0) + \frac{5}{2}((1,1,0)-(1,0,0)) + 6((1,1,1)-(1,1,0))$

$= (-7 - \frac{5}{2})(1,0,0) + (\frac{5}{2} - 6)(1,1,0) + 6(1,1,1)$

$= -9{,}5(1,0,0) + (-3{,}5)(1,1,0) + 6(1,1,1)$

Izrek: Vse baze nekega vekt. prostora imajo isto moč. To pomeni, če je v bazi končno elementov imajo vse baze nekega vekt. prostora, enako elementov.

Baza je lahko tudi neskončna, ima neskončno elementov. Npr. če je V vekt. prostor realnih funkcij je njegova baza neskončna.

DEF: Naj bo B vekt. prostor, če ima njegova baza končno elementov npr. n, potem pravimo, da je V n-dimenzionalni prostor.
Če ima baza ∞ elementov pravimo da je V ∞-dimenzionalen vekt. prostor.

PP: $V = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{230}) : a_1, a_2, \ldots, a_{230} \in \mathbb{R}\}$

$\vec{v}_1 = (97, 56, \ldots, 49)$

$\vec{v}_2 = (13, 77, \ldots, 51)$

$\dim V = 230$ $\quad (1,0,0,\ldots,0)$
$(0,1,0,\ldots,0)$
$(0,0,0,\ldots,1)$

V splošnih vekt. prostorih sta def. operaciji vsote in množenja s skalarjem.
V nadaljevanju si bomo ogledali, da za prostor vekt. v $\mathbb{R}^3$ lahko def. še nekatere druge operacije.

SKALARNI PRODUKT: Def. skalarni produkt.
Skalarni produkt priredi dvema vektorjema iz $\mathbb{R}^3$ neko realno število - skalar na naslednji način:

$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R}$

ZA SKALARNI PRODUKT VELJA:

1.) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ - KOMUTATIVNOST

2.) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ - DISTRIBUTIVNOST

3.) $\vec{a} \cdot \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)(a_1, a_2, a_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$, ko je $\vec{a} = (0, 0, 0)$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

4.) **Ne** velja pa „ASOCIATIVNOST":

$$\vec{a} \underbrace{(\vec{b} \cdot \vec{c})}_{\mathbb{R}} \neq \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}_{\mathbb{R}} \vec{c}$$

Opomba: Iz def. skalarnega produkta ni težko izpeljati, da velja
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, kjer je φ kot med a in b.

TRDITEV (CAUCHY-SCHWARZ-BUNJAKOVSKI):

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Dokaz: ker $\cos\varphi \leq 1$, ocenimo: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\cos\varphi| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

TRDITEV: (Trikotniška neenakost)

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

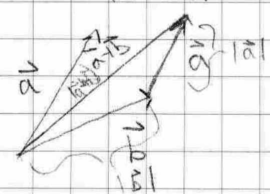
<u>DOKAZ</u>: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$ ASOCIATIVNOST

$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2$

CAUCHY-SCHWARZ $\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$

$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA:



Vsota dveh stranic v trikotniku je vedno večja od dolžine tretje stranice.

KDAJ VELJA ENAKOST: ko je $\cos\varphi = 1$, ko je $\varphi = 0$ ... ko je kot med vektorjema 0° ali 180° → sta vektorja vzporedna

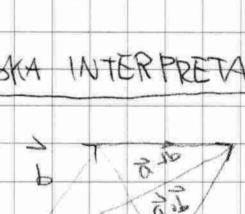
TRDITEV (Paralelogramsko pravilo)

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$$

<u>DOKAZ</u>: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \underline{2\vec{a}\vec{b}} + |\vec{b}|^2$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \underline{2\vec{a}\vec{b}} + \vec{b}^2$

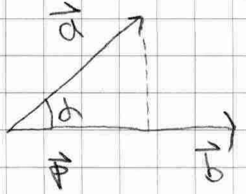
<u>GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA</u>



PROJEKCIJA VEKTORJA NA NEK DRUG VEKTOR

2.3.'11

Zanima nas projekcija $\vec a$ na vektor $\vec b$



$$\frac{|\vec p|}{|\vec a|} = \cos\varphi \qquad |\vec p| = \cos\varphi\,|\vec a|$$

$$\vec p = \underbrace{\cos\varphi}_{=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}}\,|\vec a|\,\frac{\vec b}{|\vec b|}$$

$$\boxed{\vec p = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}\,|\vec a|\,\frac{\vec b}{|\vec b|} = \underbrace{\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2}}_{\in\mathbb{R}}\cdot\vec b}$$

PP: $\vec a(-1,2,3)$ Izr. projekcijo $\vec a$ na $\vec b$

$\vec b(0,1,-2)$

$$\vec p = \frac{(0,1,-2)}{|(0,1,-2)|}\cdot\frac{(1,2,3)(0,1,-2)}{|(0,1,2)|} = -\frac{4}{5}(0,1,-2) = \left(0,-\frac45,\frac85\right) = (0,-0'8,1'6)$$

VEKTORSKI PRODUKT

Naj bosta $\vec a(a_1,a_2,a_3)$ in $\vec b(b_1,b_2,b_3)$ vektorja v $\mathbb{R}^3$, potem je vektorski produkt operacija, ki naj vektorjema $\vec a$ in $\vec b$ priredi vektor s predpisom:

$$\vec a\times\vec b = (a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3) = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$= i(a_2b_3-a_3b_2) - j(a_1b_3-a_3b_1) + k(a_1b_2-a_2b_1) = (a_2b_3-a_3b_2, -a_1b_3+a_3b_1, a_1b_2-a_2b_1)$$

PP: $(1,-2,3)\times(-1,0,4)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{vmatrix} = (-8,-7,-2)$$

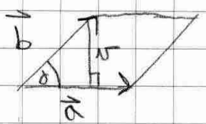
Hitro lahko izpeljemo da velja $\boxed{|\vec a\times\vec b| = |\vec a||\vec b|\sin\varphi}$ pri čemer je φ vmesni kot med vektorjema a in b.

Za smer vektorskega produkta velja da ima $\vec a\times\vec b$ smer, ki je pravokotna na vektor $\vec a$ in vektor $\vec b$. Smer je natančno določena s pravilom desne roke

Sledi, da je ploščina trikotnika določenega z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ravno:

$$\boxed{pl_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

TRDITEV: Dolžina vektorskega produkta $\vec{a} \times \vec{b}$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$



$\frac{v}{|\vec{b}|} = \sin\gamma$ $\quad v = |\vec{b}|\sin\gamma$

$$\boxed{pl = |\vec{a}|v = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\gamma = |\vec{a} \times \vec{b}|}$$

LASTNOSTI VEKTORSKEGA PRODUKTA

1.) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (DISTRIBUTIVNOST)

2.) $\vec{a} \times \vec{b} = (0,0,0) \Leftrightarrow a \parallel b$ (ali pa eden leži na drugem)

3.) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (ANTIKOMUTATIVNOST)

4.) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ (ASOCIATIVNOST)

$$\underbrace{\underbrace{(\vec{i} \times \vec{i})}_{0} \times \vec{j}}_{0} \neq \underbrace{(\vec{i} \times \vec{j})}_{} \times \vec{i}$$

$$0 \neq -\vec{j}$$

5.) $\gamma(\vec{a} \times \vec{b}) = (\gamma\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\gamma\vec{b})$

OPOMBA

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

MEŠANI PRODUKT

DEF: Mešani produkt vektorjev $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ in $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$ je definiran s predpisom. Rezultat je skalar

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

Velja da je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (a_1\vec{i}, a_2\vec{j}, a_3\vec{k})\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

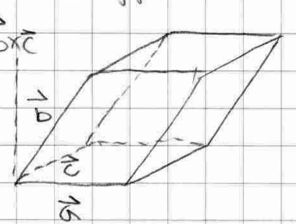
Iz lastnosti determinante sledi

1.) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$

2.) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b})$

TRDITEV: Absolutna vrednost mešanega produkta vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je enaka prostornini paralelepipeda določenega z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$

$$V_{ol\ paralelepipeda} = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$$



Prostornina je enaka ploščini osn. ploskve krat višini

Osnovna ploskev je paralelogram. Ploščina je $\vec{b}\times\vec{c}$

$pl_0 = |\vec{b}\times\vec{c}|$

Višina je pravokotna projekcija $\vec{a}$ na $\vec{b}\times\vec{c}$

$$\frac{v}{|\vec{a}|} = \cos\gamma \Rightarrow v = \cos\gamma|\vec{a}| = \frac{|\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}\times\vec{c}|}|\vec{a}|$$

$$vol = |\vec{b}\times\vec{c}| = |\cancel{\vec{b}\times\vec{c}}|\cdot\frac{|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|}{\cancel{|\vec{a}|}\,\cancel{|\vec{b}\times\vec{c}|}}\cancel{|\vec{a}|} = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$$

OPOMBA: Prostornina paralelepipeda določenega z $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je enaka 0, kadar ležijo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v isti ravnini

Če ležijo trije vektorji v isti ravnini lahko enega izrazimo z linearno kombinacijo ostalih dveh. Potem pa so ti vektorji linearno odvisni.

$\Rightarrow$ Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so linearno odvisni natanko tedaj ko je determinanta $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ enaka 0

PP: $(-1,7,-2)$, $(2,1,3)$, $(0,15,-1)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 15 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 0 & 15 & -1 \\ 0 & 15 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1,7,-2) = \gamma(2,1,3) + \beta(0,15,-1)$$

$$\left.\begin{aligned} -1 &= 2\gamma \\ 7 &= \gamma + 15\beta \\ -2 &= 3\gamma - \beta \end{aligned}\right\} \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$$

TRDITEV (Lagrangeva identiteta)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$$

TOČKA, PREMICA, RAVNINA V $\mathbb{R}^3$

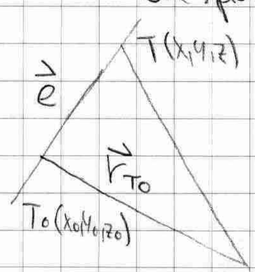
TOČKA: Točka T v $\mathbb{R}^3$ je 0-dimenzionalni objekt v kartezičnem koordinatnem sistemu določena s tremi koordinatami $\boxed{T(x,y,z)}$

Točko v $\mathbb{R}^3$ lahko identificiramo s krajevnim vektorjem

PREMICA: Premica p v $\mathbb{R}^3$ je 1-dimenzionalni objekt, določen je s smernim vektorjem in točko ki leži na njem

Naj bo $T_0(x_0,y_0,z_0)$ točka na premici in $\vec{e}$ smerni vektor premice

Potem za poljubna točka ki leži na tej premici velja



$$= \vec{r}_{T_0} + \lambda\vec{e}$$

$$\boxed{(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda(a,b,c)}$$ Vektorska oblika enačbe premice

$$(x,y,z) = (x_0+\lambda a, y_0+\lambda b, z_0+\lambda c)$$

Vektorja sta enaka $\Rightarrow$ imata vse enake komponente!

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a \\ y &= y_0 + \lambda b \\ z &= z_0 + \lambda c \end{aligned} \quad \text{če } abc \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{x-x_0}{a} \\ \lambda &= \frac{y-y_0}{b} \\ \lambda &= \frac{z-z_0}{c} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

Kanonična oblika enačbe premice

$a, b, c \neq 0$

PP: $\frac{x}{3} = \frac{1-y}{2} = 2z+3 \Rightarrow \frac{x-0}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-(-\frac{3}{2})}{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \vec{e} = (3,-2,\frac{1}{2})$ $\quad T_0(0,1,-\frac{3}{2})$ $\quad T_1(3,-1,-1)$

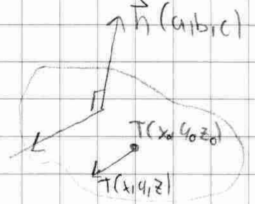
[Če je katera izmed koordinat smernega vektorja enaka nič, npr $a=0$, potem je enačba premice $x=x_0$, $\frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$]

PP: Zapišimo enačbo premice $\vec{e}=(-2,0,1)$, $T(1,2,0)$

$y=2 \quad \frac{x-1}{(-2)} = \frac{z-0}{1}$

RAVNINA: Ravnina je dvodimenzionalni objekt, ki je podan s smerjo, to je z normalo, ki je vektor, pravokoten na ravnino, in z eno točko iz ravnine. Ravnina je natanko določena tudi s tremi nekolinearnimi točkami.

