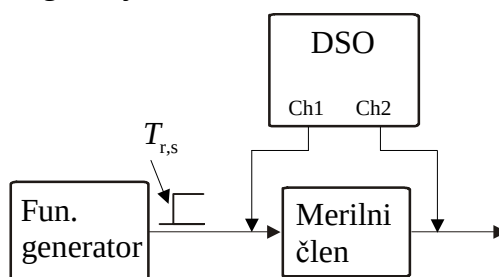


Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko znaša dvižni čas merilnega člena T_r , če smo ga merili z dvokanalnim DS osciloskopom z $B = 100\text{ MHz}$ in $f_s = 10\text{ MHz}$. Na prvem kanalu smo merili dvižni čas vhodnega signala v merilni člen in dobili $T_{r,1} = 7,0\text{ ns}$, na drugem pa dvižni čas izhodnega signala merilnega člena in dobili $T_{r,2} = 35,0\text{ ns}$. Pri meritvi na drugem kanalu smo uporabili filter za izločanje visokofrekvenčnih motenj $B_{\text{HF}} = 20\text{ MHz}$. Skicirajte merilno vezje in ugotovite uporabljeni način proženja!

Rešitev:

- Skica merilnega vezja:



- Ker sta izmerjena časa krajša kot vzorčni čas DSO $T_s = 1/f_s = 100\text{ ns}$, ju je bilo možno zmeriti le s ponavljajočim proženjem na DSO.
- Skupni dvižni čas na posameznem kanalu dobimo z geometrijskim (efektivnim) seštevanjem dvižnih časov zaporedno vezanih členov (predpostavljamo, da nimajo medsebojnega vpliva):

$$T_{r,1}^2 = T_{r,s}^2 + T_{r,\text{DSO1}}^2 \quad T_{r,s} - \text{dvižni čas signala generatorja}$$

$$T_{r,2}^2 = T_{r,s}^2 + T_{r,\text{MČ}}^2 + T_{r,\text{DSO2}}^2$$

- Iz razlike časov lahko izločimo dvižni čas samega merilnega člena:

$$T_{r,2}^2 - T_{r,1}^2 = T_{r,\text{MČ}}^2 + T_{r,\text{DSO2}}^2 - T_{r,\text{DSO1}}^2 \Rightarrow T_{r,\text{MČ}} = \sqrt{T_{r,2}^2 - T_{r,1}^2 - T_{r,\text{DSO2}}^2 + T_{r,\text{DSO1}}^2}$$

- Za člen prvega reda, s katerim aproksimiramo dinamično obnašanje analognega dela vhoda DSO, velja naslednja povezava med dvižnim časom in mejno frekvenco $T_r = 0,35/f_m$. Pasovna širina merilnega člena je določena z razliko zgornje in spodnje mejne frekvence: $B = f_{m,\text{zg}} - f_{m,\text{sp}}$. Ker je $f_{m,\text{sp}} \approx 0$, je dvižni čas enak $T_r = 0,35/f_m = 0,35/B$. Na drugem kanalu nam filter za izločanje visokofrekvenčnih motenj omeji zgornjo frekvenčno mejo na $B_{\text{HF}} = f_{m,\text{DSO2}} = 20\text{ MHz}$.

- Rezultati:

$$T_{r,\text{DSO1}} = \frac{0,35}{B} = \frac{0,35}{100\text{ MHz}} = 3,5\text{ ns}, \quad T_{r,\text{DSO2}} = \frac{0,35}{B_{\text{HF}}} = \frac{0,35}{20\text{ MHz}} = 17,5\text{ ns}$$

$$T_{r,\text{MČ}} = \sqrt{T_{r,2}^2 - T_{r,1}^2 - T_{r,\text{DSO2}}^2 + T_{r,\text{DSO1}}^2} = 29,7\text{ ns}$$

2. Napetost na uporu U smo izmerili $n_1 = 15$ -krat in dobili $\bar{U} = 111,51 \text{ V}$ in $s(U) = 0,80 \text{ V}$, upornost R pa $n_2 = 10$ -krat in dobili $\bar{R} = 12,653 \text{ k}\Omega$ in $s(R) = 0,075 \text{ k}\Omega$. Izračunajte celotno standardno negotovost in razširjeno negotovost moči na uporu, če je stopnja zaupanja $p = 99\%$!

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/v_i}$$

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(v)$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Moč na uporu: $P = \frac{U^2}{R} = \frac{(111,51 \text{ V})^2}{12,653 \text{ k}\Omega} = 982,72979 \text{ mW}$
- Celotna standardna negotovost: $u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)}$
 - deleži neposredno merjenih veličin v celotni standardni negotovosti:

$$u_1(P) = |c_1| u(U) = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| u(U) = \frac{2U}{R} \frac{s(U)}{\sqrt{n_1}} = \frac{2 \cdot 111,51 \text{ V}}{12,653 \text{ k}\Omega} \frac{0,80 \text{ V}}{\sqrt{15}} = 3,64 \text{ mW},$$

$$u_2(P) = |c_2| u(R) = \left| \frac{\partial P}{\partial R} \right| u(R) = \frac{U^2}{R^2} \frac{s(R)}{\sqrt{n_2}} = \frac{(111,51 \text{ V})^2}{(12,653 \text{ k}\Omega)^2} \frac{0,075 \text{ k}\Omega}{\sqrt{10}} = 1,84 \text{ mW}.$$

$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)} = \sqrt{(3,64 \text{ mW})^2 + (1,84 \text{ mW})^2} = 4,078 \text{ mW}.$$

$$\rightarrow u_c(P) = 4,1 \text{ mW}$$

- Pri določanju razširjene negotovosti uporabimo zaradi manjšega števila meritev Studentovo porazdelitev. Za določitev faktorja razširitve je potrebno poznati efektivno število prostostnih stopenj posredno merjene veličine:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/v_i} = \frac{(4,078 \text{ mW})^4}{(3,64 \text{ mW})^4/14 + (1,84 \text{ mW})^4/9} = 20,02$$

$v_i = n_i - 1$ - število prostostnih stopenj neposredno merjene veličine

- Po zaokrožitvi navzdol je $v_{\text{eff}} = 20$. Za stopnjo zaupanja $p = 99\%$ odčitamo iz tabele faktor razširitve $t_p(v) = t_{99}(20) = 2,85$.
- Razširjena negotovost za moč na uporu:

$$U_{99} = k_{99} u_c(P) = t_{99}(20) u_c(P) = 2,85 \cdot 4,078 \text{ mW} = 11,62 \text{ mW}$$

$$\rightarrow U_{99} = 12 \text{ mW}$$

3. Koliko se lahko največ razlikujeta odčitka dveh nazivno enakih voltmetrov ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D + 1\text{dig} + 0,5\text{mV})$), $U_D = 2\text{V}$, ločljivost: $\Delta U_q = 0,1\text{mV}$) zaradi lastnega pogreška pri merjenju iste napetosti, da bosta še vedno ustrezala specifikaciji. Razliko odčitkov ΔU ugotovite za celotno merilno območje $0 \div U_D$ in skicirajte! Kako se razmere spremenijo, če je vhodnemu signalu dodan šumni signal $U = 0,2\text{mV}$ s temenskim faktorjem $C = 3$, frekvenci zajemanja napetosti z voltmetroma pa nista sinhroni?

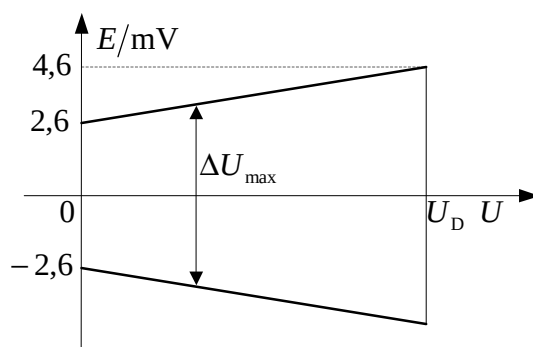
Rešitev:

- V najbolj neugodnem primeru lahko en voltmeter kaže za mejno vrednost lastnega pogreška več, kot je prava vrednost merjenega signala, in drugi za mejno vrednost lastnega pogreška manj in še vedno ustrezata specifikaciji. Skupna razlika je dvojna mejna vrednost lastnega pogreška:

$$\Delta U = 2 \cdot M = 2 \cdot (10^{-3}U + 10^{-3}U_D + 0,1\text{mV} + 0,5\text{mV}) = 2 \cdot (10^{-3}U + 2,6\text{mV})$$

$$\Delta U_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}U + 5,2\text{mV} \Big|_{U=(0+2)\text{V}} = [5,2\text{mV} \div 9,2\text{mV}]$$

- Skica:

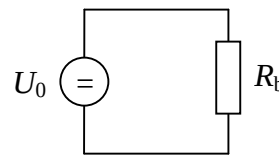


- Če je vhodnemu signalu dodan šum, ki ni lasten voltmetroma (ne sodi v lastni pogrešek instrumenta), se lahko odčitka povečata (oz. zmanjšata) v najbolj neugodnem primeru za temensko vrednost šuma:

$$\hat{u}_n = C_n \cdot U_n = 3 \cdot 0,2\text{mV} = 0,6\text{mV}$$

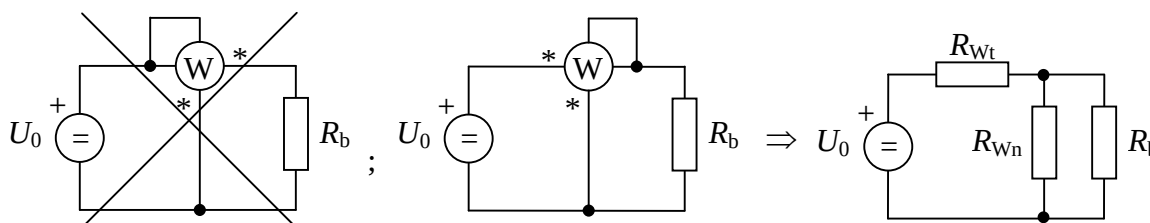
$$\Delta U_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}U + 5,2\text{mV} + 2 \cdot 0,6\text{mV} \Big|_{U=(0+2)\text{V}} = [6,4\text{mV} \div 10,4\text{mV}]$$

4. Koliko je bila moč P_b na bremenu $R_b = 1000\Omega$, vezanem po sliki, pred priključitvijo vatmetra, ki nam pokaže $P_i = -66,4\text{ mW}$? Vatmeter je umerjen in ima lastni pogrešek $-0,3\text{ mW}$. Tokovna in napetostna veja vatmetra imata upornosti $R_{W,t} = 10\Omega$ oz. $R_{W,n} = 10\text{ M}\Omega$ ter skupno izhodno tokovno in izhodno napetostno sponko. Skicirajte merilno vezje s priključenim vatmetrom (označite vhodne sponke) ter določite P_b ! Vezje je napajano z idealnim napetostnim virom.



Rešitev:

- Merilno vezje
 - Ker ima vatmeter skupno izhodno tokovno in izhodno napetostno sponko in kaže negativno vrednost $P_i = -66,4\text{ mW} < 0$, je bila izmed dveh možnih priključitev uporabljena spodnja vezava (napetostna veja vatmetra je bila priključena neposredno na breme) z ustrezno nadomestno vezavo:



- Popravljeno vrednost moči dobimo z upoštevanjem lastnega pogreška vatmetra:

$$P_w = |P_i - E_w| = |-66,4\text{ mW} - (-0,3\text{ mW})| = 66,1\text{ mW}$$

- Ker imamo enosmerne razmere in je $R_0 = 0\Omega$ (idealni napetostni vir), lahko enostavno poiščemo povezavo med vrednostjo napajalne napetosti in močjo, ki jo kaže vatmeter:

$$P_w = I_w \cdot U_w, \quad I_w = \frac{U_0}{R_{W,t} + R_{W,n} \parallel R_b}, \quad U_w = I_w \cdot R_{W,n} \parallel R_b = \frac{U_0 \cdot R_{W,n} \parallel R_b}{R_{W,t} + R_{W,n} \parallel R_b}$$

$$P_w = \frac{U_0^2 \cdot R_{W,n} \parallel R_b}{(R_{W,t} + R_{W,n} \parallel R_b)^2} = U_0^2 \cdot \frac{10\text{ M}\Omega \parallel 1\text{ k}\Omega}{(10\Omega + 10\text{ M}\Omega \parallel 1\text{ k}\Omega)^2} = U_0^2 \cdot 9,80 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$$

$$\text{Napajalna napetost je: } U_0 = \sqrt{\frac{66,1\text{ mW}}{9,8 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}}} = 8,213\text{ V}$$

- Pred priključitvijo vatmetra je bila moč na bremenu:

$$P_b = \frac{U_0^2}{R_b} = 67,45\text{ mW} \rightarrow P_b = 67,5\text{ mW}$$

5. Kolikšna je standardna negotovost delovne moči $w_c(P)$ pri polindirektnem merjenju, če ima porabnik fazni kot $\varphi = 30^\circ$ in smo uporabili tokovni merilni transformator ($m_K = \pm 0,1\%$, $\delta_{\max} = \pm 5'$) in vatmeter ($M_P = \pm (0,1\% P + 0,1\% P_D)$, $P = 2/3 P_D$, $P_D = 1400 \text{ W}$) pri nazivnih vrednostih in referenčnih pogojih? Za izračun negotovosti upoštevajte, da so dejanske vrednosti pogreškov majhne in izhodiščno enačbo:

$$P_i = P(1 + e_u)(1 + e_i)(1 + e_w)[1 - (\delta_u - \delta_i)\text{tg}\varphi]$$

Rešitev:

- Ker imamo polindirektno merjenje moči, se izhodiščna enačba reducira (nimamo napetostnega merilnega transformatorja):

$$P_i = P(1 + e_i)(1 + e_w)[1 + \delta_i \text{tg}\varphi]$$

- Posamezni prispevki k celotni negotovosti so:

$$u_1(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_i} \right| u(e_i) \approx P \cdot u(e_i)$$

$$u_2(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_w} \right| u(e_w) \approx P \cdot u(e_w)$$

$$u_3(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} \right| u(\delta_i) \approx P \cdot \text{tg}\varphi u(\delta_i)$$

- Celotna standardna negotovost je zato:

$$u_c(P) = P \sqrt{u^2(e_i) + u^2(e_w) + \text{tg}^2\varphi u^2(\delta_i)}$$

- Ker poznamo mejne vrednosti pogreškov, uporabimo enakomerno porazdelitev in od tod dobimo standardne negotovosti posameznih prispevkov $u = m/\sqrt{3}$:

$$u(e_i) = \frac{m_{K,i}}{\sqrt{3}} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{3}} = 5,77 \cdot 10^{-4}$$

$$u(e_w) = \frac{m_P}{\sqrt{3}} = \frac{M_P}{\sqrt{3} P} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{P_D}{P} \right) = 1,44 \cdot 10^{-3}$$

$$u(\delta_i) = \frac{\delta_{i,\max}}{\sqrt{3}} = \frac{5/60 \pi / 180}{\sqrt{3}} = 8,397 \cdot 10^{-4}$$

- Relativna standardna negotovost delovne moči je:

$$w_c(P) = \frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{u^2(e_i) + u^2(e_w) + \text{tg}^2\varphi u^2(\delta_i)} = 1,628 \cdot 10^{-3} \rightarrow w_c(P) = 1,7 \cdot 10^{-3}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko je informacijska kapaciteta digitalnega voltmetra, ki ima merilni doseg $U_D = 3\text{ V}$, mejo pogreška $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$ in čas meritve $T_M = 30\text{ ms}$? Voltmeter ima maksimalno vrednost lastnega šuma $\hat{u}_{\text{sum}} = 1\text{ mV}$.

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar imamo pogrešek v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj na merilnem območju $x_D = x_{\max} - x_{\min} (= 0) = x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)} \Rightarrow m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln\left(1 + \frac{ax_D}{b}\right)$$

- Spreminjajoči del je odvisen od merjene veličine: $ax = 0,1\%U$
 - Fiksni del pa sestavljata dva dela:
 - del lastnega pogreška voltmetra: $0,1\%U_D = 3\text{ mV}$
 - lastni šum voltmetra: $\hat{u}_{\text{sum}} = 1\text{ mV}$
- Če vzamemo za enoto informacije bit, ustreza številu amplitudnih stopenj m naslednja množina informacije kot dvojiški logaritem m :

$$S = \text{lb}(m) = \log_2(m)$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas T_M , je kapaciteta ali maksimalni informacijski pretok enak:

$$C = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m) = \frac{S}{T_M}$$

- Za dani voltmeter zapišemo pogrešek lasten instrumentu v obliki:

$$M_U = (0,1\%U + 0,1\%U_D + U_{\text{sum}}) = 10^{-3}U + 3\text{ mV} + 1\text{ mV} = 10^{-3}U + 4\text{ mV}$$

- In maksimalno število neodvisnih amplitudnih stopenj na območju $U_D = 3\text{ V}$:

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln\left(1 + \frac{10^{-3} \cdot 3\text{ V}}{4\text{ mV}}\right) = 280,8$$

- Največja množina informacije in maksimalni informacijski pretok sta:

$$S = \text{lb}(m_{\max}) = 8,13\text{ bit} \Rightarrow C = \frac{S}{T_M} = 271,1\text{ bit/s}$$

2. Baterijskemu polnilniku merite izhodno napetost v neobremenjenem stanju. Če uporabite digitalni multimeter izmerite 1,8981 V pri 10 MΩ notranje upornosti in 1,8999 V pri notranji upornosti 10 GΩ. Z nekim drugim inštrumentom z notranjo upornostjo 20 kΩ izmerite 1,2666 V in pri 30 kΩ 1,4250 V.

Koliko sta napetost praznega teka in notranja upornost polnilnika in s katerim inštrumentom ugotovimo to bolj pravilno?

Rešitev:

- Napetost praznega teka in notranjo upornost polnilnika baterij izračunamo s pomočjo podatkov meritev napetosti pri dveh različnih notranjih upornostih merilnega inštrumenta - voltmetra, ki se doseže s spremembo merilnega območja ali z dodajanjem vzporedno dodatnega upora.
- Rezultat prvega inštrumenta (A)

$$R_{V1A} = 10 \text{ M}\Omega, \quad U_{V1A} = 1,8981 \text{ V}$$

$$R_{V2A} = 10 \text{ G}\Omega, \quad U_{V2A} = 1,8999 \text{ V}$$

$$U_{V1A} = U_{AB} \frac{R_{V1A}}{R_{V1A} + R_{AB}}, \quad U_{V2A} = U_{AB} \frac{R_{V2A}}{R_{V2A} + R_{AB}}$$

- Po vmesnem računu dobimo:

$$U_A = U_{V1A} U_{V2A} \frac{R_{V2A} - R_{V1A}}{R_{V2A} U_{V1A} - R_{V1A} U_{V2A}} = 1,8999 \text{ V}$$

$$R_A = R_{V1A} \left(\frac{U_{V2A}}{U_{V1A}} - 1 \right) = 9,483 \text{ k}\Omega$$

- Rezultat drugega inštrumenta (B)

$$R_{V1B} = 20 \text{ k}\Omega, \quad U_{V1B} = 1,2666 \text{ V}$$

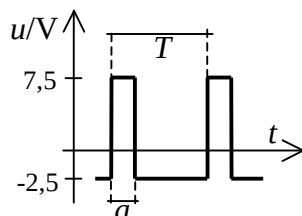
$$R_{V2B} = 30 \text{ k}\Omega, \quad U_{V2B} = 1,4250 \text{ V}$$

$$U_B = U_{V1B} U_{V2B} \frac{R_{V2B} - R_{V1B}}{R_{V2B} U_{V1B} - R_{V1B} U_{V2B}} = 1,9003 \text{ V}$$

$$R_B = R_{V1B} \left(\frac{U_{V2B}}{U_{V1B}} - 1 \right) = 2,501 \text{ k}\Omega$$

- Napetost praznega teka in notranjo upornost polnilnika izmerjena s prvim voltmetrom je bolj pravilna, ker merimo napetosti z večjo upornostjo voltmetra kot v drugem primeru in imamo manjši sistematični pogrešek!

3. Ceneni digitalni voltmeter želimo uporabiti za merjenje delovnega cikla D (ang. duty cycle) signala na sliki. Voltmeter meri izmenično napetost preko usmerjene srednje vrednosti tako, da je efektivna vrednost pravilno izmerjena le za sinusno obliko. Koliko znaša delovni cikel D , če voltmeter kaže efektivno vrednost 4,16 V?



$$D = \frac{a}{T} \cdot 100 \%$$

Rešitev:

- Voltmeter neposredno meri usmerjeno srednjo vrednost napetosti ter jo pomnoži z znanim faktorjem 1,11 tako, da v primeru sinusne napetosti pravilno pokaže efektivno vrednost.
- Voltmeter kaže 4,16 V, kar je v primeru signala na sliki napačna efektivna vrednost. Hkrati pa to pomeni, da znaša dejanska usmerjena srednja vrednost signala:

$$\overline{|u|} = \frac{U}{1,11} = \frac{4,16 \text{ V}}{1,11} = 3,75 \text{ V}$$

- Iz slike signala lahko določimo usmerjeno vrednost v odvisnosti od delovnega cikla, ki znaša:

$$\begin{aligned} \overline{|u|} &= \frac{1}{T} \left(\int_0^a |u| dt + \int_a^T |u| dt \right) = \frac{1}{T} (a \cdot 7,5 \text{ V} + (T - a) \cdot 2,5 \text{ V}) = \\ &= \frac{D}{100 \%} \cdot 7,5 \text{ V} + 2,5 \text{ V} - \frac{D}{100 \%} \cdot 2,5 \text{ V} = 3,75 \text{ V} \end{aligned}$$

- in izračunamo:

$$D = \frac{3,75 \text{ V} - 2,5 \text{ V}}{7,5 \text{ V} - 2,5 \text{ V}} \cdot 100 \% = 25 \%$$

4. Uporovnemu temperaturnemu senzorju smo izmerili karakteristiko. Podatki so v tabeli. Kolikšna je občutljivost senzorja, kolikšen je relativni pogrešek linearnosti in koliko je nelinearnost?

$t/^{\circ}\text{C}$	R_t/Ω
-60	4704
-40	5598
-20	6858
0	8313
20	10008
40	12299
60	14917
80	18124
100	21977
120	26885

Rešitev:

- Relativni pogrešek linearnosti se izračuna po enačbi

$$e_1 = \frac{R_t - R_n}{R_{t,\max} - R_{t,\min}}$$

- Iz nastavka

$$\frac{R_n - R_{t,\min}}{t - t_{\min}} = \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}}$$

- izračunamo nazivno karakteristiko R_n .

$$R_n = R_{t,\min} + \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}}(t - t_{\min}) = R_{t,\min} + S(t - t_{\min})$$

- Dopolnjena tabela:

$t/^{\circ}\text{C}$	R_t/Ω	R_n/Ω	$e_1/\%$
-60	4704	4704	0,0
-40	5598	7169	7,1
-20	6858	9633	12,5
0	8313	12098	17,1
20	10008	14562	20,5
40	12299	17027	21,3
60	14917	19491	20,6
80	18124	21956	17,3
100	21977	24420	11,0
120	26885	26885	0,0

- Nelinearnost določimo po enačbi

$$n = |e_1|_{\max} = \frac{|R_t - R_n|_{\max}}{R_{t,\max} - R_{t,\min}} = 21,3 \%$$

- občutljivost pa po enačbi

$$S = \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}} = 123,23 \Omega/^{\circ}\text{C}$$

5. Na bencinskih črpalkah merijo prostornino goriva v rezervoarjih na podlagi tehtanja in poznavanja gostote goriva. Ko dobavitelj goriva s cisterno pripelje gorivo na bencinsko črpalko, delavci na črpalki s pomočjo enačbe za gostoto goriva ρ določijo prostornino dobavljenega goriva V . Tehnica, ki je vgrajena v rezervoarjih, ima standardno negotovost tehtanja $u(m) = 50 \text{ kg}$. Termometer, s katerim delavci pomerijo temperaturo goriva, ima merilno negotovost $u(t) = 0,50^\circ\text{C}$.

Izračunajte, kakšna je dejanska prostornina goriva, ki ga črpalka dobi - kakšna je negotovost $u(V)$, če črpalka naroči $V = 30\,000$ litrov goriva pri temperaturi $t = 30^\circ\text{C}$?

$$\rho = 717,831 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot t$$

Rešitev:

- Volumen $V = m/\rho$ izrazimo z maso in gostoto goriva:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{m}{717,831 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot t}$$

- Izračunamo gostoto in maso goriva pri $t = 30^\circ\text{C}$

$$\rho = 717,831 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 30^\circ\text{C} = 742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$m = \rho V = 742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 30 \text{ m}^3 = 22\,264,56 \text{ kg}$$

- Standardno negotovost posredno merjenja prostornine zapišemo:

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial m} \cdot u(m)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot u(\rho)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \cdot u(m)\right)^2 + \left(-\frac{m}{\rho^2} \cdot u(\rho)\right)^2}$$

$$u(\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u(t) \rightarrow u(\rho) = 0,8107 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \cdot u(t) = 0,40535 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{1}{742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \cdot 50 \text{ kg}\right)^2 + \left(-\frac{22\,264,56 \text{ kg}}{\left(742,152 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2} \cdot 0,40535 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2}$$

$$u(V) = 0,069335572 \text{ m}^3 \equiv 70 \text{ litrov}$$

- Zapišemo rezultat:

$$V = 30\,000 \text{ l}, \quad u(V) = 70 \text{ l}, \quad n = 1$$

- Lahko zaključimo, da pri temperaturi 30°C obstoji približno 68,3% verjetnost, da bencinska črpalka, ki za merjenje prostornine dobavljenega goriva uporablja termometer z merilno negotovostjo $0,50^\circ\text{C}$ in tehtnico z negotovostjo 50 kg , od dobavitelja dobi 70 litrov preveč ali pa 70 litrov premalo goriva.

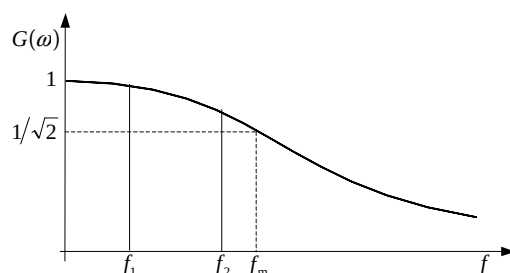
Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko je mejna frekvenca člena 1. reda, če smo z DSO izmerili pri vzbujujanju s sinusnim signalom frekvence $f_1 = 200 \text{ Hz}$ na izhodu člena temensko vrednost $U_1 = 4,95 \text{ V}$ in pri vzbujujanju s frekvenco $f_2 = 1000 \text{ Hz}$ napetost $U_2 = 4,63 \text{ V}$. Preostala napetost osciloskopa je bila $U_- = 20 \text{ mV}$. Merilni člen je bil vzbujaan s sinusnim signalom konstantne amplitude in zanemarljive enosmerne komponente!

Rešitev:

- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujujanju lahko zapišemo z uporabo mejne frekvence, kjer upoštevamo povezavo $2\pi f_m \tau = 1$:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$



- Samo izmenčni del karakteristike brez enosmerne komponente ($U_- = 0 \text{ V}$) nam pri dveh različnih frekvencah da dve izhodni napetosti pri konstantni vrednosti vhodne napetosti U_0 :

$$U_1 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}}, \quad U_2 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}}$$

- Za izločitev amplitude vzbujaalne napetosti poiščemo razmerje napetosti: $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}}$;

- Od tod dobimo mejno frekvenco iz izraza:

$$A = \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 = \frac{1 + (f_1/f_m)^2}{1 + (f_2/f_m)^2} \rightarrow f_m = \sqrt{\frac{A f_2^2 - f_1^2}{1 - A}} = 2583,2 \text{ Hz}$$

- Preostala napetost osciloskopa poveča napetosti za enosmerno komponento:

$$U_1 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} + U_-, \quad U_2 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}} + U_-$$

- Mejna frekvenca se izračuna iz popravljenega izraza za A_- :

$$A_- = \left(\frac{U_2 - U_-}{U_1 - U_-} \right)^2 = 0,874396 \rightarrow f_{m-} = \sqrt{\frac{A_- f_2^2 - f_1^2}{1 - A_-}} = 2577,4 \text{ Hz}$$

2. Katere vrednosti lahko pričakujemo na prikazovalniku voltmetra z $U_D = 100,0 \text{ V}$; $R_{V_0} = 200 \Omega/\text{V}$; $r = 0,2$, ko merimo napetost sinusnega vira? Netočnosti impedanc in frekvence zanemarite. Skicirajte vezje in fazorski diagram!

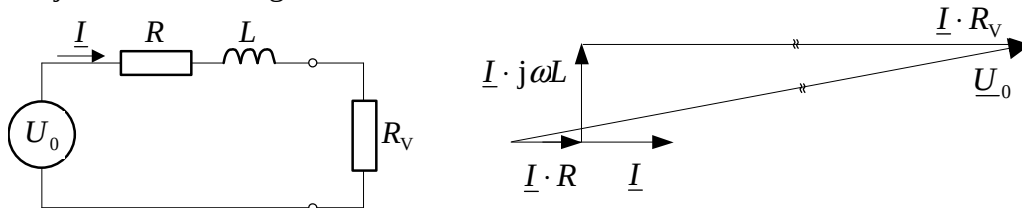
Vir: - napetost praznega teka: $U_0 = 100,0 \text{ V}$

- notranja impedanca: $R = 400 \Omega$ $L = 0,5 \text{ H}$;

- frekvenca: $f = 200 \text{ Hz}$

Rešitev:

- Vezje in fazorski diagram:



- Upornost voltmetra izračunamo iz karakteristične upornosti R_{V_0} in uporabljenega dosega voltmetra:

$$R_V = R_{V_0} \cdot U_D = 200 \Omega/\text{V} \cdot 100 \text{ V} = 20 \text{ k}\Omega$$

- Notranja impedanca vira je kompleksna z efektivno vrednostjo: $Z_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$
- Po priključitvi nam voltmeter kaže manj, kot je napetost praznega teka U_0 .

$$\text{Imamo napetostni delilnik: } \underline{U}_V = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + \underline{Z}_0} = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + R + j\omega L}$$

- ki ga v efektivni obliki izrazimo z:

$$U_V = U_0 \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}} = 100 \text{ V} \frac{20 \text{ k}\Omega}{\sqrt{(20 \text{ k}\Omega + 400 \Omega)^2 + (2\pi \cdot 200 \text{ Hz} \cdot 0,5 \text{ H})^2}} = 97,9927 \text{ V}$$

- Ker je mejna vrednost lastnega pogreška voltmetra $M_U = \frac{r}{100} U_D = 0,2 \text{ V}$, lahko na prikazovalniku pričakujemo za to vrednost povečano oz. zmanjšano vrednost:

- Največja prikazana vrednost je :

$$U_{V,\max} = U_V + M_U = 97,9927 \text{ V} + 0,2 \text{ V} = 98,1927 \text{ V} \rightarrow U_{V,\max} = 98,2 \text{ V}$$

- Najmanjša prikazana vrednost je :

$$U_{V,\min} = U_V - M_U = 97,9927 \text{ V} - 0,2 \text{ V} = 97,7927 \text{ V} \rightarrow U_{V,\min} = 97,8 \text{ V}$$

3. S $5\frac{1}{2}$ -mestnim ohmmetrom $M_R = \pm(0,01\% R + 0,01\% R_D)$ smo merili stalno upornost pod enakimi pogoji ($n=10$). Koliko je standardna negotovost merilnega rezultata? Ocenite, kako se spremeni, če pri istih vrednostih uporabimo le $4\frac{1}{2}$ -mestni prikaz in upoštevamo dodatno negotovost zaradi zaokrožitve?

R/Ω : 99,123; 99,135; 99,146; 99,079; 99,104; 99,115; 99,098; 99,087; 99,112; 99,061

Rešitev:

- Standardna negotovost merilnega rezultata sestavljata dva prispevka: negotovost tipa A zaradi ponavljanja meritev in negotovost tipa B kot prispevek merilne metode in instrumentacije. V primeru negotovosti tipa B je prevladujoč lastni pogrešek ohmmetra.
- Negotovost tipa A dobimo z določitvijo srednje vrednosti, standardnega odklona meritev in standardne negotovosti:

$$\bar{R} = 99,106\Omega$$

$$s(R) = \sqrt{\frac{\sum_i (R_i - \bar{R})^2}{n-1}} = 0,025884\Omega$$

$$u_A = \frac{s(R)}{\sqrt{n}} = 0,008185\Omega$$

- Negotovost tipa B dobimo iz mejne vrednosti pogreška, kjer predpostavljamo pravokotno porazdelitev pogreška:

$$u_B = \frac{1}{\sqrt{3}} M_R = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-4} \cdot 99,106\Omega + 10^{-4} \cdot 200\Omega) = 0,01727\Omega$$

- $5\frac{1}{2}$ -mestni prikaz nam da $R_D = 200\Omega$ (maksimalni prikaz: 199,999).

- Skupna standardna negotovost je:

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0,01911\Omega \rightarrow u_c = 0,020\Omega$$

- $4\frac{1}{2}$ -mestni prikaz nam doda negotovost zaradi zaokrožitve na mestu 0,01 Ω :

$$u_z = \frac{0,01\Omega}{2\sqrt{3}} = 0,002887\Omega$$

- Skupna negotovost se nekoliko poveča, vendar se zaradi zaokrožitve na dve mesti to ne pozna :

$$u_{c_z} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2 + u_z^2} = 0,01933\Omega \rightarrow u_c = 0,020\Omega$$

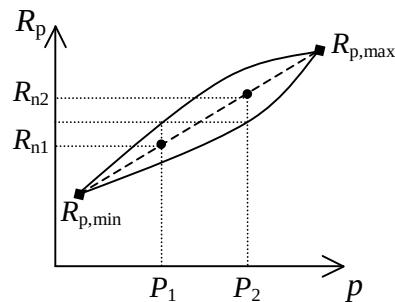
4. Z uporovnim senzorjem tlaka želimo meriti tlak v cevi. Izmerjena upornost senzorja znaša $R_p = 125 \Omega$. Določite interval možnih vrednosti tlaka v cevi za dano meritev, če je nelinearnost senzorja $n = 0,2\%$?