Enačba ravnine:



Veljati mora da:

$$\boxed{(\vec{r}_T - \vec{r}_{T_0}) \cdot \vec{n} = 0}$$

Vektorska oblika enačbe ravnine

$$((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0))\cdot(a,b,c)=0$$

$$(x-x_0)a + (y-y_0)b + (z-z_0)c = 0$$

$$ax+by+cz = \underbrace{ax_0+by_0+cz_0}_{d}$$

$$\boxed{ax+by+cz=d}$$

kanonična oblika enačbe ravnine

Če npr y ne nastopa v enačbi ga lahko poljubno izberemo!

PP:

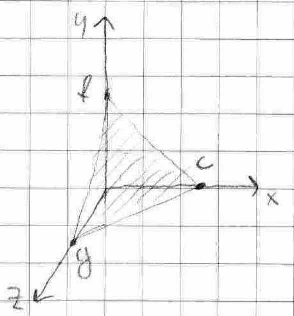
$\vec{n}=(1,0,2)$ $\quad -1x+0y+2z=-5+0-2$ $\quad T_1(1,7,-3)$

$T_0=(5,0,-1)$ $\quad -x+2z=-7$ $\quad T_2(3,-500,-2)$

Akta®

Segmentna oblika enačbe

$$\boxed{\frac{x}{e}+\frac{y}{f}+\frac{z}{g}=1} \qquad \frac{ax}{d}=\frac{x}{\frac{d}{a}} \rightarrow e$$



V tem primeru ravnina seka koordinatne osi v točkah $(e,0,0)$, $(0,f,0)$, $(0,0,g)$

__Opomba:__ Naj bo ravnina podana z enačbo $ax+by+cz=1$

Če je:

1.) $d=0 \Rightarrow$ ravnina gre skozi koord. izhodišče $(0,0,0)$

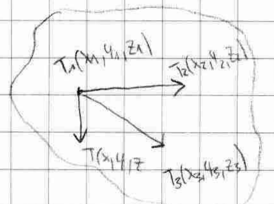
2.) $a=0 \Rightarrow$ normala $\vec{n}=(a,b,c) \rightarrow$ leži v ravnini yz, ravnina je vzporedna x osi

$b=0 \Rightarrow$ ravnina $\parallel$ y-os

$c=0 \Rightarrow$ ravnina $\parallel$ z-os

Enačbo premice lahko zapišemo tudi s pomočjo __determinante__.

Naj bodo T_1, T_2, T_3 točke na ravnini



Točka T leži na ravnini, če ležijo na ravnini vektorji

$\overrightarrow{T_1T}$, $\overrightarrow{T_1T_2}$, $\overrightarrow{T_1T_3}$

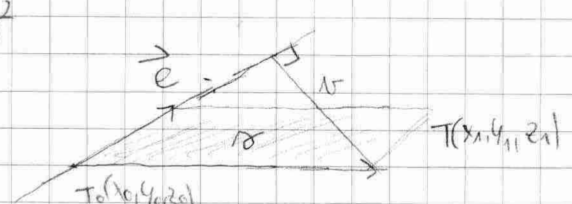
Če ~~sta~~ trije vektorji ležijo na isti ravnini je prostornina paralelepipeda, ki ga določajo enaka 0. Potem je determinanta teh vektorjev enaka nič

$$\overrightarrow{T_1T}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$$
$$\overrightarrow{T_1T_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$
$$\overrightarrow{T_1T_3}=(x_3-x_1,\ y_3-x_1,\ z_3-z_1)$$

Medsebojna lega točk, premic in ravnine

1.) Razdalja med točkama T_1 in T_2 → po Pitagori

$$d(T_1,T_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$



2.) Razdalja do premice

$$d(T,p) = \frac{|\vec{e} \times (\vec{r}_{T_1}, \vec{r}_{T_0})|}{|\vec{e}|}$$

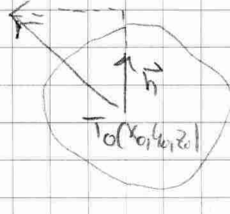
$$S_0 = |\vec{e} \times \overrightarrow{T_0T_1}| = \vec{e}_x \times (\vec{r}_{T_1} - \vec{r}_{T_0}) = |\vec{e}| \cdot v$$

$$v = \frac{|\vec{e} \times (\vec{r}_{T_1} - \vec{r}_{T_2})|}{\vec{e}}$$

3.) Razdalja točke od ravnine

$$d(\Pi, T) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

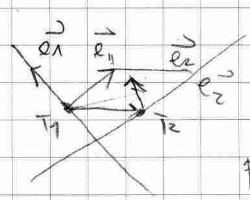
$ax + by + cz = d$, $T_1(x_1, y_1, z_1)$ IZRAZI



Pravokotna projekcija skalarni produkt

4.) Razdalja med dvema premicama

$$d(p,q) = \frac{|(\vec{e}_1, \vec{e}_2, (\vec{r}_{T_1} - \vec{r}_{T_2}))|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$$



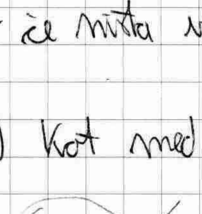
Paralelepiped ... ravnini,
Vektorji $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \overrightarrow{T_2T_0}$ določa paralelep...
$V = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{r}_{T_1} - \vec{r}_{T_2}) = |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| \cdot v$

$$d = v = \frac{|(\vec{e}_1 \vec{e}_2 (\vec{r}_{T_1} - \vec{r}_{T_2}))|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$$

5.) Razdalja med premico in ravnino

- če premica in ravnina vzporedni, vse točke na premici enako oddaljene od ravnine, izberemo katerokoli točko
- če nista vzporedni, se sekata $d=0$

6.) Kot med premico in ravnino



kotna projekcija premice na ravnino

Kot med premico in ravnino je kot med premico in njeno $\perp$ projekcijo na ravnino

Kot med normalo in smernim vektorjem δ znamo izračunati, kot med premico in ravnino pa je $\varphi = 90° - \delta$

MATRIKE

DEF:

Matrika velikosti $m \times n$ je pravokotna shema $m \cdot n$ števil z m vrsticami in n stolpci. V splošnem in m ni nujno enak n (kot pri det)

$$A = \begin{array}{cc} m & \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} & \dots & \\ \vdots & & \\ a_{m1}, a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ & n \end{array}$$

Število a_{ij} imenujemo (i,j)-ti element matrike. To je število, ki je v i-ti vrstici in j-tem stolpcu.

Množica vseh $m \times n$ realnih matrik označimo z $M_{m,n}(\mathbb{R})$ ali na kratko $M_{m,n}$

Če je $m=n$, potem je matrika kvadratna

Množica kvadratnih matrik označimo $M_n = M_{nn}$

Če je $n=1$, torej $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ imenujemo A stolpčna matrika

Če je $m=1$, torej $A = [a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n}]$ imenujemo A vrstična matrika

Če je $a_{ij}=0$ za vsak i,j v matriki $A \in M_{m,n}$, potem je A ničelna matrika

KVADRATNE MATRIKE $\in M_n$

1.) Če je $a_{ij} = \delta_{ij}$ $\quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ potem matriko imenujemo identična matrika ali identiteta

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

(ima vlogo enke pri množenju)

2.) Če je $a_{ij}=0$ za $i \neq j$, jo imenujemo diagonalna matrika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

5.) Če je $a_{ij}=0$ za $i>j$, imenujemo matriko zgornje trikotna matrika

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & \\ 0 & 0 & a_{33} & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Če računamo determinanto je lahko razvijemo po prvem stolpcu... Determinanta trikotne matrike je produkt diagonale

OPERACIJE NA MATRIKAH

Seštevanje in množenje s skalarjem elementov iz $M_{m,n}$

Naj bosta A in B dve matriki $\in M_{m,n}$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots & a_{1n} \\ \\ a_{m1} & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \dots & b_{1n} \\ \\ b_{m1} \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \\ a_{m1}+b_{m1} & & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Seštevanje je definirano po komponentah
Seštevamo lahko samo matrike enakih velikosti!

Naj bo $\delta \in \mathbb{R}$ in $A \in M_{m,n}$. Potem je produkt matrike A s skalarjem δ definiran z enakostjo

$$\delta A=\delta\begin{bmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{m1} \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta a_{11} \dots & \delta a_{1n} \\ \vdots & \\ \delta a_{m1} \dots & \delta a_{mn} \end{bmatrix}$$

PP: Naj bo $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\delta=-2$

$$A+\delta B=\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ -10 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

Za ti dve operaciji velja:

$A+B=B+A$ KOMUTATIVNOST
$A+(B+C)=(A+B)+C$ ASOCIATIVNOST
$\delta(A+B)=\delta A+\delta B$
$(\delta+\beta)A=\delta A+\beta A$
$1A=A$
$0+A=A$

Ker veljajo te lastnosti, je množica $M_{m,n}$ vektorski prostor

Kaj je VEKTORSKI PROSTOR:

Standardna baza tega vektorskega prostora je množica vseh

$B = \{E_{ij} \mid i=1, j=1\ldots n\}$ pri čemer je E_{ij} množica vseh ničel razen na mestu (i,j)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dimenzija vekt. prostora $M_{m,n} = m \cdot n = \dim M_{m,n}$

PP1: Zaslon črno-bel = matrika vseh pikel ki določa svetlost 0-1. Če želimo vse posvetlimo množimo s skalarjem

PP2: Google - Matrika vseh linkov

POSEBNE VRSTE KVADRATNIH MATRIK

DEF: Operacija TRANSPONIRANJE matrike zamenja vloge vrstic in stolpcev v matriki

PP: $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ Diagonali sta nespremenjeni, ostali se preslikajo

DEF: Matrika je SIMETRIČNA, če $A = A^T$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} = A = A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Če en z drugim, tudi drugi s prvim

DEF: Matrika $A \in M_m$ je POŠEVNO SIMETRIČNA, če $A^T = -A$

Po diagonali ležijo same ničle!

PP $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -8 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & 8 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} = (-A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

<u>Trditev</u>: Vsako matriko $A \in M_m$ lahko zapišemo kot vsoto simetrične in poševno simetrične matrike! enolično

$$A = S + P$$

D: Naj bo A dana matrika. Definiramo dve matriki $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $P = \frac{1}{2}(A - A^T)$

$S^T = (\frac{1}{2}(A + A^T))^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A + A^T) = S \Rightarrow$ SIMETRIČNA

$P^T = (\frac{1}{2}(A - A^T))^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -P \Rightarrow$ POŠEVNO SIMETRIČNA

PP:
$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = P + S$ $\quad S = \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 7 \end{bmatrix}$ $\quad P = \frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 \\ -3/2 & 0 \end{bmatrix}$

D za enoličnost $[\;\;]$ $a_{ij} = P_{ij} + p_{ij}$, $a_{ji} = P_{ij} * p_{ij}$ 2 enačbi, 2 neznanki

OPOMBA: Če je $A \in M_m(\mathbb{C})$, potem

DEF ODJUNGIRANA matrika $A^* = A^{-T}$

Če $A^* = A \Rightarrow A$ HERMITSKA oz. sebi odjungirana matrika

DEF: Če za $A \in M_m(\mathbb{C})$ velja $A^*A = AA^* = I$,

pravimo da je A UNITARNA matrika

Doslej smo za matrike $M_{m,n}$ definirali seštevanje in množenje s skalarjem
V nadaljevanju bomo definirali še množenje. To ne bo več nujno, da so matrike enakih dimenzij
Vse operacije lahko izvajamo če so matrike kvadratne
(seštevanje, množenje s skalarjem, množenje matrik)

NASL. TEDEN: V PONDELK - FERNE; V TOREK - MELITKA; V SREDO - NI; V ČETRTEK; V PETEK - NI; V ČASU REPETITORIJA - PREDAVANJA

14.3.11

MNOŽENJE MATRIK

Naj bo $A \in M_{m,n}$ in $B \in M_{p,r}$, potem lahko definiramo produkt dveh matrik A in B samo v primeru če je $\underline{n = p}$

⇒ Če je torej št. stolpcev 1. matrike enako št. vrstic 2. matrike. Dobljena matrika je dimenzije $\underline{m \times r}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pr} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{p1} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \dots + a_{1n} \cdot b_{p2} & \dots \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} b_{21} + \dots + a_{2n} \cdot b_{p1} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + \dots + a_{2n} \cdot b_{p2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \dots + a_{mn} \cdot b_{p1} & a_{m2} \cdot b_{12} + a_{m2} \cdot b_{22} + \dots + a_{mn} \cdot b_{p2} & \dots \end{bmatrix}$$

Če označimo $A \cdot B = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nr} \end{bmatrix}$ potem je:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots$$

⇒ Torej je C_{ij} skalarni produkt i-te vrstice A in j-tega stolpca B

$$m\{\underbrace{\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}}_{n} \cdot p\{\underbrace{\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}}_{r} = \begin{bmatrix} AB \end{bmatrix}$$

$n = p$

PP:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 & (-2) \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 17 & -6 \\ 4 & 33 & -9 \end{bmatrix}$$

PP2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3(-2) + 7 \cdot 1 - 11 \cdot 0 = \underline{1}$$

⇒ Dobimo da je množenje VRSTIČNE in STOLPČNE matrike ravno natanko skalarni produkt dveh vektorjev

LASTNOSTI MNOŽENJA MATRIK

1.) $$\underbrace{\underbrace{(\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times r}{B})}_{m\times r}\cdot\underset{r\times q}{C}}_{m\times q} = \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underbrace{(\underset{n\times r}{B}\cdot\underset{r\times q}{C})}_{n\times q}}_{m\times q}$$ ASOCIATIVNOST

2.) $\alpha(A\cdot B) = (\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B)$

3.) Ker lahko seštevamo samo matrike enakih dimenzij, množimo pa matrike kjer je št. stolpcev A = št. vrstic B matrike, lahko hkrati izvajamo obe operaciji samo na kvadratnih matrikah.
Naj bodo sedaj matrike, ki jih bomo obravnavali kvadratne, potem velja:

$A\cdot(B+C) = AB+AC$ DISTRIBUTIVNOST
$(A+B)\cdot C = AC+BC$

4.) NE VELJA $AB \neq BA$ KOMUTATIVNOST (NE VELJA)

PP:

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1&2\\-2&-1\end{bmatrix} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix}2&-1\\2&4\end{bmatrix} \neq BA=\begin{bmatrix}4&1\\-2&2\end{bmatrix}$$

5.) $A\cdot B = O$ NE SLEDI NUJNO DA JE $A=O$ ALI $B=O$

PP:

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

DEF:
Naj bo A kvadratna matrika; če obstaja taka matrika B, da je:

$$B\cdot A = A\cdot B = I$$

Potem pravimo da je B INVERZNA MATRIKA matrike A in pišemo $B=A^{-1}$

Če za matriko A obstaja A^{-1} potem pravimo, da je A OBRNLJIVA matrika

Če A NI OBRNLJIVA potem pravimo, da je A SINGULARNA

OPOMBA: Ni vsaka matrika obrnljiva
TRDITEV: Matrika $A\in M_n$ je obrnljiva natanko tedaj ko je DETERMINANTA te MATRIKE različna od 0

$\Rightarrow$ Obrnljive so samo KVADRATNE MATRIKE

Inverzno matriko obrnljive matrike lahko izračunamo na več načinov, npr.:

⇒ Naj bo A obrnljiva, potem je:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1N} \\ A_{M1} & A_{M2} \dots A_{MN}\end{bmatrix}^T$$

Pri čemer je A_{ij} i-ti KOFAKTOR matrike A

PP:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 5 \Rightarrow \text{je obrnljiva} \Rightarrow A^{-1} \text{ obstaja}$$

$A_{11} = 1\cdot(-1)^2 = 1$ $\quad A_{12} = 3\cdot(-1)^3 = -3$ $\quad A_{21} = (-1)\cdot(-1)^3 = 1$ $\quad A_{22} = 2\cdot(-1)^2 = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

PP2: Matrična enačba

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} \Rightarrow X = \underset{A^{-1}}{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{X}{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}$$

$A^{-1}\cdot A = I$

TRDITEV:

Naj bosta A in B obrnljivi matriki, potem je tudi A·B obrnljiva:

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

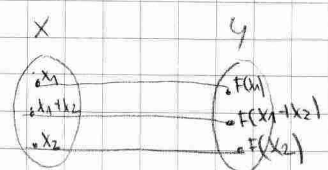
DOKAZ: Iščemo matriko X, ki bo inverzna od AB

$$X\cdot(AB) = I \,/\cdot B^{-1} \Rightarrow X\cdot A\cdot \overbrace{B\cdot B^{-1}}^{I} = B^{-1} \Rightarrow X\cdot A = B^{-1} \,/\cdot A^{-1} \Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$\Rightarrow X = B^{-1}A^{-1}$$

ZGLED UPORABE MNOŽENJA MATRIK

DEF:

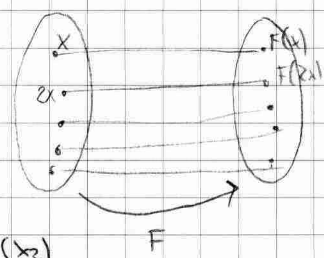
Preslikava $F: X \to Y$ je linearna če velja:



1.) $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$; $x_1, x_2 \in X$ ADITIVNOST

2.) $F(\alpha x) = \alpha F(x)$; $\alpha \in \mathbb{R}, x \in X$ HOMOGENOST

PP: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



F je linearna če je $F(x)=kx$

$F(2x) = k \cdot 2x = 2kx = 2 \cdot Fx$

$F(x_1+x_2) = k(x_1+x_2) = kx_1 + kx_2 = F(x_1) + F(x_2)$

TRDITEV Na matrike lahko gledamo kot na preslikave in sicer

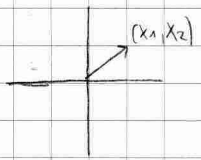
če je $A \in M_{m,n}$, potem A definira preslikavo iz $M_{m,1} (=\mathbb{R}^n)$

v $M_{m,1} (=\mathbb{R}^n)$

V primeru kvadratnih matrik $A \in M_n$ matrika definira preslikavo iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^n$

PP:

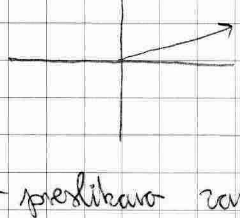
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad$ $A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$



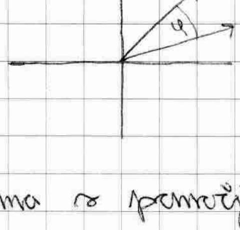
V tem primeru matrika A predstavlja projekcijo vektorja iz $\mathbb{R}^2$ na abscisno os

PP2: Opišemo preslikavo, ki vzeme vektor (x_1, x_2) v ravnini priredi vektor, ki je za kot φ zarotiran prvotni vektor

PRVOTNI



ZAROTIRAN



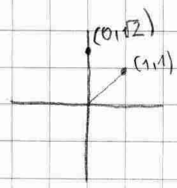
To preslikavo zapišemo s pomočjo matrike A

$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

Če v ravnini vektor pomnožimo s to matriko, dobimo za φ zarotiran vektor

PP: Naj bo $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Potem je

$$A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

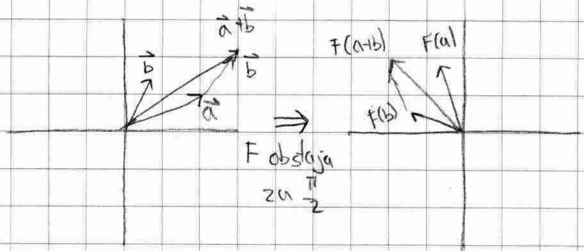


$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

IZREK Preslikava dana z matriko je linearna. Velja tudi obratno
Vsako linearno preslikavo lahko zapišemo s pomočjo matrike

OPOMBA: Če imamo neko preslikavo, ki ni linearna je ne moremo zapisati s pomočjo matrike

PP: Rotacija je linearna preslikava



S pomočjo matrik opišemo linearne preslikave

RANG MATRIKE

DEF: Rang matrike $A \in M_{m,n}$ je enak dimenziji največje neničelne poddeterminante matrike A

PP: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3,4}$ Rang $A = ?$

Ali je rang $A = 3$? Ali obstaja katera 3×3 poddeterminanta, ki je različna od 0

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 + 16 + 6 - 6 - 0 - 16 = 0 \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 8 + 7 - 0 - 12 - 3 - 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

→ Torej ni ranga 3

Ali je ranga 2?

$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12-12=0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow$ Ranga 2

Rang je dimenzija največje neničelne poddeterminante

OPOMBA: Naj bo $A \in M_{m,n}$

Potem je rang $A \leq \min\{m,n\}$ Torej manjši ali enak od manjše stranice matrike

OPOMBA: Rang ničelne matrike je enak 0

TRDITEV

$$\text{rang } A^T = \text{rang } A$$

Rang je definiran s pomočjo determinante. Transponiranje ne vpliva na determinante

Spomnimo se da je determinanta enaka nič če sta dve vrstici enaki. Še več determinanta je enaka nič, če sta dve vrstici linearno odvisni

TRDITEV

Rang matrike A je enak številu linearno neodvisnih vrstic A

Zaradi lastnosti determinante s pomočjo katere je definiran matrika velja, da se rang ne spremeni, če izvedemo katerokoli izmed naslednjih operacij:

1.) Rang se ne spremeni, če v matriki zamenjamo katerokoli vrstico

2.) Rang se ne spremeni, če pomnožimo katerokoli vrstico z neničelnim številom

3.) Rang se ne spremeni, če prištejemo katerikoli vrstici večkratnik katerekoli vrstice

PP:

$$\text{rang}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

OPOMBA: Enako velja za stolpce

Ker se rang pri elementarnih operacijah ne spremeni, računamo rang običajno tako, da preoblikujemo matrike s pomočjo elementarnih operacij do „ZGORNJE TRIKOTNE MATRIKE"

PP:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

Rang matrike je potem enak številu neničelnih vrstic zgornje trikotne matrike

PP:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang } A = 3$$

REŠEVANJE SISTEMA LINEARNIH ENAČB

Naj bo dan sistem m linearnih enačb za n-neznank $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

a_{ij} imenujemo koeficient sistema

Ta sistem lahko zapišemo v matrični obliki in sicer naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Potem je sistem linearnih enačb v matrični obliki enak:

$$AX = B$$

KVADRATNA FORMA

29.3.'11

DEF: Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$ in $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$

izraz $\overline{X}^T A \cdot X$ imenujemo kvadratna forma in je matrika velikosti 1×1 $\Rightarrow$ torej je to število

PR:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{X}^T \cdot AX = \begin{bmatrix} -i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i-1 \\ 2i \end{bmatrix} = 1 + i + 2i = 1 + 3i$$

$A = A^* = \overline{A}^T$

DEF: Če je A HERMITSKA matrika, potem je $\overline{X}^T \cdot AX$ HERMITSKA KVADRATNA FORMA