- Senzor tlaka: pri najnižjem tlaku 100 kPa ima senzor upornost $R_{p,\min} = 120 \Omega$, pri najvišjem tlaku 10 MPa pa $R_{p,\max} = 132 \Omega$.

Rešitev:

- Nelinearnost zapišemo kot $n = \frac{|R_p - R_n|}{R_{p,\max} - R_{p,\min}}$
- Poznamo izmerjeno vrednost R_p na dejanski karakteristiki, vendar iz nje ne moremo izračunati tlaka p , ker ne poznamo enačbe karakteristike.
- Tlak lahko izračunamo iz nazivne (linearne) karakteristike $R_n(p)$, ki pa se od dejanske razlikuje za pogrešek linearnosti E_l oz. e_l v relativni obliki. Ker ga ne poznamo, lahko določimo le njegove meje. Zato velja:

$$|e_l| \leq n \quad \text{oz.} \quad -n \leq e_l \leq n$$
- Zato tudi vrednost R_n zavzame vrednosti na intervalu $[R_{n1}, R_{n2}]$ ter posledično tlak vrednosti na intervalu $[p_1, p_2]$.



a) Izračunajmo najprej spodnjo mejo p_1 :

- Vrednost R_{n1} dobimo tako, da vzamemo $e_l = +n$

$$R_p - R_{n1} = n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) \Rightarrow R_{n1} = R_p - n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) = 125 \Omega - 0,002 \cdot 12 \Omega = 124,976 \Omega$$

- Enačbo nazivne karakteristike (premice) zapišemo iz $R_{p,\min}$ in $R_{p,\max}$ ter $p_{\min}$ in $p_{\max}$.

$$R_n = R_{p,\min} + \frac{(R_{p,\max} - R_{p,\min})}{p_{\max} - p_{\min}}(p - p_{\min}) = R_{p,\min} + S \cdot (p - p_{\min}) \Rightarrow$$

in dobimo za p_1 :

$$\Rightarrow p_1 = p_{\min} + \frac{(R_{n1} - R_{p,\min})}{S} = 0,1 \text{ MPa} + \frac{124,976 \Omega - 120 \Omega}{12 \Omega / 9,9 \text{ MPa}} = 4,205 \text{ MPa}$$

b) Podobno izračunamo tudi zgornjo mejo p_2 :

$$R_p - R_{n2} = n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) \Rightarrow R_{n2} = R_p + n \cdot (R_{p,\max} - R_{p,\min}) = 125 \Omega + 0,002 \cdot 12 \Omega = 125,024 \Omega$$

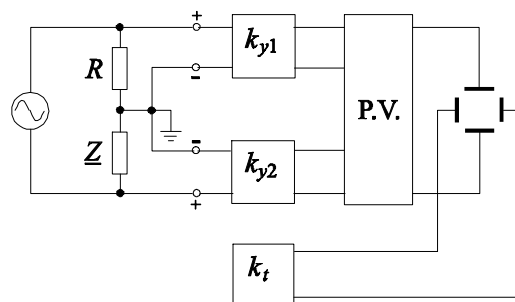
in

$$\Rightarrow p_2 = p_{\min} + \frac{(R_{n2} - R_{p,\min})}{S} = 0,1 \text{ MPa} + \frac{125,024 \Omega - 120 \Omega}{12 \Omega / 9,9 \text{ MPa}} = 4,245 \text{ MPa}$$

- Dejanski tlak glede na izmerjeno upornost leži na intervalu:

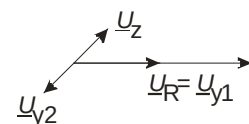
$$4,205 \text{ MPa} \leq p \leq 4,245 \text{ MPa}$$

5. Kakšna je slika na zaslonu elektronskega osciloscopa, če proži časovno bazo kanal-1, nivo proženja $N = 0$, strmina proženja $S > 0$, $k_{y1} = k_{y2}$, $f = 2 \text{ kHz}$, $k_t = 0,1 \text{ ms/d}$, $\underline{Z} = \frac{1}{2} R e^{j60^\circ}$? Narišite fazorski (kazalčni) diagram!



Rešitev:

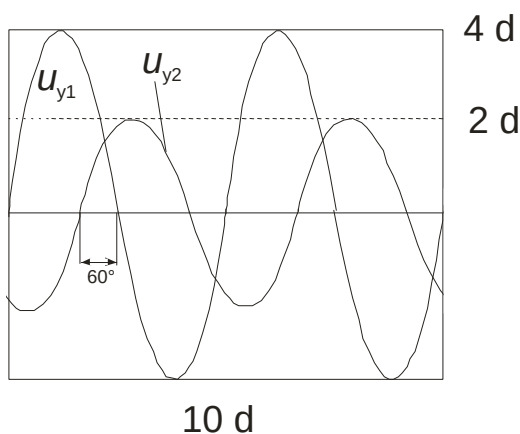
- Fazorski diagram prikazuje napetost na upor $\underline{U}_R = \underline{U}_{y1}$, ki je v fazi s tokom. Napetost na impedanci $\underline{U}_Z$ prehiteva napetost na upor za 60° . Ker sta negativni sponki na vходу osciloscopa vezani skupaj je prikazana napetost na kanalu dve $\underline{U}_{y2} = -\underline{U}_Z$ diametralna od napetosti na impedanci.



- Perioda signalov je enaka: $T = 1/f = 0,5 \text{ ms}$
 - Število delcev potrebnih za prikaz ene periode je

$$\frac{T}{k_t} = \frac{0,5 \text{ ms} \cdot \text{d}}{0,1 \text{ ms}} = 5 \text{ d},$$

- ker pa je zaslon širok 10 delcev sta na zaslonu prikazani dve periodi vsakega signala. Amplituda napetosti na impedanci je polovico manjša od napetosti na upor.



Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Z voltmetrom ($U_D = 1V$, ločljivost: $1mV$, $B = 1kHz$, člen prvega reda) merimo efektivno vrednost signala $u/V = 1 \cdot \sin \omega t + A_5 \cdot \sin 5\omega t$, $f = 500Hz$. Najmanj koliko mora biti amplituda pete harmonske komponente ($A_5 = ?$), da jo pri meritvi z voltmetrom zaznamo?

Rešitev:

- Efektivno vrednost napetosti sestavljata efektivna prispevka osnovne in pete harmonske komponente:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_5^2} = \sqrt{\left(K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(K_5 \frac{A_5}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

- Voltmeter zaradi svojega dinamičnega odziva člena 1. reda ($f_m = B = 1kHz$) različno oslabi napetosti na vhodu:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$

- $f_1 = 500Hz$: $K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} = 0,894428$;

- Efektivna vrednost osnovne komponente napetosti na voltmetru je:

$$U_1 = K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}} = 0,632456V$$

- $f_5 = 2500Hz$: $K_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_5/f_m)^2}} = 0,371391$

- Če želimo zaznati peto harmonsko komponento poleg osnovne komponente, mora biti njen efektivni prispevek večji za ločljivost voltmetra $\Delta U = 1mV$ od napetosti $U_1 = 0,632456V$:

$$U_1 + \Delta U = \sqrt{U_1^2 + U_5^2} \Rightarrow K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}} + \Delta U = \sqrt{\left(K_1 \frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(K_5 \frac{A_5}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

- Amplitudo pete harmonske komponente dobimo s preureditvijo izraza:

$$\sqrt{(U_1 + \Delta U)^2 - U_1^2} = U_5 = K_5 \frac{A_5}{\sqrt{2}}$$

- $A_5 = \frac{\sqrt{2}}{K_5} \sqrt{(U_1 + \Delta U)^2 - U_1^2} = 0,1355V$

2. Napetost U , izražena v dBm_{50} (referenca 1mW , 50Ω) je dvakrat večja, kot če je izražena v dBm_{600} (referenca 1mW , 600Ω). Kolikšna je napetost U , izražena v enoti SI?

Rešitev:

- Kadar je napetost izražena v enoti decibel, je pri tem mišljeno njeno razmerje proti referenčni vrednosti U_{ref} . Izhodiščna definicija decibela je podana z desetiškim logaritmom dveh moči:

$$\frac{U}{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{P}{P_{\text{ref}}} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{R} \cdot \frac{R}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref}}} \right)$$

- $\frac{U}{\text{dBm}_{50}}$ - referenčna napetost U_{ref1} je enaka napetosti, kadar se na upor $R = 50\Omega$ sprošča moč $P = 1\text{mW}$:

$$U_{\text{ref1}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1\text{mW} \cdot 50\Omega} = 0,2236\text{V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{50}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,2236\text{V}} \right)$$

- $\frac{U}{\text{dBm}_{600}}$ - referenčna napetost U_{ref2} je enaka napetosti, kadar se na upor $R = 600\Omega$ sprošča moč $P = 1\text{mW}$:

$$U_{\text{ref2}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1\text{mW} \cdot 600\Omega} = 0,7746\text{V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{600}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,7746\text{V}} \right)$$

- Iz enačbe $\frac{U}{\text{dBm}_{50}} = 2 \frac{U}{\text{dBm}_{600}}$ izračunamo iskano napetost izraženo v SI enoti:

$$\blacksquare \quad 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref1}}} \right) = 2 \cdot 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref2}}} \right)$$

$$\blacksquare \quad \left(\frac{U}{U_{\text{ref1}}} \right) = \left(\frac{U}{U_{\text{ref2}}} \right)^2 \Rightarrow U = \frac{U_{\text{ref2}}^2}{U_{\text{ref1}}} = 2,683\text{V}$$

3. Koliko mest bi moral imeti prikazovalnik voltmetra ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$, $U_D = 2\text{ V}$), da se negotovost zaradi ločljivosti ne bi poznala v skupni negotovosti zaokroženi na dve cifri pri merjenju napetosti $U = 1,4\text{ V}$?

Rešitev:

- Skupno negotovost merjenja napetosti pretežno določa negotovost tipa B zaradi lastnega pogreška voltmetra. Mejna vrednost pogreška je:

$$M_U = \pm(1,4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}) = \pm 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- in negotovost tipa B: $u_1 = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = 1,963 \cdot 10^{-3} \text{ V} \rightarrow u_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

- Negotovost zaokrožena na dve cifri je $u_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}$. Največja vrednost, ki bi jo lahko dodali, ne da bi se poznalo pri tej zaokrožitvi, je

$$\frac{2,0099 \cdot 10^{-3} - 1,963 \cdot 10^{-3}}{\Delta U_z / V} = 0,047 \cdot 10^{-3}$$

- ker se tudi vrednost $u_1 = 2,0099 \cdot 10^{-3} \text{ V}$ zaokroži na $u_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ V}$
- Negotovost zaradi ločljivosti u_q ne sme v skupni negotovosti presegati prispevka zaradi zaokrožitve:

$$u_1 + \Delta U_z = \sqrt{u_1^2 + u_q^2} \Rightarrow \sqrt{(u_1 + \Delta U_z)^2 - u_1^2} = u_q$$

- $u_q = 4,32 \cdot 10^{-4} \text{ V}$

- Ker za pogrešek ločljivosti privzamemo pravokotno porazdelitev, zapišemo

$$u_q = \frac{\Delta U}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \Delta U = 2\sqrt{3}u_q = 1,494 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- Ločljivost zaokrožimo navzdol na prvo dekadno vrednost
 $\Rightarrow \Delta U = 1\text{ mV}$, kar nam da $\rightarrow 4$ mesta prikaza

4. Umerjali ste digitalni voltmeter s $6\frac{1}{2}$ mestnim prikazovalnikom. Koliko je standardna merilna negotovost tega voltmetra pri nastavljeni vrednosti, če je bila:

- razširjena merilna negotovost ($k = 2$) referenčnega inštrumenta $U_N = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ V}$,
- časovna nestabilnost merjene napetosti je razvidna iz

$$U_{N,\min} = 1,234567 \text{ V} \text{ in } U_{N,\max} = 1,246688 \text{ V},$$
- negotovost zaradi histereze znaša $u_{\text{hist}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V}$,
- negotovost zaradi lezenja znaša $u_{\text{lez}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ V}$,
- upoštevajte tudi negotovost zaradi ločljivosti umerjanega voltmetra.

Rešitev:

- Standardna negotovost referenčnega inštrumenta je za faktor razširitve manjša kot razširjena negotovost:

$$u(E_N) = \frac{U(E_N)}{k} = \frac{2,0 \cdot 10^{-6} \text{ V}}{2} = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ V},$$

- Negotovost zaradi nestabilnosti merjene napetosti aproksimiramo s pomočjo maksimalne in minimalne vrednosti izmerjenih vrednosti in za vrednotenje negotovosti najbolj neugodno porazdelitev pogreška – pravokotno obliko:

$$u(E_t) = \frac{|E_{N,\max} - E_{N,\min}|}{2\sqrt{3}} = \frac{|1,234567 \text{ V} - 1,246688 \text{ V}|}{2\sqrt{3}} = 3,499 \cdot 10^{-3} \text{ V},$$

- Negotovost zaradi histereze znaša $u_{\text{hist}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V}$ in zaradi lezenja $u_{\text{lez}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ V}$.
- Negotovost zaradi ločljivosti umerjanega voltmetra pa se izračuna iz podatka o $6\frac{1}{2}$ prikazu. Ločljivost Q namreč znaša

$$6\frac{1}{2} \Rightarrow 1,000000 \text{ V} \Rightarrow Q = 1 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

- iz nje pa dobimo negotovost zaradi ločljivosti ob upoštevanju pravokotne porazdelitve pogreška:

$$u(E_q) = \frac{Q}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot 10^{-6} \text{ V}}{2\sqrt{3}} = 2,88 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

- Skupna negotovost u_c tako znaša:

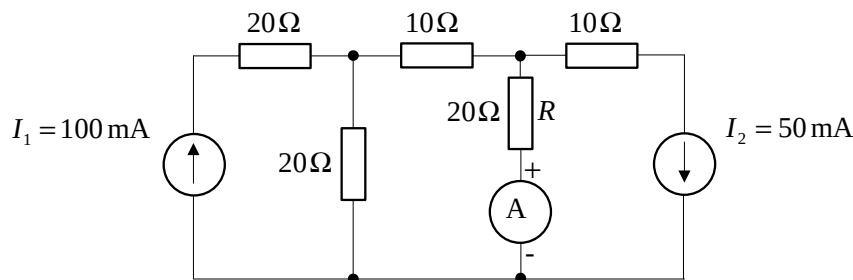
$$u_c(U_i) = \sqrt{u^2(E_N) + u^2(E_t) + u^2(E_{\text{his}}) + u^2(E_{\text{lez}}) + u^2(E_q)}$$

$$u_c(U_i) = \sqrt{(1,0 \cdot 10^{-6} \text{ V})^2 + (3,499 \cdot 10^{-3} \text{ V})^2 + (1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V})^2 + (1,2 \cdot 10^{-6} \text{ V})^2 + (2,889 \cdot 10^{-7} \text{ V})^2}$$

$$u_c(U_i) = 3,502 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- Po zaokrožitvi dobimo standardno negotovost: $u_c(U_i) = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

5. Koliko pokaže ampermeter z $U_{A0} = 100 \text{ mV}$ in $I_D = 20 \text{ mA}$ pri merjenju toka skozi upor R ? Kolikšen je sistematični pogrešek zaradi vključitve ampermetra?



Rešitev:

- Kadar vključimo ampermeter v vezje, nam kaže manjši tok, kot je bil tok pred vključitvijo. Vzrok je v končni upornosti ampermetra, ki jo izračunamo iz karakterističnega padca napetosti U_{A0} na izbranem merilnem območju:

$$R_A = \frac{U_{A0}}{I_D} = \frac{100 \text{ mV}}{20 \text{ mA}} = 5 \Omega$$

- Tok skozi upor R brez ampermetra določimo po principu superpozicije. Upoštevati moramo, da ima tokovni generator neskončno veliko upornost in uporabiti enačbo za tokovni delilnik:

$$I_R = I_1 \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega} - I_2 \frac{10 \Omega + 20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega} = 0,4 I_1 - 0,6 I_2 = 10 \text{ mA}$$

- Ko vključimo ampermeter, se razmere spremenijo in tok se zmanjša:

$$\begin{aligned} I_A &= I_1 \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega + 5 \Omega} - I_2 \frac{10 \Omega + 20 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega + 5 \Omega} = \\ &= 36,36 \text{ mA} - 27,27 \text{ mA} = 9,09 \text{ mA} \end{aligned}$$

- Sistematični pogrešek zaradi vključitve ampermetra je :

$$e = \frac{I_A}{I_R} - 1 = -0,0909 \rightarrow e = -9,09\%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Kolikšen je največji informacijski pretok digitalnega voltmetra, ki ima merilni doseg $U_D = 2\text{ V}$, mejo pogreška $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D + 2\text{ dig})$, ločljivost $\Delta U_q = 1\text{ mV}$ in čas meritve $T_M = 25\text{ ms}$?

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar je pogrešek odvisen od izmerjene vrednosti v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj v območju od $x_{\min}$ do $x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)} \Rightarrow m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln\left(1 + \frac{a(x_{\max} - x_{\min})}{b}\right)$$

- Če vzamemo za enoto informacije bit, ustreza številu amplitudnih stopenj m naslednja množina informacije kot dvojiški logaritem m :

$$S = \text{lb}(m) = \log_2(m)$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas T_M , je hitrost prenosa ali **informacijski pretok** enak:

$$I = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m) = \frac{S}{T_M}$$

- Za dani voltmeter zapišemo mejni pogrešek v obliki:

$$M_U = (0,1\%U + 0,1\%U_D + 2\text{ dig}) = 10^{-3}U + 2\text{ mV} + 2\text{ mV} = 10^{-3}U + 4\text{ mV}$$

- In maksimalno število neodvisnih amplitudnih stopenj na območju $U_D = 2\text{ V}$ ($x_{\min} = 0\text{ V}$, $x_{\max} = U_D$):

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln\left(1 + \frac{10^{-3}(U_D)}{4\text{ mV}}\right) = 203,7$$

- Največja množina informacije in maksimalni informacijski pretok sta:

$$S = \text{lb}(m_{\max}) = 7,67\text{ bit} \Rightarrow I_{\max} = \frac{S}{T_M} = 306,8\text{ bit/s}$$

2. Pred časom ste merili napetost. Odčitali ste izmerjeno vrednost 14,342 V . Takrat si niste zapisali podatke o uporabljenem instrumentu. Katerega od naslednjih prikazovalnikov je imel inštrument ($1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$ ali $4\frac{1}{2}$ mestni prikaz) in kakšen je merilni rezultat?

$$1\frac{1}{2} - M_U = (4\% U_D + 2\% U_i)$$

$$2\frac{3}{4} - u(U) = 0,11 \text{ V}$$

$$4\frac{1}{2} - M_U = (5\% U_i + 3\% U_D + 3\text{dig})$$

Rešitev:

- Izmerjena vrednost je $U_i = 14,342 \text{ V}$
 - Za tako izmerjeno vrednost potrebujemo instrument, ki ima na voljo 5 mest prikaza, to je s $4\frac{1}{2}$ mestnim prikazovalnikom. Instrument ima pri tej izmerjeni vrednosti merilni doseg 20 V (največja vrednost prikaza je 19,999).
- Mejni pogrešek je: $M_U = \left(\frac{5}{100}\right) \cdot 14,342 \text{ V} + \left(\frac{3}{100}\right) \cdot 20 \text{ V} + 3 \cdot 0,001 \text{ V} = 1,3201 \text{ V}$
- in standardna negotovost: $u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = 0,7621 \text{ V}$
- Merilni rezultat je:

$$\underline{U = 14,34 \text{ V} \quad , \quad u(U) = 0,77 \text{ V} \quad , \quad n = 1}$$

3. V katerih mejah se lahko nahaja celotna standardna negotovost izhodne veličine $y = 2x_1 + x_2$, če sta vhodni veličini x_1 in x_2 medsebojno odvisni in imata enako veliki standardni negotovosti $u(x_1) = u(x_2)$?

Rešitev:

- Standardno negotovost izhodne posredno merjene veličine $u_c(y)$ določa tudi koeficient korelacije r , kadar so neposredno merjene veličine medsebojno odvisne. V našem primeru dveh medsebojno odvisnih vhodnih veličin zapišemo:

$$u_c(y) = \sqrt{(c_1 u(x_1))^2 + (c_2 u(x_2))^2 + 2rc_1c_2u(x_1)u(x_2)}$$

- Koeficiente občutljivosti izračunamo z delnim odvajanjem:

$$y = 2x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 2, \quad c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1,$$

- in označimo negotovosti vhodnih veličin: $u(x_1) = u(x_2) = u(x)$

- Ker lahko koeficient korelacije r zavzame vrednosti med -1 in $+1$, se standardna negotovost spreminja:

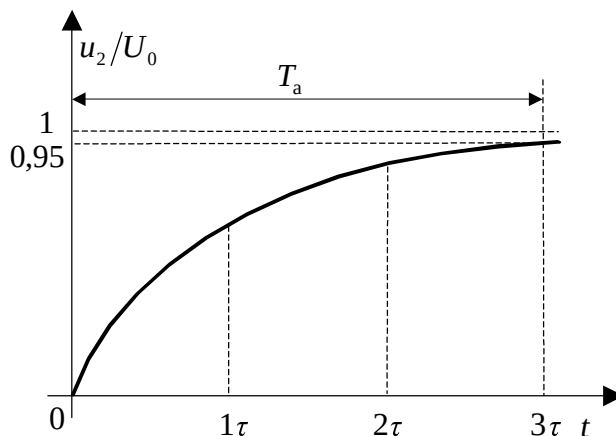
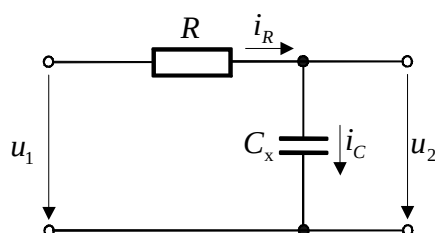
$$u_c(y) = \sqrt{4u^2(x) + u^2(x) + 4ru^2(x)}$$

- $r = -1$: $u_c(y) = \sqrt{u^2(x)} = u(x)$
- $r = +1$: $u_c(y) = \sqrt{9u^2(x)} = 3u(x)$
- Zaradi medsebojne odvisnosti se standardna negotovost izhodne posredno merjene veličine spreminja v mejah $u(x) \leq u_c(y) \leq 3u(x)$ in se precej razlikuje od primera, kadar so vhodne veličine medsebojno neodvisne $r = 0$!
- $r = 0$: $u_c(y) = \sqrt{5u^2(x)} = 2,24u(x)$

4. Kapacitivnost kondenzatorja C_x merimo tako, da kondenzator skupaj z uporom $R = 1200 \, \Omega$ vežemo v merilni člen prvega reda in merimo odzivni čas tega člena (znotraj $e = \pm 5\%$ od končnega odklona). C_x nato posredno izračunamo iz odzivnega časa. Kolikšna je ločljivost tako izmerjene kapacitivnosti, če odzivni čas merimo z ločljivostjo $1 \mu s$?

Rešitev:

- Skica vezja in potek izhodne napetosti:



- Odzivni čas T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 5\%$ končne vrednosti (zelo razširjen kriterij), velja za člen 1. reda:

$$\frac{u_2}{U_0} = 0,95 = (1 - e^{-T_a/\tau}) \Rightarrow T_a = 3\tau = 3RC$$

- Ločljivost določanja kapacitivnosti določimo z občutljivostjo $S = \partial C_x / \partial T_a$ in z ločljivostjo merjenja odzivnega časa.

$$C_x = \frac{T_a}{3R} \Rightarrow Q_{C_x} = \Delta C_x = \frac{\partial C_x}{\partial T_a} Q_{T_a} = \frac{Q_{T_a}}{3R} = \frac{1 \mu s}{3 \cdot 1200 \Omega} = 0,27 \text{ nF}$$

5. Uporovnemu senzorju temperature, za katerega velja $R_t = R_0 e^{bt}$, $R_0 = R_{0^\circ\text{C}} = 1000\Omega$, $R_{100^\circ\text{C}} = 1600\Omega$ vežemo vzporedno upor, tako da je skupna upornost pri temperaturi $t = 50^\circ\text{C}$ enaka $R_s = R_t(50^\circ\text{C})/2$. Kolikokrat je občutljivost skupne (linearizirane) karakteristike manjša od občutljivosti samega senzorja? Nazivna (idealna) karakteristika gre skozi začetno in končno točko dejanske karakteristike.

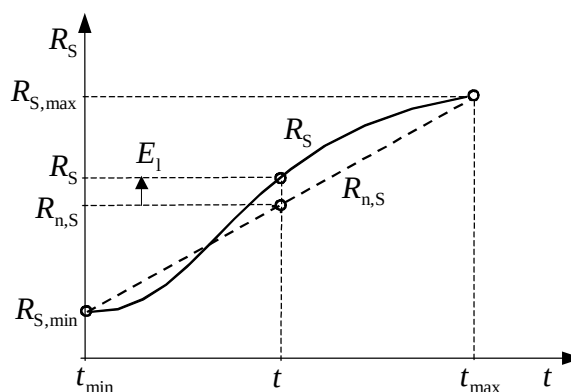
Rešitev:

- Iz karakteristike uporovnega senzorja, ki je podana z enačbo $R_t = R_0 e^{bt}$, pri čemer je R_0 upornost senzorja pri referenčni temperaturi 0°C , izračunamo koeficient b :

$$R_{100^\circ\text{C}} = R_{0^\circ\text{C}} e^{b \cdot 100^\circ\text{C}} \Rightarrow b = \frac{1}{100^\circ\text{C}} \cdot \ln\left(\frac{R_{100^\circ\text{C}}}{R_{0^\circ\text{C}}}\right) = 4,7 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$$

- Če vzporedno k senzorju z upornostjo R_t vežemo upor z upornostjo R_v , kateremu se upornost s temperaturo ne spreminja, se skupna karakteristika spremeni, občutljivost in nelinearnost pa se zmanjšata. Tako linearizirana karakteristika ima upornost R_s .

$$R_s = \frac{R_t \cdot R_v}{R_t + R_v}$$



- Ker je skupna upornost pri temperaturi $t = 50^\circ\text{C}$ enaka $R_s = R_t(50^\circ\text{C})/2$, mora biti upornost vzporedno vezanega upora R_v enaka:

$$R_v = R_{50^\circ\text{C}} = R_{0^\circ\text{C}} e^{b \cdot 50^\circ\text{C}} = 1264,91\Omega \Rightarrow R_s = R_t(50^\circ\text{C})/2$$

- Nazivna (idealna) karakteristika gre skozi začetno in končno točko dejanske karakteristike. Občutljivost je tako:

$$S = \frac{R_{t_{\max}} - R_{t_{\min}}}{t_{\max} - t_{\min}} = \frac{R_{100^\circ\text{C}} - R_{0^\circ\text{C}}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 6\Omega / ^\circ\text{C}$$

- Občutljivost skupne (linearizirane) karakteristike določa vzporedno vezan upor R_v :

$$S_s = \frac{\frac{R_{100^\circ\text{C}} \cdot R_v}{R_{100^\circ\text{C}} + R_v} - \frac{R_{0^\circ\text{C}} \cdot R_v}{R_{0^\circ\text{C}} + R_v}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 1,4795\Omega / ^\circ\text{C}$$

$$R_{s,\max} = \frac{R_{100^\circ\text{C}} \cdot R_v}{R_{100^\circ\text{C}} + R_v} = 706,43\Omega$$

$$R_{s,\min} = \frac{R_{0^\circ\text{C}} \cdot R_v}{R_{0^\circ\text{C}} + R_v} = 558,48\Omega$$

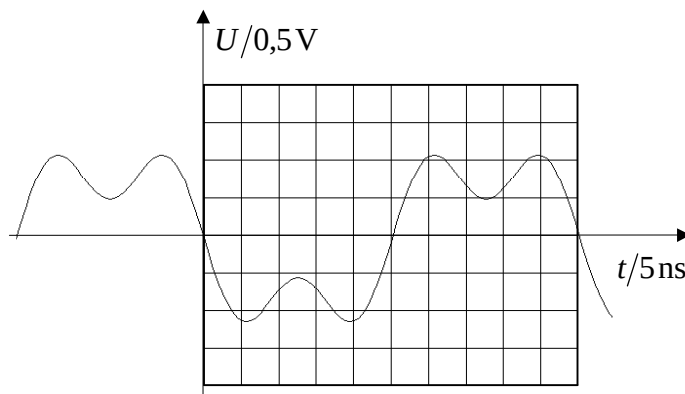
- Občutljivost skupne (linearizirane) karakteristike je manjša od občutljivosti samega senzorja: $\frac{S}{S_s} = 4,055$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Na osciloskop priključimo napetost $u/V = 1 \cdot \sin \omega t + 1/2 \cdot \sin 3\omega t$, $f = 20 \text{ MHz}$. Kakšna bi bila slika na zaslonu, če bi imel osciloskop neskončno mejno frekvenco? Kakšna pa je slika na zaslonu, če ima realni osciloskop pasovno širino $B = 20 \text{ MHz}$ (približek je člen 1. reda); $k_t = 5 \text{ ns/d}$; $k_y = 0,5 \text{ V/d}$; $N = 0 \text{ V}$; $S < 0$? Skicirajte!

Rešitev:

- V primeru idealnega osciloskopa z neskončno mejno frekvenco se signal dinamično ne popači. Na zaslonu se začne izrisovati pri prožilnem nivoju $N = 0 \text{ V}$ z negativno strmino $S < 0$. Pri nastavitvi časovne konstante $k_t = 5 \text{ ns/d}$ se izriše ena perioda signala $T = 1/f = 50 \text{ ns}$ in izkoristi zaslon (raster: $10d \times 8d$, $k_y = 0,5 \text{ V/d}$) kot prikazuje slika.



- Realni osciloskop dinamično popači sliko. Amplituda se zmanjša $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$ in fazni kot se poveča v odvisnosti od razmerja frekvence komponente in mejne frekvence:

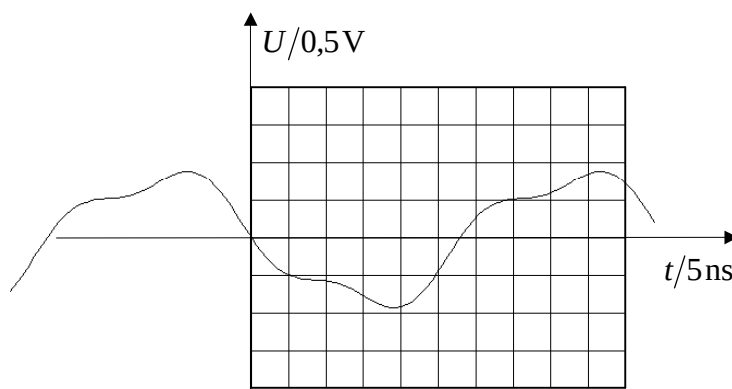
$$\varphi = -\arctg(\omega\tau) = -\arctg\left(\frac{2\pi f}{2\pi f_m}\right) = -\arctg(f/f_m)$$
- Zgornjo mejno frekvenco $f_{m,zg}$ določimo iz pasovne širine, če zanemarimo spodnjo mejno frekvenco $f_{m,sp} < 20 \text{ Hz}$.

$$B = f_{m,zg} - f_{m,sp}; \quad f_{m,sp} < 20 \text{ Hz} \Rightarrow B \doteq f_{m,zg} = f_m$$

- Za vsako od komponent moramo določiti dinamično zmanjšano amplitudo in fazni zamik:

$$\begin{aligned} \text{▪ } f/f_m = 1: \quad \frac{U_2}{U_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071, \quad \varphi = -0,785 \text{ rad} = -45^\circ \\ \text{▪ } f/f_m = 3: \quad \frac{U_2}{U_1} &= \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,3162, \quad \varphi = -1,249 \text{ rad} = -71,56^\circ \end{aligned}$$

- Popačeni signal ima funkcijo: $u/V = 0,707 \cdot \sin(\omega t - 45^\circ) + 1/2 \cdot 0,3162 \cdot \sin(3\omega t - 71,56^\circ)$
- in slika signala na zaslonu osciloskopa je:



2. Koliko je specifična prevodnost izražena v enoti SI, če je v ameriški literaturi navedeno, da znaša specifična upornost $16,54 \Omega \text{CM}/\text{ft}$?

- CM (circular mil) – 1CM je ploščina kroga, ki ima premer 1mil ;
- 1mil = 0,001in ; 1in (inch) = 25,4 mm ;
- 1ft (foot) = 12 in

Rešitev:

- Površina kroga 1CM izražena v SI enoti je:

$$\text{CM} = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \pi \frac{(1\text{mil})^2}{4} = \pi \frac{(0,001 \cdot 25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{4} = 5,067 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$$

- Dolžina 1ft izražena v SI enoti je : $1\text{ft} = 12 \cdot 25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,3048 \text{ m}$
- Od tod dobimo za specifično upornost izraženo v SI enotah:

$$\rho = 16,54 \frac{\Omega \text{CM}}{\text{ft}} = 27,496 \cdot 10^{-9} \Omega \text{m} = 27,496 \text{ n}\Omega \text{m}$$

- in za specifično prevodnost:

$$\lambda = \frac{1}{\rho} = 36,368 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}} = 36,368 \text{ M} \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

3. Podajte rezultat za $\cos\varphi$ s standardno negotovostjo!

- ampermeter: $I = 4,16 \text{ A}$, $I_D = 6 \text{ A}$, $r = 0,5$
- voltmeter: $U = 100 \text{ V}$, $U_D = 150 \text{ V}$, $r = 0,2$
- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $\cos\varphi_n = 0,8$, $r = 0,5$, $\alpha_D = 150 \text{ d}$, $\alpha = 107,2 \text{ d}$
(α pomeni odklon vatmetra v delcih d)

Rešitev:

- Najprej se izračuna $\cos\varphi$.

- Delovna moč:

$$P = P_D \frac{\alpha}{\alpha_D} = U_n I_n \cos\varphi_n \frac{\alpha}{\alpha_D} = 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot 0,8 \cdot \frac{107,2 \text{ d}}{150 \text{ d}} = 285,86 \text{ W}$$

$$P = UI \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{P}{UI} = 285,86 \text{ W} \cdot \frac{1}{100 \text{ V} \cdot 4,16 \text{ A}} = 0,687179$$

- Nato izračunamo skupno relativno in absolutno merilno negotovost.
 - relativno merilno negotovost zaradi produkta in kvocienta vhodnih veličin zapišemo z geometrijsko vsoto:

$$w_c(\cos\varphi) = \sqrt{w^2(P) + w^2(U) + w^2(I)}$$

- posamezne relativne merilne negotovosti izpeljane iz razreda danega na merilni doseg imajo obliko:

$$w(G) = \frac{u(G)}{G} = \frac{M(G)}{G\sqrt{3}} = \frac{r}{100} \frac{G_D}{G} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{100} \frac{\alpha_D}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- (opomba: ker oznaka razreda ni obkrožena, se za referenčno vrednost vzame merilni doseg.)

- zato lahko zapišemo za skupno relativno merilno negotovost:

$$w_c(\cos\varphi) = \sqrt{\left(\frac{0,5}{100} \frac{150}{107,2} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,2}{100} \frac{150}{100} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,5}{100} \frac{6}{4,16} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6,054 \cdot 10^{-3}$$

- Skupna absolutna merilna negotovost je:

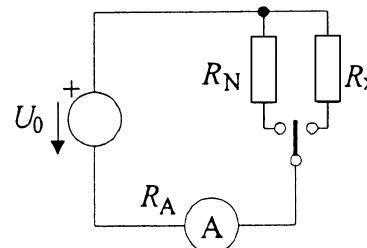
$$u_c(\cos\varphi) = w_c(\cos\varphi) \cdot \cos\varphi = 0,00416$$

- Rezultat za $\cos\varphi$ s standardno negotovostjo:

$$\cos\varphi = 0,6872 \qquad u_c(\cos\varphi) = 0,0042 \qquad n = 1$$

4. Katerega izmed uporov $R_1 \approx 9950\Omega$ ali $R_2 \approx 10500\Omega$ lahko bolj točno zmerimo po tokovni primerjalni metodi z ampermetrom $M_I = \pm(0,1\% I + 0,1\% I_D)$, $I_D = 2\text{ mA}$, ločljivost $1\mu\text{A}$, $R_A = 10\Omega$ in uporovnim etalonom $R_N = 10,000(1 \pm 10^{-4})\text{k}\Omega$? Koliko je najmanjša dosegljiva standardna negotovost? Vezje napajamo z idealnim napetostnim virom.

Rešitev:



- Čez upor R_N teče tok: $I_N = \frac{U_0}{R_N + R_A}$
- Po preklopu stikala teče čez upor R_x tok: $I_x = \frac{U_0}{R_x + R_A}$
- Enačbi delimo in izrazimo R_x . Upoštevajoč konstantno napetost U_0 dobimo torej:

$$R_x = R_N \frac{I_N}{I_x} \left[1 + \frac{R_A}{R_N} \left(1 - \frac{I_x}{I_N} \right) \right]$$

- Če uporabimo poenostavljeni izraz $R_x = R_N I_N / I_x$, "pridelamo" sistematični pogrešek:

$$e = \frac{G_x - G_N}{G_A + G_N} \approx \frac{G_x - G_N}{G_A} = \frac{1/R_x - 1/R_N}{1/R_A} = 10^{-6}$$

- Primerjanje je tem bolj točno, čim bližje sta si relativno merjena upora ($R_x \leftrightarrow R_N$)!
 - $R_1 \approx 9950\Omega$: $\delta_1 = \frac{R_1 - R_N}{R_N} = -0,5\% \rightarrow$
 - $R_2 \approx 10500\Omega$: $\delta_2 = \frac{R_2 - R_N}{R_N} = 5\%$
 - po primerjalni metodi je moč izmeriti bolj točno R_1 .
- Skupna standardna negotovost poenostavljenega izraza $R_x = R_N \frac{I_N}{I_x}$, kadar sta si upora dovolj blizu ($|\delta| < 1\%$) in se odčitka I_N in I_x malo razlikujeta, je enaka:

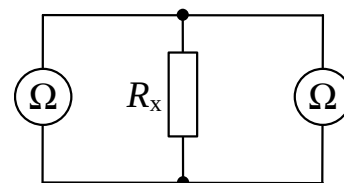
$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(R_N) + 2 \left(\frac{u(I_x)_q}{I_x} \right)^2}$$

- Najmanjšo dosegljivo standardno negotovost dobimo pri polni izkoriščenosti območja ampermetra $I_x \approx I_D$:

$$\left. \frac{u(I_x)_q}{I_x} \right|_{\min} = \frac{\Delta I_q}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{I_D} = \frac{10^{-6} \text{ A}}{2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ A}} = 1,443 \cdot 10^{-4}$$

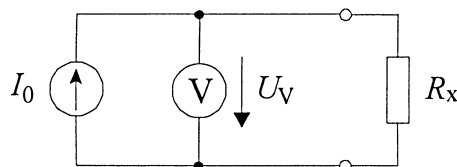
$$w_c(R_x) = \sqrt{(10^{-4}/\sqrt{3})^2 + 2(1,443 \cdot 10^{-4})^2} = 2,12 \cdot 10^{-4} \rightarrow w_c(R_x) = 2,2 \cdot 10^{-4}$$

5. Kolikšen je relativni sistematični pogrešek, če merimo upornost $R_x = 100 \, \Omega$ z dvema enakima idelanima ommetroma, kot je prikazano na sliki.



Rešitev:

- Oba ommetra s svojima tokovnima viroma pošiljata enak tok skozi R_x (na sliki je prikazana nadomestna shema ommetra). R_x se izračuna iz izmerjene napetosti in nastavljenega toka.



- Kadar sta pozitivni sponki ommetrov priključeni na isto stran upora, se tokova čez upor seštevata in je na njem dvakrat večja napetost, kot bi bila pri enem ommetru. Ker sta nastavljena toka I_0 enaka, kažeta ommetra $200 \, \Omega$. V tem primeru je sistematični pogrešek enak:

$$e = \frac{R'_x - R_x}{R_x} = \frac{200 \, \Omega - 100 \, \Omega}{100 \, \Omega} = 1 \rightarrow e = 100 \%$$

- Kadar sta pozitivni sponki ommetrov priključeni na nasprotni stran upora, se tokova čez upor odštevata in je na njem napetost nič. Zato kažeta ommetra $0 \, \Omega$, sistematični pogrešek pa je:

$$e = \frac{R'_x - R_x}{R_x} = \frac{0 \, \Omega - 100 \, \Omega}{100 \, \Omega} = -1 \rightarrow e = -100 \%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko znaša efektivna vrednost vhodnega signala, ki je sestavljen iz osnovne ($f_1 = 20 \text{ MHz}$) in tretje harmonske komponente, če nam DSO ($B = 100 \text{ MHz}$, člen prvega reda), uporabljen kot spektralni analizator, pokaže dve komponenti: črto osnovne komponente z $U_1 = 15 \text{ dBV}$ in črto tretje, ki je za 20 dB manjša? Skicirajte razmere!

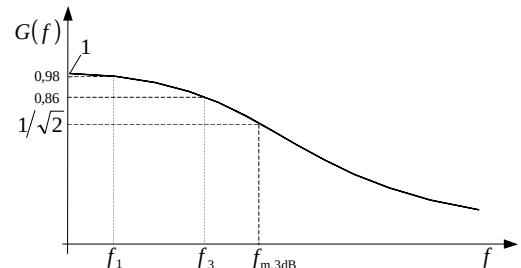
Rešitev:

- Efektivno vrednost napetosti vhodnega signala U_v sestavljata efektivna prispevka osnovne in tretje harmonske komponente:

$$U_v = \sqrt{U_{1,v}^2 + U_{3,v}^2} = \sqrt{\left(\frac{U_{1,i}}{K_1}\right)^2 + \left(\frac{U_{3,i}}{K_3}\right)^2}$$

- DSO zaradi svojega dinamičnega odziva (aproksimiran s členom 1. reda in mejno frekvenco $f_m \doteq B = 100 \text{ MHz}$) različno oslabi napetosti na vходу:

$$K = G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}} = \frac{U_i}{U_v}$$



- $f_1 = 20 \text{ MHz} : K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (20/100)^2}} = 0,9806$
- $f_3 = 60 \text{ MHz} : K_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_3/f_m)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (60/100)^2}} = 0,8574$

- Kadar je napetost izražena v enoti decibel, je pri tem mišljeno njeno razmerje proti referenčni vrednosti U_{ref} . Izhodiščna definicija decibela je podana z desetiškim logaritmom dveh moči:

$$\frac{U}{\text{dB}} = 10 \log\left(\frac{P}{P_{\text{ref}}}\right) = 10 \log\left(\frac{U^2}{R} \cdot \frac{R}{U_{\text{ref}}^2}\right) = 10 \log\left(\frac{U^2}{U_{\text{ref}}^2}\right) = 20 \log\left(\frac{U}{U_{\text{ref}}}\right)$$

- Osnovna komponenta napetosti je podana v enoti dBV , kar pomeni, da je referenčna napetost $U_{\text{ref}} = 1 \text{ V}$, in za izmerjeno napetost osnovne komponente dobimo:

$$U_{1,i} = U_{\text{ref}} \cdot 10^{\frac{U/\text{dBV}}{20}} = 1 \text{ V} \cdot 10^{\frac{15}{20}} = 5,6234 \text{ V}$$

- Ker je tretja harmonska komponenta za 20 dB manjša od prve, ki služi v tem primeru za referenčno vrednost, dobimo desetkrat manjšo napetost

$$U_{3,i}/\text{dB} = 20 \log\left(\frac{U_{3,i}}{U_{1,i}}\right) = -20 \text{ dB} \rightarrow U_{3,i} = \frac{1}{10} U_{1,i} = 0,5623 \text{ V}$$

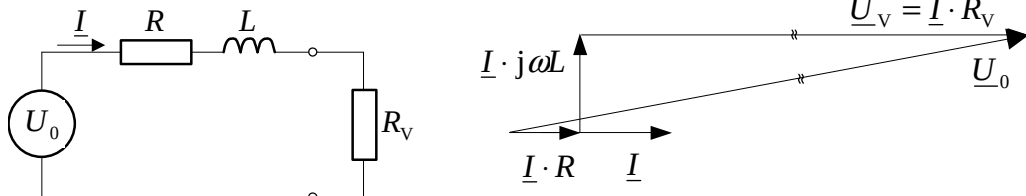
- Popravljen efektivna vrednost napetosti vhodnega signala je:

$$U_v = \sqrt{\left(\frac{U_{1,i}}{K_1}\right)^2 + \left(\frac{U_{3,i}}{K_3}\right)^2} = 5,772 \text{ V}$$

2. Kako velika mora biti upornost voltmetra $R_V = ?$, $M_U = \pm(0,10\%U + 0,10\%U_D + 1\text{dig})V$, ločljivost 100mV , L_V zanemarljiva, ko merimo z njim napetost sinusnega vira $U_0 = 100,00\text{V}$ - prazni tek; $f = 200\text{Hz}$, $R = 500\Omega$, $L = 0,4\text{H}$, da bo sistematični pogrešek priključitve zanemarljiv? Skicirajte vezje in fazorski diagram!

Rešitev:

- Vezje in fazorski diagram:



- Po priključitvi nam voltmetr kaže manj, kot je napetost praznega teka U_0 . Imamo

$$\text{napetostni delilnik: } \underline{U}_V = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + \underline{Z}_0} = \underline{U}_0 \frac{R_V}{R_V + R + j\omega L}$$

$$\text{▪ ki ga v efektivni obliki izrazimo z: } U_V = U_0 \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}}$$

- Sistematični pogrešek priključitve $e = U_V / U_0 - 1$ je zanemarljiv, kadar je manjši od desetine merilne negotovosti rezultata:

$$e \leq \frac{w(U)}{10} = \frac{1}{10} \frac{m_U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{10\sqrt{3}} \frac{M_U}{U} = \frac{1}{10\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{U_D}{U} + \frac{1\text{dig}}{U} \right)$$

- Če je sistematični pogrešek priključitve zanemarljiv, je vrednost napetosti na voltmetru približno enaka napetosti praznega teka $U \doteq U_0$. Merilni doseg voltmetra mora biti $U_D \geq U$. Najmanjšo mejno vrednost lastnega pogreška m_U in s tem najstrožji pogoj za določitev upornosti voltmetra dobimo, kadar je $U_D = U$. Od tod dobimo:

$$|e| = \left| \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}} - 1 \right| \leq \frac{1}{10\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{100,0\text{V}}{100,0\text{V}} + \frac{100\text{mV}}{100,0\text{V}} \right) = 1,732 \cdot 10^{-4}$$

- Upoštevati moramo, da je sistematični pogrešek priključitve negativen. Za primer enačaja lahko tako zapišemo kvadratično enačbo: $1 - e = \frac{R_V}{\sqrt{(R_V + R)^2 + (\omega L)^2}}$

$$R_V = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 - 4 \left(1 - \frac{1}{(1-e)^2} \right) (R^2 + (\omega L)^2)}}{2 \left(1 - \frac{1}{(1-e)^2} \right)} = \frac{-1000\Omega \pm 1000,348\Omega}{-6,93 \cdot 10^{-4}} = \frac{-502,6\Omega}{+2,887\text{M}\Omega}$$

- Pravilna rešitev je $R_V = 2,887\text{M}\Omega$ oziroma voltmeter mora imeti večjo upornost.

$$R_V \geq 2,887\text{M}\Omega$$

3. Izpeljite prikrojeno veličinsko enačbo za jakost električnega polja na razdalji r od izvora, ki seva z močjo P , za $E/(V/m)$, P/mW in r/cm , če je ustrezna veličinska enačba $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$? Uporabite jo za izračun E , če je $P = 2,6 mW$ in $r = 1 cm$!

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}, \quad c_0 \approx 300\,000 \text{ km/s}$$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$
- Pri prehodu na prikrojeno veličinsko enačbo moramo vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, množiti in deliti z željeno enoto:

$$E \frac{V/m}{V/m} = \sqrt{P \frac{mW}{mW} \cdot \mu_0 c_0 / 2\pi \left(r \frac{cm}{cm}\right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številski faktor:

$$E/V/m = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot \frac{\sqrt{10^{-3} W}}{V/m} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{10^{-2} m} = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

- $K = \frac{\sqrt{10^{-3} VA}}{10^{-2} V} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}}$

- Upoštevajoč vrednosti za $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ in $c_0 \doteq 300\,000 \text{ km/s}$

dobimo: $K = \frac{\sqrt{10^{-3}}}{10^{-2}} \frac{\sqrt{VA}}{V} \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 300 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{2\pi}}$

- in končno $K = 3,1623 \sqrt{\frac{A}{V}} \sqrt{60 \frac{H}{s}} = 24,495 \sqrt{\frac{A}{V} \cdot \frac{Vs}{A} \cdot \frac{1}{s}} \approx 24,5$

- Prikrojena veličinska enačba je: $E/V/m = 24,5 \cdot \sqrt{P/mW / (r/cm)^2}$

- Za dane podatke $P = 2,6 mW$ in $r = 1 cm$ izračunamo jakost električnega polja s pomočjo prikrojene veličinske enačbe:

$$E/V/m = 24,5 \cdot \sqrt{2,6 mW/mW / (1 cm/cm)^2} = 39,5 \rightarrow E = 39,5 V/m$$

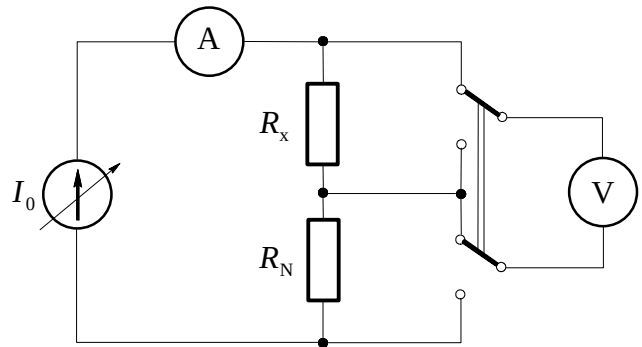
4. Napišite merilni rezultat za upornost $R_x \approx 10\text{k}\Omega$, ki smo jo merili z napetostno primerjalno metodo. Izmerjene vrednosti so naslednje:

- $U_N = 9,324\text{ V}$, $U_x = 9,284\text{ V}$
- $R_V = 1\text{M}\Omega$, $R_N = 10\text{k}\Omega$, $m_{R_N} = 10^{-4}$
- $M_V = (10^{-4}U + 3 \cdot 10^{-4}U_D + 3\text{dig})$,
 $U_D = 10\text{ V}$

Rešitev:

- Iz poenostavljenega izraza za napetostno primerjalno metodo izračunamo vrednost:

$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} = 9957,100\Omega$$



- Pri tem smo zaradi končne upornosti voltmetra $R_V = 1\text{M}\Omega$ naredili sistematični pogrešek:

$$e = \frac{R_N - R_x}{R_x + R_V} = 4,24 \cdot 10^{-5}$$

- Ker sta primerjani upornosti in ustrezno napetosti blizu skupaj $U_x/U_N = 0,9957$, se vpliv lastnega pogreška voltmetra v kvocientu zanemari. Pri določanju standardne negotovosti merilnega rezultata sodeluje dvakrat negotovost zaradi ločljivosti voltmetra $u(U_x)_q = \Delta U_{\min} / (2\sqrt{3}) = 1\text{ mV} / (2\sqrt{3})$, ker dvakrat odčitamo, in negotovost referenčnega upora:

$$\frac{u_c(R_x)}{R_x} = \sqrt{\left(\frac{u(R_N)}{R_N}\right)^2 + 2\left(\frac{u(U_x)_q}{U_x}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{m(R_N)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta U_{\min}}{2\sqrt{3}U_x}\right)^2} = 7,257 \cdot 10^{-5}$$

- Pri tem smo upoštevali, da je tokovni vir zelo stabilen, sicer bi morali upoštevati še negotovost odčitavanja ampermetra ($u(I_A)_q/I_A$).
- Sistematični pogrešek ni zanemarljiv $e \leq w_c/10$ in ga upoštevamo v končnem rezultatu:

$$R_x = 9957,100 \cdot (1 - e)\Omega = 9956,678\Omega$$

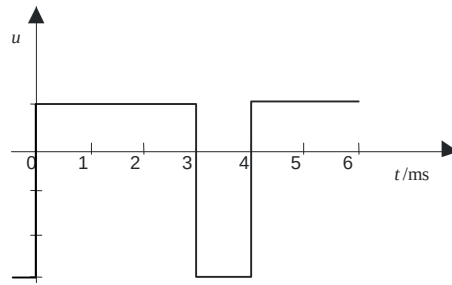
- Ker je popravek relativno zelo majhen, lahko za standardno negotovost uporabimo kar vrednost pri poenostavljenem izrazu $w_c(R_x) = 7,257 \cdot 10^{-5}$. Absolutna vrednost negotovosti je

$$u_c(R_x) = w_c(R_x) \cdot R_x = 0,7226\Omega \rightarrow u_c(R_x) = 0,73\Omega$$

- Zaokrožen merilni rezultat se zapiše v obliki:

$$R_x = 9956,68\Omega ; \quad u_c(R_x) = 0,73\Omega ; \quad n = 1$$

5. Koliko kažeta voltmeter z vrtljivim železom ter voltmeter z vrtljivo tuljavico in vgrajenim usmernikom, če nanju priključimo izmenično napetost s temensko vrednostjo $\hat{u} = 25 \text{ V}$?



Rešitev:

- Voltmeter z vrtljivim železom je eden od voltmetrov, ki merijo pravilno efektivno vrednost napetosti, ki je definirana na periodo signala $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$.

- Za dano obliko napetosti je efektivno vrednost enaka:

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{T} \left[\left(\hat{u}^2 \cdot \frac{3}{4} T \right) + \left((-3\hat{u})^2 \cdot \frac{1}{4} T \right) \right] = \hat{u}^2 \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4} \right) = 3 \cdot \hat{u}^2$$

$$U = \sqrt{3} \cdot \hat{u} = \sqrt{3} \cdot 25 \text{ V} = 43,3 \text{ V}$$

- Voltmeter z vrtljivo tuljavico in vgrajenim usmernikom se odziva na usmerjeno srednjo vrednost $U_r = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt$. Lahko meri enosmerno in izmenično napetost. Običajno je inštrument narejen za merjenje sinusne veličine, zato je njegova skala pomnožena s faktorjem oblike za sinusni signal $F_0 = \frac{U}{U_r} = \frac{\hat{u}/\sqrt{2}}{2\hat{u}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111$, da nam kaže efektivno vrednost.

$$U^* = F_0 \cdot U_r$$

- Za dano obliko napetosti je usmerjena srednja vrednost enaka:

$$U_r = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt = \frac{1}{T} \left[\left(\hat{u} \cdot \frac{3}{4} T \right) + \left(|-3\hat{u}| \cdot \frac{1}{4} T \right) \right] = \hat{u} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) = 1,5 \cdot \hat{u}$$

- Voltmeter kaže napačno efektivno vrednost napetosti, ki ni sinusne oblike.

$$U^* = F_0 \cdot U_r = 1,11 \cdot 1,5 \cdot 25 \text{ V} = 41,7 \text{ V}$$

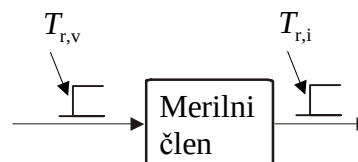
Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Dvižni čas signala na vhodu merilnega člena je $T_{r,v} = 8\text{ ns}$ in dvižni čas signala na izhodu je $T_{r,i} = 14\text{ ns}$. Do katere frekvence lahko uporabljamo merilni člen, da bo pogrešek amplitude pod 1%? Dinamično obnašanje merilnega člena aproksimiramo s členom 1. reda. Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Merilni člen zaradi svoje dinamike podaljša dvižni čas. Dvižni časi se geometrično seštevajo. Doprinos merilnega člena je tako:

$$T_{r,i}^2 = T_{r,v}^2 + T_{r,\zeta}^2 \Rightarrow T_{r,\zeta} = \sqrt{T_{r,i}^2 - T_{r,v}^2} = 11,49\text{ ns}$$



- Ker obnašanje merilnega člena aproksimiramo s členom 1. reda, lahko iz dvižnega časa določimo časovno konstanto in mejno frekvenco:

$$T_{r,v}^2 = T_r = \ln 9 \cdot \tau \Rightarrow \tau = T_r / \ln 9$$

$$f_{m,3dB} = \frac{0,35}{T_r} = 30,46\text{ MHz}$$

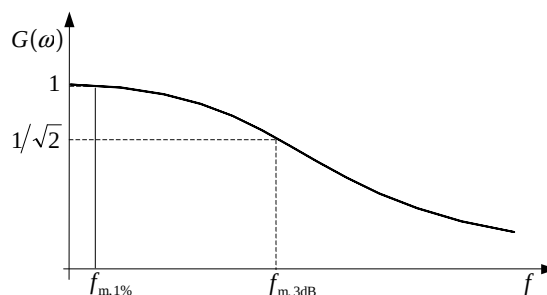
- Amplitudna karakteristika člena 1. reda upade za en odstotek pri frekvenci $f_{m,1\%}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_{m,1\%} \tau)^2}} = 0,99 \Rightarrow 1 + \left(2\pi f_{m,1\%} \frac{T_r}{\ln 9}\right)^2 = \left(\frac{1}{0,99}\right)^2$$

- Da bo pogrešek amplitude pod 1% lahko uporabljamo merilni člen do frekvence:

$$f_{m,1\%} = \frac{1}{2\pi} \frac{\ln 9}{T_r} \sqrt{\left(\frac{1}{0,99}\right)^2 - 1} = 4,34\text{ MHz}$$

- Skica razmer:



2. Skicirajte vezje za merjenje upornosti po UI metodi (varianta z manjšim sistematičnim pogreškom) in podajte merilni rezultat s standardno in razširjeno negotovostjo ($k = 2$)!

- voltmeter: $U_D = 20 \text{ V}$, $U = 7,60 \text{ V}$, $M_U = \pm(0,10\%U + 0,10\%U_D + 10 \text{ mV})$,
 $R_V = 10 \text{ M}\Omega$
- ampermeter: $I_D = 200 \text{ mA}$, $I = 167,3 \text{ mA}$, $M_I = \pm(0,10\%I + 0,10\%I_D + 1 \text{ dig})$,
 $U_{A_0} = 200 \text{ mV}$

Rešitev:

- Oceno upornosti dobimo iz kvocienta: $R_x = \frac{U}{I} = \frac{7,60 \text{ V}}{167,3 \text{ mA}} = 45,427 \Omega$

- Kadar priključimo voltmeter neposredno na upor, je izmerjena napetost tudi napetost na upor in je tok ampermetra prevelik za tok skozi končno upornost voltmetra. Sistematični pogrešek je sorazmeren razmerju R_x/R_V :

$$e_1 = -\frac{R_x}{R_x + R_V} \doteq -\frac{R_x}{R_V} = -4,54 \cdot 10^{-6}$$

- Če priključimo ampermeter neposredno pred upor, je tok ampermetra enak toku skozi upor in je napetost voltmetra prevelika za padec na upornosti ampermetra $R_A = U_{A_0}/I_D = 1 \Omega$. Sistematični pogrešek je sorazmeren kvocientu:

$$e_2 = -\frac{R_A}{R_x} = -2,2 \cdot 10^{-2}$$

- Izberemo prvo varianto z manjšim sistematičnim pogreškom $|e_1| < |e_2|$

- Standardna negotovost upornosti je sestavljena iz dveh prispevkov (voltmetra in ampermetra):

$$w(U) = \frac{m_U}{\sqrt{3}} = \frac{M_U/U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{20 \text{ V}}{7,60 \text{ V}} + \frac{10 \text{ mV}}{7,60 \text{ V}} \right) = 2,856 \cdot 10^{-3}$$

$$w(I) = \frac{m_I}{\sqrt{3}} = \frac{M_I/I}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(10^{-3} + 10^{-3} \frac{200 \text{ mA}}{167,3 \text{ mA}} + \frac{0,1 \text{ mA}}{167,3 \text{ mA}} \right) = 1,613 \cdot 10^{-3}$$

- Skupno standardno negotovost v relativni in absolutni obliki zapišemo:

$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)} = 3,28 \cdot 10^{-3} \rightarrow w_c(R_x) = 3,3 \cdot 10^{-3}$$

$$u_c(R_x) = w_c(R_x) \cdot R_x = 0,149 \Omega \rightarrow u_c(R_x) = 0,15 \Omega$$

- Tudi razširjeno negotovost s faktorjem razširitve $k = 2$ zaokrožimo na dve mesti:

$$U_c(R_x) = k \cdot u_c(R_x) = 2 \cdot u_c(R_x) = 0,298 \Omega \rightarrow u_c(R_x) = 0,30 \Omega$$

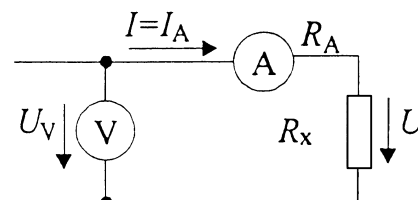
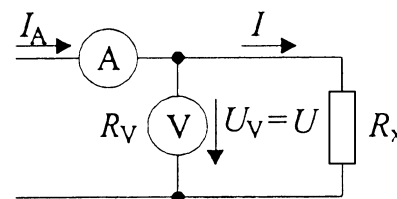
- Sistematični pogrešek je zanemarljiv, saj velja $e < w_c(R_x)/10$. Zato lahko rezultat za R_x zapišemo kar v obliki $R_x = U/I = 45,43 \Omega$.

- Merilni rezultat s standardno negotovostjo podamo v obliki:

$$R_x = 45,43 \Omega; \quad u_c(R_x) = 0,15 \Omega; \quad n = 1$$

- in merilni rezultat z razširjeno negotovostjo v obliki:

$$R_x = 45,43 \Omega; \quad u_c(R_x) = 0,30 \Omega; \quad n = 1$$



3. Dvema kondenzatorjema z enako nazivno vrednostjo, smo izmerili kapacitivnost z istim instrumentom. Standardna negotovost je 0,40%. Kondenzatorja vežemo zaporedno. Kolikšna je standardna negotovost kapacitivnosti te vezave? $r(C_1, C_2) = 1$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Impedanco zaporedne vezave dveh enakih kondenzatorjev ($C_1 = C_2 = C$) zapišemo v obliki:

$$Z = \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{1}{\omega \cdot C_s}$$

- Pri čemer je skupna kapacitivnost enaka: $C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C}{2}$

- Pri določanju standardne negotovosti zaporedne vezave kondenzatorjev moramo upoštevati standardni negotovosti merjenja kapacitivnosti $u(C)$, koeficienta občutljivosti c in korelacijski faktor r kot zahteva podana enačba.

- Ker smo posamezno kapacitivnost merili z istim instrumentom, sta njuni standardni negotovosti enaki: $u(C_1) = u(C_2) = u$
 - Koeficienta občutljivosti dobimo z delnim odvajanjem skupne enačbe:

$$c_1 = \frac{\partial C_s}{\partial C_1} = \frac{C_2(C_1 + C_2) - C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$c_2 = \frac{\partial C_s}{\partial C_2} = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

- Celotna standardna negotovost kapacitivnosti zaporedne vezave kondenzatorjev ob upoštevanju koeficienta korelacije $r(C_1, C_2) = 1$ je:

$$u_c(C_s) = \sqrt{(c_1 u(C_1))^2 + (c_2 u(C_2))^2 + 2 \cdot c_1 c_2 \cdot u(C_1) u(C_2)}$$

$$u_c(C_s) = \sqrt{\left(\frac{u}{4}\right)^2 + \left(\frac{u}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot u^2} = \sqrt{4 \left(\frac{u}{4}\right)^2} = \frac{u}{2}$$

- in v relativni obliki:

$$w_c(C_s) = u_c(C_s) / C_s = \frac{u}{2} \cdot \frac{2}{C} = w(C) = 4,0 \cdot 10^{-3}$$

4. Koliko je efektivnih stopenj prostosti ν_{ef} , če je izhodna veličina $y = P = I^2 R$, relativni standardni negotovosti vhodnih veličin $w(I) = 2\%$ in $w(R) = 3\%$, meritev toka $n_1 = 16$, meritev upornosti pa $n_2 = 13$?

$$\nu_{\text{ef}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/\nu_i}$$

Rešitev:

- Za izračun efektivnih stopenj prostosti po gornji enačbi potrebujemo skupno merilno negotovost, ki jo izračunamo iz posameznih prispevkov s pomočjo parcialnih odvodov.

- Izhodiščna enačba: $P = I^2 R$

- Delež k skupni negotovosti zaradi negotovosti toka:

$$w_1(P) = \frac{u_1(P)}{P} = \frac{\partial P}{\partial I} \frac{u(I)}{P} = 2IR \frac{u(I)}{P} = 2 \cdot w(I) = 2 \cdot (2 \cdot 10^{-2}) = 4 \cdot 10^{-2}$$

- Delež k skupni negotovosti zaradi negotovosti upora:

$$w_2(P) = \frac{u_2(P)}{P} = \frac{\partial P}{\partial R} \frac{u(R)}{P} = I^2 \frac{u(R)}{P} = w(R) = 3 \cdot 10^{-2}$$

- Ker imamo produkt vhodnih veličin, je skupno negotovost $u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)}$ primerneje izraziti v relativni obliki:

$$w_c(P) = \frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{w_1^2(P) + w_2^2(P)} = \sqrt{(4 \cdot 10^{-2})^2 + (3 \cdot 10^{-2})^2} = 5 \cdot 10^{-2}$$

- Število efektivnih stopenj prostosti je za eno manjše od števila meritev, ker z izračunom aritmetične sredine $\bar{x}$, ki sodeluje pri določanju eksperimentalnega standardnega odklona aritmetične sredine – standardne negotovosti tipa A

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n(n-1)}, \text{ zmanjšamo stopnjo prostosti za ena.}$$

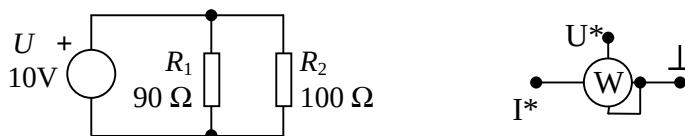
$$\nu_1 = n_1 - 1 = 15, \quad \nu_2 = n_2 - 1 = 12$$

- Število efektivnih stopenj prostosti se z negotovostmi v relativni obliki izrazi:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{\frac{u_c^4(P)}{\frac{u_1^4(P)}{\nu_1} + \frac{u_2^4(P)}{\nu_2}} \cdot \frac{P^4}{P^4}}{\frac{w_c^4(P)}{\frac{w_1^4(P)}{\nu_1} + \frac{w_2^4(P)}{\nu_2}}} = \frac{(5 \cdot 10^{-2})^4}{\frac{(4 \cdot 10^{-2})^4}{15} + \frac{(3 \cdot 10^{-2})^4}{12}} = 26,24$$

$$\rightarrow \nu_{\text{eff}} = 26$$

5. Kako bi priključili vatmeter s skupno izhodno sponko (glej sliko vatmetra), da bi z njim izmerili moč na upor R_1 v narisanim vezju ter da bo sistematični pogrešek glede na moč, ki je bila na R_1 pred priključitvijo, najmanjši? Skicirajte merilno vezje z vključenim vatmetrom. Koliko kaže vatmeter, če je njegova upornost v tokovni veji $10\ \Omega$, upornost v napetostni veji pa je zanemarljivo velika?