Če je A POŠEVNO HERMITSKA matrika, potem je $\overline{X}^T A \cdot X$ POŠEVNO HERMITSKA KVADRATNA FORMA

IZREK:

Hermitska kvadratna forma je realno št. za vsak $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$

DOKAZ: Število A je realno natanko tedaj, ko je $\overline{\delta} = \delta$. Pokazali bomo, da

$$\overline{\overline{X}^T A X} = \overline{X}^T A X$$

$$\overline{\overline{X}^T A X} = \overline{\overline{X}^T}\,\overline{A}\,\overline{X} = X^T \overline{A}\,\overline{X} = (X^T \overline{A}\,\overline{X})^T = \overline{X}^T \overline{A}^T (X^T)^T = \overline{X}^T \overline{A}^T X = \overline{X}^T A X$$

ker kvadratno matriko velikosti 1×1, torej se pri transponiranju nič ne spremeni

$\overline{A}^T = A$, ker je A hermitska

IZREK:

Poševno hermitska kvadratna forma je čisto imaginarno št. za vsak $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ (Realni del je $= 0$)

DOKAZ: Št δ je čisto imaginarno št.: Pokazali bomo $\overline{\overline{X}^T A X} = -\overline{X}^T A X$

$$\overline{\overline{X}^T A X} = \overline{\overline{X}^T}\,\overline{A X} = X^T \overline{A}\,\overline{X} = (X^T \overline{A}\,\overline{X})^T = \overline{X}^T \overline{A}^T (X^T)^T = \overline{X}^T \overline{A}^T X = -\overline{X}^T A X$$

$\overline{A}^T = -A$, ker je A poševno hermitska

PR:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \quad \overline{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Torej A hermitska}$$

PR:

$$X = \begin{bmatrix} 7 \\ \pi - 1 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{X}^T A X = \begin{bmatrix} 7 & \pi - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ \pi - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \pi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 + \pi + i - 1 - i\pi + 1 \\ 7 - 7i + \pi - 1 \end{bmatrix} = 98 + 7\pi - \cancel{7} \ldots \Rightarrow \mathbb{R}$$

IZREK: Če je pri kvadratni formi $\bar{x}^T A x$ matrika $A=I$, potem je

$$\bar{x}^T A x = \bar{x}^T I x = \underbrace{\bar{x}^T x}_{\mathbb{R}} \geq 0$$

Še več $\bar{x}^T x = 0$, natanko tedaj ko je $x=0$

DOKAZ: Najbo $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ Potem je $\bar{x}^T x = [\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \ldots + \bar{x}_n x_n$

$$= |x_1|^2 + \ldots |x_n|^2 \geq 0$$

Enako nič či vsi x enaki nič

LASTNE VREDNOSTI IN LASTNI VEKTORJI

$\sin x + e^{-x} + \log x + \ldots$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

$a_0 = a_1 = a_2$

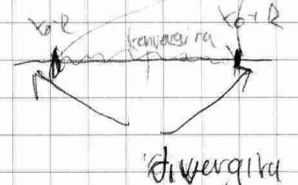
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \ldots$

$a = \frac{1}{0!}$ $a_1 \frac{1}{1!}$ $a_2 \frac{1}{2!}$ $\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

izrek: Naj bo $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} a(x-x_0)^n$

potenčna vrsta in naj bo $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ njen konvergenčni polmer

Potem potenčna vrsta konvergira za vsak $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, -\infty)$ potenčna vrsta divergira na mejah intervala, ta je za $x = x_0 - R$ in $x = x_0 + R$ lahko konvergira ali divergira (moramo preveriti v vsakem primeru)



PP: $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \ldots$

$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}(-1)^n}{\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Tu se vrsta v se seštevajo
Konvergira
za $x = -0{,}9$ samo obstaja

Divergira
$x = 1{,}01 \rightarrow$ ne da se seštevati

Preverimo še krajišča intervala

$x = -1$: $1 - (-1) + \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^5}{5} \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots$
Harmonična vrsta, ki divergira

$x = 1$: $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots$

Alternirajoča
↳ Konvergentna, ker $\lim a_n = 0$, po Leibnizu konvergira

$\Rightarrow$ Sledi da je funkcijska vrsta konvergentna za vsak $x \in (-1, 1]$

$\Rightarrow$ Torej je $(-1, 1]$ def. območje funkcijske vrste

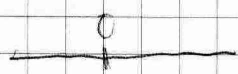
PP2: $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

$\Rightarrow$ Funkcijska vrsta konvergira za vsak $x \in (-\infty, \infty)$, torej vsak x

PP3: $f(x) = 1 + 1!\cdot x + 2!\cdot x^2 + \dots$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$



Vrsta konvergira samo za $x = 0$, za ostale vr. divergira

TAYLORJEVA VRSTA (17.-18. st.)

Funkcijo, ki je dovolj lepa, lahko zapišemo v obliki potenčne vrste, ki jo imenujemo Taylorjeva vrsta te funkcije

Naj bo dana funkcija f, zanima nas če se da zapisati v obliki:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\dots$$

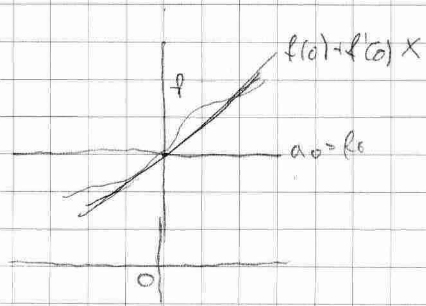
in kolikšni so koeficienti a_0, a_1, a_2

Kolikšni bi lahko bili ti koeficienti?

Naj bo f neskončnokrat odvedljiva f, nato bi jo aproksimirali s potenčno vrsto.

APROKSIMACIJA Z ENIM ČLENOM:

$f(x)\approx f(0)$ → Torej $a_0(A_0)$



APROKSIMACIJA Z DVEMA ČLENOMA

$f(x)\approx a_0+a_1x$

Premica, ki najbolj aproksimira graf f je ravno tangenta na graf v tej točki

APROKSIMACIJA S TREMI ČLENI

$f(x)\approx a_0+a_1x+a_2x^2$

$f(0)=a_0$

$f'(x)=a_1+2a_2x$

$f'(0)=a_1$

$f''(x)=2a_2$

$f''(0)=2a_2 \Rightarrow a_2=\frac{f''(0)}{2!}$

IZREK:

Naj bo f neskončnokrat odvedljiva f na svojem def. območju in naj bo x_0 iz def. območja. Potem lahko f. f razvijemo v TAYLORJEVO vrsto okrog točke x_0, to pomeni:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$

oz. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

To pomeni, da so pri razvoju f. v potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ koeficienti $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Običajno lahko f-jo f razvijemo okoli točke 0, torej $x_0=0$ in

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

OPOMBA: Taylorjevo vrsto lahko zapišemo tudi v obliki

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_{m+1}(x_0)(x-x_0)^{m+1}}$$

Pri čemer $R_{m+1}(x_0)$ imenujemo OSTANEK TAYLORJEVE VRSTE

Velja še:

$$R_{m+1}(x_0) = \frac{f^{(m+1)}(\tilde{x})}{(m+1)!} \qquad \tilde{x} = (x_0, x).$$

$R_{m+1}(x_0) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$, torej sta za zelo velike m vrednosti f. in vsota prvih m+1 členov skoraj enak.

Vrednost ostanka vrste poskušamo oceniti; pri alternirajočih vrstah je vrednost manjša od prvega člena, ki smo ga izpustili.

TAYLORJEVE VRSTE NEKATERIH ELEMENTARNIH FUNKCIJ

1.) $f(x) = e^x$

$f(x) = e^x \rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1$

$\vdots$

$\Rightarrow$ Sledi $\Rightarrow e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

PP: $\sqrt{e} = 1{,}648721$

$$e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{\frac{1}{4}}{2} + \frac{\frac{1}{8}}{6} + \frac{\frac{1}{16}}{24} + \frac{\frac{1}{32}}{120} = 1{,}648697$$

Kon

Kaj je s konvergenco?

$R = \lim \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \infty$ ⇒ Vrsta za e^x konvergira za vsak X

2.) SINUS

$f(x) = \sin(x)$ → $f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$ $f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$ $f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$ $f'''(0) = -1$
$f''''(x) = \sin x$ $f''''(0) = 0$

$$\boxed{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}}$$

Konvergenčni polmer:

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}} = \infty$$

ci !! → vsak drugi

$\cdot\, x\left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \ldots\right)$

OPOMBA: Ker je sinus liha f. so v njenem razvoju samo lihe potence, saj mora biti tudi desna stran LIHA

6.4.11

Za polmer. vr. za potence y ni lahko izr. konvergenčni polmer. Ni, drugih klicajo.

OPOMBA: Prvi približek za sinus (x) je kar X. Torej $\sin(x) \approx x$
Ta približek je dober za majhne vrednosti X → v radianih!

PP: $x = 0{,}1$
V RADIANIH $\sin(x) = 0{,}0998 \approx 0{,}1$

$x = 1$
$\sin(x) \approx 0{,}8414\ldots$

$x = 2$
$\sin(2) \approx 0{,}909$ } že grozno odstopanje

3. KOSINUS

$f(x) = \cos(x)$ → $f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$ $f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$ $f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin$ $f'''(0) = 0$
$f''''(x) = \cos x$ $f''''(0) = 1$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$

OPOMBA: Ker je kosinus soda f nastopajo v razvoju samo sode potence

Konvergenčni polmer izračunamo podobno kot pri sin. torej $R = \infty$.
To pomeni, da vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$

OPOMBA: Prvi približek za kosinus je $1 - \frac{x^2}{2}$ torej $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

PP:

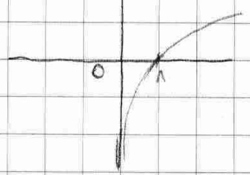
$x = 0{,}1$ $1 - \frac{0{,}1^2}{2} = 0{,}995$
$\cos(x) = 0{,}9950$

$x = 1$ $1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$
$\cos(x) = 0{,}5403$

$x = 2$ $1 - 2 = -1$
$\cos(x) = -0{,}416$

4. LOGARITEM (NARAVNI)

Ne da se razvit okoli točke 0 v Taylorjevo vrsto saj log v 0 sploh ni definirano



V Taylorjevo vrsto okoli točke $x=0$ zato razvijemo funkcijo

$$f(x) = \log(1+x)$$

$f(x) = \log(1+x) \rightarrow f(0) = 0$ $\qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -1(1+x)^{-2}$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$ $\qquad f'''(0) = (-1)(-2)$

$f''''(0) = (-1)(-2)(-3)$

Sledi:

$$\log(1+x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}x^n$$

$$\boxed{\log = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \dots}$$

Kaj je s konvergenco?

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$

Preverimo v krajiščnih intervalih: za $x=-1$ dobimo HARMONIČNO VRSTO, ki DIVERGIRA
za $x=1$ dobimo ALTERNIRAJOČO VRSTO, ki KONVERGIRA

Formula velja samo za $x \in (-1,1]$!

$\Rightarrow$ Tako lahko izračunamo vrednosti LOGARITMA na intervalu $\boxed{(0,2]}$

PP:

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$ $\qquad$ Slabo konvergira ta vrsta

$\log(2) = 0{,}693\dots$

$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0{,}783$

5. ~~BI~~NOMSKA VRSTA

$\sqrt{x}$ = ne moremo razviti v TAYLORJEVO VRSTO saj za $x=0$ ni def.

Zato samo okoli $x=0$ razvij $f(x) = (1+x)^r$ pri čemer je $r \in \mathbb{R}$

Preden se lotimo razvoja se spomnimo na nekaj lastnosti BINOMSKIH simbolov.