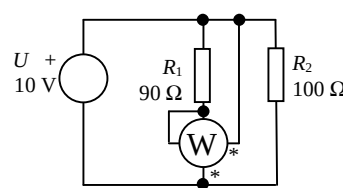
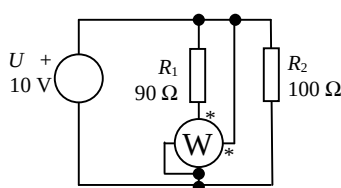


Rešitev:

- Možni priključitvi vatmetra s skupno izhodno sponko:

možnost 1:

možnost 2:



- Dodatni dve možnosti priključitve bi bili še, če bi vatmeter priključili pred uporom namesto za njim, vendar pa to ne spremeni kazanja vatmetra.
- Najprej izračunamo moč, ki jo je trošil R_1 pred priključitvijo vatmetra:

$$P_{R_1} = U_{R_1} \cdot I_{R_1} = U_{R_1} \frac{U_{R_1}}{R_1} = \frac{U^2}{R_1} = \frac{100\ \text{V}^2}{90\ \Omega} = 1,1\ \text{W}$$

- Po vključitvi vatmetra v vezje po prvi možnosti vezave nam kaže ob upoštevanju notranje upornosti v tokovni veji vatmetra R_{Wt} vrednost:

$$P_{W1} = U_{W1} \cdot I_{W1} = U \cdot \frac{U}{R_1 + R_{Wt}} = \frac{100\ \text{V}^2}{100\ \Omega} = 1\ \text{W},$$

- Sistematični pogrešek glede na moč pred priključitvijo znaša

$$E_1 = P_{W1} - P_{R_1} = 1\ \text{W} - 1,1\ \text{W} = -0,1\ \text{W}.$$

- Če bi izbrali drugo priključitev, bi vatmeter kazal:

$$P_{W2} = U_{W2} \cdot I_{W2} = \frac{U \cdot R_1}{R_1 + R_{Wt}} \cdot \frac{U}{R_1 + R_{Wt}} = \frac{U^2 \cdot R_1}{(R_1 + R_{Wt})^2} = \frac{100\ \text{V}^2 \cdot 90\ \Omega}{100\ \Omega^2} = 0,9\ \text{W},$$

- Sistematični pogrešek pa bi bil

$$E_2 = P_{W2} - P_{R_1} = 0,9\ \text{W} - 1,1\ \text{W} = -0,2\ \text{W}$$

- Ugotovimo lahko torej, da je prva priključitev ustrežnejša, ker da manjši sistematični pogrešek.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Pri vzorčenju sinusnega signala z digitalnim spominskim osciloskopom (enkratno proženje) smo dobili frekvenco prikazanega signala 2 MHz. Pri katerih frekvencah vhodnega signala je možno rekonstruirati prikazani signal, če je frekvenca vzorčenja $f_s = 20 \text{ MHz}$ in dvižni čas vertikalnega kanala osciloscopa $T_r = 4 \text{ ns}$, da amplitudni pogrešek ni večji kot 10%? Za prikaz je bila uporabljena interpolacija s funkcijo $y = \sin x/x$.

Rešitev:

- Frekvenco prikazanega signala $f' = 2 \text{ MHz}$ na DSO z enkratnim proženjem smo lahko dobili, kadar je bil na vходу signal $f = 2 \text{ MHz}$ in je bil pravilno razpoznan ali pa pri frekvencah, ki se nahajajo okoli mnogokratnikov vzorčne frekvence $f_s = 20 \text{ MHz}$.

$$f' = |kf_s - f| \quad k = 1, 2, \dots$$

- Za iskane frekvence zapišemo:

$$f = kf_s \pm f'$$

k	f/MHz
1	18, 22
2	38, 42
3	58, 62
..	..

- Ker imamo najboljšo možno interpolacijo s funkcijo $y = \sin x/x$, pogrešek zaradi interpolacije zanemarimo. Pogrešek, ki preostane, je pogrešek zaradi dinamike analognega dela osciloscopa (tipično aproksimiran s členom 1. reda). Mejno frekvenco osciloscopa dobimo iz dvižnega časa:

$$f_m = f_{m,1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi(T_r/\ln 9)} = \frac{0,35}{T_r}$$

- Nas zanima, do katere frekvence upade amplituda za manj kot 10%.

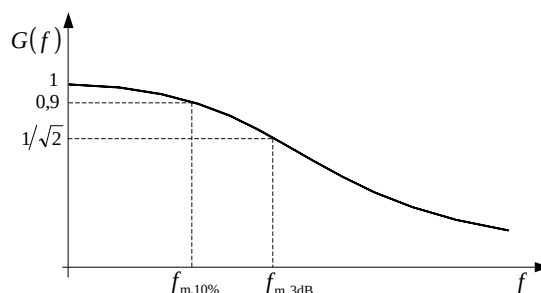
$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f/f_{m,1/\sqrt{2}}\right)^2}} = 0,9$$

- in od tod dobimo

$$f_{m,10\%} = \frac{0,35}{T_r} \sqrt{\left(\frac{1}{0,9}\right)^2 - 1} = 42,37 \text{ MHz}$$

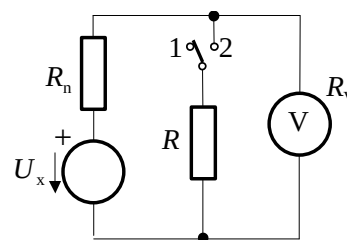
- Frekvence, pri katerih smo lahko rekonstruirali sinusni signal $f' = 2 \text{ MHz}$, in istočasno amplitudni pogrešek ni bil večji kot 10%, so: $f/\text{MHz} = 2, 18, 22, 38, 42$

- Skica razmer:



2. Če je preklopnik v položaju 1, pokaže voltmetr $U_1 = 10\text{ V}$, če je v položaju 2 pa $U_2 = 9\text{ V}$. Koliko je neznana napetost U_x ? Koliko je sistematični pogrešek merilne metode, če proglasimo za neznano napetost kar U_1 ?

$$R = 10\text{ M}\Omega, \quad R_V = 10\text{ M}\Omega$$



Rešitev:

- Ko je preklopnik v položaju 1, nam kaže voltmetr padec napetosti U_1 na upor $R_1 = R_V$:

$$R_1 = R_V = 10\text{ M}\Omega, \quad U_1 = U_x \frac{R_1}{R_1 + R_n}$$

- Ko je preklopnik v položaju 2, nam kaže voltmetr padec napetosti U_2 na vzporedni kombinaciji uporov R_V in R :

$$R_2 = \frac{R_V R}{R_V + R} = 5\text{ M}\Omega, \quad U_2 = U_x \frac{R_2}{R_2 + R_n}$$

- Iz dveh enačb izračunamo neznano napetost:

$$U_x = U_1 U_2 \frac{R_2 - R_1}{R_2 U_1 - R_1 U_2} = 11,25\text{ V}$$

- Če proglasimo za neznano napetost kar U_1 , je sistematični pogrešek enak:

$$e = \frac{U_1}{U_x} - 1 = -11,1\%$$

3. Digitalni amperimeter kaže $I = 16,72 \text{ mA}$. Izrazite popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo, če smo instrument uporabili pri temperaturi $t = 8^\circ \text{C}$!

- meja pogreška: $M_I = \pm(0,15\% I + 2 \text{ dig})$
- referenčno območje: $23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$
- nazivno območje uporabe: $0^\circ \text{C} \div 50^\circ \text{C}$
- temperaturni koeficient: $\pm(0,012\% I + 1 \text{ dig})/^\circ \text{C}$

Rešitev:

- Če bi uporabili instrument pri referenčnih pogojih, bi bila meja lastnega pogreška:

$$M_I = \pm \left(\frac{0,15}{100} I + 0,02 \text{ mA} \right) = \pm 0,045 \text{ mA}$$

- Ker smo instrument uporabili izven referenčnega območja v nazivnem območju uporabe za vplivno veličino temperaturo, se meja pogreška poveča za mejo spremembe kazanja $M_{I,s} = M_I + M_I^0$. V našem primeru smo izstopili iz referenčnega območja na spodnji meji pri $23^\circ \text{C} - 5^\circ \text{C} = 18^\circ \text{C}$, zato moramo upoštevati razliko temperature do te vrednosti:

$$M_I^0 = \pm \left(\left(\frac{0,012}{100} I + 0,01 \text{ mA} \right) / ^\circ \text{C} \right) \cdot (18^\circ \text{C} - 8^\circ \text{C}) = \pm 0,12 \text{ mA}$$

- Skupna meja pogreška (lastnega in spremembe kazanja) je:

$$M_{I,s} = M_I + M_I^0 = \pm 0,165 \text{ mA}$$

- in standardna negotovost pri privzeti pravokotni porazdelitvi gostote verjetnosti pogreška:

$$u(I) = \frac{M_{I,s}}{\sqrt{3}} = 0,09535 \text{ mA} = 0,096 \text{ mA}$$

- Ker je negotovost manjša od ločljivosti, zaokrožimo na mestu, ki ga določa ločljivost:

$$u(I) = 0,096 \text{ mA} \rightarrow 0,10 \text{ mA}$$

- Merilni rezultat podamo v obliki:

$$I = 16,72 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,10 \text{ mA}, \quad n = 1$$

4. Upornost uporovnega senzorja temperature znaša $R_t = 3050 \Omega$. Zapišite merilni rezultat za izmerjeno temperaturo, če je nelinearnost senzorja $n = 0,5\%$, negotovost ohmmetra pa je zanemarljiva. Senzor ima pri 0°C upornost 9800Ω , pri 100°C pa 200Ω .

Rešitev:

- Ker ne poznamo enačbe za upornost senzorja v odvisnosti od temperature, lahko temperaturo, ki ustreza $R_t = 3050 \Omega$, izračunamo iz linearne karakteristike. Odstopanje dejanske karakteristike od linearne je največ $+0,5\%$ oz. $-0,5\%$. Ker je predznak nedoločen, imamo opravka z negotovostjo izmerjene temperature.
- Najprej zapišimo enačbo nazivne (linearne) karakteristike.

$$R_n = \frac{R_{t,\max} - R_{t,\min}}{t_{\max} - t_{\min}} \cdot (t - t_{\min}) + R_{t,\min} = \frac{200 \Omega - 9800 \Omega}{100^\circ\text{C}} \cdot t + 9800 \Omega = -96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \cdot t + 9800 \Omega$$

- Zaradi nelinearnosti n se upornost R_n od dejanske upornosti R_t lahko razlikuje za največ $\pm 0,5\%$. Velja torej

$$n = \left| \frac{R_t - R_n}{R_{t,\max} - R_{t,\min}} \right| = \pm 0,5\%$$

$$\Rightarrow +0,005 = \frac{3050 \Omega - R_n}{200 \Omega - 9800 \Omega} \Rightarrow R_{n,\max} = 3098 \Omega$$

$$\Rightarrow -0,005 = \frac{3050 \Omega - R_n}{200 \Omega - 9800 \Omega} \Rightarrow R_{n,\min} = 3002 \Omega$$

- Iz linearne karakteristike izračunamo naslednji dve temperaturi:

$$t_{\max} = \frac{R_{n,\max} - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = \frac{3098 \Omega - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = 69,813^\circ\text{C}$$

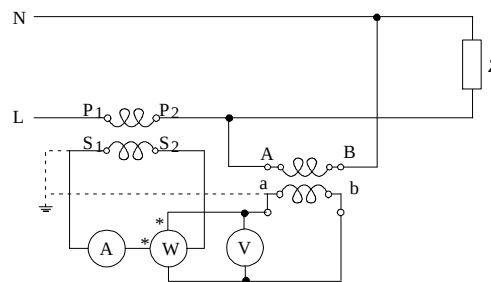
$$t_{\min} = \frac{R_{n,\min} - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = \frac{3002 \Omega - 9800 \Omega}{-96 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}} = 70,813^\circ\text{C}$$

- Iz tega zaključimo, da (posredno) izmerjena temperatura leži na intervalu $[t_{\max}, t_{\min}]$. Od tu dobimo mejo pogreška M_t ter standardno negotovost, za katero predpostavimo enakomerno porazdelitev, ter (ustrezno zaokrožen) merilni rezultat:

$$t_i = \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2} = 70,31^\circ\text{C}, \quad u(t) = \frac{M_t}{\sqrt{3}} = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{2\sqrt{3}} = 0,29^\circ\text{C}, \quad n = 1$$

5. Kolikšne so delovna, jalova in navidezna moč porabnika?

- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $\alpha_D = 15000$, $\alpha = 12427$;
- voltmeter: $U = 102 \text{ V}$;
- ampermeter: $I = 4,72 \text{ A}$;
- tokovnik: $I_{pn} = 75 \text{ A}$, $I_{sn} = 5 \text{ A}$
- napetostnik: $U_{pn} = 35 \text{ kV}$, $U_{sn} = 100 \text{ V}$



Rešitev:

- Meritev moči porabnika se izvaja preko merilnih transformatorjev. Ker so merilni instrumenti priključeni na sekundarni strani merilnih transformatorjev, je seveda potrebno upoštevati prestavno razmerje, ki je enako razmerju primarnega nazivnega toka in sekundarnega nazivnega toka za tokovni merilni transformator. Enako je pri napetostnem merilne transformatorju. Torej

$$K_{in} = \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \quad \text{oziroma} \quad K_{un} = \frac{U_{pn}}{U_{sn}}.$$

- Delovna moč je moč, ki jo kaže vatmeter priključen na sekundarno stran merilnih transformatorjev, pomnožena s prestavnima razmerjema. Delovna moč je tako

$$P = K_{un} \cdot K_{in} \cdot P_W = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} \cdot \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \cdot \left(U_n \cdot I_n \cdot \frac{\alpha}{\alpha_D} \right)$$

$$P = \frac{35 \text{ kV}}{100 \text{ V}} \cdot \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} \cdot 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{12427}{15000} = 2,175 \text{ MW}$$

- Navidezna moč je produkt napetosti in toka, ki ju merimo z voltmetrom oziroma ampermetrom zopet na sekundarni strani merilnih transformatorjev.

$$S = K_{un} \cdot K_{in} \cdot U \cdot I = \frac{U_{pn}}{U_{sn}} \cdot \frac{I_{pn}}{I_{sn}} \cdot U \cdot I = \frac{35 \text{ kV}}{100 \text{ V}} \cdot \frac{75 \text{ A}}{5 \text{ A}} \cdot 102 \text{ V} \cdot 4,72 \text{ A} = 2,528 \text{ MVA}$$

- Jalova moč se izpelje iz enačbe za navidezno moč $S^2 = P^2 + Q^2$.

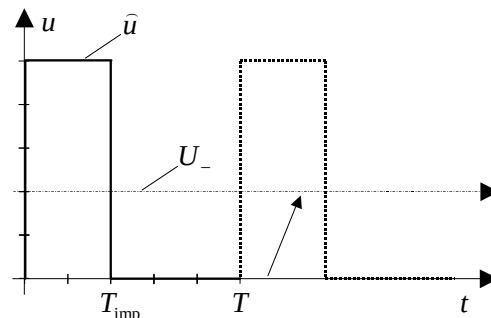
$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(2,528 \text{ MVA})^2 - (2,175 \text{ MW})^2} = 1,288 \text{ MVAr}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Pravokotno pulzno napetost u frekvence $f = 20\text{ kHz}$ in širine pulza $T_{\text{imp}} = 20\mu\text{s}$ merimo z voltmetrom, ki meri pravilno efektivno vrednost. Koliko je temenska vrednost $\hat{u}$ vhodne napetosti, če voltmeter kaže $U = 110\text{ mV}$ in je enosmerna komponenta napetosti blokirana?

Rešitev:

- Na podlagi podatkov ima signal pravokotno pulzno obliko, kjer je perioda ponavljanja pulzov enaka $T = 1/f = 50\mu\text{s}$.



- Enosmerna komponenta signala, ki je blokirana, je enaka srednji vrednosti. Ker imamo v dveh intervalih periode konstantni vrednosti $\hat{u}$ in nič, lahko zapišemo:

$$U_- = \bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt = \frac{1}{T} \left(\hat{u} \frac{2}{5} T + 0 \frac{3}{5} T \right) = \frac{2}{5} \hat{u}$$

- Po blokirani enosmerni komponenti imamo tudi sedaj v dveh intervalih periode konstantni vrednosti $(\hat{u} - U_-)$ in $(-U_-)$. Voltmeter se odziva na efektivno vrednost signala $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 \, dt}$, kar nam pri dani obliki signala da:

$$U^2 = \frac{1}{T} \left((\hat{u} - U_-)^2 \frac{2}{5} T + (-U_-)^2 \frac{3}{5} T \right) = \frac{1}{T} \left(\left(\hat{u} - \frac{2}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{2}{5} T + \left(-\frac{2}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{3}{5} T \right) =$$

$$U^2 = \left(\left(\frac{3}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5} \hat{u} \right)^2 \frac{3}{5} \right) = \frac{9 \cdot 2}{25 \cdot 5} \hat{u}^2 + \frac{4 \cdot 3}{25 \cdot 5} \hat{u}^2 = \frac{30}{125} \hat{u}^2$$

- Od tod dobimo za temensko vrednost vhodne napetosti

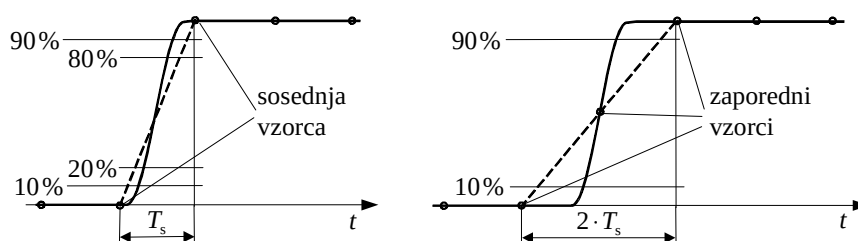
$$\hat{u} = \sqrt{\frac{125}{30}} U = 224,53\text{ mV}$$

- in zaokrožimo na ločljivost voltmetra: $\hat{u} = 225\text{ mV}$

2. Kolikšen je najmanjši dvižni čas, ki ga lahko pomerimo z osciloskopom pri enkratnem proženju, če perioda vzorčenja osciloscopa $T_s = 1\text{ns}$ ni povsem točna in ima mejo pogreška $M_{T_s} = \pm 50\text{ps}$. Osciloskop ima definiran dvižni čas kot čas, ki ga signal porabi za prehod od 20% do 80% obeh stacionarnih stanj? Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Pri digitalnih spominskih osciloskopih je dvižni čas določen s periodo vzorčenja in se spreminja pri linearni interpolaciji od $0,8T_s$ (leva slika) do $1,6T_s$ (desna slika). Iz obeh skrajnih primerov vidimo, da se pri enakem skoku napetosti merjenega signala uporabljajo dva ali trije vzorci, ker dogodek ni sinhroniziran z vzorci.



- Pri enkratnem proženju smo pri merjenju dvižnega časa omejeni s periodo vzorčenja T_s .
- Če dvižni čas definiramo kot čas, ki je potreben za prehod od 20% do 80% nivoja signala, bo tudi izmerjeni dvižni čas znašal

$$T_{r,\min} = (0,8 - 0,2) \cdot T_s = 0,6T_s$$

- Ker osciloskop periode vzorčenja nima točno nastavljene, bomo v najboljšem primeru izmerili minimalni dvižni čas

$$T'_{r,\min} = 0,6 \cdot (T_s - M_{T_s}) = 0,6 \cdot 950 \text{ ps} = 570 \text{ ps}$$

3. Koliko je še lahko notranja upornost R_0 napetostnega vira ($U_0 = 7\text{ V}$), da bi z voltmetrom merili napetost praznega teka brez korekcije zaradi priključitve instrumenta?

$$M_U = \pm(0,5\%U + 0,5\%U_D), U_D = 10\text{ V}, R_V = 10\text{ M}\Omega$$

Rešitev:

- Sistematični pogrešek zaradi priključitve instrumenta je zanemarljiv, kadar je desetkrat manjši od negotovosti izmerjene vrednosti $|E| \leq \frac{1}{10}u(U)$.

- V našem primeru je enak razliki napetosti, ki jo kaže priključen voltmeter, in napetostjo praznega teka:

$$E = U'_0 - U_0 = \frac{R_V}{R_0 + R_V}U_0 - U_0 = \frac{R_V - R_0 - R_V}{R_0 + R_V}U_0 = \frac{-R_0}{R_0 + R_V}U_0$$

- Iz absolutne vrednosti sistematičnega pogreška, ki je sicer negativen, izračunamo iskano vrednost notranje upornosti:

$$|E| = \frac{R_0}{R_0 + R_V}U_0 \quad \rightarrow \quad R_0 = \frac{E R_V}{U_0 - E}$$

- Merilna negotovost izmerjene napetosti je enaka

$$u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{0,5}{100} 7\text{ V} + \frac{0,5}{100} 10\text{ V} \right) = 49,07\text{ mV}$$

- Zanemarljivi sistematični pogrešek mora biti manjši kot $E \leq 4,907\text{ mV}$, kar nam da vrednost za notranjo upornost:

$$E \leq 4,907\text{ mV} \quad \rightarrow \quad \left(R_0 = \frac{E R_V}{U_0 - E} \right) \leq 7,016\text{ k}\Omega$$

4. Podajte popolni merilni rezultat z razširjeno negotovostjo za hipotenuzo trikotnika c , če je stopnja zaupanja $p=95\%$! Rezultati ponovljenih meritev katet so naslednji:

$$\bar{a} = 172,35 \text{ mm}, s(a) = 1,42 \text{ mm}, n_1 = 5$$

$$\bar{b} = 294,64 \text{ mm}, s(b) = 1,68 \text{ mm}, n_2 = 8$$

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/v_i}, \quad v_i = n_i - 1$$

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(v)$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Vrednost hipotenuze izračunamo s pomočjo srednjih vrednosti katet:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 341,346 \text{ mm}$$

- Standardna negotovost posredno merjene veličine katete je sestavljena iz deležev negotovosti obeh katet: $u_c(c) = \sqrt{u_a^2 + u_b^2}$

- Delež ene katete sestavlja koeficient občutljivosti $\partial c / \partial a$ oz. $\partial c / \partial b$ in standardna negotovost merjenja katete pri več meritvah $s(a) / \sqrt{n_1}$ oz. $s(b) / \sqrt{n_2}$.

- Koeficienta občutljivosti:

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} 2a = \frac{a}{c} = 0,50491 \quad \text{in} \quad \frac{\partial c}{\partial b} = \frac{b}{c} = 0,86317$$

- Deleža negotovosti katet:

$$u_a = \frac{\partial c}{\partial a} u(a) = \frac{a}{c} \frac{s(a)}{\sqrt{n_1}} = 0,3207 \text{ mm} \quad \text{in} \quad u_b = \frac{\partial c}{\partial b} u(b) = \frac{b}{c} \frac{s(b)}{\sqrt{n_2}} = 0,5127 \text{ mm}$$

- Standardna merilna negotovost katete je $u_c(c) = 0,6047 \text{ mm}$

- Efektivno število prostostnih stopenj, ki določajo raven zaupanja posredno merjene veličine na podlagi večkrat neposredno merjenih veličin, določajo negotovosti le-teh in število ponovitev meritev. Efektivno število prostostnih stopenj vedno zaokrožimo navzdol, saj je s tem pri enaki stopnji zaupanja interval negotovosti večji.

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(c)}{u_a^4/(n_1-1) + u_b^4/(n_2-1)} = \frac{u_c^4(c)}{u_a^4/4 + u_b^4/7} = 10,69 \rightarrow v_{\text{eff}} = 10$$

- Iz tabele dobimo za faktor razširitve: $v_{\text{eff}} = 10 \rightarrow k = t_{95\%} = 2,23$

- Zaokrožena razširjena negotovost je: $U_{95} = t_{95\%} \cdot u_c(c) = 1,348 \text{ mm} \rightarrow 1,4 \text{ mm}$
- Merilni rezultat:

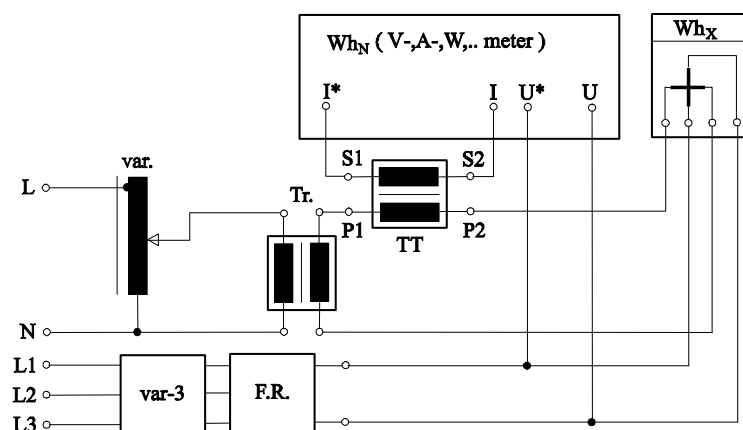
$$c = 341,3 \text{ mm}; U(c) = 1,4 \text{ mm}; k = 2,23; v_{\text{eff}} = 10; p = 95\%$$

5. Skicirajte vezje za preskus razreda enofaznega indukcijskega števca delovne energije in izračunajte, če je pri spodnjih podatkih pogrešek še v dopustnih mejah!

- indukcijski števec: $U_r = 220\text{ V}$, $10 - 40\text{ A}$, $K = 600\text{ vrt/kWh}$, $r = \textcircled{2}$, $N = 174\text{ vrt}$
- digitalni števec el. energije: $W_N = 29,18\text{ Wh}$
- tokovnik: $I_{pn} = 10\text{ A}$, $I_{sn} = 1\text{ A}$

Rešitev:

- Vezalna shema preskušanja razreda točnosti indukcijskega števca električne energije.



- Za izračun lastnega pogreška pri merjenju energije potrebujemo energijo preskušane števca W_s in referenčno energijo W :

$$e = \frac{W_s - W}{W}$$

- Energija preskušane števca se izračuna iz števila vrtljajev in konstante števca.

$$W_s = \frac{N}{K}$$

- Referenčna energija pa je energija referenčnega števca električne energije W_N pomnožena s tokovno konstanto $K_i = I_{pn}/I_{sn}$, ker je instrument na sekundarni strani tokovnega transformatorja.

$$W = K_i \cdot W_N$$

- Lastni pogrešek je tako

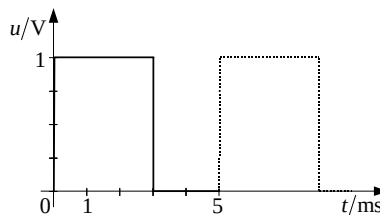
$$e = \frac{W_s - W}{W} = \frac{\frac{174\text{ vrt.}}{600\text{ vrt/kWh}} - \frac{10\text{ A}}{1\text{ A}} \cdot 29,18\text{ Wh}}{\frac{10\text{ A}}{1\text{ A}} \cdot 29,18\text{ Wh}} = -0,0062 \rightarrow e = -0,62\%$$

- Števec je prestal preskus, saj je lastni pogrešek e manjši kot dopustna maksimalna vrednost lastnega pogreška m , ki jo določena z razredom $\textcircled{r}$ podanim na izmerjeno vrednost kot referenčno vrednostjo:

$$|e| = 0,0062 < m = \frac{r}{100} = 0,02$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko časa po prehodu v novo stacionarno stanje moramo počakati z meritvijo napetosti $U = 1\text{V}$ z digitalnim voltmetrom ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$; $U_D = 1,200\text{V}$), katerega dinamično obnašanje aproksimiramo s členom prvega reda $f_m = 1\text{kHz}$, da bo dinamični pogrešek zanemarljiv? Skicirajte približni potek dinamičnega pogreška $E(t)$ za dani vhodni signal?



Rešitev:

- Karakteristika odziva člena 1. reda na stopničasto obliko signala je:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = 1 - e^{-t/\tau}$$

- Dinamični pogrešek predstavlja razliko med izmerjeno (izhodno) vrednostjo in pravo (vhodno) vrednostjo signala.. V relativni obliki ga zapišemo:

$$e_{din} = \frac{U_{iz} - U_{vh}}{U_{vh}} = \frac{U_{iz}}{U_{vh}} - 1 = -e^{-t/\tau}$$

- Ima negativni predznak in eksponentno upada v odvisnosti od časovne konstante: $\tau = \frac{1}{2\pi f_m} = 159,2\mu\text{s}$

- Ker ima sistematični značaj pogreška, je zanemarljiv, kadar je dovolj majhen proti standardni negotovosti merilnega rezultata:

$$|e_{din}| \leq \frac{1}{10} w(U)$$

- Kadar je podana mejna vrednost lastnega pogreška, privzamemo enakomerno pravokotno porazdelitev pogreška in zapišemo standardno negotovost v relativni obliki:

$$w(U) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_U}{U} = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} + 10^{-3} \frac{U_D}{U}) = 1,27 \cdot 10^{-3}$$

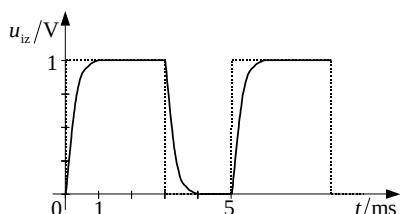
- Dinamični pogrešek mora biti manjši od:

$$|e_{din}| \leq \frac{1}{10} w(U) \quad \rightarrow \quad e^{-t/\tau} \leq 1,27 \cdot 10^{-4}$$

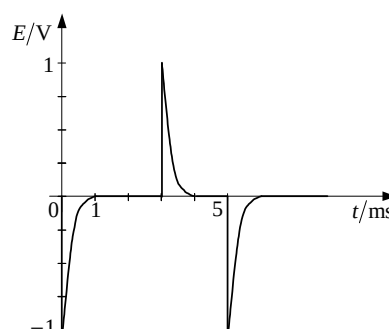
- in odzivni čas daljši od:

$$t \geq -\tau \ln(1,27 \cdot 10^{-4}) \quad \rightarrow \quad t \geq 1,428\text{ms}$$

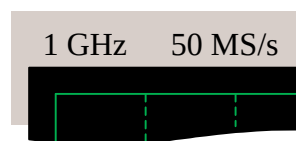
- Skica pogreška:



→



2. Z digitalnim osciloskopom merimo dvižni čas T_r neperiodičnega digitalnega signala, katerega prava vrednost znaša $T_r = 1\text{ ns}$. Kakšen dvižni čas T_r' izmerimo, če je osciloskop označen tako kot na izseku na sliki?



Rešitev:

- Z levo oznako na digitalnem osciloskopu je podana pasovna širina oziroma mejna frekvenca:

$$B = f_{m,zg} - f_{m,sp} \doteq f_{m,zg} \Big|_{f_{m,sp} < 10\text{ Hz}} = 1\text{ GHz}$$

- z desno pa vzorčna frekvenca:

$$f_s = 50\text{ M} \frac{\text{vzorcev(Samples)}}{\text{sekundo}} = 50\text{ MHz}$$

- Ker gre za neperiodičen signal, lahko pomerimo dvižni čas samo z enkratnim proženjem.

- Če bi imeli dovolj veliko vzorčno frekvenco, tako da bi bilo veliko število vzorcev v dvižnem času tudi pri enkratnem proženju, bi bil skupni dvižni čas $T_{r,sk}$ geometrijsko podaljšan zaradi dinamičnega prispevka osciloskopa:

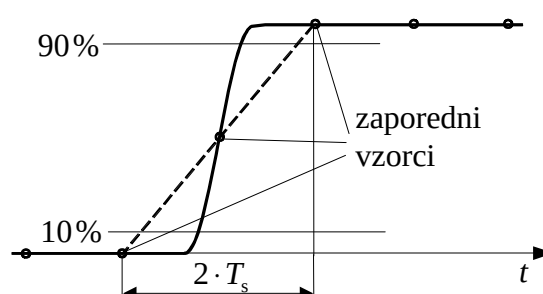
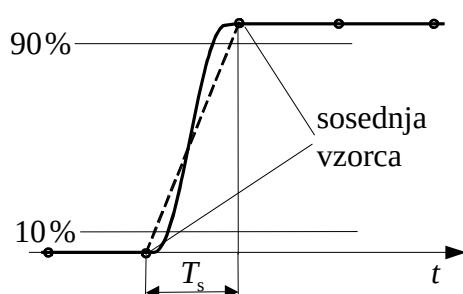
$$T_{r,sk} = \sqrt{T_{r,DSO}^2 + T_r^2} = \sqrt{\left(\frac{0,35}{f_m}\right)^2 + T_r^2} = \sqrt{(0,35\text{ ns})^2 + (1\text{ ns})^2} = 1,06\text{ ns}$$

- Ta dvižni čas je precej krajši od vzorčnega časa $T_s = 1/f_s = 20\text{ ns}$, zato bo izmerjeni dvižni čas T_r' pri enkratnem proženju odvisen le od periode vzorčenja T_s in bo zaradi nesinhronizacije z merjenim signalom zavzel vrednosti med

$$0,8 \cdot T_s \leq T_r' \leq 1,6 \cdot T_s$$

$$\text{oz. } \frac{0,8}{50\text{ MHz}} \leq T_r' \leq \frac{1,6}{50\text{ MHz}},$$

- kar pomeni $16\text{ ns} \leq T_r' \leq 32\text{ ns}$



3. Rezultat kalibracije voltmetra v štirih točkah je prikazan v tabeli. Prva kolona predstavlja referenčno vrednost, druga kolona kaže izmerjeno vrednost. Preračunana merilna negotovost voltmetra je 0,3V. Koliko znaša pogrešek kalibriranega instrumenta (kolona tri) in koliko je korekcija kalibriranega instrumenta (kolona štiri)?

U_{ref}/V	U_i/V	E/V	K/V
10,0	10,2		
15,0	14,9		
20,0	19,8		
25,0	25,1		

Pri uporabljanju voltmetra ste izmerili 10,1V . Zapišite enačbo in pravo vrednost rezultata!

Rešitev:

- Pogrešek kalibriranega instrumenta je razlika izmerjene vrednosti in referenčne vrednosti. Korekcija pa ima obratni predznak pogreška in se prišteva k rezultatu.

U_{ref}/V	U_i/V	E/V	K/V
10,0	10,2	+ 0,2	- 0,2
15,0	14,9	- 0,1	+0,1
20,0	19,8	- 0,2	+0,2
25,0	25,1	+0,1	- 0,1

- Če pri uporabi instrumenta izmerimo z voltmetrom 10,1V , znaša prava vrednost

$$U = U_i + K = 10,1\text{V} + (-0,2\text{V}) = 9,9\text{V}$$

- pri tem uporabimo korekcijo $K = -0,2\text{V}$ za izmerjeno točko $U_i = 10,2\text{V}$ iz tabele, saj sta vrednosti 10,1V in 10,2V zelo blizu ($\Delta U/U \approx 1\%$) in se lastni pogrešek instrumenta zelo malo spremeni $E_{10,1\text{V}} \approx E_{10,2\text{V}}$.

- Merilni rezultat je enak

$$\underline{\underline{U = 9.9\text{V} \quad , \quad u(U) = 0,3\text{V} \quad , \quad n = 1}}$$

4. Prikrojena veličinska enačba $E/(V/m) \approx 0,3 \frac{\sqrt{P/kW}}{r/km}$ podaja jakost električnega polja na razdalji r od izvora, ki seva z močjo P . Ali je uporabna za približno oceno, če je ustrezna veličinska enačba $E = \sqrt{P/2\pi\epsilon_0 c_0 r^2}$ $\epsilon_0 \approx 8,85 \text{ pF/m}$, $c_0 \approx 300\,000 \text{ km/s}$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P/2\pi\epsilon_0 c_0 r^2}$
- Pri prehodu na prikrojeno veličinsko enačbo moramo vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, množiti in deliti z želeno enoto :

$$E \frac{V/m}{V/m} = \sqrt{P \frac{kW}{kW} / \epsilon_0 c_0 2\pi \left(r \frac{km}{km}\right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številski faktor:

$$E/V/m = \sqrt{P/kW / (r/km)^2} \cdot \frac{\sqrt{10^3 W}}{V/m} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 c_0 2\pi}} \frac{1}{10^3 m} = \sqrt{P/kW / (r/km)^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

$$K = \frac{\sqrt{10^3 VA}}{10^3 V} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 c_0 2\pi}}$$

- Upoštevajoč vrednosti za $\epsilon_0 \doteq 8,85 \text{ pF/m}$ in $c_0 \doteq 300\,000 \text{ km/s}$

$$\text{dobimo: } K = \frac{\sqrt{10^3}}{10^3} \frac{\sqrt{VA}}{V} \sqrt{\frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot 2\pi \cdot 300 \cdot 10^6 \text{ m/s}}}$$

$$\text{in končno } K = 3,1623 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{A}{V}} \sqrt{60 \frac{s}{F}} = 0,245 \sqrt{\frac{A}{V} \cdot \frac{V}{As}} = 0,245$$

- Prikrojena veličinska enačba je: $E/V/m = 0,245 \cdot \sqrt{P/kW} / r/km$
- Enačba $E/(V/m) \approx 0,3 \frac{\sqrt{P/kW}}{r/km}$ je neuporabna, ker je sistematični pogrešek večji, kot je pogrešek zaokrožitve koeficienta na eno cifro $K = 0,245 \rightarrow 0,2$ ($e = \frac{0,2}{0,245} - 1 = -0,184 \rightarrow e = -18,4\%$):

$$e = \frac{0,3}{0,245} - 1 = 0,224 \rightarrow e = 22,4\%$$

5. Katere vrednosti lahko pričakujemo s 95 odstotno verjetnostjo na prikazovalniku voltmetra, ko merimo napetost vira, ki ima notranjo upornost $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ in napetost praznega teka, ki je bila določena na podlagi devetih meritev:

$$U_0 = 6,8925 \text{ V}, u(U_0) = 20 \text{ mV} \quad (n = 9) ?$$

Uporabljeni voltmeter ima podatke:
 $M_U = \pm(0,02\%U + 0,01\%U_D + 2\text{dig})$ $U_D = 10 \text{ V}$,
 $R_V = 10 \text{ M}\Omega$, ločljivost $\Delta U_q = 100 \mu\text{V}$

Negotovosti notranje upornosti R_0 in upornosti voltmetra R_V zanemarite!

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(v)$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Napetostni delilnik nam da: $U_V = U_0 \frac{R_V}{R_0 + R_V} = U_0 \cdot 0,999 = 6,885614 \text{ V}$
- Standardna negotovost je sestavljena iz prispevka voltmetra – negotovost tipa B - in prispevka negotovosti napetosti na vhodu, ki je bila ocenjena z devetimi meritvami – negotovost tipa A:

$$u_B(U_V) = \frac{1}{\sqrt{3}} M_U = \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \cdot 10^{-4} U_V + 1 \cdot 10^{-4} U_D + 0,2 \text{ mV}) = 1,488 \text{ mV}$$

$$u_A(U_V) = \frac{\partial U_V}{\partial U_0} u_A(U_0) = \frac{R_V}{R_0 + R_V} u_A(U_0) = 19,98 \text{ mV} \rightarrow u_A(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- Skupno standardno negotovost sestavljata oba prispevka.:

$$u_c(U_V) = \sqrt{u_A^2(U_V) + u_B^2(U_V)} = 20,05 \text{ mV} \rightarrow u_c(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- v danem primeru je prispevek negotovosti tipa A prevladujoč. Zato je prevladujoča tudi porazdelitev pogreška tega prispevka.
- Ker je skupna standardna negotovost tipa A dobljena na manjšem številu meritev, uporabimo pri določanju faktorja razširitve t-porazdelitev in število prostostnih stopenj $\nu_{\text{eff}} = n - 1 = 9 - 1 = 8$

$$\text{Iz tabele dobimo za faktor razširitve: } \nu_{\text{eff}} = 8 \rightarrow k = t_{95\%} = 2,31$$

- Razširjena negotovost je: $U_{95}(U_V) = t_{95\%} \cdot u_c(U_V) = 46,2 \text{ mV}$
- S 95 odstotno verjetnostjo lahko pričakujemo rezultate med $U_V - U_{95}(U_V)$ in $U_V + U_{95}(U_V)$:

$$6,839414 \text{ V} < U_V < 6,931814 \text{ V} \rightarrow 6,8394 \text{ V} < U_V < 6,9318 \text{ V}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko je največji informacijski pretok digitalnega voltmetra, ki ima merilno območje $-200\text{ V} \dots +200\text{ V}$, mejo pogreška $M_U = \pm(0,05\%U + 2\text{ dig})$, ločljivost $\Delta U_q = 10\text{ mV}$ in naredi 15 meritev v sekundi?

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar je pogrešek odvisen od izmerjene vrednosti v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj v območju od $x_{\min}$ do $x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m_{\max} = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2(ax + b)} \Rightarrow m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max} + b}{ax_{\min} + b} \right|$$

- Če vzamemo za enoto informacije bit, ustreza številu amplitudnih stopenj m naslednja množina informacije kot dvojiški logaritem m :

$$S = \text{lb}(m) = \log_2(m)$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas $T_M = 1/f_M$, je hitrost prenosa ali **informacijski pretok** enak:

$$I = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m) = \frac{S}{T_M} = f_M \cdot S$$

- Za dani voltmeter zapišemo mejni pogrešek v obliki:

$$M_U = \pm(0,05\%U + 2\text{ dig}) = 0,5 \cdot 10^{-3}U + 20\text{ mV}$$

- In maksimalno število neodvisnih amplitudnih stopenj na merilnem območju ($x_{\min} = -200\text{ V}$, $x_{\max} = +200\text{ V}$):

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 200\text{ V} + 20\text{ mV}}{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot (-200\text{ V}) + 20\text{ mV}} \right| = 406,5$$

- Največja množina informacije in maksimalni informacijski pretok sta:

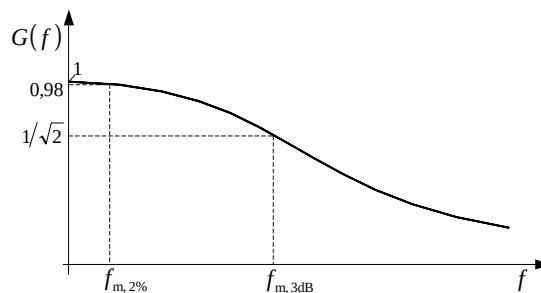
$$S = \text{lb}(m_{\max}) = 8,67\text{ bit} \Rightarrow I_{\max} = f_M \cdot S = 130,0\text{ bit/s}$$

2. Do katere frekvence signalna smemo uporabljati digitalni spominski osciloskop ($B = 100 \text{ MHz}$; člen 1. reda; $f_s = 10 \text{ MHz}$), da bo amplitudni pogrešek pri večkratnem proženju pod dvema odstotkoma? Do katere frekvence uporabljamo DSO pri enkratnem proženju (točkovno prikazovanje)? Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Pri **večkratnem proženju**, kjer imamo dovolj vzorcev v opazovanem signalu, določa obnašanje osciloskopa karakteristika člena 1. reda.
- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega (prikazanega) signala pri sinusnem vzbujanju zapišemo z uporabo mejne frekvence:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$



- Mejna frekvenca je določena s pasovno širino:

$$B = f_{m,zg} - f_{m,sp} \doteq f_{m,zg} \Big|_{f_{m,sp} < 10 \text{ Hz}} = 100 \text{ MHz}$$

- Nas zanima, do katere frekvence upade amplituda za manj kot 2% .

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}} = 0,98$$

- in od tod dobimo

$$f_{m, 2\%} = f_m \sqrt{\left(\frac{1}{0,98}\right)^2 - 1} = 20,3 \text{ MHz}$$

- Pri **enkratnem proženju** in točkovni podaji moramo za dobro razpoznavanje sinusnega signala imeti dovolj veliko število vzorcev na periodo (25), zato je uporabna pasovna širina:

$$B_{pt} = \frac{f_s}{25} = \frac{10 \text{ MHz}}{25} = 400 \text{ kHz}$$

- Do te frekvence je priporočeno uporabljati DSO pri enkratnem proženju in točkovni podaji signala.

3. Digitalni ampermeter kaže $I = 17,24 \text{ mA}$. Izračunajte merilni rezultat, če smo instrument uporabili pri temperaturi $t = 46^\circ \text{C}$!

- meja pogreška: $M_I = \pm(0,15\% I + 2 \text{ dig})$
- referenčno območje: $23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$
- nazivno območje: $0^\circ \text{C} \div 55^\circ \text{C}$
- temperaturni koeficient: $\pm(0,015\% I + 1 \text{ dig})/^\circ \text{C}$

Rešitev:

- Če bi uporabili instrument pri referenčnih pogojih, bi bila meja lastnega pogreška:

$$M_I = \pm \left(\frac{0,15}{100} 17,24 \text{ mA} + 0,02 \text{ mA} \right) = \pm 45,86 \mu\text{A}$$

- Ker smo instrument uporabili izven referenčnega območja v nazivnem območju uporabe za vplivno veličino temperaturo, se meja pogreška poveča za mejo spremembe kazanja $M_{I,s} = M_I + M_I^0$. V našem primeru smo izstopili iz referenčnega območja na zgornji meji pri $23^\circ \text{C} + 5^\circ \text{C} = 28^\circ \text{C}$, zato moramo upoštevati razliko temperature od te vrednosti:

$$M_I^0 = \pm \left(\left(\frac{0,015}{100} 17,24 \text{ mA} + 0,01 \text{ mA} \right) / ^\circ \text{C} \right) \cdot (46^\circ \text{C} - 28^\circ \text{C}) = \pm 226,5 \mu\text{A}$$

- Skupna meja pogreška (lastnega in spremembe kazanja) je:

$$M_{I,s} = M_I + M_I^0 = \pm 0,2724 \text{ mA}$$

- in standardna negotovost pri privzeti pravokotni porazdelitvi gostote verjetnosti pogreška:

$$u(I) = \frac{M_{I,s}}{\sqrt{3}} = 0,157 \text{ mA} = 0,16 \text{ mA}$$

- Merilni rezultat podamo v obliki:

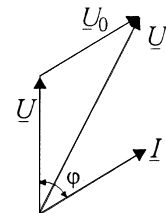
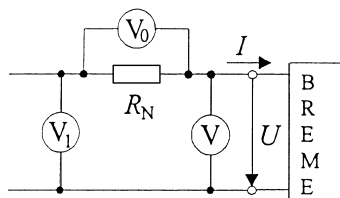
$$I = 17,24 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,16 \text{ mA}, \quad n = 1$$

4. Izrazite merilni rezultat za delovno moč $P = (U_1^2 - U^2 - U_0^2)/(2R_N)$ s standardno negotovostjo, če je $U_1 = 170 \text{ V}$, $U = U_0 = 100 \text{ V}$, $M_{U_1} = M_U = M_{U_0} = \pm 1 \text{ V}$, $R_N = 10 \text{ k}\Omega$, $M_{R_N} = \pm 50 \Omega$!

Rešitev:

- Delovna moč za dane podatke je

$$P = \frac{(170 \text{ V})^2 - 2 \cdot (100 \text{ V})^2}{2 \cdot 10 \text{ k}\Omega} = 445 \text{ mW}$$



- Celotno standardno negotovost sestavljajo deleži neposredno merjenih veličin:

$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P)}$$

- Deleži neposredno merjenih veličin tvorijo faktorji občutljivosti in ustrezne negotovosti:

$$u_1(P) = |c_1| u(U_1) = \left| \frac{\partial P}{\partial U_1} \right| u(U_1) = \frac{U_1}{R_N} u(U_1),$$

$$u_2(P) = |c_2| u(U) = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| u(U) = \frac{U}{R_N} u(U)$$

$$u_3(P) = |c_3| u(U_0) = \left| \frac{\partial P}{\partial U_0} \right| u(U_0) = \frac{U_0}{R_N} u(U_0)$$

$$u_4(P) = |c_4| u(R_N) = \left| \frac{\partial P}{\partial R_N} \right| u(R_N) = \frac{P}{R_N} u(R_N)$$

- Negotovosti voltmetrov so enake: $u(U_1) = u(U) = u(U_0) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = 0,578 \text{ V}$

- Negotovost upora R_N , ki služi posredno za merjenje toka, je:

$$u(R_N) = \frac{M_{R_N}}{\sqrt{3}} = 28,9 \Omega$$

- Ovrednotena celotna standardna negotovost je tako:

$$u_c(P) = \sqrt{\frac{(U_1^2 + U^2 + U_0^2)}{R_N^2} u^2(U) + \left(\frac{P}{R_N} \right)^2 u^2(R_N)} = \sqrt{1,63 \cdot 10^{-4} \text{ W}^2 + 1,65 \cdot 10^{-6} \text{ W}^2} = 12,8 \text{ mW}$$

- Zaokrožen merilni rezultat je:

$$P = 445 \text{ mW}, \quad u_c(P) = 13 \text{ mW}, \quad n = 1$$

5. Izpeljite številsko enačbo za delovno moč (merjenje z elektronskim osciloskopom: $P = fCk_xk_yA$), če uporabljamo enote: $[P] = \mu\text{W}$, $[f] = \text{Hz}$, $[C] = \text{nF}$, $[k_x] = [k_y] = \text{V/d}$ ($1\text{d} = 0,5\text{in}$, $1\text{in} = 25,4\text{mm}$), $[A] = \text{cm}^2$ in jo uporabite za naslednje podatke: $f = 50\text{Hz}$, $C = 47,3\text{nF}$, $k_x = 5\text{V/d}$, $k_y = 2\text{V/d}$ in $A = 35,8\text{cm}^2$!

Rešitev:

- Izrazimo veličine kot produkt številске vrednosti in enot

$$\{P\}[P] = \{f\}[f]\{C\}[C]\{k_x\}[k_x]\{k_y\}[k_y]\{A\}[A]$$

- in preoblikujemo v

$$\{P\} = \{f\}[C]\{k_x\}[k_y]\{A\} \frac{[f][C][k_x][k_y][A]}{[P]}.$$

- Vstavimo za splošne enote posameznih veličin enote, katere želimo uporabljati

$$\frac{[f][C][k_x][k_y][A]}{[P]} = \frac{\text{Hz nF} \frac{\text{V}}{12,7\text{mm}} \frac{\text{V}}{12,7\text{mm}} \text{cm}^2}{\mu\text{W}} = \frac{\text{Hz } 10^{-9}\text{F} \left(\frac{\text{V}}{12,7 \cdot 10^{-3}\text{m}} \right)^2 10^{-4}\text{m}^2}{10^{-6}\text{W}} = 6,2 \cdot 10^{-4}$$

- kjer smo uporabili enoto za $[k_x] = [k_y] = \frac{\text{V}}{\text{d}} = \frac{\text{V}}{0,5 \cdot 25,4\text{mm}} = \frac{\text{V}}{12,7\text{mm}}$

- Želena številška enačba se tako glasi:

$$\{P\} = 6,2 \cdot 10^{-4} \{f\}[C]\{k_x\}[k_y]\{A\}$$

- Izračunajmo delovno moč za dane vrednosti:

$$\{P\} = 6,2 \cdot 10^{-4} \cdot 50 \cdot 47,3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 35,8 = 524,9354 \quad (\text{v } \mu\text{W})$$

- Za rezultat dobimo le številsko vrednost. Zato moramo pri uporabi številskih enačb vedno navesti, za kakšne enote veljajo.

- Za naš primer:

$$\{P\} = 6,2 \cdot 10^{-4} \{f\}[C]\{k_x\}[k_y]\{A\} \left(\frac{P}{\mu\text{W}}, \frac{f}{\text{Hz}}, \frac{C}{\text{nF}}, \frac{k_x}{\text{V/d}}, \frac{k_y}{\text{V/d}}, \frac{A}{\text{cm}^2} \right)$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. V kakšnem razmerju so si mejne vrednosti pogreškov, če imamo enakomerno, trikotno, trapezno ($\beta = 0,66$) in Gaussovo ($z = 3$) porazdelitev gostote verjetnosti pogreška z enakimi standardnimi odkloni (negotovostmi) $\sigma_e = \sigma_{tri} = \sigma_{tra} = \sigma_G = \sigma$? Skicirajte!

Rešitev:

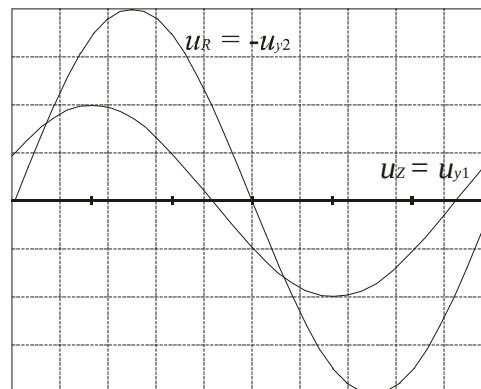
- Razmerja mejnih vrednosti pogreškov proti standardnim odklonom za različne porazdelitve:
 - Enakomerna porazdelitev: $M_e = \sqrt{3} \cdot \sigma$
 - Trikotna porazdelitev: $M_{tri} = \sqrt{6} \cdot \sigma$
 - Trapezna porazdelitev: $M_{tra} = \sqrt{6} / \sqrt{1 + \beta^2} \cdot \sigma = \sqrt{6} / \sqrt{1 + 0,66^2} \cdot \sigma$
 - Gaussova porazdelitev: $M_G = z \cdot \sigma = 3 \cdot \sigma$

Razmerja mejnih pogreškov:

$$M_e : M_{tri} : M_{tra} : M_G = \sqrt{3} \cdot \sigma : \sqrt{6} \cdot \sigma : \sqrt{6} / \sqrt{1 + 0,66^2} \cdot \sigma : 3 \cdot \sigma$$

$$M_e : M_{tri} : M_{tra} : M_G = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{2}/1,2 : \sqrt{3}$$

2. Dvokanalni osciloskop ima na zaslonu prikazano sliko. Časovno bazo proži kanal-1. Frekvenca je $f = 50 \text{ kHz}$, $k_{y1} = k_{y2}$. Kakšen je nivo proženja N ? Kakšna je strmina proženja S ? Koliko je odklonski koeficient časovne baze k_t ? Podajte enačbo, ki kaže odvisnost $\underline{Z}$ od R ?



Rešitev:

- Nivo proženja je: $N = \frac{\hat{u}_{y1}}{2} = \frac{\hat{u}_R}{4}$
- Strmina proženja je naraščajoča, ker je referenčna točka začetka odklanjanja na levem robu zaslona osciloskopa in v tej točki signal u_{y1} narašča: $S > 0$
- Odklonski koeficient časovne baze je: $k_t = \frac{1}{50 \text{ kHz} \cdot 10 \text{ d}} = 2 \text{ } \mu\text{s/d}$
- Funkcijska odvisnost impedance in upornosti je: $\underline{Z} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot e^{j30^\circ}$

3. Narišite vezje za merjenje upornosti $R_x \approx 100\Omega$ ($P_{\max} = 1W$) z U-I metodo in izberite merilna območja tako, da bo merilna negotovost najmanjša. Slednjo izračunajte! Izberite varianto z manjšim sistematičnim pogreškom.

- voltmeter: $U_D = (1, 10, 100)V$, $R_{V_0} = 10k\Omega/V$, $r = 0,2$
- ampermeter: $I_D = (50, 100, 500)mA$, $U_{A_0} = 0,2V$, $r = 0,2$

Rešitev:

- Maksimalni dopustni vrednosti U in I na upor omejujeta izbor merilnih območij:

$$R = 100\Omega, P_{\max} = 1W \Rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{R}} = 100mA \text{ oz. } U_{\max} = \sqrt{P_{\max} \cdot R} = 10V$$

- Skupno negotovost upornosti določata negotovosti merjenja napetosti in toka $w(R) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)}$:

$$w(U) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100} \frac{U_D}{U} \quad \text{in} \quad w(I) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100} \frac{I_D}{I}$$

- Relativna oblika negotovosti je v obeh primerih najmanjša, kadar je odčitek blizu merilnega dosega:

$$U \approx U_D \Rightarrow w(U)_{\min} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100} \quad \text{in} \quad I \approx I_D \Rightarrow w(I)_{\min} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{100}$$

- Za dani upor in merilne dosege instrumentov je to možno doseči z $U_D = 10V$ in $I_D = 100mA$.
- Skupna minimalna standardna negotovost je tako:

$$w(R) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \sqrt{1^2 + 1^2} = 1,633 \cdot 10^{-3}$$

- Za izbor variante z manjšim sistematičnim pogreškom potrebujemo še upornosti instrumentov:

$$U_D = 10V \Rightarrow R_V = R_{V_0} \cdot U_D = 10k\Omega/V \cdot 10V = 100k\Omega$$

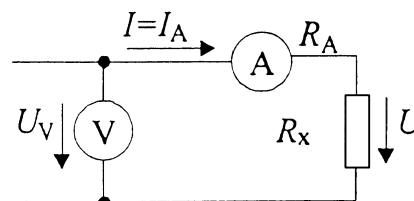
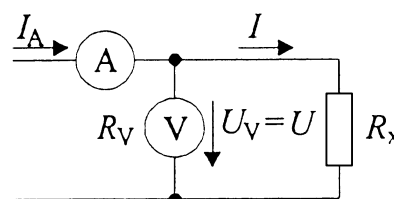
$$I_D = 100mA \Rightarrow R_A = \frac{U_{A_0}}{I_D} = \frac{0,2V}{100mA} = 2\Omega$$

- Kadar priključimo voltmeter neposredno na upor, je tok ampermetra prevelik za tok skozi končno upornost voltmetra. Sistematični pogrešek je sorazmeren razmerju R_x/R_V :

$$e_1 = -\frac{R_x}{R_x + R_V} \doteq -\frac{R_x}{R_V} \doteq -10^{-3}$$

- Če priključimo ampermeter neposredno pred upor, je napetost voltmetra prevelika za padec na upornosti ampermetra. Sistematični pogrešek je sorazmeren kvocientu:

$$e_2 = -\frac{R_A}{R_x} = -2 \cdot 10^{-2}$$



- Izberemo prvo varianto z manjšim sistematičnim pogreškom $|e_1| < |e_2|$

4. Do katere frekvence smemo uporabljati uporovni etalon (člen 1. reda), s časovno konstanto $\tau = 20 \text{ ns}$, da ne bo fazni zamik večji od 1° . Za koliko odstotkov pri tej frekvenci odstopa Z od R_N ?

Rešitev:

- Frekvenčna karakteristika člena 1. reda je:

$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

- Od tod dobimo iz razmerja imaginarnega in realnega dela karakteristike $\text{tg}\varphi = \frac{\Im(G)}{\Re(G)}$ fazno karakteristiko $\varphi = -\text{atg}(\omega\tau)$.

- Iskana frekvenca za fazni zamik 1° je:

$$\text{tg}\varphi = \omega\tau \quad \rightarrow \quad f = \frac{\text{tg}\varphi}{2\pi\tau} = 138,9 \text{ kHz}$$

- Odstopanje impedance Z od vrednosti pri enosmernem vzbujanju R_N določa amplitudna karakteristika člena 1. reda:

$$\frac{Z}{R_N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} = 0,9998477$$

- Pri frekvenci $f = 138,9 \text{ kHz}$ odstopa Z od R_N za:

$$\Delta Z = 1 - 0,999848 = 1,52 \cdot 10^{-4}$$

5. Kot je znano, znaša permeabilnost vakuumu (magnetna konstanta) točno $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ hitrost svetlobe pa točno $299\,792\,458 \text{ m/s}$. Razložite zakaj! Ali poznate še kakšno veličino, katere vrednost je znana absolutno točno?

Rešitev:

- Absolutna točnost magnetne konstante za permeabilnost vakuumu $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ je posledica definicije ampera:

- Amper je nespremenljiv električni tok, ki pri prehodu skozi dva premočrtna, vzporedna, neskončno dolga vodnika zanemarljivega krožnega prereza, postavljena v vakuumu v medsebojni razdalji 1 metra, povzroča med njima silo $2 \cdot 10^{-7}$ newtna na meter dolžine.

$$F = lIB = l\mu_0 \frac{I^2}{2\pi d} \quad \Rightarrow \quad \mu_0 = \frac{F}{l} \frac{2\pi d}{I^2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}} \frac{2\pi \cdot 1\text{m}}{(1\text{A})^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

- Svetlobna hitrost je določena preko definicije za meter:
 - Meter je dolžina poti, ki jo v vakuumu napravi svetloba v $1/299\,792\,458$ sekunde.
- Tudi električna konstanta ϵ_0 je preko svetlobne hitrosti v vakuumu $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ absolutno točno določena z enačbo:

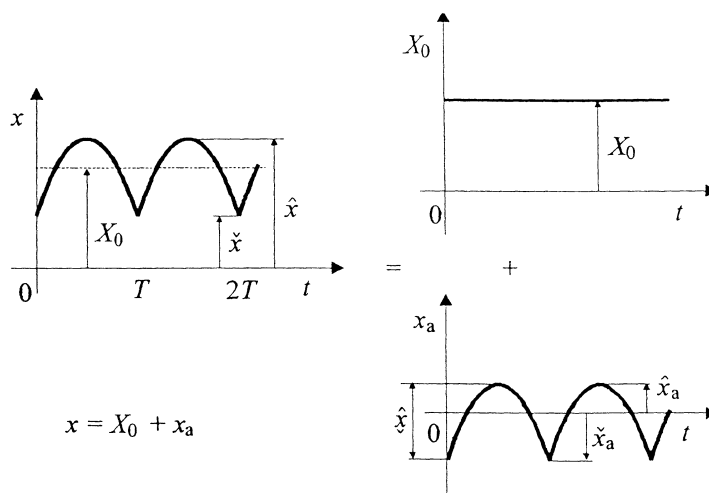
$$c^2 \mu_0 \epsilon_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Naštejte parametre, ki določajo pulzirajočo periodično veličino. Skicirajte jih in opišite v enačbah! Kako je določena efektivna valovitost?

Rešitev:

- Pulzirajoča** veličina je sestavljena iz **enosmerne** in **izmenične** komponente:



- **Maksimalno** vrednost označujemo z $\hat{x}$ ali x_m ,
- **Minimalno** vrednost označujemo z $\check{x}$ ali $x_{\min}$,
- **Enosmerno** komponento označujemo z X_0 ,
 - **Aritmetična srednja vrednost** – povprečna vrednost – je enaka enosmerni komponenti: $\overline{X} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = X_0$, ker je povprečna vrednost **izmenične** komponente x_a nič: $\overline{X}_a = \frac{1}{T} \int_0^T x_a(t) dt = 0$
- **Efektivna vrednost** pulzirajoče veličine: $X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$
 - če upoštevamo $x(t) = X_0 + x_a(t)$, dobimo: $X = \sqrt{X_0^2 + X_a^2}$
- Če pulzirajoča veličina ne spreminja predznaka, jo imenujemo **valovita veličina**.
 - Kadar je enosmerna komponenta primarnega pomena, podamo **valovitost** z najbolj pogosto uporabljeno **efektivno valovitostjo**: $r = \frac{X_a}{|X_0|}$
 - kjer je $X_a = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x_a^2(t) dt}$ efektivna vrednost izmenične komponente in $|X_0|$ absolutna vrednost enosmerne komponente.

2. Na zaslonu osciloskopa ($B=10\text{MHz}$; člen 1. reda) imamo zajeto periodo napetosti signala $u = \hat{u} \cdot \sin(20\pi t/\mu\text{s})$. Podajte merilni rezultat za efektivno in temensko vrednost napetosti signala na vhodu! Položaj signala smo sposobni oceniti z ločljivostjo $0,2\text{mm}$. $\hat{y} = 4,30\text{d}$, $k_y = 0,5\text{V/d}$, $m_y = 2 \cdot 10^{-2}$, $1\text{d} = 10\text{mm}$, $k_t = ?$

Rešitev:

- Frekvenca vhodnega signala je: $2\pi ft = 20\pi t/\mu\text{s} \rightarrow f = 10/\mu\text{s} = 10\text{MHz}$
 - Ker je x-os osciloskopov tipično razdeljena na 10 delov, mora biti konstanta časovne baze enaka:

$$10\text{d} \cdot k_t = T = 1/f \rightarrow k_t = \frac{1}{f} \frac{1}{10\text{d}} = \frac{10\text{ns}}{\text{d}}$$

- Ker je frekvenca signala enaka zgornji mejni frekvenci $B = f_m = f$ in za člen 1. reda velja $\hat{u}_{\text{prikaz}} = \hat{u}/\sqrt{2}$, dobimo za temensko napetost sinusnega signala na vhodu osciloskopa:

$$\hat{u}_{\text{prikaz}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \rightarrow \hat{u} = \sqrt{2} \cdot \hat{u}_{\text{prikaz}} = \sqrt{2} \cdot 4,30\text{d} \cdot 0,5\text{V/d} = 3,0406\text{V}$$

- in za efektivno napetost: $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 2,15\text{V}$
- Standardno negotovost prikaza na osciloskopu določata prispevka mejnega pogreška osciloskopa in pogrešek ločljivosti pri odčitku temenske vrednosti $\hat{y} = 4,30\text{d} \cdot 10\text{mm/d} = 43\text{mm}$:

$$w(y) = \sqrt{\left(\frac{m_y}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{3}y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,2\text{mm}}{2\sqrt{3} \cdot 43\text{mm}}\right)^2} = 0,0116 \rightarrow 0,012$$

- Merilni rezultat za temensko vrednost napetosti signala na vhodu je tako:

$$\hat{u} = 3,041\text{V} \quad , \quad u(\hat{u}) = \hat{u} \cdot w(y) = 0,0365\text{V} \rightarrow u(\hat{u}) = 0,037\text{V}, \quad n = 1$$

- in merilni rezultat za efektivno vrednost napetosti signala na vhodu:

$$U = 2,150\text{V} \quad , \quad u(U) = U \cdot w(y) = 0,0258\text{V} \rightarrow u(U) = 0,026\text{V}, \quad n = 1$$

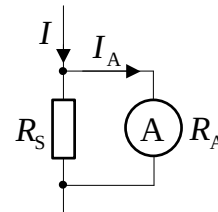
3. Ampermetru želimo s souporom razširiti merilno območje na $I'_D = 2\text{ A}$. Določite soupor tako, da bo standardna negotovost tokovnega delilnika zanemarljiva! Skicirajte vezje.

- ampermeter: $I_D = 200,0\text{ mA}$; $U_{A_0} = 200\text{ mV}$; $M_I = \pm(0,6\%I + 1\text{dig.})$; $m_{R_A} = \pm 5 \cdot 10^{-4}$

Rešitev:

- Merilno območje ampermetra razširimo s souporom R_S kot kaže

vezje in dobimo tokovni delilnik: $I_A = I \frac{R_S}{R_S + R_A}$



- Delilno razmerje je:

$$K = \frac{I_A}{I} = \frac{R_S}{R_S + R_A} = \frac{I_D}{I'_D} = \frac{200\text{ mA}}{2\text{ A}} = \frac{1}{10}$$

- Po izračunu upornosti ampermetra $R_A = \frac{U_{A_0}}{I_D} = \frac{200\text{ mV}}{200,0\text{ mA}} = 1\Omega$ določimo še

iskano vrednost upornosti soupora: $R_S = \frac{KR_A}{1-K} = 0,1111\Omega$

- Standardno negotovost delinika, ki jo sestavljata negotovost upornosti ampermetra $w(R_A)$ in iskana negotovost soupora $w(R_S)$, zapišemo:

$$w(K) = \frac{u(K)}{K} = \frac{1}{K} \sqrt{\left(\frac{\partial K}{\partial R_S} u(R_S)\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial R_A} u(R_A)\right)^2}$$

- Faktorja občutljivosti sta: $\frac{\partial K}{\partial R_S} = \frac{R_A}{(R_A + R_S)^2}$ in $\frac{\partial K}{\partial R_A} = -\frac{R_S}{(R_A + R_S)^2}$

$$w(K) = \sqrt{\left(\frac{(R_A + R_S)}{R_S} \frac{R_A}{(R_A + R_S)^2} u(R_S)\right)^2 + \left(\frac{(R_A + R_S)}{R_S} \frac{R_S}{(R_A + R_S)^2} u(R_A)\right)^2}$$

$$w(K) = \frac{R_A}{R_A + R_S} \sqrt{\left(\frac{u(R_S)}{R_S}\right)^2 + \left(\frac{u(R_A)}{R_A}\right)^2}$$

- Negotovost delinika je zanemarljiva, če velja: $w(K) \leq \frac{w(I)}{5}$

- Standardno merilno negotovost zaradi ampermetra določimo iz meje pogreška:

$$M_I = \pm(0,6\%I + 0,1\text{mA}), \quad m_I = \frac{M_I}{I} = \pm\left(6 \cdot 10^{-3} + \frac{10^{-4}\text{ A}}{I}\right)$$

- Minimalna vrednost standardne merilne negotovosti v relativni obliki je pri največjem toku $I = I_D$:

$$w(I) = \frac{m_I}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(6 \cdot 10^{-3} + \frac{10^{-4}\text{ A}}{I_D}\right) = 3,75 \cdot 10^{-3} \quad \text{in} \quad w(K) \leq \frac{w(I)}{5} = 7,506 \cdot 10^{-4}$$

- Iskano negotovost soupora $w(R_S)$ določimo iz izraza:

$$w(K) = \frac{R_A}{R_A + R_S} \sqrt{w^2(R_S) + w^2(R_A)}, \quad w(R_A) = m(R_A)/\sqrt{3} = 2,887 \cdot 10^{-4}$$

- Soupor mora biti enak $R_S = 0,1111\Omega$ in imeti standardno negotovost manjšo kot

$$w(R_S) = \sqrt{\left(\frac{R_A + R_S}{R_A}\right)^2 w^2(K) - w^2(R_A)} = 7,9 \cdot 10^{-4}$$

4. Rezultat kalibracije ampermetra v štirih točkah je prikazan v tabeli. Prva kolona predstavlja referenčno vrednost, druga kolona kaže izmerjeno vrednost. Preračunana merilna negotovost ampermetra je $0,1\text{ A}$. Koliko znaša pogrešek kalibriranega inštrumenta (kolona tri) in koliko je korekcija kalibriranega inštrumenta (kolona štiri)? Pri uporabljanju ampermetra ste izmerili 15 A . Zapišite enačbo in pravo vrednost rezultata!