$(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Koeficiente lahko dobimo s pomočjo pascalovega trikotnika

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$\rightarrow \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ $\qquad$ PP: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$

m n

Velja:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

DOKAZ:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}=\frac{n!\,(k+1)+n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!}=\frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!}\;\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!}$$

$$=\binom{n+1}{k+1}$$

Opazimo, da je $\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n(n-k)\ldots(n-k+1)}{k!}}$

$$\frac{7!}{3!\,4!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{3!\,4\cdot3\cdot2}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3!}$$

$n,k\in\{0,\ldots\}$ $\in\mathbb{N}$

Binomski simbol def. nedaj še bolj splošno

DEF: $n\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ potem je

$$\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}}$$

PP

$$\binom{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}=\frac{\frac{3}{8}}{6}=\frac{1}{16}$$

$$\binom{-\frac{1}{3}}{2}=\frac{-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}=\frac{2}{9}$$

$$\binom{\frac{5}{4}}{3}=\frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{3!}=-\frac{5}{128}$$

$$\binom{3}{4}=\frac{3\cdot2\cdot1\cdot0}{4!}=0$$

Vrnimo se k vrstam v binomska vrsta:

Naj bo $n\in\mathbb{R}$ in $f(x)=(1+x)$

$f(0)=1$

$f'(x)=(1+x)^{n-1}$ $\qquad f'(0)=n$

$f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$ $\qquad f''(0)=n(n-1)$

$f'''(x)=n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$ $\qquad f'''(0)=n(n-1)(n-2)$

$f''''(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)(1+x)^{n-4}$ $\qquad f''''(0)=n(n-1)(n-2)(n-3)$

Sledi:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3$$

$$= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n$$

Izračunajmo konvergenco:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}}{\frac{m(m-1)\dots(m-(n+1))}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{(m-n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{-1+\frac{m}{n}}\right| = 1$$

Vrsta konvergira za $x \in (-1,1)$. V krajiščih težave

12.4.11

PP:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \dots$$

PP2: Približna izračunajmo vrednost:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}81649$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{16}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \dots\ 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{72} - \frac{1}{432} = 0{,}817$$

$x = -\frac{1}{3}$

KOLOKVIJSKA NALOGA

PP3:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = (1+(-x))^{-\frac{1}{3}} \dots$$

$$= 1 + \binom{-\frac{1}{3}}{1}(-x) + \binom{-\frac{1}{3}}{2}(-x)^2 + \binom{-\frac{1}{3}}{3}(-x)^3 + \dots = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(-x) + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}x^2 + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)(-x)^3}{3!}$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + \frac{14}{81}x^3 + \dots$$

PP4: Približna izračunajmo

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1{,}03}} \approx 1 + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{100}\right) = 0{,}99$$ → za majhne x - zelo dobri približki

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1{,}03}} = 0{,}9902$$

OPOMBA: Natančnost približka Tpn razvoja v Taylorjevo vrsto je odvisna od
- ŠTEVILA ČLENOV pri razvoju upoštevamo
- VELIKOSTI VREDNOSTI SPREMENLJIVKE pri kateri razvijamo
- LASTNOSTI KONVERGENCE Taylorjeve vrste.

UPORABA TAYLORSEVE VRSTE:

1.) ZA IZRAČUN PRIBLIŽNIH VRED. FUNKCIJE
2.) ZA IZRAČUN LIMITE FUNKCIJ
3.)

PP: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}-\dots}{x}=\lim\frac{x\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}\right)}{x}=\frac{1}{1}=1$$

3.) ZA IZRAČUN VRED. NEELEMENTARNIH FUNKCIJ

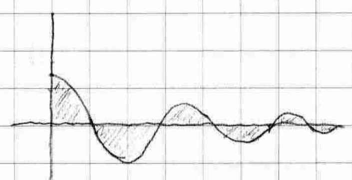
PP: $$\underset{\text{INTEGRALSKI SINUS}}{Si(x)}=\underbrace{\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt}_{\text{NE MOREMO Z INTEGRIRANJEM TEGA DOBITI}}=\int_0^x\frac{t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}}{t}\,dt$$

$$=\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-\frac{t^6}{7!}+\dots\right)dt$$

$$=\int_0^x 1\,dt-\int_0^x\frac{t^2}{3!}\,dt+\int_0^x\frac{t^4}{5!}\,dt-\int_0^x\frac{t^6}{7!}\,dt$$

$$\int(af(x)+bg(x))=a\int f(x)dx+b\int g(x)dx$$

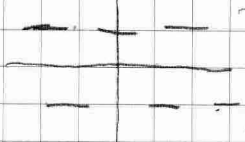
$$=t\Big|_0^x-\frac{t^3}{3\cdot 3!}\Big|_0^x+\frac{t^5}{5\cdot 5!}\Big|_0^x-\frac{t^7}{7\cdot 7!}\Big|_0^x+\dots$$



$\Rightarrow$ Hitro konvergira

12.4.11

FOURIRJEVA VRSTA



Taka f. ni odvedljiva

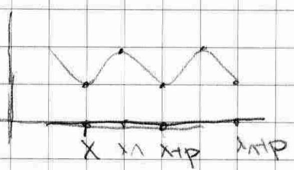
Pri razvoju v Taylorjevo vrsto morajo biti f-je, ki jih razvijemo, neskončnokrat odvedljive. Velikokrat imamo opravka s funkcijami, ki niso neskončno odvedljive. Na primer, če je dana funkcija periodična, jo lahko razvijemo v vrsto periodičnih funkcij.

Oglejmo si nekaj pojmov povezanih s periodičnostjo.

DEF: Funkcija f je periodična, če obstaja taka števila p, da velja:

$$f(x+p)=f(x) \quad \text{za } x\in\mathbb{R}$$

Število p v tem primeru imenujemo PERIODA FUNKCIJE f.



TRDITEV: Če je funkcija f PERIODIČNA s periodo p potem je f tudi periodična s periodo $n\cdot p$ $n\in\mathbb{R}$

DOKAZ: Naj bo $n\in\mathbb{N}$. Potem je $f(x+np)=f(x+(n-1)p+p)=f(x+(n-1)p)$
$= f(x+(n-2)p) \rightarrow f(x)$

TRDITEV: Periodična f. s periodo p je NATANČNO DOLOČENA z vrednostmi na katerem koli INTERVALU DOLŽINE P

TRDITEV: Naj bosta f in g periodični f. z isto periodo p. Potem je NJUNA LINEARNA KOMBINACIJA tudi PERIODIČNA s periodo p.

DOKAZ: $(\overset{\in\mathbb{R}}{\alpha} f+\overset{\in\mathbb{R}}{\beta} g)(x+p) = \alpha f(x+p)+\beta g(x+p)$
$= \alpha f(x)+\beta g(x)$
$=(\alpha f+\beta g)(x)$ ✓

Vsota f. z različnimi periodami ni nujno več periodična funkcija

PP: Periodične f.:

1.) $\sin x$, $\cos x$ $\quad p=2\pi$

2.) $\sin 2x$, $\cos 2x$ $\quad p=\pi$, Perioda je tudi 2π

3.) $\sin 3x$, $\cos 3x$ $\quad p=\frac{2\pi}{3}$, Perioda je tudi $3\cdot\frac{2\pi}{3}=2\pi$

4.) $\sin 4x$, $\cos 4x$ $\quad p=\frac{\pi}{2}$, Perioda je tudi 2π

Sledi, da je VSOTA FUNKCIJ oblike $\sin nx$, $\cos nx$ PERIODIČNA funkcija s periodo 2π

DEF: Funkcijska vrsta oblike

$$a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + b_1\sin x + b_2\sin 2x + \ldots$$

imenujemo TRIGONOMETRIJSKA VRSTA

Naj bo f. dana periodična funkcija s periodo 2π. Radi bi jo razvili v trigonometrijsko vrsto, torej zapisali v obliki:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n(\sin(nx)\right)$$

To pomeni, da bi za dano f. f. radi izračunali koeficiente a_n in b_n

To storimo na naslednji način:

Obe strani enačbe INTEGRIRAMO

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx\right)$$

$$= a_0 x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{a_n \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} + \underbrace{b_n\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0}\Big)$$

Ker ste funkciji periodični s periodo 2π $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 2\pi$

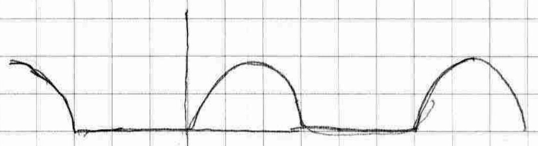
Sledi

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

19. 4. '11

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\cdot 2\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n\cdot 2\pi}{T} t\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \quad , a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{n\cdot 2\pi}{T}t\,dt \quad , b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{n 2\pi}{T}t\,dt$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{\pi}{\omega} \le t < 0 \\ E\sin(\omega t) & 0 \le t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

ZAP. TO. F. $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t)\,dt = \frac{\omega}{2\pi}\Big(\overbrace{\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{0} f(t)\,dt}^{0} + \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} f(t)\,dt\Big) = \frac{\omega}{2\pi}E\cdot -\frac{\cos \omega t}{\omega}\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = -\frac{E}{2\pi}(-1-1) = \frac{E}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t)\cos\left(\frac{n\,2\pi\omega}{2\pi}t\right)dt = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin(\omega t)\cdot\cos(n\omega t)\,dt = \frac{\omega}{\pi}E\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{1}{2}\Big(\sin(1+n) + \sin(1-n)\Big)dt$$

$$= \frac{\omega E}{2\pi}\left(-\frac{\cos(1+n)\omega t}{1+n} + -\frac{\cos(1-n)\omega t}{1-n}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = -\frac{\omega E}{2\pi}\left(\frac{\cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{\cos(1-n)\pi}{1-n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right)$$

$$= -\frac{\omega E}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{1+n}}{1+n} + \frac{(-1)^{1-n}}{1-n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right)$$

N pr. $a_{17} = -\frac{\omega E}{2\pi}(\cdot 0) = 0$

$a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{\frac{2}{3}E}{\pi}$

$\hookrightarrow$ obravnavamo posebej

SINUSNA IN KOSINUSNA FOURIERJEVA VRSTA

Spomnimo se da za sodo periodično f - pri razvoju te f. v Fourierjevo vrsto nastopajo samo koeficienti pri kosinusih, vsi koeficienti pri sinusih so enaki nič.

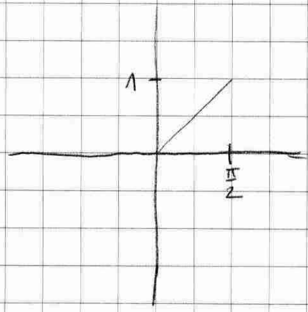
Podobno pri za LIHO PERIODIČNO f - pri razvoju nastopajo sam koeficienti pri SINUSIH, vsi koeficienti pri kosinusih so enaki nič

$$a_n = \frac{2}{T}\underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{\text{LIHA}}\underbrace{\cos\left(\frac{n\,2\pi}{T}t\right)}_{\text{SODA}}dt}_{\text{LIHO}} = 0$$

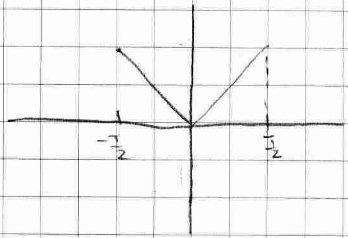
Integral lihe na simetričnem je enak 0

Kosin

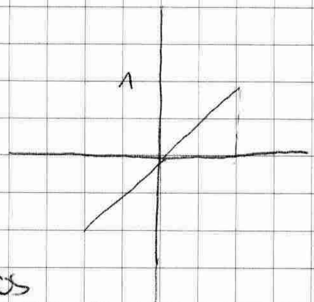
Naj bo f poljubna f-ja (ne nujno PERIODIČNA) def. na intervalu $[0, \frac{T}{2}]$. Ogljimo, in kako to f. razvijemo v sin in cos F. vrsto.