I_{ref}/A	I_i/A	E/A	K/A
10,0	9,8		
15,0	15,1		
20,0	19,8		
25,0	25,1		

Rešitev:

- Pogrešek kalibriranega inštrumenta je razlika izmerjene vrednosti in referenčne vrednosti. Korekcija pa ima obratni predznak pogreška in se prišteva k rezultatu.

I_{ref}/A	I_i/A	E/A	K/A
10,0	9,8	-0,2	0,2
15,0	15,1	0,1	-0,1
20,0	19,8	-0,2	0,2
25,0	25,1	0,1	-0,1

- Če pri uporabi inštrumenta izmerimo z ampermetrom 15 A , znaša prava vrednost

$$\underline{\underline{I = I_i + K = 15\text{ A} + (-0,1\text{ A}) = 14,9\text{ A}}}$$

- Pri tem smo upoštevali, da se lastni pogrešek instrumenta E v okolici točke kalibracije (primer: $I_i = 15,1\text{ A} \rightarrow E = 0,1\text{ A}$) zelo malo spremeni.
- Merilni rezultat pa je enak

$$\underline{\underline{I = 14,9\text{ A} \quad , \quad u(I) = 0,1\text{ A} \quad , \quad n = 1}}$$

5. Izpeljite številsko enačbo za jalovo moč tuljave ($Q = I^2 \omega L$), če so neposredno merjene veličine izražene v A, Hz in mH, jalovo moč pa želimo imeti v enoti kvar!

Rešitev:

- Veličinsko enačbo $Q = I^2 \omega L$ zapišemo s produkti številskih vrednosti in enot:

$$\{Q\}[Q] = \{I\}^2 [I]^2 \{\omega\}[\omega] \{L\}[L]$$

- in preoblikujemo v obliko: $\{Q\} = \{I\}^2 \{\omega\} \{L\} \frac{[I]^2 [\omega] [L]}{[Q]}$

- Kvocien uporabljenih enot je številaska vrednost:

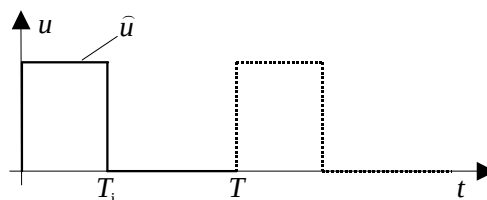
$$\frac{[I]^2 [\omega] [L]}{[Q]} = \frac{\text{A}^2 \cdot \text{Hz} \cdot 10^{-3} \text{H}}{10^3 \text{VA}} = 10^{-6} \frac{\text{AH}}{\text{Vs}} = 10^{-6}$$

- Ker za rezultat dobimo le številsko vrednost, moramo navesti tudi, za kakšne enote velja:

$$\{Q\} = \{I\}^2 \{\omega\} \{L\} \cdot 10^{-6} \rightarrow Q = 10^{-6} I^2 \omega L \quad \left(\frac{Q}{\text{kvar}}, \frac{I}{\text{A}}, \frac{\omega}{\text{Hz}}, \frac{L}{\text{Hz}} \right)$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Voltmetra sta priključena na napetost u . Voltmeter, ki se odziva na srednjo vrednost usmerjene napetosti, kaže $U_1 = 1\text{ V}$, voltmeter, ki se odziva na efektivno vrednosti, kaže pa $U_2 = 2\text{ V}$. Kolikšni so temenska vrednost napetosti $\hat{u}$, relativna širina pulza T_i/T in oblikovni faktor F ?



Rešitev:

- Srednja vrednost usmerjene napetosti: $\overline{|U|} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt = \frac{1}{T} (\hat{u} T_i) = \hat{u} \frac{T_i}{T}$

- Prvi voltmeter je umerjen za sinusno obliko signala in kaže:

$$U_1 = F_0 \cdot \overline{|U|} = F_0 \cdot \hat{u} \frac{T_i}{T}$$

- pri čemer je oblikovni faktor za sinusno obliko: $F_0 = \frac{U}{\overline{|U|}} = 1,111$

- Efektivna vrednost napetosti, ki jo kaže drugi voltmeter, je enaka:

$$U_2 = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\hat{u}^2 \frac{T_i}{T} + 0 \frac{(T - T_i)}{T}} = \hat{u} \sqrt{\frac{T_i}{T}}$$

- Razmerje napetosti je odvisno od relativne širine pulza T_i/T :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\hat{u} \sqrt{\frac{T_i}{T}}}{F_0 \cdot \hat{u} \frac{T_i}{T}} = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{\sqrt{\frac{T_i}{T}}}{\frac{T_i}{T}} = \frac{1}{F_0} \cdot \sqrt{\frac{T}{T_i}}$$

- Od tod sledi $\rightarrow \frac{T}{T_i} = \left(F_0 \cdot \frac{U_2}{U_1} \right)^2 = 4,938$

- Temenska vrednost napetosti je enaka: $\hat{u} = U_2 \sqrt{\frac{T}{T_i}} = 4,444\text{ V}$

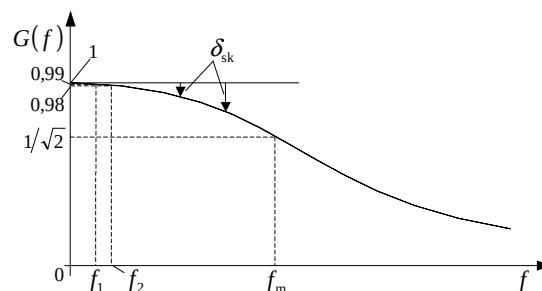
- Relativna širina impulza je: $\frac{T_i}{T} = 0,2025$

- in oblikovni faktor: $F = \frac{U}{\overline{|U|}} = F_0 \frac{U_2}{U_1} = 2,222$

2. Določite referenčno območje in nazivno območje uporabe voltmetra, ki meri temensko vrednost $M_U = \pm(0,5\%U + 0,5\%U_D)$, $U_D = 1V$, za vplivno veličino frekvenco, če upoštevamo samo dinamično obnašanje voltmetra. Voltmeter se odzove na napetostno stopnico kot člen 1. reda in doseže 95% končnega odklona v času $T_a = 5\mu s$. Skicirajte potek spremembe kazanja!

Rešitev:

- V našem primeru določa referenčno območje za vplivno veličino frekvenco dinamično obnašanje voltmetra in njegov mejni pogrešek. Ta bo najmanjši in s tem tudi najmanjše referenčno območje, če upoštevamo monotonno povečanje spremembe kazanja (glej skico $\delta_{sk} = \Delta U_{sk} / U_{vh}$), kadar je merjena veličina blizu merilnega dosega.



$$m_{U,\min} = \frac{M_U}{U_D} = \pm \left(5 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3} \frac{U_D}{U_D} \right) = 10^{-2}$$

- Ker je dinamično obnašanje voltmetra opisano s členom 1. reda, zapišemo za mejno frekvenco:

$$0,95U_0 = U_0(1 - e^{-T_a/\tau}) \rightarrow f_m = \frac{\ln 20}{2\pi T_a} = 95,357 \text{ kHz}$$

- in od tod razmerje izhodne izmerjene napetosti proti vhodni merjeni

$$\text{napetosti: } \frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$

- Kljub ohranjanju vrednosti vhodne merjene napetosti, dobimo z večanjem frekvence spremembo kazanja $\Delta U_{sk} = U_{iz} - U_{vh}$. Referenčno območje za vplivno veličino frekvenco je v našem primeru od frekvence 0 Hz do frekvence, ko se sprememba kazanja izenači z mejnim pogreškom in upade amplituda na izhodu za $m_{U,\min}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}} = 1 - m_{U,\min} = 0,99 \rightarrow f_1 = f_m \sqrt{\left(\frac{1}{0,99}\right)^2 - 1} = 0,1425 \cdot f_m = 13,59 \text{ kHz}$$

- Referenčno območje je tako od 0 Hz do 13,6 kHz.

- V nazivnem območju uporabe je dopustno odstopanje spremembe kazanja povečano še za vrednost mejnega pogreška $\Delta U_{sk,\max} \leq 2M_U$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}} = 1 - 2m_{U,\min} = 0,98 \rightarrow f_2 = f_m \sqrt{\left(\frac{1}{0,98}\right)^2 - 1} = 0,203 \cdot f_m = 19,36 \text{ kHz}$$

- Nazivno območje uporabe je tako od 13,6 kHz do 19,4 kHz.

3. Koliko znaša merilni rezultat za faktor popačenja ($THD_{IEC} = \sqrt{X^2 - X_1^2} / X_1$) napetostnega signala oblike $u = 100(\sin \omega t + 1/3 \sin 3\omega t + 1/50 \sin 50\omega t) V$, če ima spektralni analizator standardno negotovost določanja amplitude $w(\hat{u}) = 10^{-2}$?

Rešitev:

- Faktor popačenja je razmerje efektivne vrednosti harmonskih komponent proti efektivni vrednosti osnovne komponente:

$$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U_1} = \frac{\sqrt{U_3^2 + U_{50}^2}}{U_1}$$

- Naš signal ima tri komponente, katerih efektivne vrednosti so:

$$U_1 = \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} = \frac{100 V}{\sqrt{2}} = 70,71 V; U_3 = \frac{\hat{u}_3}{3\sqrt{2}} = 23,57 V; U_{50} = \frac{\hat{u}_{50}}{50\sqrt{2}} = 1,4142 V$$

- Faktor popačenja je: $THD_{IEC} = \frac{\sqrt{U_3^2 + U_{50}^2}}{U_1} = 0,33393$

- Ker petdeseta harmonska komponenta zelo malo prispeva k faktorju popačenja

$$THD_{IEC} \approx \frac{U_3}{U_1} = 0,3333 \text{ in je zato njen vpliv na skupno negotovost zanemarljiv,}$$

lahko zapišemo za relativno obliko standardne negotovosti za faktor popačenja $THD_{IEC} = U_3 / U_1$:

$$w(THD) = \sqrt{w^2(\hat{u}_1) + w^2(\hat{u}_3)} = 1,414 \cdot 10^{-2}$$

- Pri tem smo upoštevali, da sta relativni negotovosti določanja amplitude in efektivne vrednosti enaki $w(\hat{u}) = w(U)$.
- V absolutni obliki je standardna negotovost: $u(THD) = w(THD) \cdot THD = 4,722 \cdot 10^{-3}$
- Merilni rezultat je tako:

$$THD_{IEC} = 0,3339, \quad u(THD) = 0,0048, \quad n = 1$$

4. Trem kondenzatorjem z enako nazivno vrednostjo, smo izmerili kapacitivnost z istim instrumentom. Standardna negotovost je bila $0,2\mu\text{F}$. Kondenzatorje vežemo vzporedno. Koliko je standardna negotovost kapacitivnosti te vezave? $r(x_i, x_j) = 1$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Kapacitivnost vzporedne vezave kondenzatorjev je:

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

- Skupno standardno negotovost zapišemo z upoštevanjem faktorjev korelacije:

$$u_c(y) = \sqrt{[c_1 u(C_1)]^2 + [c_2 u(C_2)]^2 + [c_3 u(C_3)]^2 + 2[c_1 c_2 r(C_1, C_2) u(C_1) u(C_2)] + \dots}$$

- Faktorji občutljivosti so:

$$c_1 = \frac{\partial C}{\partial C_1} = 1, \quad c_2 = \frac{\partial C}{\partial C_2} = 1, \quad c_3 = \frac{\partial C}{\partial C_3} = 1$$

- posamezne negotovosti pa: $u(C_1) = u(C_2) = u(C_3) = u(C)$

- Standardna negotovost kapacitivnosti vzporedne vezave je:

$$u_c(C) = \sqrt{3 \cdot u^2(C) + 2[3 \cdot u(C)u(C)]} = u(C)\sqrt{9} = 3u(C) = 0,6\mu\text{F}$$

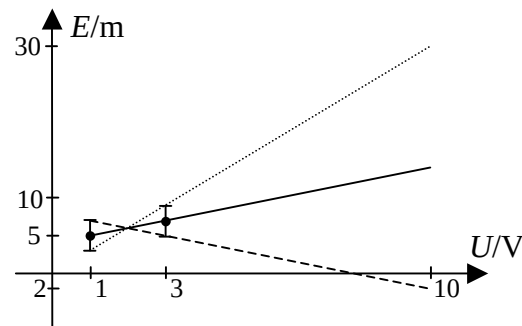
5. Ker smo omejeni z območjem referenčnega voltmetra, umerimo naš voltmeter v dveh točkah, in sicer pri 1 V ter 3 V. Izmerjeni odstopanji od referenčnega voltmetra sta v teh dveh točkah 5 mV oz. 7 mV. Kolikšno bo največje možno odstopanje, ki ga napovemo pri 10 V, če smo zgornji odstopanji izmerili z mejnim pogreškom 2 mV in če predpostavimo, da je karakteristika umerjanega voltmetra linearna?

Rešitev:

- Z umerjanjem ali kalibracijo pri $U_1 = 1 \text{ V}$ smo ugotovili odstopanje $E_1 = 5 \text{ mV}$.
 - Ker to odstopanje določimo z mejnim pogreškom $m_E = 2 \text{ mV}$, to pomeni, da dejansko odstopanje leži v intervalu $5 \text{ mV} \pm 2 \text{ mV}$ oz. med $E_{1,\min} = 3 \text{ mV}$ in $E_{1,\max} = 7 \text{ mV}$.

- Podobno velja tudi za drugo točko U_2 , kjer dejansko odstopanje E_2 leži v intervalu med $E_{2,\min} = 5 \text{ mV}$ in $E_{2,\max} = 9 \text{ mV}$.

- Ob predpostavki linearne karakteristike umerjanega voltmetra lahko grafično prikažemo ti dve kalibracijski točki, kot kaže skica:



- Če predpostavimo, da sta izmerjeni odstopanji pravi vrednosti, bi odstopanje pri 10 V lahko izračunali z naslednjo enačbo:

$$E_{10V} = \frac{E_2 - E_1}{U_2 - U_1} \cdot (10 \text{ V} - U_1) + E_1 = \frac{7 \text{ mV} - 5 \text{ mV}}{3 \text{ V} - 1 \text{ V}} \cdot (10 \text{ V} - 1 \text{ V}) + 5 \text{ mV} = 14 \text{ mV}$$

- Ker je odstopanje izmerjeno z mejnim pogreškom, bo v najbolj neugodnem primeru odstopanje pri 10 V znašalo:

$$E'_{10V} = \frac{E_{2,\max} - E_{1,\min}}{U_2 - U_1} \cdot (10 \text{ V} - U_1) + E_{1,\min} = \frac{9 \text{ mV} - 3 \text{ mV}}{3 \text{ V} - 1 \text{ V}} \cdot (10 \text{ V} - 1 \text{ V}) + 3 \text{ mV} = 30 \text{ mV}$$

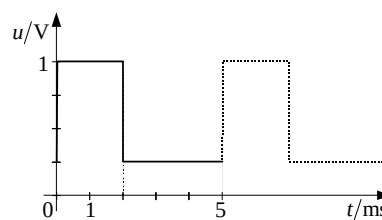
oz.

$$E''_{10V} = \frac{E_{2,\min} - E_{1,\max}}{U_2 - U_1} \cdot (10 \text{ V} - U_1) + E_{1,\max} = \frac{5 \text{ mV} - 7 \text{ mV}}{3 \text{ V} - 1 \text{ V}} \cdot (10 \text{ V} - 1 \text{ V}) + 7 \text{ mV} = -2 \text{ mV}$$

- Največje odstopanje, ki bi ga lahko pri 10 V napovedali na podlagi izmerjenih odstopanj, je torej 30 mV.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Ali z digitalnim voltmetrom ($M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$; $U_D = 1,200\text{ V}$), katerega dinamično obnašanje aproksimiramo s členom prvega reda $f_m = 500\text{ Hz}$, lahko pomerimo oba nivoja signala, tako da je dinamični pogrešek zanemarljiv. Skicirajte približni potek dinamičnega pogreška $E(t)$ za dani vhodni signal?



Rešitev:

- Karakteristika odziva člena 1. reda na stopničasto obliko signala je: $\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = 1 - e^{-t/\tau}$
 - Dinamični pogrešek predstavlja razliko med izmerjeno (izhodno) vrednostjo in pravo (vhodno) vrednostjo signala.. V relativni obliki ga zapišemo:

$$e_{din} = \frac{U_{iz} - U_{vh}}{U_{vh}} = \frac{U_{iz}}{U_{vh}} - 1 = -e^{-t/\tau}$$

- Ima negativni predznak in eksponentno upada v odvisnosti od časovne konstante: $\tau = 1/(2\pi f_m) = 318,3\mu\text{s}$
- Ker je dinamični pogrešek sistematičen, je zanemarljiv, kadar je dovolj majhen proti standardni negotovosti merilnega rezultata:

$$|e_{din}| \leq w(U)/10$$

- Kadar je podana mejna vrednost lastnega pogreška, privzamemo enakomerno pravokotno porazdelitev pogreška. V našem primeru imamo dve vrednosti signala (1,0 V ; 0,25 V) in ustrezni standardni negotovosti v relativni obliki:

$$w(U_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_U}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} + 10^{-3} \frac{1,2\text{ V}}{1,0\text{ V}}) = 1,27 \cdot 10^{-3}$$

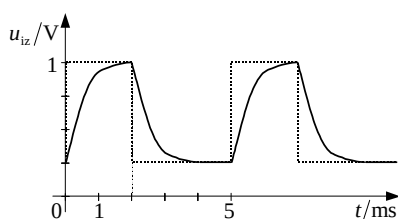
$$w(U_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_U}{U_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} + 10^{-3} \frac{1,2\text{ V}}{0,25\text{ V}}) = 3,35 \cdot 10^{-3}$$

- Dinamični pogrešek mora biti manjši od $|e_{din}| = e^{-t/\tau} \leq w(U)/10$ in odzivni čas daljši od:

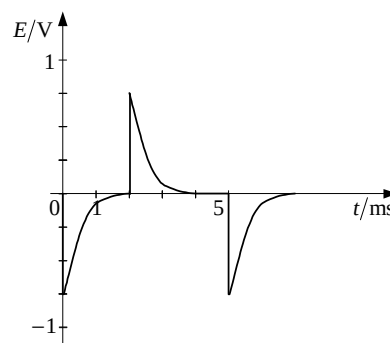
$$t_1 \geq -\tau \ln(1,27 \cdot 10^{-4}) = 2,856\text{ ms} \quad \text{oz.} \quad t_2 \geq -\tau \ln(3,35 \cdot 10^{-4}) = 1,815\text{ ms}$$

- Pri nivoju $U_1 = 1,0\text{ V}$ ne moremo zanemariti dinamičnega pogreška, ker je trajanje prekratko $t_1 > 2,0\text{ ms}$, pri nivoju $U_2 = 0,25\text{ V}$ pa lahko $t_2 < 3,0\text{ ms}$.

- Skica pogreška:



→



2. Digitalni voltmeter kaže $U_i = 122,4 \text{ mV}$. Izrazite popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo, če smo instrument uporabili pri temperaturi $t = 39^\circ \text{C}$!

- meja pogreška: $M_U = \pm(0,15\%U + 3\text{dig})$
- referenčno območje: $23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$
- nazivno območje uporabe: $0^\circ \text{C} \div 55^\circ \text{C}$
- temperaturni koeficient: $\pm(0,013\%U + 1\text{dig})/^\circ \text{C}$

Rešitev:

- Če bi uporabili instrument pri referenčnih pogojih ($23^\circ \text{C} \pm 5^\circ \text{C}$), bi bila meja lastnega pogreška:

$$M_U = \pm \left(\frac{0,15}{100} U_i + 3\text{dig} \right) = \pm \left(\frac{0,15}{100} 122,4 \text{ mV} + 3 \cdot 0,1 \text{ mV} \right) = \pm 0,484 \text{ mV}$$

- Ker smo instrument uporabili izven referenčnega območja v nazivnem območju uporabe za vplivno veličino temperaturo ($0^\circ \text{C} \div 55^\circ \text{C}$), se meja pogreška poveča za mejo spremembe kazanja $M_{U,s} = M_U + M_U^0$. V našem primeru smo izstopili iz referenčnega območja na zgornji meji pri $23^\circ \text{C} + 5^\circ \text{C} = 28^\circ \text{C}$, zato moramo upoštevati razliko temperature do te vrednosti:

$$M_U^0 = \pm \left(\left(\frac{0,013}{100} 122,4 \text{ mV} + 0,1 \text{ mV} \right) / ^\circ \text{C} \right) \cdot (39^\circ \text{C} - 28^\circ \text{C}) = \pm 1,275 \text{ mV}$$

- Skupna meja pogreška (lastnega in spremembe kazanja) je:

$$M_{U,s} = M_U + M_U^0 = \pm 1,759 \text{ mV}$$

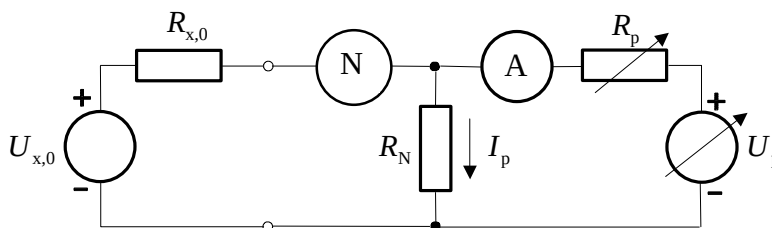
- in standardna negotovost pri privzeti pravokotni porazdelitvi gostote verjetnosti pogreška:

$$u(U) = \frac{M_{U,s}}{\sqrt{3}} = 1,0156 \text{ mV} = 1,1 \text{ mV}$$

- Merilni rezultat podamo v obliki:

$$U = 122,4 \text{ mV}, \quad u(U) = 1,1 \text{ mV}, \quad n = 1$$

3. Izrazite polni merilni rezultat za merjeno napetost U_x , ki jo merimo po Lindeck-Rothejevem principu kompenzacije ($U_{x,0} = I_A R_N + U_V$) ter naslednjimi merilnimi podatki:



- V-meter: povprečna vrednost: $\bar{U}_V = 0,21 \text{ mV}$, standardni odklon: $s(U_V) = 150 \mu\text{V}$, $n = 30$;
- A-meter: $I_A = 1,0456 \text{ mA}$, $M_I = \pm(2 \cdot 10^{-4} I_A + 5 \text{ dig})$
- etalonski upor $R_N = 1000 \Omega$, $u(R_N) = 0,1 \Omega$

Rešitev:

- Neznano napetost U_x izmerimo tako, da jo primerjamo z znano U_N , ki jo realiziramo kot padec napetosti, ki ga povzroči spremenljivi električni tok I_p na znanem kompenzacijskem uporu $R_k = R_N$ (Lindeck-Rothejev princip kompen.).
 - Pri izravnavi čez ničelni indikator praktično ne teče noben tok $I \rightarrow 0$ zato merjeni vir ni obremenjen, pomožni tok je enak toku ampermetra $I_p \doteq I_A$ in merimo napetost praznega teka.

$$U_{x,0} \doteq U_N = I_p R_k \quad \Rightarrow \quad U_{x,0} \doteq I_A R_N$$

- Ker nimamo popolne izravnave, moramo upoštevati še ničelni indikator in v splošnem zapišemo: $U_{x,0} = I_A R_N + U_V$
- V našem primeru smo večkrat pomerili odklon 'nič', zato uporabimo srednjo vrednost ($\bar{U}_V$) in zapišemo:

$$U_{x,0} = I_A \cdot R_N + \bar{U}_V = 1,0456 \text{ mA} \cdot 1000 \Omega + 0,21 \text{ mV} = 1,04581 \text{ V}$$

- Za popolni merilni rezultat potrebujemo še ovrednotenje standardne negotovosti, ki je sestavljena tako iz negotovosti tipa A (prispevek ničelnega indikatorja - U_V) kot negotovosti tipa B (prispevka ampermetra in uporovnega etalona):

$$\begin{aligned} u(U_{x,0}) &= \sqrt{\left[\left[\frac{\partial U_x}{\partial I_A} \cdot u(I_A) \right]^2 + \left[\frac{\partial U_x}{\partial R_N} \cdot u(R_N) \right]^2 + \left[\frac{\partial U_x}{\partial U_V} \cdot u(\bar{U}_V) \right]^2} \\ &= \sqrt{R_N^2 \cdot \left(\frac{M_I}{\sqrt{3}} \right)^2 + I_A^2 \cdot u^2(R_N) + \left(\frac{s(U_V)}{\sqrt{n}} \right)^2} \\ &= \sqrt{(10^3 \Omega)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0456 \text{ mA} + 0,0005 \text{ mA}}{\sqrt{3}} \right)^2 + (1,0456 \text{ mA})^2 (0,1 \Omega)^2 + \left(\frac{150 \mu\text{V}}{\sqrt{30}} \right)^2} \\ u(U_{x,0}) &= \sqrt{(4,0941 \cdot 10^{-4})^2 + (1,0456 \cdot 10^{-4})^2 + (0,274 \cdot 10^{-4})^2} = 4,234 \cdot 10^{-4} \text{ V} \end{aligned}$$

- Popolni merilni rezultat zaokrožimo: $U_{x,0} = 1,04565 \text{ V}$ $u(U_{x,0}) = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ V}$

4. V katerih mejah se lahko nahaja celotna standardna negotovost $w_c(y)$ izhodne veličine $y = x_1^2 x_2$, če sta vhodni veličini x_1 in x_2 medsebojno odvisni in imata enako veliki relativni standardni negotovosti $w(x_1) = w(x_2)$?

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Standardno negotovost izhodne posredno merjene veličine $u_c(y)$ določa tudi koeficient korelacije r , kadar so neposredno merjene veličine medsebojno odvisne. V našem primeru dveh medsebojno odvisnih vhodnih veličin zapišemo standardno negotovost izhodne veličine v absolutni obliki:

$$u_c(y) = \sqrt{(c_1 u(x_1))^2 + (c_2 u(x_2))^2 + 2r c_1 c_2 u(x_1) u(x_2)}$$

- in v relativni obliki:

$$w_c(y) = \frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\left(c_1 \frac{u(x_1)}{y}\right)^2 + \left(c_2 \frac{u(x_2)}{y}\right)^2 + 2r c_1 c_2 \frac{u(x_1) u(x_2)}{y^2}}$$

- Koeficiente občutljivosti izračunamo z delnim odvajanjem:

$$y = x_1^2 x_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 x_2, \quad c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1^2,$$

- jih vstavimo v enačbo

$$w_c(y) = \sqrt{\left(2x_1 x_2 \frac{u(x_1)}{y}\right)^2 + \left(x_1^2 \frac{u(x_2)}{y}\right)^2 + 2r \cdot 2x_1 x_2 x_1^2 \frac{u(x_1) u(x_2)}{y^2}}$$

- in jo uredimo

$$w_c(y) = \sqrt{\left(2 \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + 2r \cdot 2 \frac{u(x_1)}{x_1} \frac{u(x_2)}{x_2}} = \sqrt{(2w(x_1))^2 + (w(x_2))^2 + 2r \cdot 2w(x_1)w(x_2)}$$

- Ker sta relativni standardnih negotovosti $u(x_1)/x_1 = w(x_1) = w(x_2) = u(x_2)/x_2$ enaki, zapišemo:

$$w_c(y) = \sqrt{4w^2(x) + w^2(x) + 4rw^2(x)}$$

- Koeficient korelacije r lahko zavzame vrednosti med -1 in $+1$, zato se standardna negotovost ustrezno spreminja:

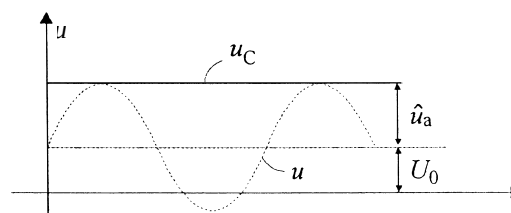
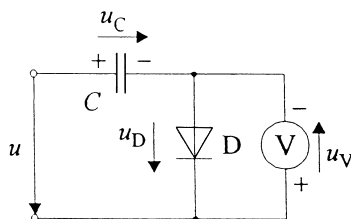
- $r = -1$: $w_c(y) = \sqrt{w^2(x)} = w(x)$

- $r = +1$: $w_c(y) = \sqrt{9w^2(x)} = 3w(x)$

- Zaradi medsebojne odvisnosti se standardna negotovost izhodne posredno merjene veličine spreminja v mejah $w(x) \leq w_c(y) \leq 3w(x)$ in se precej razlikuje od primera, kadar so vhodne veličine medsebojno neodvisne $r = 0$!

- $r = 0$: $w_c(y) = \sqrt{5w^2(x)} = 2,24w(x)$

5. Kaj meri voltmeter v narisnem vezju pri dani pulzirajoči napetosti u . Opišite in izpeljite enačbe. Voltmeter se odziva na srednjo vrednost signala.



Rešitev:

- Če želimo meriti samo izmenično komponento u_a pulzirajoče napetosti $u = U_0 + u_a$, kjer je U_0 enosmerna komponenta, priključimo instrument vzporedno k diodi in zaporedno kondenzatorju.

- Napetost na kondenzatorju u_C v ustaljenem stanju je enaka temenski vrednosti:

$$u_C = U_0 + \hat{u}_a$$

- Napetost na diodi je neodvisna od enosmerne komponente.

$$u_D = u - u_C = (U_0 + u_a) - (U_0 + \hat{u}_a) = u_a - \hat{u}_a$$

- Voltmeter priključimo tako, da je odklon enak invertirani vrednosti napetosti na diodi in dobimo pozitivno vrednost temenske vrednosti izmenične komponente:

$$u_V = -u_D = \hat{u}_a - u_a$$

- Ker se voltmeter odziva na srednjo vrednost (npr. integracijski voltmeter), je srednja vrednost napetosti u_V enaka maksimalni vrednosti izmenične komponente, ker je srednja vrednost izmenične sinusne komponent napetosti u_a enaka nič.

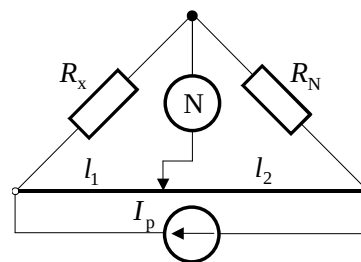
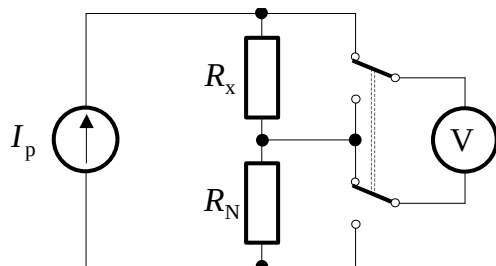
$$\bar{U}_V = \frac{1}{T} \int_0^T u_V dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\hat{u}_a - u_a) dt = \hat{u}_a - \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T u_a dt}_{=0} = \hat{u}_a$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Naštete merilne metode in podajte njihovo delitev? Opišite in skicirajte primerjalno in zamenjalno merilno metodo.

Rešitev:

- Poznamo dve bistveno različni metodi:
 - odklonsko**, pri kateri je odklon (ali kazanje) instrumenta osnova za določitev vrednosti merjene veličine;
 - ničelno**, ko instrument kaže nič oziroma nima odklona in določimo vrednost merjene veličine na podlagi drugih, znanih pogojev merilnega vezja.
- Obe metodi lahko nadalje delimo še na: **navadne, primerjalne, zamenjalne, diferenčne in posebne.**
- Primerjalna** odklonska in ničelna merilna metoda

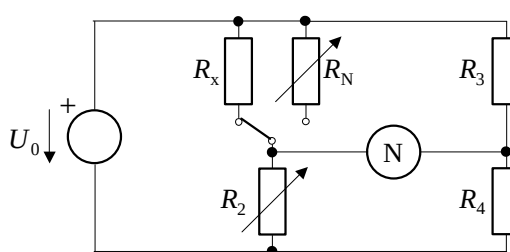
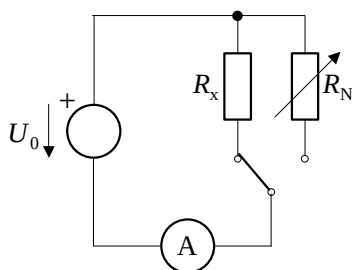


- Pri **primerjalni odklonski** metodi med seboj primerjamo napetost na neznanem upor z napetostjo na znanem (tok mora biti **konstanten!**):

$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} \quad \Leftarrow \quad I_p = \text{konst.} = \frac{U_x}{R_x} = \frac{U_N}{R_N}$$

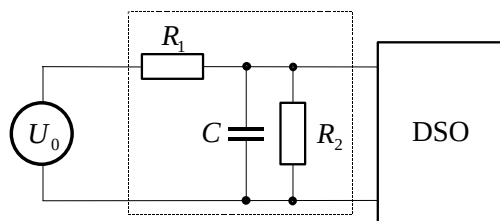
- Pri **primerjalni ničelni** metodi moramo mostiček s premikanjem drsnika po uporovni žici najprej uravnovesiti (tok ni nujno, da je stalen!): $R_x = R_N l_1 / l_2$

- Zamenjalna** odklonska in ničelna metoda



- Pri **zamenjalni** (substitucijski) **odklonski** metodi ugotovimo vrednost iskane veličine tako, da vzpostavimo v merilnem vezju dvakrat enake pogoje:
 - prvič je vključen neznani upor (merjenec);
 - drugič je vključen znani in spremenljivi upor –referenca
- Točnost instrumenta ni pomembna!

2. Določite mejno frekvenco člena, ki ga vzbujamo s sinusno napetostjo. Koliko je temenska vrednost napetosti na zaslonu osciloskopa pri vzbujanju z mejno frekvenco, če je $U_0 = 10\text{ V}$, $R_1 = 763\text{ k}\Omega$, $R_2 = 92,4\text{ k}\Omega$, $C = 18,3\text{ nF}$.



Rešitev:

- Opraviti imamo s členom 1. reda, ki ima časovno konstanto τ enako:

$$\tau = a\tau_1 = aR_1C$$

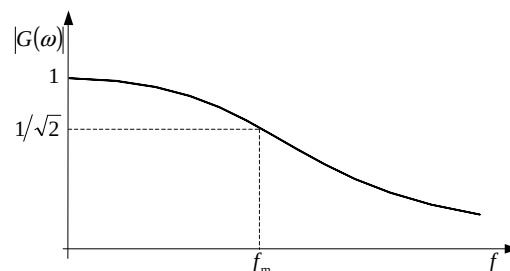
- pri čemer je a delilno razmerje uporov in določa napetost v stacionarnem stanju:

$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,108 ; \quad U_2 = aU_0 = 1,08\text{ V}$$

- Časovna konstanta je:

$$\tau_1 = R_1C = 13,96\text{ ms} \rightarrow \tau = a\tau_1 = 1,508\text{ ms}$$

- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje efektivnih vrednosti vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujanju zapišemo:



$$|G(\omega)| = \frac{\hat{u}_{iz}}{\hat{u}_{vh}} = \frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}}$$

- Pri mejni frekvenci upade izhodna napetost relativno na $1/\sqrt{2}$ (moč izhodnega signala se prepolovi $P_{iz}/P_{vh} = U_{iz}^2/U_{vh}^2 = 1/2$). To se zgodi, kadar je $2\pi f_m\tau = 1$:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_m\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow f_m = \frac{1}{2\pi\tau} = 105,5\text{ Hz}$$

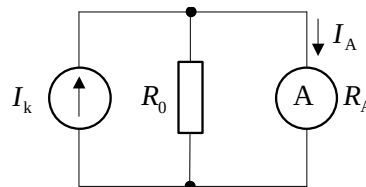
- Temenska vrednost izhodne napetosti pri sinusnem vzbujanju je:

$$\hat{u}_{iz} = \sqrt{2} U_{iz} = \sqrt{2} a \frac{U_{vh}}{\sqrt{2}} = aU_0 = 1,08\text{ V}$$

3. V katerem intervalu se lahko nahajajo vrednosti, ki jih kaže ampermeter ($I_D = 200,00 \text{ mA}$, $M_I = \pm(0,04\% I_i + 0,03\% I_D + 1 \text{ dig})$, $R_A = 1 \Omega$), ko merimo tok tokovnega vira, ki ima kratkostični tok $I_k = 185,37 \text{ mA} \pm 0,61 \text{ mA}$ in notranjo upornost $R_0 = 500 \Omega$?

Rešitev:

- Kadar vključimo ampermeter v vezje, nam kaže manjši tok, kot je kratkostični. Vzrok je v končni upornosti ampermetra $R_A \neq 0$. Opraviti imamo s tokovnim delilnikom:



$$I_A = I_k \frac{R_0}{R_0 + R_A} = K I_k = 0,998 I_k$$

- Ker se lahko vrednost kratkostičnega toka spreminja, se ustrezno tudi vrednost toka skozi ampermeter. To znaša v našem primeru:

$$I_A = 0,998 I_k = 185,00 \text{ mA} \pm 0,609 \text{ mA}$$

- Ampermeter ima tudi lastni pogrešek, ki se spreminja v mejah:

$$M_I = \pm(4 \cdot 10^{-4} I_i + 3 \cdot 10^{-4} I_D + 1 \text{ dig}) =$$

$$M_I = \pm(4 \cdot 10^{-4} \cdot 185,00 \text{ mA} + 3 \cdot 10^{-4} \cdot 200,00 \text{ mA} + 0,01 \text{ mA}) = \pm 0,144 \text{ mA}$$

- Od pričakovane vrednosti $I_A = 185,00 \text{ mA}$ lahko odčitek odstopa za mejno odstopanje toka skozi ampermeter $M_{I_A} = \pm 0,609 \text{ mA}$ in mejno vrednost lastnega pogreška ampermetra:

$$M = M_{I_A} + M_I = \pm(0,609 \text{ mA} + 0,144 \text{ mA}) = \pm 0,75 \text{ mA}$$

- Vrednosti, ki jih lahko kaže ampermeter, se nahajajo v intervalu:

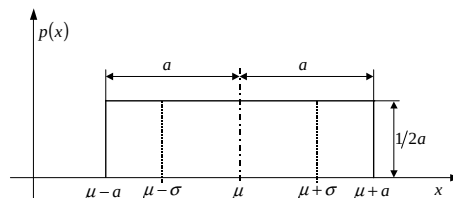
$$184,25 \text{ mA} \leq I_{\text{prikaz}} \leq 185,75 \text{ mA}$$

4. Koliko je standardna negotovost $u_c(y) = ?$ posredno merjene veličine $y = a + b + c + d$, če so porazdelitve pogreškov: pri veličini a enakomerna, veličina b trikotna, pri veličini c trapezna ($\beta = 0,66$) in pri veličini d Gaussova ($z = 3$)? Pri vseh porazdelitvah so mejne vrednosti pogreškov enake $M_e = M_{tri} = M_{tra} = M_G = M = 0,01$ in korelacijski koeficienti enaki 0. Skicirajte razmere!

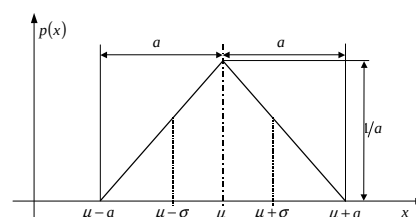
Rešitev:

- Standardni odkloni za različne porazdelitve:

- Enakomerna porazdelitev: $\sigma_a = M_e / \sqrt{3}$

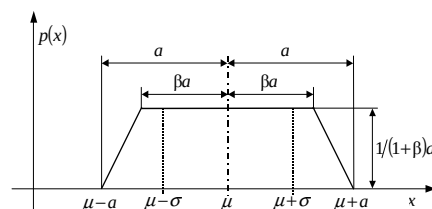


- Trikotna porazdelitev: $\sigma_b = M_{tri} / \sqrt{6}$

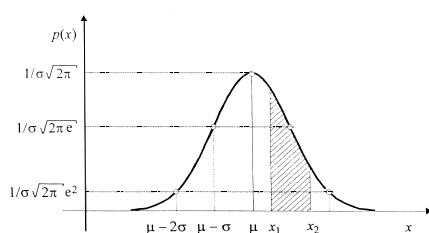


- Trapezna porazdelitev:

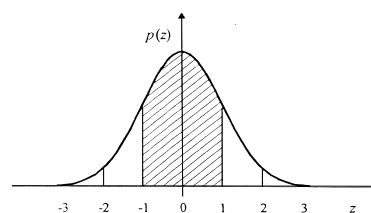
$$\sigma_c = M_{tra} \sqrt{1 + \beta^2} / \sqrt{6} = M_{tra} \sqrt{1 + 0,66^2} / \sqrt{6}$$



- Gaussova porazdelitev: $\sigma_d = M_G / 3$



⇒



$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$z = (x - \mu) / \sigma$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

- Standardno negotovost izhodne posredno merjene veličine $u_c(y)$ določajo prispevki posameznih neposredno merjenih veličin. Kadar te veličine niso mesebojno odvisne (korelirane), zapišemo standardno negotovost izhodne veličine v absolutni obliki:

$$u_c(y) = \sqrt{(c_a u(x_a))^2 + (c_b u(x_b))^2 + (c_c u(x_c))^2 + (c_d u(x_d))^2}$$

- Ker so standardne negotovosti enake standardnim odklonom ($u(x_a) = \sigma_a, \dots$) in koeficienti občutljivosti enaki $c_a = c_b = c_c = c_d = 1$, zapišemo:

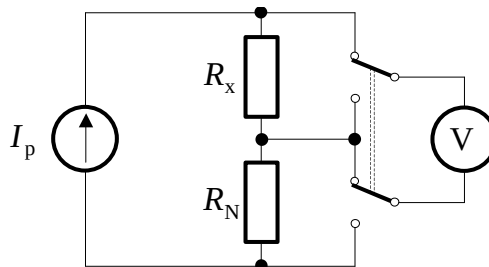
$$u_c(y) = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 + \sigma_d^2} = M \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1 + 0,66^2}{6} + \frac{1}{9}} = M \cdot 0,922$$

$$u_c(y) = 9,3 \cdot 10^{-3}$$

5. Zapišite popolni merilni rezultat za uporovno razmerje $r_x = R_1/R_2$, ki ga merimo z napetostno primerjalno metodo, če smo z istim voltmetrom izmerili padca napetosti na obeh uporih $U_1 = 3,825 \text{ V}$ in $U_2 = 3,786 \text{ V}$. Vpliva stabilnosti tokovnega vira in notranje upornosti voltmetra sta zanemarljiva. Skicirajte merilno vezje.

Rešitev:

- Pri napetostno primerjalni metodi merimo napetost najprej na upor R_1 in nato na drugem R_2 . Ker v obeh primerih teče skozi njiju enak tok (stabilen tokovni vir) in ker je notranja upornost voltmetra zanemarljivo velika, lahko zapišemo:



$$I_0 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{U_1}{U_2} = r_x$$

- Uporovno razmerje r_x torej znaša: $r_x = \frac{U_1}{U_2} = \frac{3,825 \text{ V}}{3,786 \text{ V}} = 1,01030$

- Uporovno razmerje izračunamo iz dveh napetosti, zato izračunamo negotovost $u(r_x)$ iz naslednje enačbe:

$$\frac{u(r_x)}{r_x} = \sqrt{\left[\frac{u(U_1)}{U_1}\right]^2 + \left[\frac{u(U_2)}{U_2}\right]^2}$$

- Ker se napetosti razlikujeta za manj kot 1% in se voltmeter dvakrat enako moti, lahko lastni pogrešek voltmetra v kvocientu zanemarimo in nam ostaneta pogreška odčitavanja, ker nista medsebojno odvisna (podrobnejša razlaga v skripti za vaje). Tako dobimo:

$$\frac{u(r_x)}{r_x} = \sqrt{\left[\frac{u(U_1)_q}{U_1}\right]^2 + \left[\frac{u(U_2)_q}{U_2}\right]^2},$$

- pri čemer $u(U_1)_q$ in $u(U_2)_q$ pomenita negotovosti zaradi ločljivost voltmetra Q_U , ki je v obeh primerih enaka (isti voltmeter). Glede na izmerjeni oz. prikazani vrednosti znaša ločljivost $Q_U = 1 \text{ dig} = 1 \text{ mV}$. Tako znaša negotovost uporovnega razmerja:

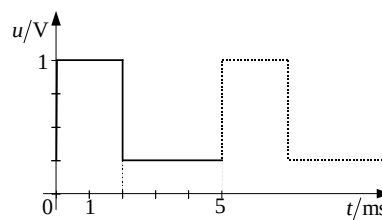
$$u(r_x) = r_x \cdot \sqrt{\left[\frac{1 \text{ mV}}{3,825 \text{ V} \cdot \sqrt{3}}\right]^2 + \left[\frac{1 \text{ mV}}{3,786 \text{ V} \cdot \sqrt{3}}\right]^2} = 1,01030 \cdot 2,146 \cdot 10^{-4} = 2,17 \cdot 10^{-4}$$

- Zaokrožen popolni merilni rezultat zapišemo v obliki:

$$r_x = 1,01030, \quad u(r_x) = 2,2 \cdot 10^{-4}, \quad n = 1$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Koliko bi moral biti informacijski pretok digitalnega voltmetra, ki ima merilno območje $(0\text{ V} \dots U_D = 1,200\text{ V})$ in mejo pogreška $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$, da bi z njim lahko pomerili oba nivoja danega signala? Koliko bi morala biti kapaciteta digitalnega voltmetra pri danem časovnem spreminjanju signala in uporabljenem merilnem dosegu?



$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E(x)}$$

Rešitev:

- Kadar je pogrešek odvisen od izmerjene vrednosti v obliki $E(x) = \pm(ax + b)$ kot v našem primeru, se število neodvisnih amplitudnih stopenj v območju od $x_{\min}$ do $x_{\max}$ izračuna z integralom:

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2(ax + b)} \Rightarrow m = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max} + b}{ax_{\min} + b} \right|$$

- Pri dani obliki signala moramo z voltmetrom pomeriti nivo $U_1 = 1\text{ V} = x_{\max,1}$ v času $T_{M,1} = 2\text{ ms}$ in nivo $U_2 = 0,25\text{ V} = x_{\max,2}$ v času $T_{M,2} = 3\text{ ms}$. V obeh primerih je spodnja meja območja $U_0 = 0\text{ V} = x_{\min}$. Število neodvisnih amplitudnih stopenj, ki jih moramo ločiti v obeh primerih je:

$$m_1 = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max,1} + b}{b} \right| = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{10^{-3} \cdot 1,0\text{ V} + 1,2\text{ mV}}{1,2\text{ mV}} \right| = 304,1$$

$$m_2 = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max,2} + b}{b} \right| = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{10^{-3} \cdot 0,25\text{ V} + 1,2\text{ mV}}{1,2\text{ mV}} \right| = 95,6$$

- Ker za eno meritev potrebujemo čas T_M , je hitrost prenosa ali **informacijski pretok** enak $I = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m)$. Za prvi nivo je potreben večji informacijski pretok:

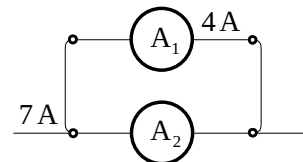
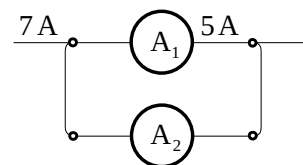
$$I_1 = \frac{1}{T_{M,1}} \text{lb}(m_1) = \frac{8,248\text{ bit}}{2\text{ ms}} = 4124,1 \frac{\text{bit}}{\text{s}} \quad \text{in} \quad I_2 = \frac{1}{T_{M,2}} \text{lb}(m_2) = \frac{6,579\text{ bit}}{3\text{ ms}} = 2193,1 \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

- Kapaciteto** voltmetra ali maksimalni informacijski pretok za dano časovno spreminjanje signala dobimo, če upoštevamo, da lahko signal zavzame vrednost na dosegu $U_i = U_D = x_{\max}$ ($C = \frac{1}{T_M} \text{lb}(m_{\max})$):

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax_{\max} + b}{b} \right| = 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln \left| \frac{10^{-3} \cdot 1,2\text{ V} + 1,2\text{ mV}}{1,2\text{ mV}} \right| = 347,6$$

$$C = \frac{1}{T_{M,1}} \text{lb}(m_{\max}) = \frac{8,4412\text{ bit}}{2\text{ ms}} = 4220,6 \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

2. Dva brezhibna ampermetra sta priključena vzporedno v vejo s tokom $I_0 = 7\text{ A}$ na dva različna načina, tako kot kažeta skici. Ampermeter A_1 ($I_D = 6\text{ A}$, $U_{A_0} = 60\text{ mV}$) kaže v prvem primeru 5 A , v drugem pa 4 A . Kaj povzroči to razliko in zakaj tolikšno? Koliko je upornost ampermetra A_2 ?



Rešitev:

- Razliko v toku skozi ampermeter A_1 povzročata upornosti vezi med ampermetroma $R_{\text{vez},1}$ in $R_{\text{vez},2}$.
- Vezavi nam dasta dva različna tokovna delilnika:

$$\frac{I_{A,1}}{I_0} = \frac{R_{A,2} + R_{\text{vez}}}{R_{A,1} + R_{A,2} + R_{\text{vez}}} = \frac{5}{7}$$

$$\text{in } \frac{I_{A,1}}{I_0} = \frac{R_{A,2}}{R_{A,1} + R_{A,2} + R_{\text{vez}}} = \frac{4}{7}$$

- Pri tem smo upoštevali z $R_{\text{vez}} = R_{\text{vez},1} + R_{\text{vez},2}$ skupno upornost veznih žic.

- Upornost ampermetra A_1 določimo iz podatkov:

$$R_{A,1} = \frac{U_{A_0}}{I_D} = \frac{60\text{ mV}}{6\text{ A}} = 10\text{ m}\Omega$$

- Upornost ampermetra A_2 in R_{vez} pa določimo iz razmerja enačb tokovnega delilnika:

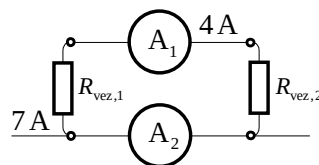
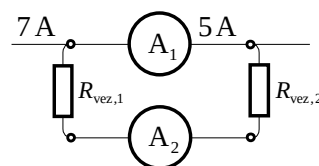
$$\frac{R_{A,2} + R_{\text{vez}}}{R_{A,2}} = \frac{5}{4} \rightarrow 4R_{\text{vez}} = R_{A,2}$$

- in od tod:

$$\frac{I_{A,1}}{I_0} = \frac{4R_{\text{vez}}}{R_{A,1} + 5R_{\text{vez}}} = \frac{4}{7} \rightarrow R_{\text{vez}} = \frac{R_{A,1}}{2} = 5\text{ m}\Omega$$

- Upornost drugega ampermetra A_2 je:

$$R_{A,2} = 4R_{\text{vez}} = 20\text{ m}\Omega$$



3. Ugotovite nelinearnost uporovnega senzorja temperature na območju med 0°C in 100°C , če gre nazivna karakteristika skozi začetno točko karakteristike in točko pri temperaturi 80°C ! Skicirajte krivuljo pogreška linearnosti.

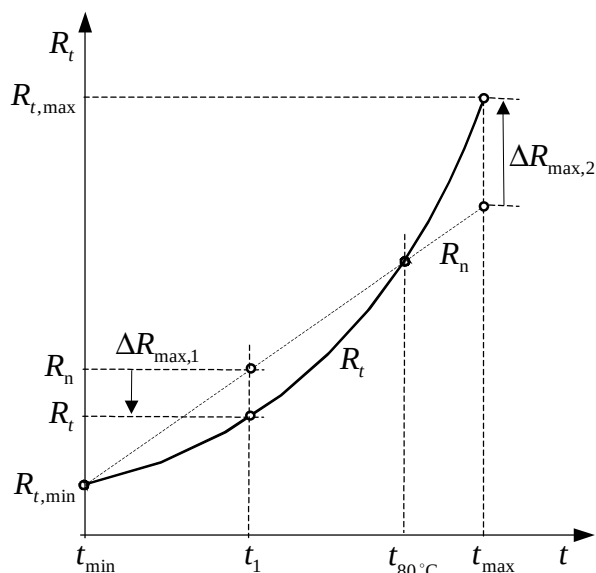
$$R_t = R_0 e^{bt}, \quad R_0 = R_{0^{\circ}\text{C}} = 1000\Omega, \quad R_{100^{\circ}\text{C}} = 1600\Omega$$

Rešitev:

- Manjkajoči koeficient b realne karakteristike $R_t = R_0 e^{bt}$ določimo iz podatkov:

$$b = \frac{1}{100^{\circ}\text{C}} \ln \frac{R_{100^{\circ}\text{C}}}{R_{0^{\circ}\text{C}}} = 4,7 \cdot 10^{-3} / ^{\circ}\text{C}$$

- Odstopanja nelinearnosti $\Delta R = R_t - R_n$ določamo na nazivno karakteristiko R_n , ki gre skozi začetno točko karakteristike in točko pri temperaturi 80°C !



$$R_n = R_{0^{\circ}\text{C}} + \frac{R_{80^{\circ}\text{C}} - R_{0^{\circ}\text{C}}}{80^{\circ}\text{C}} (t - t_{0^{\circ}\text{C}}) = R_{0^{\circ}\text{C}} + S \cdot t = 1000\Omega + 5,71 \frac{\Omega}{^{\circ}\text{C}} t$$

- Največje odstopanje $\Delta R_{\max} = ?$ moramo iskati na dveh odsekih $(0 \div 80)^{\circ}\text{C}$ in $(80 \div 100)^{\circ}\text{C}$.

- Na prvem odseku $(0 \div 80)^{\circ}\text{C}$ z delnim odvajanjem razlike karakteristik in enačenjem z 0:

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial t} = b R_0 e^{bt} - S = 0 \rightarrow t_1 = t_{\Delta R_{\max,1}} = 41,25^{\circ}\text{C} \text{ in } \Delta R_{\max,1} = -21,41\Omega$$

- Na drugem odseku $(80 \div 100)^{\circ}\text{C}$ je največje odstopanje kar pri končni točki (glej skico):

$$\Delta R_{\max,2}(t = 100^{\circ}\text{C}) = R_{100^{\circ}\text{C}} - R_{n,100^{\circ}\text{C}} = 1600\Omega - 1570,6\Omega = 29,43\Omega$$

- Za dano nazivno karakteristiko na območju $R_D = R_{100^{\circ}\text{C}} - R_{0^{\circ}\text{C}} = 600\Omega$ je nelinearnost enaka:

$$n = \frac{\Delta R_{\max}(t = 100^{\circ}\text{C})}{R_D} = \frac{29,43\Omega}{600\Omega} = 4,9\%$$

4. Koliko je standardna negotovost aritmetične sredine treh vrednosti napetosti U_1 , U_2 in U_3 , če so vzete iz populacije z eksperimentalno standardno negotovostjo $s_p = 3,0 \text{ mV}$ ($n_p = 300$)? Koliko vrednosti bi morali uporabiti za tvorjenje aritmetične sredine, da bi standardno negotovost aritmetične sredine treh vrednosti prepolovili?

Rešitev:

- Standardno negotovost aritmetične sredine $n = 3$ vrednosti $\bar{U} = \frac{1}{3}(U_1 + U_2 + U_3)$ dolčajo prispevki negotovosti neposredno merjenih vrednosti napetosti:

$$u_c(\bar{U}) = \sqrt{(c_1 u(U_1))^2 + (c_2 u(U_2))^2 + (c_3 u(U_3))^2}$$

- Ker so vrednosti vzete iz iste populacije z eksperimentalno ocenjeno standardno negotovostjo $s_p = 3,0 \text{ mV}$ na velikem številu meritev $n_p = 300$, imajo vse enako standardno negotovost:

$$u(U_1) = u(U_2) = u(U_3) \doteq s_p$$

- Faktorji občutljivosti so enaki delnim odvodom:

$$c_1 = \frac{\partial \bar{U}}{\partial U_1} = c_2 = c_3 = \frac{1}{3} \quad \text{oz. splošno } c_n = \frac{1}{n}$$

- Standardna negotovost aritmetične sredine je enaka:

$$u_c(\bar{U}) = \frac{1}{3} \sqrt{3 s_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{3}} = 1,732 \text{ mV}$$

- oz. splošno: $u_c(\bar{U}) = \frac{1}{n} \sqrt{n s_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{n}} !!$

- Če želimo standardno negotovost aritmetične sredine treh vrednosti prepoloviti, moramo pri tvorjenju uporabiti več ($n = 12$) vrednosti:

$$\frac{u_c(\bar{U})_{n=3}}{2} = \frac{s_p}{2\sqrt{3}} = \frac{s_p}{\sqrt{12}} = 0,866 \text{ mV} \quad \leftrightarrow \quad n = 12$$

5. Podajte merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo $u_{68,3}$ in razširjeno merilno negotovostjo U_{95} , če je $s_p = 0,333 \text{ V}$ in meja pogreška merilnega instrumenta $M_U = \pm(1,0\% U_i + 1 \text{ dig})$. Ročno merjeni rezultati so v tabeli 1.

Tabela 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$U \text{ (V)}$	12,3	11,9	12,0	12,4	12,1	12,4	12,1	12,3	12,2	12,1	11,8	11,9	12,3	12,2	12,0

Tabela 2

$p / \%$	50	68,3	95	95,5	99	99,73	99,99
k	0,675	1	1,96	2,0	2,58	3	3,90

Rešitev:

- Povprečna vrednost izmerjenih vrednosti je enaka:

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j = \frac{1}{15} (12,3 \text{ V} + 11,9 \text{ V} + \dots + 12,0 \text{ V}) = 12,1333 \text{ V}$$

- Negotovost tipa A se izračuna iz standardnega odklona populacije s_p :

$$u_A(U) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{0,333 \text{ V}}{\sqrt{15}} = 0,08598 \text{ V}$$

- Negotovost tipa B se upošteva iz meje pogreška merilnega instrumenta:

$$u_B(U) = \frac{M}{\sqrt{3}} = \frac{\pm(1,0\% U_i + 1 \text{ dig})}{\sqrt{3}} = 0,12779 \text{ V}$$

- Skupna merilna negotovost tako znaša:

$$u(U) = \sqrt{u_A^2(U) + u_B^2(U)} = 0,1541 \text{ V}$$

- Merilni rezultat s standardno negotovostjo ($u_{68,3}$) je:

$$U = 12,13 \text{ V}, \quad u(U) = 0,16 \text{ V}, \quad n = 15, \quad k = 1, \quad p = 68,3\%$$

- Merilni rezultat z razširjeno merilno negotovostjo (U_{95}) pa je:

$$U = 12,13 \text{ V} \pm 0,31 \text{ V}, \quad n = 15, \quad k = 1,96, \quad p = 95\%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Ugotovite odzivni čas T_a , dvižni čas T_r in mejno frekvenco f_m merilne naprave (člen 1. reda), če je znan odziv na stopnico $U_0 = 5\text{ V}$ v dveh točkah: $u_2(t = 1\text{ ms}) = 3,46\text{ V}$ in $u_2(t \rightarrow \infty) = 4\text{ V}$. Narišite sliko ene periode na zaslonu osciloskopa ($k_{y1} = k_{y2}$) za dano napravo, če jo vzbuja sinusnim signalom frekvence f_m ! $u_{vh} = u_{y1}$, $u_{iz} = u_{y2}$

Rešitev:

- Če merilno napravo aproksimiramo s členom 1. reda, je odziv na stopnico enak:

$$u_2 = U_0(1 - e^{-t/\tau})$$

- Iz druge znane točke odziva $u_2(t \rightarrow \infty) = 4\text{ V}$, ko je prehodni pojav že izzvenel, dobimo novo stacionarno stanje U_0^* .

$$4\text{ V} = U_0^*(1 - e^{-\infty/\tau}) = U_0^*$$

- Iz prve znane točke odziva $u_2(t = 1\text{ ms}) = 3,46\text{ V}$ pa **časovno konstanto**:

$$3,46\text{ V} = 4\text{ V}(1 - e^{-1\text{ ms}/\tau}) \rightarrow \tau = 1\text{ ms} / -\ln\left(1 - \frac{3,46\text{ V}}{4\text{ V}}\right) = 0,50\text{ ms}$$

- V **odzivnem času** T_a naraste u_2 po dogovor na 95% končne vrednosti:

$$0,95U_0^* = U_0^*(1 - e^{-T_a/\tau}) \rightarrow T_a = \tau \ln 20 = 1,50\text{ ms}$$

- V **dvižnem času** T_r naraste u_2 po dogovor od 10% do 90% od prvega $u_2(t = 0) = 0\text{ V}$ do drugega $u_2(t \rightarrow \infty) = 4\text{ V}$ stacionarnega stanja :

$$0,1U_0 = U_0(1 - e^{-t_1/\tau}) \quad \text{in} \quad 0,9U_0 = U_0(1 - e^{-(t_1+T_r)/\tau})$$

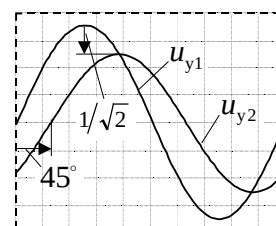
- od koder dobimo: $T_r = \tau \ln 9 = 1,10\text{ ms}$

- Mejna frekvenca** je določena z upadom razmerja izhodne z vhodno napetostjo na $1/\sqrt{2}$:

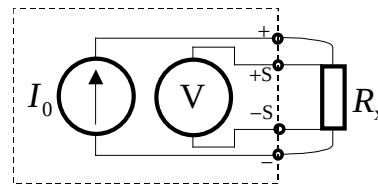
$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_m)^2 \tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow f_m = \frac{1}{2\pi \tau} = 318,3\text{ Hz}$$

- Slika ene periode na zaslonu osciloskopa:

- Pri mejni frekvenci amplituda izhodnega signala upade na $1/\sqrt{2}$ in sinus zaostane za kot $\varphi = 45^\circ$.



2. Kolikšna je relativna sistematična napaka merjenja upornosti $R_x = 75\Omega$, če jo merimo 4-vodno z digitalnim multimetrom, ki ima notranjo upornost med S-sponkama voltmetra $R_v = 1M\Omega$?



Rešitev:

- V 4-vodnem načinu merjenja upornosti multimeter meri padec napetosti neposredno na uporu. Zato nimamo opravka s sistematičnim pogreškom zaradi priključnih žic.
- Po drugi strani pa tok, ki ga generira multimeter z notranjim tokovnim virom, ne gre ves skozi upor R_x , ampak se ga določen delež zaradi končne upornosti voltmetra odcepi skozi voltmeter. Ker multimeter (ohmmeter) izračuna upornost iz nastavljenega (generiranega) toka in izmerjenega padca napetosti, imamo zaradi parazitnega (odcepljenega) toka skozi voltmeter opravka s sistematično napako.
- Dejansko izmerjena upornost tako znaša:

$$R'_x = R_x \parallel R_v = \frac{R_x \cdot R_v}{R_x + R_v}$$

- Ker je prava vrednost upora enaka $R_x = 75\Omega$, imamo opravka z relativno sistematično napako:

$$e = \frac{R'_x - R_x}{R_x} = \frac{\frac{R_x \cdot R_v}{R_x + R_v} - R_x}{R_x} = -\frac{R_x}{R_x + R_v} \approx -7,5 \cdot 10^{-5}$$

3. Rezultat kalibracije ampermetra v štirih točkah je prikazan v tabeli. Prva kolona predstavlja referenčno vrednost, druga kolona kaže izmerjeno vrednost. Preračunana merilna negotovost ampermetra je 0,45 A. Koliko znaša pogrešek kalibriranega inštrumenta (kolona tri) in koliko je korekcija kalibriranega inštrumenta (kolona štiri)? Pri uporabljanju ampermetra ste izmerili 6 A. Zapišite enačbo in korigiran merilni rezultat!

I_{ref}/A	I_i/A	E/A	K/A
1,98	2,00		
3,95	4,00		
6,03	6,00		
8,04	8,00		

Rešitev:

- Pogrešek kalibriranega instrumenta je razlika izmerjene vrednosti in referenčne vrednosti. Korekcija pa ima obratni predznak pogreška in se prišteva k rezultatu.

I_{ref}/A	I_i/A	E/A	K/A
1,98	2,00	+0,02	-0,02
3,95	4,00	+0,05	-0,05
6,03	6,00	-0,03	+0,03
8,04	8,00	-0,04	+0,04

- Če pri uporabi instrumenta izmerimo z ampermetrom 6 A, znaša prava vrednost

$$\underline{\underline{I = I_i + K = 6 \text{ A} + (+0,03 \text{ A}) = 6,03 \text{ A}}}$$

- pri tem uporabimo korekcijo $K = +0,03 \text{ A}$ za izmerjeno točko $I_i = 6 \text{ A}$ iz tabele.

- Merilni rezultat je enak

$$\underline{\underline{I = 6,03 \text{ A} \quad , \quad u(I) = 0,45 \text{ A} \quad , \quad n = 1}}$$

4. Katere vrednosti lahko pričakujemo z 99 odstotno verjetnostjo na prikazovalniku voltmetra, ko merimo napetost vira, ki ima notranjo upornost $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ in napetost praznega teka, ki je bila določena na podlagi sedmih meritev:

$$U_0 = 6,8925 \text{ V} , u(U_0) = 20 \text{ mV} (n = 7) ?$$

Uporabljeni voltmeter ima podatke:

$$M_U = \pm(0,02\%U + 0,01\%U_D + 2\text{dig}), U_D = 10 \text{ V},$$

$$R_V = 10 \text{ M}\Omega , \text{ ločljivost } \Delta U_q = 100 \mu\text{V}$$

Negotovosti notranje upornosti R_0 in upornosti voltmetra R_V zanemarite!