1. Razširimo f. do sode f. na intervalu od $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ KOSINUSNA



2. Razširimo do lihe f. SINUSNA



Cos

Dobimo sodo periodično f. s periodo T, definirano na R

→ Periodično razširimo.

→ Razvijemo v Fourierjevo vrsto, ker f - soda, so $b_n = 0$

⇒ Dobimo

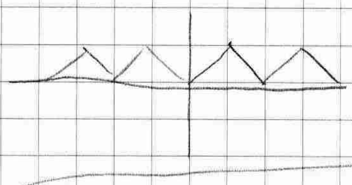
$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \qquad a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt, \quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt}$$

KOSINUSNA F. VRSTA

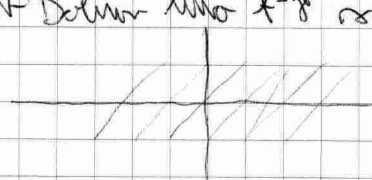
FUNKCIJE F.

COS SIN → Periodično razširimo

Dobimo sodo p.



SIN Dobimo liho f-jo s periodo T

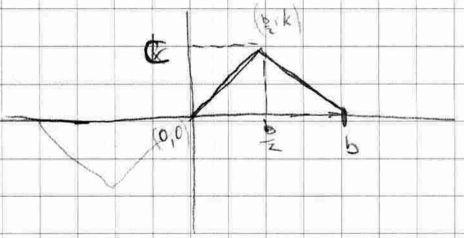


$$\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n \cdot 2\pi}{T} t \qquad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{liha}} \sin\left(\frac{n 2\pi}{T}t\right)}_{\text{soda}}dt}$$

SODA F. VRSTA

FUNKCIJE F.

FP:



$$f(t) = \begin{cases} \frac{2c}{b}t, & 0 \le t < \frac{b}{2} \\ -\frac{2c}{b}t + 2c, & \frac{b}{2} \le t < b \end{cases}$$

$y = kx + n$

Razvijmo v sinusno F. vrsto:

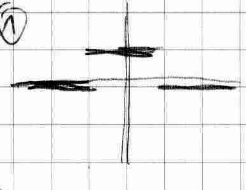
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\cdot\pi}{b}t \quad ; \quad b_n = \frac{4}{2b}\int_0^b f(t)\sin\frac{n\cdot 2\pi}{2b}t\,dt = \frac{2}{b}\left(\int_0^{\frac{b}{2}} \frac{c2}{b}t\sin\frac{n\pi}{b}t\,dt + \int_{\frac{b}{2}}^{b}\left(-\frac{2c}{b}t+2c\right)\sin\frac{n\pi}{b}t\,dt\right)$$

FOURIERSEV INTEGRAL

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

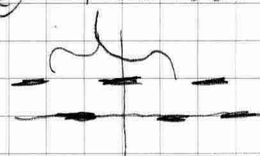
Naj bo f poljubna, ne nujno periodična f. Radi bi jo zapisali v podobni obliki, kot je f. vrsta za periodične f. Kot vrsto sin in cos je ne moremo zapisati saj ni periodična. Lahko pa jo zapišemo s pomočjo integrala, ki ga imenujemo FOURIERSOV INTEGRAL

Oglejmo si ga na primeru

① 

⇒ Naredimo periodično f. s periodo T

② Na tem delu dober približek za našo f.



③ → Perioda povečana

Dober približek na nezveznih intervalih

→ ④ Periodo T pošljemo v neskončno in dobimo

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x))\,d\omega$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu)\cos(\omega\nu)\,d\nu$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu)\sin(\omega\nu)\,d\nu$$

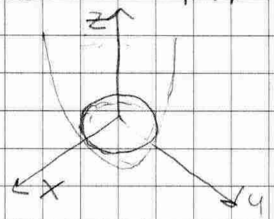
ZAPIS FOURIERJEVE VRSTE V KOMPLEKSNI OBLIKI

Velja da je $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$

Potem pa lahko F- vrsto zapišemo tudi v obliki $\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx}}$

10.5.11

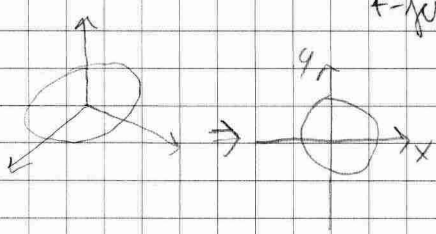
Primer: $F(x,y) = x^2+y^2-1$



f-ja dveh spremenljivk katere graf je ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$

Z enačbo $F(x,y)=0$

torej $x^2+y^2-1=0$ pa je implicitno definirana f-ja ene spremenljivke $y = y(x) = \sqrt{1-x^2}$



krivulja

Ta funkcija nam implicitno določa f-jo: $y=y(x)$

PP2:

$\log\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x} = 0$ // Dve transcendentni f, ne moremo direkt y ven izrazit

Zanima nas ali je s to enačbo sploh implicitno podana neka f-ja $y=y(x)$

Pri odgovoru na to vprašanje nam pomaga naslednji izrek

IZREK: (O implicitni f-ji)

Naj bo $F: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ funkcija dveh spremenljivk z naslednjimi lastnostmi

1.) $F(a,b)=0$ za nek $(a,b)\in D$ / Zanima nas neka graf

2.) F je zvezno parcialno odvedljiva v okolici točke (a,b) // F ima neke lastnosti

3.) $F_y(a,b) \neq 0$ // Enoličnost

Potem je z enačbo $F(x,y)=0$ v neki okolici točke a enolično definirana f-ja ene spremenljivke

$y=y(x)$, tako da je $y(a)=b$ in

$F(x,y(x))=0$ v neki okolici a.

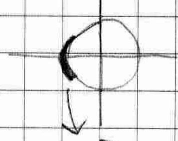
PP: $x^2+y^2-1=0$

Definirano: $F(x,y)=x^2+y^2-1$

Izberimo točko $(-1,0)$

$F_y = 2y$

$F_y(-1,0)=0$ Težave!

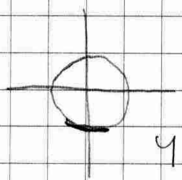


Ta del krivulje okoli točke $x=-1$ ne definira f-je $y=y(x)$ (saj nimamo določenega enoličnega predpisa)

Izberemo sedaj še eno točko $(0,-1)$

$F(0,-1)=0$

F lepa ✓



$y=-\sqrt{1-x^2}$ $F_y(0,-1)=-2\neq 0$ ✓

S pomočjo f-je dveh spremenljivk določimo tudi spremenjanje implicitno podane f-je ene spremenljivke

Naj bo f-ja ene spremenljivke implicitno podana z enačbo

$F(x,y)=0$

Zapišemo diferencial f-je F

$F_x dx + F_y dy = 0$

⇒ Sledi (po preureditvi):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$\frac{dy}{dx} = y'$

To je f. dveh spremenljivk x in y

PP:

$\log\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x} = 0$

Kaj se dogaja v točki $x=1$ s f-jo $y=y(x)$

Kolika je vr. f-je $y=y(x)$ za $x=1$ $\log\sqrt{1+y^2} - \arctan y = 0 \Rightarrow y=0$

Po izreku o implicitni f-ji je v okolici $x=1$ enolično def. f-ja $y=y(x)$

Dol: $F(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2}) - \arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \arctan\frac{y}{x}$

$F_y = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}2y - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2}$

$F_y(1,0) = \frac{0-1}{1+0} = -1 \neq 0$

tako, da je $y(1)=0$

Izračunajmo odvod f.je y v točki $x=1$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{\frac{x+y}{x^2+y^2}}{\frac{y-x}{x^2+y^2}} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$F_x = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$y'(1) = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

F.ja $y=y(x)$ narašča v točki $x=1$

OPOMBA: Podobno lahko vpeljemo za implicitno podano f.jo dveh spremenljivk $z=z(x,y)$ z enačbo

$F(x,y,z)=0$.

dobimo

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

DIFERENCIALNE ENAČBE

10. 5. XI

NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE

Navadna diferencialna enačba je enačba v kateri poleg neznane f-je y spremenljivke x, nastopajo tudi odvodi te f-je in neodvisna spremenljivka x.

Na primer: $y''(x) - y(x) \cdot x = x^2 \cdot y'(x)$

Poznamo še parcialne diferencialne enačbe, kjer v enačbi poleg neznane f-je več spremenljivk nastopajo tudi njeni parcialni odvodi in neodvisna spremenljivka

Npr: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

(Več pri MAT IV)

Pravimo, da je diferencialna enačba REDA n če v diferencialni enačbi nastopa n-ti ODVOD neznane f-je, višji odvodi pa ne nastopajo:

$$x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)} = 0$$

PP: $y'' - xy^{10} + (y')^{13} + y^{(5)} = 0$

To je diferencialna enačba 5-reda

Rešitev diferencialne enačbe je v splošnem več

PP $y = y'$

R: $y = ce^x$ ... NESKONČNO REŠITEV, C-poljubna konstanta

Rešitev diferencialne enačbe v kateri nastopa konstanta, katere vrednost je poljubna se imenuje SPLOŠNA REŠITEV D.E.

Če so DANI ZAČETNI POGOJI (npr. začetna hitrost) je potem REŠITEV ENOLIČNO DOLOČENA - tako rešitev imenujemo PARTIKULARNA REŠITEV ZAČETNEGA POGOJA

Lahko pa imamo dane tudi ROBNE POGOJE (strana pri PDE) v tem primeru imamo PARTIKULARNO REŠITEV ROBNEGA POGOJA

OPOMBA Nima vsaka D.E. rešitve

PP: Radioaktivni razpad radona

$_{88}Ra^{220}$ Zanima nas količina snovi v odvisnosti od časa

$y = y(t)$

Naj bo $y(0) = 2g$ → ZAČETNI POGOJ

$y'(t) = k\,y(t)$ $\quad k = -1{,}4 \cdot 10^{-11} s^{-1}$

$\Rightarrow y = \underset{\text{Poljubna konstanta}}{C} e^{kt}$ — KONČNA REŠITEV $\quad \Rightarrow \underset{2g}{y(0)} = C \cdot \overset{1}{e^{k \cdot 0}}$ } $C = 2g$ PARTIKULARNA REŠITEV

Rešitev DE je: $y(t) = 2g\,e^{-1{,}4 \cdot 10^{-11} s^{-1} \cdot t}$

a) Koliko Radona imamo čez eno leto?

$y(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) = \underline{\underline{1{,}9991\ g}}$

b) Razpolovna doba (kdaj bomo imeli 1g)

$y(t_0) = 1g$

$2g\,e^{-1{,}4 \cdot 10^{-11} s^{-1} \cdot t_0} = 1g$

$-1{,}4 \cdot 10^{-11} s^{-1} \cdot t_0 = \log \frac{1}{2}$

$t_0 = \frac{\log \frac{1}{2}}{-1{,}4 \cdot 10^{-11}} \approx 1500$ let

D.E. PRVEGA REDA

11.05.11

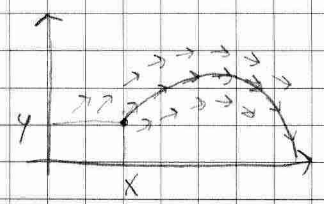
Povedali smo že, da je D.E. prvega reda oblike $F(x,y,y')=0$

Npr: $\log y' - \arctan\left(\frac{x}{y} - y'\right) = x^2$ je D.E. prvega reda. Take DE nepridejo v poštev pri opisu dogajanj v naravi

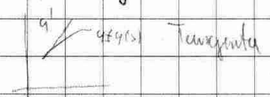
V nadaljevanju se ~~bomo~~ posvetili D.E prvega reda oblike

$$\boxed{y' = f(x,y)}$$

D.E. take oblike lahko predstavimo grafično.



$$\boxed{\begin{array}{l} y' = y^{*}(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}}$$



Oglejmo si najprej primer D.E s ločljivimi spremenljivkami. V tem primeru je D.E oblike

$$\boxed{y'(x) = g(x)\, f(y)}$$ LOČLJIVE SPREMENLJIVKE

To D.E rešimo na naslednji način

ZAPIŠEMO $\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot f(y)$

PREUREDIMO $\frac{dy}{f(y)} = g(x)\,dx$

IN OBE STRANI INTEGRIRAMO $\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)\,dx$

IZRAČUNAMO NEDOLOČEN INTEGRAL IN DOBIMO REŠITEV V IMPLICITNI OBLIKI

PP1 $m'(t) = \pm k \cdot m^p$ $\quad k>0$

Če je $p=1$ in predznak $-$, je to radioaktivni razpad (glej včerajšnji primer)

Naj bo $p>1$. Ločimo dva primera

1.) $p>1$ in predznak $-$

$$\frac{dm}{dt} = -k\cdot m^p(t) \qquad \frac{dm}{m^p} = -k\,dt \Rightarrow \int \frac{dm}{m^p} = -k\int dt$$

$$\Rightarrow \frac{m^{-p+1}}{-p+1} + C = -kt \Rightarrow m^{-p+1} = (-kt-c)(-p+1)$$

$$\Rightarrow m^{p-1} = \frac{1}{(kt+c)(p-1)} \Rightarrow m(t) = \frac{1}{\sqrt[p-1]{(kt+c)(p-1)}}$$

a) V posebnem primeru, ko je $p=2$ dobimo

$$m(t)=\frac{1}{kt+C}=\frac{1}{kt+m(t_0)}$$

2) $p>1$ in predznak +

$$m(t)=\frac{1}{\sqrt{(c-kt)(p-1)}}$$

V tem primeru pride v končnem času do EKSPLOZIJE

Nekatere D.E lahko S SUBSTITUCIJO prevedemo na D.E z LOČLJIVIMI SPREMENLJIVKAMI

Takšna je D.E. oblike

$$\boxed{y'=f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$f(x)=x^2-1$
$f(\frac{y}{x})=(\frac{y}{x})^2-1$

Imenujemo jo HOMOGENA D.E. PRVE STOPNJE

Rešimo jo tako da uvedemo novo spremenljivko $v=\frac{y}{x}$

Potem je $y=vx$ in če odvajamo, dobimo $y'=v'x+v$

Vstavimo v D.E. in dobimo $v'x+v=f(v)$

$$v'=\frac{f(v)-v}{x}$$

$$v'=(f(v)-v)\frac{1}{x}$$

Dobili smo D.E z ločljivimi spremenljivkami, ki jo znamo rešiti

PR:

$$2xyy'-y^2+x^2=0$$

$$y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}=\frac{y^2}{2xy}-\frac{x^2}{2xy}$$

To je homogena D.E. (ima posebno obliko)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}-\frac{1}{\frac{y}{x}}\right)$$

Dobimo:

$y'=f(\frac{y}{x})$ pri čemer je $f(t)=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$

Uvedemo novo spremenljivko in če odvajamo, dobimo $y'=v'x+v$ in vstavimo v D.E.

$$v=\frac{y}{x}\Rightarrow v'x+v=\frac{1}{2}\left(v-\frac{1}{v}\right)$$

$$v'x=\frac{1}{2}v-v-\frac{1}{2v}$$

$$\frac{dv}{dx}x=-\frac{1}{2}v-\frac{1}{2v}$$

$$\frac{dv}{v-\frac{1}{v}}=-\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v-\frac{1}{v}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{v}{v^2-1}\,dv=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$$

$t = v^2 - 1 \qquad dt = 2v\,dv$

$$\int \frac{dt}{t} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \log t = -\log x + C$$

$$t = e^{-\log x + C} = e^{\log\frac{1}{x} + C} = \frac{1}{x} \cdot e^C$$

$\Rightarrow t = \frac{1}{x} e^C$, C - poljubna konst. zapisana v obliki $C = \log K$

$$= \frac{1}{x} e^{\log K} = \frac{1}{x} \cdot K$$

$\Rightarrow \underline{t = \frac{k}{x}}$

$$\Rightarrow v^2 - 1 = \frac{k}{x} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = \frac{k}{x} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{k}{x} + 1$$

$\Rightarrow y^2 = kx + x^2$ k - poljubna konst $\rightarrow$ splošna rešitev

Naslednji tip D.E prvega reda (eden najpomembnejših) je

LINEARNA ENAČBA PRVEGA REDA

To je D.E oblike:

$$\boxed{\begin{array}{l} y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \\ y' = f(x)y = g(x) \end{array}}$$

Če je $g(x) = 0$ za vsak x, dobimo linearno D.E

$$y' + f(x)y = 0$$

~~Dobimo~~ Imenujemo jo HOMOGENA LINEARNA D.E.

Če je $g(x) \neq 0$ za vsak x je D.E NEHOMOGENA

Linearno D.E prvega reda rešimo z METODO VARIACIJE KONSTANTE

To storimo v dveh korakih

1. KORAK: Rešimo homogeno linearno D.E

$$y' + f(x)y = 0$$

Zapišemo $y' = +f(x) \cdot y$

in vidimo, da je to D.E z ločljivimi spremenljivkami.

Sledi: $\frac{dy}{dx} = -f(x)\cdot y$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)\,dx \Rightarrow \log y = \int f(x)\,dx + \log C$$

Antilogaritmiramo in dobimo $y = e^{-\int f(x)\,dx} \cdot C$

2. KORAK Rešimo nehomogeno linearno D.E.

$$y' + f(x)y = g(x)$$

s pomočjo rešitve homogene linearne D.E. tako, da variiramo konstanto.

Rešitev iščemo v obliki

$$y(x) = y_h(x)\cdot C(x)$$

Pri čemer je y_h rešitev homogene D.E., $C(x)$ pa neznana f-ja

Vstavimo v nehomogeno linearno D.E in dobimo

$$(y_h(x)C(x))' + f(x)(y_h(x)\,C(x)) = g(x)$$

$$y_h'(x)\,C(x) + y_h(x)\,C'(x) + f(x)y_h(x)\,C(x) = g(x)$$

Izpostavimo:

$$C(x)\underbrace{(y_h'(x) + f(x)y_h(x))}_{\substack{\text{"}0\text{ ker je } y_h \text{ rešitev}\\ \text{homogene LDE}}} + C'(x)\cdot y_h(x) = g(x)$$

Sledi $C'(x)\cdot y_h(x) = g(x)$

Oziroma $C'(x) = \frac{g(x)}{y_h(x)}$

Torej $C(x) = \int \frac{g(x)}{y_h(x)}\,dx$

Izračunamo ta integral in dobimo $C(x)$

Potem pa poznamo tudi rešitev nehomogene LDE, ki je enaka

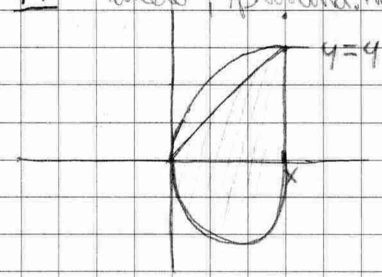
$$y(x) = y_h(x)\,C(x)$$

TRDITEV: Rešitev nehomogene linearne DE $y'(x)+f(x)y(x)=g(x)$ je enaka $y(x)=C y_h(x)+y_p(x)$, pri čemer je $C y_h(x)$ splošna rešitev homogene DE $y'(x)+f(x)y(x)=0$, y_p pa je posamezna rešitev nehomogene LDE

To pomeni, da zadošča poiskati eno (katerokoli) rešitev nehomogene in splošno rešitev LDE. Splošna rešitev nehomogene LDE je oblike $y(x)=Cy_h(x)+y_p(x)$

Splošno rešitev nehomogene dobimo s postopkom variacije konstante

PB: Parcela, ploščina. Kako oblikovati, da krivulja obda največjo ploščino



$$\int_0^x y(t)\,dt = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\cdot y(x) \quad / \frac{d}{dx}$$ Newton Leibnizova formula

$$y(x) = \pi\cdot 2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(y(x)+x\cdot y'(x)\right)$$

$$y(x)=\frac{\pi}{4}x+\frac{1}{2}y(x)+\frac{1}{2}x\,y'(x) \quad / \cdot 2\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=-\frac{\pi}{2}$$ Dobimo linearno DE

1. KORAK: $y'-\frac{1}{x}y=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\log y=\log x+\log C \Rightarrow y=Cx$$

2. KORAK: Nehomogena variacija konstante:

$$y(x)=C(x)\cdot x \Rightarrow (C(x)x)'-\frac{1}{x}C(x)\cdot x=-\frac{\pi}{2}$$

$$C'(x)\cdot x+\cancel{C(x)}-\cancel{C(x)}=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow C'(x)=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$C(x)=-\frac{\pi}{2}\log(x)+K$$

Splošna rešitev nehomogene je $y(x)=\left(-\frac{\pi}{2}\log x+K\right)\cdot x \Rightarrow \boxed{y(x)=\underbrace{-\frac{\pi}{2}\log x\cdot x}_{\text{partikularna}}+\underbrace{Kx}_{\text{splošna rešitev}}}$

Rešitev za $x=0$ ni definirana, saj je logaritem definiran samo za pozitivne x

Oglejmo si obnašanje v limiti $\lim_{x\to 0}-\frac{\pi}{2}\log x\cdot x=-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0}\log x\cdot x=-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-1}}$

$$=-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$$

Imamo neskončno rešitev problema. Če dodamo še en pogoj, npr. $y(1)=1$ potem dobimo

$y(1)=-\frac{\pi}{2}\log 1\cdot 1+K\cdot 1 \Rightarrow K=1$ Rešitev je potem $y(x)=-\frac{\pi}{2}\log x\cdot x+x$

ppri. Bernoulijeva Diferencialna Enačba je DE oblike $y'(x)+f(x)y(x)=g(x)y^{\delta}(x)$ $\delta\neq 0$, $\delta\neq 1$

Rešimo jo tako, da jo PREVEDEMO z vpeljavo nove spremenljivke NA LINEARNO DE

Najprej delimo z y^{δ}: $\frac{y'(x)}{y^{\delta}(x)}+f(x)y^{1-\delta}(x)=g(x)$

Definiramo $w(x)=y^{1-\delta}(x)$

Odvajamo $w'(x)=(1-\delta)\cdot y^{1-\delta-1}(x)\cdot y'(x) \Rightarrow (1-\delta)\frac{y'(x)}{y^{\delta}(x)}$

Vstavimo v enačbo $\frac{w'(x)}{1-\delta}+f(x)w(x)=g(x)$

$w'(x)+(1-\delta)\cdot f(x)w(x)=(1-\delta)g(x)$ Dobimo LDE, ki jo znamo rešit

PP: $y'+y=x\sqrt{y}$

$y'+y=xy^{\frac{1}{2}}$ Bernoulijeva DE za $\delta=\frac{1}{2}$

$\frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}}+y^{\frac{1}{2}}=x$ $w(x)=y^{\frac{1}{2}}(x) \to w'(x)=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$

$2w'+w=x$ Nehomogena LDE

1. KORAK:

$2w'+w=0$

$2\frac{dw}{dx}=-w \Rightarrow \frac{dw}{w}=-\frac{1}{2}dx \Rightarrow \log w=-\frac{1}{2}x+\log C$

$w=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot C$

2. KORAK:

$w(x)=c(x)e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow 2(c(x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x})'+c(x)e^{-\frac{1}{2}x}=x$

$2c'(x)e^{-\frac{1}{2}x}-\cancel{c(x)e^{-\frac{1}{2}x}}+\cancel{c(x)e^{-\frac{1}{2}x}}=x$

$c(x)=\frac{1}{2}\int xe^{+\frac{1}{2}x}dx = \; \to$ Per partes

$\ldots = xe^{\frac{1}{2}x}-2e^{\frac{1}{2}x}+k$

Sledi:

$w(x)=(xe^{\frac{1}{2}x}-2e^{\frac{1}{2}x}+k)e^{-\frac{1}{2}x}$

$w(x)=\underbrace{x-2}_{\text{Partikularna}}+\underbrace{ke^{-\frac{1}{2}x}}_{\text{Splošna rešitev}}$

$w(x)=y^{\frac{1}{2}}(x)$

$y(x)=(w(x))^2=(x-2+ke^{-\frac{1}{2}x})^2$

5. Eksaktna DE je DE oblike $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

pri čemer velja če $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

OPOMBA: Eksaktna DE je še vedno oblike $y' = f(x,y)$ saj je

$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$

torej $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$

Rešitev eksaktne DE dobimo v implicitni obliki $F(x,y) = C$, pri čemer je $F_x = M$, $F_y = N$, ker je $M_y = F_{xy}$ in $M_x = F_{yx}$ vedno tedaj da sta parcialna odvoda enaka

PP $v = v(x,y)$

$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow v = konst$

Kdaj je res $\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = M,\ \frac{\partial v}{\partial y} = N}$:

Če $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Potem velja: $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$ Pogoj za EKSAKTNO

PP1: $xy' + y + 4 = 0$

$x\frac{dy}{dx} + y + 4 = 0 \rightarrow x\,dy + (y+4)\,dx = 0$

Pogoj za eksakten diferencial $\boxed{(y+4)\,dx + x\,dy = 0} \Rightarrow \frac{\partial(y+4)}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial x}{\partial x} = 1$

$\frac{\partial v}{\partial x} = y + 4 \Rightarrow v = (y+4)x + \varphi(y) = yx + 4x + \varphi(y)$

$\frac{\partial v}{\partial y} = x \quad ; \quad x = \frac{\partial v}{\partial y} = x + \frac{d\varphi}{dy} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dy} = 0 \Rightarrow \varphi = C$

$\Rightarrow v = (y+4)x + C = C_1 \Rightarrow \boxed{(y+4)x = C_2}$

PP2 $x + ye^{2xy} + axe^{2xy}y' = 0 \rightarrow (x + ye^{2xy})\,dx + axe^{2xy}\,dy = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}(x + ye^{2xy}) = \frac{\partial}{\partial x}(axe^{2xy}) \Rightarrow e^{2xy} + ye^{2xy}2x = a(e^{2xy} + xe^{2xy}2y) \Rightarrow a = 1$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = x + y e^{2xy} \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} e^{2xy} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x e^{2xy} \quad \Big| \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x e^{2xy} = \frac{1}{2} e^{2xy} + \frac{d\varphi}{dy} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad , \quad \varphi = \text{konst}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} e^{2xy} = C_1}$$

DE V PARAMETRIČNI OBLIKI

PP $F(x, y') = 0$

$x = \varphi(y')$; y' = Parameter zapisat moramo še x kot funkcijo parametra

$x = \varphi(p) \rightarrow y' = p = \frac{dy}{dx}$ | $dx = \varphi'(p)\,dp$

$dy = p\,dx = p\varphi'(p)\,dp$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \varphi(p) \\ y &= F(p) + C \end{aligned}} \qquad \Rightarrow \boxed{y = \int p\varphi'(p)\,dp = F(p) + C}$$

PP1 $x = 2y' - 4y'^3$

$\rightarrow y' = p$ $\quad x = 2p - 4p^3 \Rightarrow dx = (2 - 12p^2)\,dp$

$dy = p\,dx = p(2 - 12p^2)\,dp$

$dy = (2p - 12p^3)\,dp$

$\Rightarrow y = p^2 - 3p^4 + C$

$\Rightarrow x = 2p - 4p^3$

PP2: $F(y, y') = 0$

$y' = f(y)$ – če bi tako uspel zapisat voli bi bilo fajn

Težko pa je tako: $y = \psi(y') \Rightarrow y = \psi(p)$ $\quad \left(p = y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{p}\right)$

$\Rightarrow dy = \psi'(p)\,dp$

$dx = \frac{\psi'(p)}{p}\,dp \Rightarrow x = \int \frac{\psi'(p)}{p}\,dp$

Večkrat nam lahko uspe tako: $F(y, y') = 0$

$y = \varphi(u)$

$y' = \psi(u)$

Potem lahko naredimo tako $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(u)\,du}{\psi(u)}$ $\quad x = \int \frac{\varphi'(u)}{\psi(u)}\,du$

Rešitev ki jo dobimo v <u>eksplicitni obliki</u> je zelo <u>težka zapisat</u> v <u>parametrični</u> obliki:

<u>PP</u> $y^2(y'-1)=(2-y')^2$

$$2-y'=vy \Rightarrow y^2(y'-1)=v^2y^2 \Rightarrow y'-1=v^2 \Rightarrow \underline{\underline{y'=1+v^2}}$$

$$2-(1+v^2)=vy \Rightarrow \underline{\underline{\frac{1-v^2}{v}=y}} \Rightarrow \underline{y=\frac{1}{v}-v} \quad \underline{\underline{x=\frac{1}{v}+c}}$$

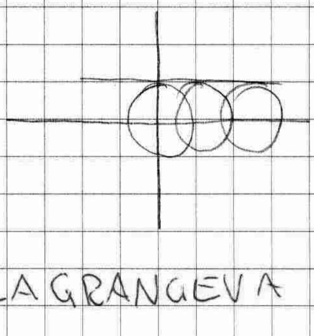
$$dx\ \frac{dy}{y'}=\frac{\left(-\frac{1}{v^2}-1\right)dv}{1+v^2}=-\frac{\frac{1+v^2}{v}}{1+v^2}\,dv=-\frac{dv}{v^2}\rightarrow x=\frac{1}{v}+c$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y=x-c-\frac{1}{x-c}}}$$

LAGRANGEVA IN CLEROYEVA ENAČBA

Singularne rešitve - nehaj posebnega.

Primer singularnih rešitev



$(x-c)^2+y^2=r^2$

LAGRANGEVA DE

Ima obliko: $\boxed{y=x\varphi(y')+\psi(y')}$; $y'=p$

$$y=x\varphi(p)+\psi(p). \qquad dy=dx\varphi(p)+x\varphi'(p)dp+\psi'(p)dp=pdx$$

$$dx(\varphi(p)-p)+(x\varphi'(p)+\psi'(p))dp=0$$

$$(\varphi(p)-p)\frac{dx}{dp}+x\varphi'(p)=-\psi'(p)$$

$x=x(p,c)$ $\boxed{y=x(p,c)\varphi(p)+\psi(p)}$

Lahko pa se nam zgodi naslednje:

$\varphi(p)-p=0$ p_1, p_2, p_3 $y=x\cdot p_i+\psi(p_i)$

$p_2=y_2'$ $y'(x)=p_2$

$y(x)=p_ix+C(p_2)$

PP: $2y - xy' - \frac{3}{y'} = 0$

$2y - xp - \frac{3}{p} = 0 \to 2dy - pdx - xdp + \frac{3}{p^2}dp = 0 \to 2pdx - pdx - xdp + \frac{3}{p^2}dp = 0$

$\Rightarrow pdx - xdp + \frac{3}{p^2}dp = 0 \Rightarrow \underline{\underline{p\frac{dx}{dp} - x = -\frac{3}{p^2}}}$

Homogena: $p\frac{dx}{dp} = x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln x = \ln p + \ln c$

$p[c'(p)p + c(p)] - c(p)p = -\frac{3}{p^2}$

$c'(p)p^2 = -\frac{3}{p^2}$

$c'(p) = -\frac{3}{p^4} \Rightarrow c(p) = -3\frac{1}{p^3(-3)} + c_1 = \frac{1}{p^3} + c_1 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{p^2} + c_1 p}}$

$x = \frac{1}{p^2} + cp$

$2y = p(\frac{1}{p^2} + cp) + \frac{3}{p} \Rightarrow 2y = \frac{4}{p} + cp^2 \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{2}{p} + \frac{c}{2}p^2}}$

CLAIRAUTOVA D.E (POSEBEN PRIMER LAGRANGEOVE D.E)

$\boxed{y = xy' + \psi(y')}$ $\quad y' = p \quad y'dx = dx\,y' + x\,dy' + \psi'(y')dy'$

$\Rightarrow \boxed{(x + \psi'(y'))dy' = 0}$

1.) $dy' = 0 \Rightarrow y' = konst.$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = xc + \psi(c)}}$ splošna rešitev (enačba družine premic)

2.) $x + \psi'(y') = 0 \Rightarrow x = -\psi'(y')$, $y' = p$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -\psi'(p)\cdot p + \psi(p)}} \quad \underline{\underline{x = -\psi'(p)}}$

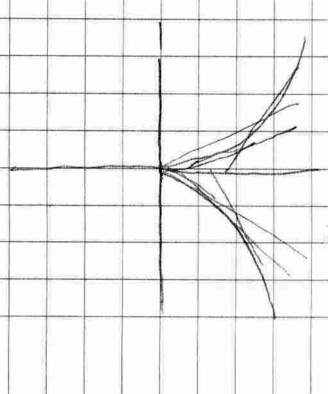
Ogrinjača se vseh drugih krivulj tangencialno dotakne $\quad y = y(x,c)$, $\frac{\partial y(x,c)}{\partial c} = 0$

PP: $y = xy' - \frac{4}{27}(y')^3$

Splošna rešitev: $y = xc - \frac{4}{27}c^3$ $\rightarrow y = x\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{27}\frac{27}{8}x\sqrt{x} = \underline{x\sqrt{x}}$

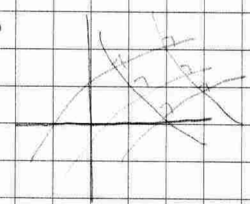
$0 = x - \frac{4}{27}3c^2$

$x = \frac{4}{9}c^2 \Rightarrow c = \frac{3}{2}\sqrt{x}$



IZOGONALNE IN ORTOGONALNE TRAJEKTORIJE

$F(x,y,c)=0$



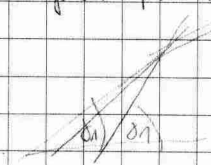
Izogonalne sekajo pod kotom 45°

Ortogonalne sekajo pod kotom 90°

DOLOČANJE ORTOGONALNIH

Družini krivulj pripada enoparametrična DE $y'=f(x,y)$

Ortogonalni premici po predpostavki k_1, $k_2=-\frac{1}{k_1}$



$$\boxed{y' = \frac{1}{f(x,y)}}$$

PP $x^2+y^2-2ay=0$

1. Eliminacija parametra: $\frac{x^2+y^2}{2y}=a$
2. Odvod nič: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+y^2}{2y}\right)=0$ $\quad \frac{(2x+2yy')y-(x^2+y^2)y'}{y^2}=0$

$2xy+2y^2y'-(x^2+y^2)y'=0$

$y'=-\frac{2xy}{y^2-x^2} \rightarrow -\frac{1}{y'}=-\frac{2xy}{y^2-x^2}$

3. Rešitev homogene DE

$y'=\frac{y^2-x^2}{2xy} \rightarrow \frac{y}{x}=v \Rightarrow y=vx$

$v'x+v=\frac{v^2x^2-x^2}{2x\cdot vx}=\frac{v^2-1}{2v}$ $\quad v'x=\frac{v^2-1}{2v}-v=\frac{v^2-1-2v^2}{2v}=-\frac{v^2+1}{2v}$

$\frac{dv}{dx}x=-\frac{v^2+1}{2v} \rightarrow \frac{2v\,dv}{v^2+1}=-\frac{dx}{x} \rightarrow \ln(v^2+1)=\ln x+\ln c \rightarrow v^2+1=\frac{c}{x}$

$\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=\frac{c}{x} \rightarrow x^2+y^2=cx \rightarrow \underline{y^2+\left(x-\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}}$

$y^2+(x^2-cx)=0$

$y^2+\left(x-\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}$