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(v)$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Napetostni delilnik nam da: $U_V = U_0 \frac{R_V}{R_0 + R_V} = U_0 \cdot 0,999 = 6,885614 \text{ V}$
- Standardna negotovost je sestavljena iz prispevka voltmetra – negotovost tipa B - in prispevka negotovosti napetosti na vhodu, ki je bila ocenjena z devetimi meritvami – negotovost tipa A:

$$u_B(U_V) = \frac{1}{\sqrt{3}} M_U = \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \cdot 10^{-4} U_V + 1 \cdot 10^{-4} U_D + 0,2 \text{ mV}) = 1,488 \text{ mV}$$

$$u_A(U_V) = \frac{\partial U_V}{\partial U_0} u_A(U_0) = \frac{R_V}{R_0 + R_V} u_A(U_0) = 19,98 \text{ mV} \rightarrow u_A(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- Skupno standardno negotovost sestavljata oba prispevka.:

$$u_c(U_V) = \sqrt{u_A^2(U_V) + u_B^2(U_V)} = 20,05 \text{ mV} \rightarrow u_c(U_V) = 20 \text{ mV}$$

- v danem primeru je prispevek negotovosti tipa A prevladujoč. Zato je prevladujoča tudi porazdelitev pogreška tega prispevka.
- Ker je skupna standardna negotovost tipa A dobljena na manjšem številu meritev, uporabimo pri določanju faktorja razširitve t-porazdelitev in število prostostnih stopenj $\nu_{\text{eff}} = n - 1 = 7 - 1 = 6$

$$\text{▪ Iz tabele dobimo za faktor razširitve: } \nu_{\text{eff}} = 6 \rightarrow k = t_{99\%} = 3,71$$

- Razširjena negotovost je: $U_{99}(U_V) = t_{99\%} \cdot u_c(U_V) = 74,2 \text{ mV}$
- Z 99 odstotno verjetnostjo lahko pričakujemo rezultate med $U_V - U_{99}(U_V)$ in $U_V + U_{99}(U_V)$:

$$6,8114 \text{ V} < U_V < 6,9598 \text{ V}$$

5. Izpeljite številsko enačbo za faktor kvalitete $Q = 2\pi fR(C_1 + C_2)$, če so neposredno merjene veličine izražene v kHz, k Ω in nF ter jo uporabite za naslednje podatke:

$$f = 10 \text{ kHz}, R = 12 \text{ k}\Omega, C_1 = 10 \text{ nF}, C_2 = 25 \text{ nF}$$

Rešitev:

- Veličinsko enačbo $Q = 2\pi fR(C_1 + C_2)$ zapišemo s produkti številskih vrednosti in enot:

$$\{Q\}[Q] = 2\pi \{f\}[f] \{R\}[R] (\{C_1\}[C_1] + \{C_2\}[C_2])$$

- Upoštevati moramo, da sta enoti za kapacitivnosti C_1 in C_2 enaki $[C_1] = [C_2] = [C]$. Veličinsko enačbo preoblikujemo v obliko:

$$\{Q\} = 2\pi \{f\} \{R\} (\{C_1\} + \{C_2\}) \frac{[f][R][C]}{[Q]}$$

- Kvocient uporabljenih enot je številaska vrednost:

$$\frac{[f][R][C]}{[Q]} = \frac{10^3 \text{ Hz} \cdot 10^3 \Omega \cdot 10^{-9} \text{ F}}{1} = 10^{-3} \frac{\Omega \text{ F}}{\text{s}} = 10^{-3},$$

- ki ga pomnožimo še s številskim faktorjem 2π : $2\pi \cdot 10^{-3}$

- Ker za rezultat dobimo le številsko vrednost, moramo navesti tudi, za kakšne enote velja:

$$\{Q\} = 2\pi \cdot 10^{-3} \{f\} \{R\} (\{C_1\} + \{C_2\}) \rightarrow Q = 2\pi \cdot 10^{-3} fR(C_1 + C_2) \left(\frac{f}{\text{kHz}}, \frac{R}{\text{k}\Omega}, \frac{C}{\text{nF}} \right)$$

- Za dane podatke dobimo:

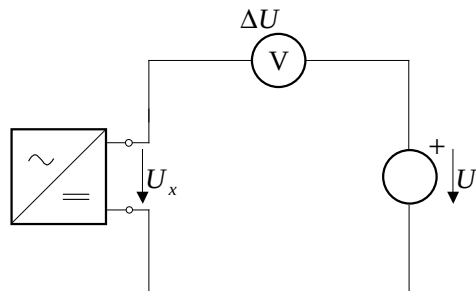
$$Q = 2\pi \cdot 10^{-3} \cdot f \cdot R \cdot (C_1 + C_2) = 2\pi \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 12 \cdot (10 + 25) = 26,39$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Značilno za diferenčno metodo je, da je doprinos negotovosti voltmetra, ki meri le majhno razliko med neznano in referenčno napetostjo, k negotovosti napetosti U_x zanemarljiv. Skicirajte vezje in določite težo prispevka negotovosti voltmetra!

Rešitev:

- Diferenčno metodo uporabljamo, kadar nas zanima sprememba fizikalne veličine.



- Razlike med neznano vrednostjo in referenčno vrednostjo ni potrebno meriti zelo točno, kadar je razlika majhna! Dokaz:

- Če je napetostna razlika $\Delta U = U_v$ majhna, lahko izenačimo U_x in U_r :

$$U_x = U_r + U_v \approx U_r$$

- Standardna negotovost napetosti U_x je enaka:

$$u(U_x) = \sqrt{\left(\frac{\partial U_x}{\partial U_r} u(U_r)\right)^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial U_v} u(U_v)\right)^2} = \sqrt{(u(U_r))^2 + (u(U_v))^2}$$

- in v relativni obliki:

$$w(U_x) = \frac{u(U_x)}{U_x} \approx \sqrt{\left(\frac{u(U_r)}{U_r}\right)^2 + \left(\frac{U_v}{U_r} \frac{u(U_v)}{U_v}\right)^2} = \sqrt{w^2(U_r) + \left(\frac{U_v}{U_r}\right)^2 w^2(U_v)}$$

$$w(U_x) \approx \sqrt{w^2(U_r) + \left(\frac{U_v}{U_x}\right)^2 w^2(U_v)} \quad \Rightarrow \quad w(U_x) \xrightarrow{U_v/U_x \rightarrow 0} w(U_r)$$

- Teža prispevka negotovosti voltmetra je enaka U_v/U_x .

2. V verigo (kaskado) vezana merilna člena – prvi ima mejno frekvenco $f_{m1} = 100 \text{ kHz}$, drugi pa časovno konstanto $\tau_2 = 1 \mu\text{s}$ (člena 1. reda) - povzročata pri frekvenci f fazni pogrešek 1° . Katera je ta frekvenca in kolikšen je pri tem amplitudni pogrešek?

Rešitev:

- Za merilni člen, ki ga aproksimiramo s členom 1. reda ($u_2 = U_0(1 - e^{-t/\tau})$), zapišemo amplitudno in fazno karakteristiko:

$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 \tau^2}}; \quad \varphi = -\arctg \omega \tau$$

- od koder lahko izrazimo frekvenco f , če poznamo fazni kot φ in časovno konstanto τ kot v našem primeru:

$$f = \frac{\text{tg} \varphi}{2\pi \tau}$$

- Pri kaskadni vezavi merilnih členov se skupni dvižni čas geometrično podaljša:

$$T_{rs}^2 = T_{r1}^2 + T_{r2}^2$$

- Če merilno napravo aproksimiramo s členom 1. reda, je povezava dvižnega časa in časovne konstante enaka:

$$T_r = \tau \ln 9 = 2,2 \tau$$

- Iz zgornjega izvedemo, da je tudi skupna časovna konstanta kaskadno vezanih merilnih členov enaka geometrični vsoti:

$$\tau_s = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$$

- Povezava mejne frekvence in časovne konstante za člen 1. reda je: $\tau = \frac{1}{2\pi f_m}$

- in za prvi merilni člen velja: $\tau_1 = \frac{1}{2\pi f_{m1}} = 1,5915 \mu\text{s}$

- Skupna časovna konstanta je tako:

$$\tau_s = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = 1,8796 \mu\text{s}$$

- Sedaj lahko izračunamo iskano frekvenco:

$$f = \frac{\text{tg} \varphi}{2\pi \tau_s} = 1478 \text{ Hz}$$

- Amplitudni pogrešek dobimo iz amplitudne karakteristike:

$$e_A = \frac{|U_2|}{|U_1|} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f \tau_s)^2}} - 1 = -1,52 \cdot 10^{-4}$$

3. Digitalni ampermeter s $4\frac{1}{2}$ -mestnim prikazovalnikom ima mejo pogreška $M_I = \pm(0,1\% I_i + 0,1\% I_D + 2 \text{ dig})$, kaže pa $I_i = 4,567 \text{ mA}$. Izrazite popolni merilni rezultat toka s standardno negotovostjo! Kakšen pa je popolni merilni rezultat, če je ampermeter umerjen in je lastni pogrešek $E = -8 \mu\text{A}$, razširjena negotovost ($k = 2$) pa $U = 21 \mu\text{A}$?

Rešitev:

- Kadar imamo eno meritev in je podan mejni pogrešek, predpostavimo, da je gostota porazdelitve pogreška pravokotne oblike in zapišemo standardno negotovost z:

$$u(I) = \frac{M_I}{\sqrt{3}},$$

- ki v našem prvem primeru znaša:

$$\begin{aligned} u(I) &= \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} I_i + 10^{-3} I_D + 2 \text{ dig}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-3} 4,567 \text{ mA} + 10^{-3} 19,999 \text{ mA} + 0,002 \text{ mA}) = \frac{1}{\sqrt{3}} 0,0266 \text{ mA} \\ u(I) &= 0,01534 \text{ mA} \rightarrow u(I) = 0,016 \text{ mA} \end{aligned}$$

- pri tem smo upoštevali, da je merilni doseg pri $4\frac{1}{2}$ -mestnem prikazu (največja vrednost je 19,999) $I_D = 19,999 \text{ mA}$ in vrednost zadnjega digita 0,001 mA.

- Popolni merilni rezultat toka s standardno negotovostjo zapišemo:

$$I_i = 4,567 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,016 \text{ mA}, \quad n = 1$$

- Če je instrument umerjen, poznamo lastni pogrešek instrumenta E in popravimo izmerjeno vrednost:

$$I = I_i - E = 4,567 \text{ mA} - (-8 \mu\text{A}) = 4,575 \text{ mA}$$

- Standardno negotovost dobimo v drugem primeru iz razširjene negotovosti:

$$u(I) = \frac{U(I)}{k} = \frac{0,021 \text{ mA}}{2} = 0,0105 \text{ mA} \rightarrow u(I) = 0,011 \text{ mA}$$

- Merilni rezultat podan s standardno negotovostjo za drugi primer je enak:

$$I_i = 4,575 \text{ mA}, \quad u(I) = 0,011 \text{ mA}, \quad n = 1$$

4. V tabeli so zapisane diagonalne napetosti v četrtinskem Wheatstonovem mostiču, ki so bile izmerjene z voltmetrom $U_{5,izm}$. Mostiček je bil napajan z $U_0 = 4V$. Koliko je pogrešek zaradi nelinearnosti E , ki je definiran kot razlika med izmerjenimi vrednostmi voltmetra in idealno karakteristiko četrtinskega mostiča? Narišite graf $E(\Delta R/R)$!

$\Delta R/R$	$U_{5,izm} / mV$
-0,10	-112
-0,08	-90
-0,06	-68
-0,04	-45
-0,02	-22
0	-1
0,02	20
0,04	44
0,06	64
0,08	88
0,1	110

Rešitev:

- Idealno karakteristiko četrtinskega mostiča izračunamo z

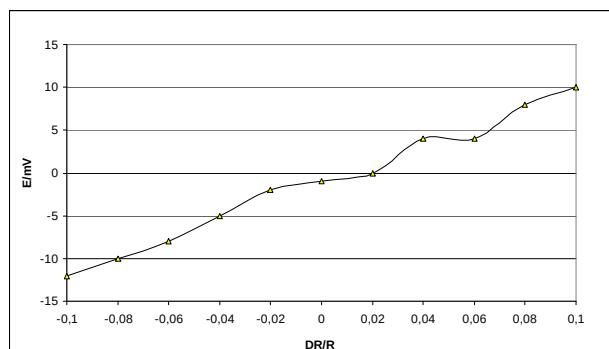
$$U_{5,izr} = \frac{U_0 \Delta R}{4R}$$

- Pogrešek nelinearnosti E je enak:

$$E = U_{5,izm} - U_{5,izr}$$

$\Delta R/R$	$U_{5,izm} / mV$	$U_{5,izr} / mV$	E / mV
-0,10	-112	-100	-12
-0,08	-90	-80	-10
-0,06	-68	-60	-8
-0,04	-45	-40	-5
-0,02	-22	-20	-2
0	-1	0	-1
0,02	20	20	0
0,04	44	40	4
0,06	64	60	4
0,08	88	80	8
0,1	110	100	10

- Graf:



5. Kolikšna je napetost U , izražena v enoti SI, če znaša 10 dBm_{50} (referenca 1 mW , 50Ω)? Kolikšna pa je, če jo izrazimo v dBm_{600} (referenca 1 mW , 600Ω).?

Rešitev:

- Kadar je napetost izražena v enoti decibel, je pri tem mišljeno njeno razmerje proti referenčni vrednosti U_{ref} . Izhodiščna definicija decibela je podana z desetiškim logaritmom dveh moči:

$$\frac{U}{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{P}{P_{\text{ref}}} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{R} \cdot \frac{R}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 10 \log \left(\frac{U^2}{U_{\text{ref}}^2} \right) = 20 \log \left(\frac{U}{U_{\text{ref}}} \right)$$

- Pri zapisu $\frac{U}{\text{dBm}_{50}}$ je referenčna napetost U_{ref1} enaka napetosti, kadar se na upor $R = 50 \Omega$ sprošča moč $P = 1 \text{ mW}$:

$$U_{\text{ref1}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1 \text{ mW} \cdot 50 \Omega} = 0,2236 \text{ V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{50}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,2236 \text{ V}} \right)$$

- V našem primeru je napetost U , izražena v enoti SI ($[U] = \text{V}$), enaka:

$$\frac{10 \text{ dBm}_{50}}{\text{dBm}_{50}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,2236 \text{ V}} \right) \Rightarrow U = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 0,2236 \text{ V} = 0,7071 \text{ V}$$

- Pri zapisu $\frac{U}{\text{dBm}_{600}}$ je referenčna napetost U_{ref2} je enaka napetosti, kadar se na upor $R = 600 \Omega$ sprošča moč $P = 1 \text{ mW}$:

$$U_{\text{ref2}} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1 \text{ mW} \cdot 600 \Omega} = 0,7746 \text{ V} \Rightarrow \frac{U}{\text{dBm}_{600}} = 20 \log \left(\frac{U}{0,7746 \text{ V}} \right)$$

- in za naš primer dobimo:

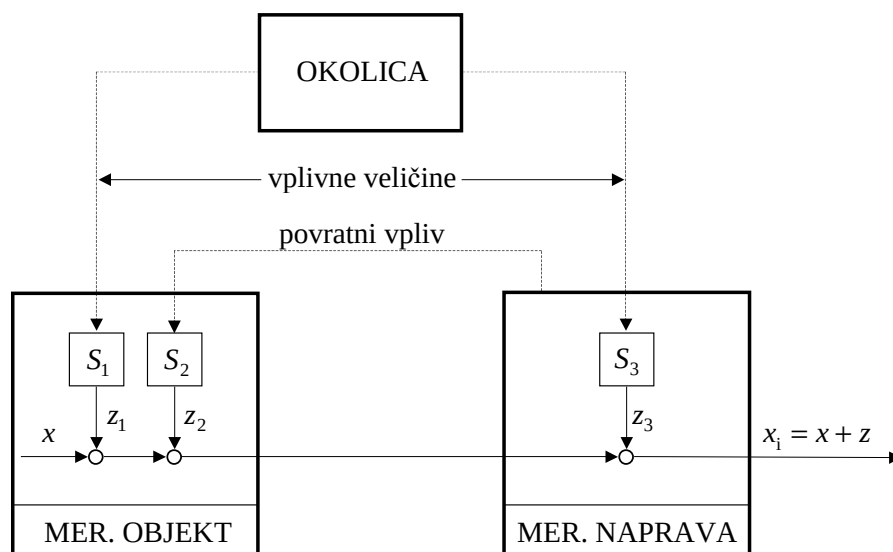
$$\frac{U}{\text{dBm}_{600}} = 20 \log \left(\frac{0,7071 \text{ V}}{0,7746 \text{ V}} \right) = -0,792 \Rightarrow U = -0,792 \text{ dBm}_{600}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Opišite postopek merjenja in razložite osnovno shemo merjenja!

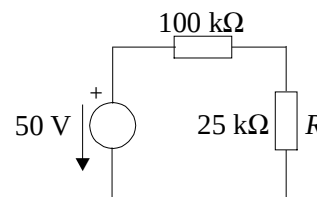
Rešitev:

- **Merjenje** je postopek, pri katerem primerjamo neznano vrednost neke fizikalne veličine z znano količino istovrstne veličine (enoto) – neposredno merjenje.
 - $I = 6\text{ A}$ - efektivna vrednost električnega toka,
 - 6 - številska vrednost,
 - A (amper) - enota za električni tok.
- Izmerjena vrednost je eden od parametrov neke fiz. veličine (i - trenutna vrednost, $\hat{i}$ - temenska vrednost, $\bar{I}$ - srednja vrednost itn.).
- **Osnovna shema merjenja:**
 - merilni objekt – nosilec merjene veličine,
 - merilna naprava – nam daje izmerjeno vrednost.



- Izmerjena vrednost x_i se za vsoto treh delnih motenj $z_1 + z_2 + z_3$ razlikuje od prave vrednosti
 - S_1 - občutljivost merilnega objekta na vplivne veličine,
 - S_2 - povratni vpliv na priključitev merilne naprave,
 - S_3 - občutljivost merilne naprave na vplivne veličine.
- Razliko med izmerjeno vrednostjo in pravo vrednostjo imenujemo merilni pogrešek.

2. Želimo izmeriti napetost na $25\text{k}\Omega$ uporu z voltmetroma, ki imata doseg $U_D = 20\text{ V}$. Prvi ima karakteristično upornost $1\text{k}\Omega/\text{V}$, drugi pa $20\text{k}\Omega/\text{V}$. Ugotovite, koliko voltmetra kažeta in kolikšen je sistematični pogrešek pri posamezni meritvi?



Rešitev:

- Pred priključitvijo voltmetrov, je napetost na uporu R enaka:

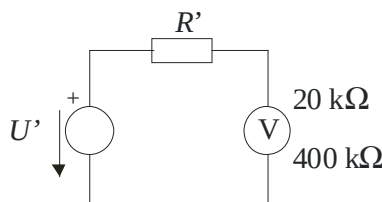
$$U_R = 50\text{ V} \cdot \frac{25\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega + 25\text{k}\Omega} = 10\text{ V}$$

- Po priključitvi voltmetrov z notranjima upornostima :

$$R_{V_1} = U_D \cdot R_{V_1,0} = 20\text{ V} \cdot 1\text{k}\Omega/\text{V} = 20\text{k}\Omega \text{ oziroma}$$

$$R_{V_2} = U_D \cdot R_{V_2,0} = 20\text{ V} \cdot 20\text{k}\Omega/\text{V} = 400\text{k}\Omega$$

- dobimo naslednje nadomestno vezje:



- kjer sta $U' = U_R$ in R' (vzporedna vezava uporov $100\text{k}\Omega$ in $25\text{k}\Omega$):

$$R' = \frac{25\text{k}\Omega \cdot 100\text{k}\Omega}{25\text{k}\Omega + 100\text{k}\Omega} = 20\text{k}\Omega$$

- Kazanje prvega voltmetra je tako enako:

$$U_{V_1} = 10\text{ V} \cdot \frac{20\text{k}\Omega}{20\text{k}\Omega + 20\text{k}\Omega} = 5\text{ V}$$

- in sistematični pogrešek je:

$$E_1 = 5\text{ V} - 10\text{ V} = -5\text{ V}; \quad e_1 = \frac{-5\text{ V}}{10\text{ V}} = -50\%$$

- Kazanje drugega voltmetra pa je enako:

$$U_{V_2} = 10\text{ V} \cdot \frac{400\text{k}\Omega}{400\text{k}\Omega + 20\text{k}\Omega} = 9,524\text{ V}$$

- in sistematični pogrešek je enak:

$$E_2 = 9,524\text{ V} - 10\text{ V} = -0,476\text{ V}; \quad e_2 = \frac{-0,476\text{ V}}{10\text{ V}} = -4,76\%$$

3. S signalnim analizatorjem smo merili efektivno vrednost signala, ki ima poleg osnovne še harmonsko komponento, in faktor popačenja ($THD_{IEC} = \sqrt{X^2 - X_1^2} / X_1$):

$$U = 1,0000 \text{ V} ; u(U) = 2,5 \text{ mV} ; n = 1$$

$$THD = 0,2000 ; u(THD) = 0,0015 ; n = 1$$

Koliko znaša merilni rezultat pri določanju osnovne komponente signala? $r(U, THD) = 0$

Rešitev:

- Iz enačbe za faktor popačenja $THD = \sqrt{U^2 - U_1^2} / U_1$ izrazimo osnovno komponento:

$$U_1 = \frac{U}{\sqrt{1 + THD^2}} = 0,98058 \text{ V}$$

- Standardna negotovost posredno merjene osnovne komponente je sestavljena iz negotovosti vhodnih veličin U in THD :

$$u(U_1) = \sqrt{(c_1 u(U))^2 + (c_2 u(THD))^2} = \sqrt{(2,4515 \text{ mV})^2 + (0,2667 \text{ mV})^2} = 2,466 \text{ mV}$$

- kjer sta faktorja občutljivosti:

$$c_1 = \frac{\partial U_1}{\partial U} = \frac{1}{\sqrt{1 + THD^2}} = 0,9806$$

$$|c_2| = \left| \frac{\partial U_1}{\partial THD} \right| = \left| -U \frac{THD}{\sqrt{(1 + THD^2)^3}} \right| = 0,1778 \text{ V}$$

- Merilni rezultat pri določanju osnovne komponente signala znaša:

$$U_1 = 0,9806 \text{ V} , \quad u(U_1) = 2,5 \text{ mV} , \quad n = 1$$

4. Koliko je največji relativni pogrešek zaokrožanja merilne negotovosti pri zaokrožanju ne eno veljavno cifro in koliko pri dveh veljavnih cifrah? Kolikšno relativno vrednost negotovosti bi v teh primerih morali dodati? Pri zaokrožanju upoštevamo samo prvo cifro, ki jo že opustimo (če je 0 navzdol, če je 1,2,.. pa navzgor).

Rešitev:

- Zaokrožitev na eno cifro:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednosti prve veljavne cifre 1.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2$ imamo večji pogrešek kot pri zaokrožanju navzdol $u = 0,1099.. \rightarrow u_z = 0,1$:

$$u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,2 - 0,11}{0,11} = 81,8\% !$$

$$u \doteq 0,11 \rightarrow u_z = 0,1 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,1 - 0,11}{0,11} = -9,1\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na eno cifro bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,2^2 - 0,11^2}}{0,11} = \frac{0,167}{0,11} = 151,8\% !$$

- Zaokrožitev na dve cifri:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednostih prvih dveh veljavnih cifer 11.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11$ imamo največji pogrešek:

$$u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,11 - 0,101}{0,101} = 8,9\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na dve cifri bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,11^2 - 0,101^2}}{0,101} = \frac{0,0436}{0,101} = 43,1\%$$

5. Koliko je najkrajši čas določanja lastnega pogreška voltmetra $M_{U,X} = \pm(0,5\%U + 0,5\%U_D + 1\text{dig})$, $U_{D,X} = 1,000\text{ V}$, $T_{r,X} = 10\text{ ms}$ (člen 1. reda) pri točki merilnega dosega, ki ga preskušamo z referenčnim voltmetrom $M_{U,N} = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D + 1\text{dig})$, $U_{D,N} = 1,200\text{ V}$, $T_{r,N} = 100\text{ ms}$ (člen 1. reda), da bo dinamični pogrešek zanemarljiv? Upoštevajte, da je bila predhodna točka preskušanja pri polovici dosega.

Rešitev:

- Dinamični pogrešek člena prvega reda pri odzivu na stopnico, ki se zgodi, ko nastavimo novo točko preskušanja ($U_0/2 \rightarrow U_0$), opišemo z:

$$E_{\text{din}} = \frac{U_0}{2} e^{-t/\tau}$$

- Ker je referenčni voltmeter desetkrat počasnejši kot preskušani voltmeter njegova dinamika določa najkrajši čas preizkušanja. Iskano časovno konstanto zato določimo iz dviznega časa referenčnega voltmetra:

$$\tau = \frac{T_{r,N}}{\ln 9} = 45,51\text{ ms}$$

- Sistematični dinamični pogrešek je zanemarljiv, kadar je manjši od desetine negotovosti preskušane voltmetra:

$$\frac{U_0}{2} e^{-t/\tau} \leq \frac{1}{10} \frac{M_{U,X}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{10} \frac{0,5\%U_0 + 0,5\%U_D + 1\text{mV}}{\sqrt{3}}$$

- Ker je preskusna točka $U_0 = U_{D,X}$, zapišemo:

$$e^{-t/\tau} \leq \frac{1}{5} \frac{0,5\% + 0,5\% + \frac{1\text{mV}}{U_{D,X}}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{5} \frac{10^{-2} + 10^{-3}}{\sqrt{3}} = 1,27 \cdot 10^{-3}$$

- Od tod dobimo najkrajši čas določanja lastnega pogreška voltmetra za dano preskusno točko:

$$t \geq -\tau \cdot \ln(1,27 \cdot 10^{-3}) = 0,3035\text{ s}$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Kako bi bili povezani dvižni čas, odzivni čas in mejna frekvenca člena prvega reda, če bi za odstopanja kot kriterij uporabili mejo 1% ?

Rešitev:

- Za merilni člen, ki ga aproksimiramo s členom 1. reda, lahko v časovnem prostoru zapišemo odziv na stopničasto obliko signal z velikostjo U_0 enačbo:

$$u_2 = U_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

- Odzivni čas** T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 1\%$ končne vrednosti, velja med odzivnim časom in časovno konstanto τ povezava:

$$\frac{u_2}{U_0} = 0,99 = (1 - e^{-T_a/\tau}) \Rightarrow T_{a,1\%} = -\tau \cdot \ln(0,01) = 4,605 \cdot \tau$$

- Če merilno napravo aproksimiramo s členom 1. reda, je povezava **dvižnega časa** in časovne konstante enaka:

$$T_r = \tau \ln 9 = 2,2 \tau$$

- Od tod dobimo povezavo med dvižnim časom in odzivnim časom

$$T_r = 2,2 \tau = 2,2 \frac{T_{a,1\%}}{4,605} = 0,478 \cdot T_{a,1\%}$$

- Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujanju lahko zapišemo:

$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 \tau^2}}$$

- Če določimo **mejno frekvenco** kot frekvenco, kjer upade amplituda za 1% proti izhodiščni vrednosti $|U_2|/|U_1| = 1$, lahko zapišemo:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_{m,1\%})^2 \tau^2}} = 0,99 \Rightarrow f_{m,1\%} = \frac{1}{2\pi \tau} \sqrt{\left(\frac{1}{0,99}\right)^2 - 1} = \frac{2,27 \cdot 10^{-2}}{\tau}$$

- Od tod dobimo povezavo med mejno frekvenco in odzivnim časom:

$$f_{m,1\%} = \frac{2,27 \cdot 10^{-2} \cdot 4,605}{T_{a,1\%}} = \frac{0,1044}{T_{a,1\%}} \Rightarrow f_{m,1\%} \cdot T_{a,1\%} \doteq 0,1$$

2. Koliko je največji relativni pogrešek zaokrožanja merilne negotovosti pri zaokrožanju ne eno veljavno cifro in koliko pri dveh veljavnih cifrah? Kolikšno relativno vrednost negotovosti bi v teh primerih morali dodati? Pri zaokrožanju upoštevamo samo prvo cifro, ki jo že opustimo (če je 0 navzdol, če je 1,2,.. pa navzgor).

Rešitev:

- Zaokrožitev na eno cifro:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednosti prve veljavne cifre 1.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2$ imamo večji pogrešek kot pri zaokrožanju navzdol $u = 0,1099.. \rightarrow u_z = 0,1$:

$$u = 0,1100 \rightarrow u_z = 0,2 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,2 - 0,11}{0,11} = 81,8\% !$$

$$u \doteq 0,11 \rightarrow u_z = 0,1 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,1 - 0,11}{0,11} = -9,1\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na eno cifro bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,2^2 - 0,11^2}}{0,11} = \frac{0,167}{0,11} = 151,8\% !$$

- Zaokrožitev na dve cifri:

- Pogrešek zaokrožitev je največji pri vrednostih prvih dveh veljavnih cifer 11.
- Pri zaokrožanju navzgor $u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11$ imamo največji pogrešek:

$$u = 0,1010 \rightarrow u_z = 0,11 \quad \Rightarrow \quad e_z = \frac{0,11 - 0,101}{0,101} = 8,9\%$$

- V najbolj neugodnem primeru zaokrožitve negotovosti na dve cifri bi morali dodati negotovost, katere relativni učinek bi bil:

$$\frac{u_d}{u} = \frac{\sqrt{u_z^2 - u^2}}{u} = \frac{\sqrt{0,11^2 - 0,101^2}}{0,101} = \frac{0,0436}{0,101} = 43,1\%$$

3. Po odklonski metodi želimo z voltmetrom ($U_D = 1,1 \text{ V}$) izmeriti neznano napetost. Najprej kratko sklenemo sponki voltmetra in naredimo prvo serijo meritev napetosti. Povprečna vrednost izmerjenih vrednosti $U_{V,0}$ je $+1,2 \mu\text{V}$, njihov eksperimentalni standardni odklon $s_0(u)$ pa $0,3 \mu\text{V}$. Zatem na voltmeter priključimo neznano napetost in izmerimo drugo serijo meritev. Povprečna vrednost izmerjenih vrednosti U_V je $+1,000245 \text{ V}$, njihov eksperimentalni standardni odklon $s_1(u)$ pa $22 \mu\text{V}$. Izračunajte efektivno število mest prikaza uporabljenega voltmetra $ENOD$ in efektivno število amplitudnih stopenj za izmerjeno merilno vrednost.

$$ENOD = \log_{10} \left(\frac{U_D}{s(u)} \right)$$

Rešitev:

- Efektivno število mest prikaza uporabljenega voltmetra $ENOD$ je

$$ENOD = \log_{10} \left(\frac{U_D}{s_0(u)} \right) = \log_{10} \left(\frac{1,1 \text{ V}}{0,3 \mu\text{V}} \right) = 6,56$$

- Efektivno število amplitudnih stopenj za izmerjeno merilno vrednost določimo iz korigiranega rezultata in skupnega standardnega odklona.

- Korigirani rezultat odklona voltmetra za eno meritev je

$$U_{V,\text{kor}} = U_V - U_{V,0} = 1,000245 \text{ V} - 1,2 \mu\text{V} = 1,0002438 \text{ V}$$

- Skupni standardni odklon je

$$s_{\text{sk}}(u) = \sqrt{s_0^2(u) + s_1^2(u)} = \sqrt{(0,3 \mu\text{V})^2 + (22 \mu\text{V})^2} = 22 \mu\text{V}$$

- in efektivno število amplitudnih stopenj za izmerjeno merilno vrednost:

$$m(u) = \frac{U_{V,\text{kor}}}{s_{\text{sk}}(u)} = \frac{1,0002438 \text{ V}}{22 \mu\text{V}} = 45465,6$$

4. Izpeljite številsko enačbo za jakost električnega polja na razdalji r od izvora, ki seva z močjo P , za $E/(V/m)$, P/mW in r/cm , če je ustrezna veličinska enačba $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$? Uporabite jo za izračun E , če je $P = 2,8 mW$ in $r = 2 cm$!

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m, \quad c_0 \approx 300\,000 km/s$$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi r^2}$
- Pri prehodu na številsko enačbo uporabimo prikrojeno veličinsko enačbo, v kateri bomo kasneje izpustili enote. Vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, moramo množiti in deliti z želeno enoto:

$$E \frac{V/m}{V/m} = \sqrt{P \frac{mW}{mW} \cdot \mu_0 c_0 / 2\pi \left(r \frac{cm}{cm}\right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številski faktor:

$$E/V/m = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot \frac{\sqrt{10^{-3} W}}{V/m} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{10^{-2} m} = \sqrt{P/mW / (r/cm)^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

$$K = \frac{\sqrt{10^{-3} VA}}{10^{-2} V} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Upoštevajoč vrednosti za $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$ in $c_0 \doteq 300\,000 km/s$

$$\text{dobimo: } K = \frac{\sqrt{10^{-3}}}{10^{-2}} \frac{\sqrt{VA}}{V} \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} H/m \cdot 300 \cdot 10^6 m/s}{2\pi}}$$

- in končno $K = 3,1623 \sqrt{\frac{A}{V}} \sqrt{60 \frac{H}{s}} = 24,495 \sqrt{\frac{A}{V} \cdot \frac{Vs}{A} \cdot \frac{1}{s}} \approx 24,5$

- V prikrojeni veličinski enačbi sedaj izpustimo enote in dobimo številsko enačbo, ki potrebuje še komentar uporabljenih enot.

$$E = 24,5 \cdot \sqrt{P/r^2}, \quad \left(\frac{E}{V/m}, P/mW, r/cm \right)$$

- Za dane podatke $P = 2,8 mW$ in $r = 2 cm$ izračunamo jakost električnega polja s pomočjo številске enačbe:

$$E = 24,5 \cdot \sqrt{P/r^2} = 24,5 \cdot \sqrt{2,8/2^2} = 20,5, \quad \left(\frac{E}{V/m} \right)$$

5. Podajte merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo za sedemkrat merjeno napetost U_x !

U_x/mV	184,548	184,550	184,553	184,551	184,549	184,549	184,544
-----------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Na razpolago je šest serij meritev z isto merilno opremo pod enakimi pogoji:

n_j	21	16	31	16	26	31
$s_j/\mu\text{V}$	57	54	72	63	78	51

Upoštevajte korekcijo $-7\mu\text{V}$. $s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2(x) + (n_2-1)s_2^2(x) + \dots + (n_r-1)s_r^2(x)}{(n_1-1) + (n_2-1) + \dots + (n_r-1)}}$

Rešitev:

- Najprej izračunamo povprečno vrednost sedmih izmerjenih vrednosti.

$$\bar{U}_x = \frac{\sum_{i=1}^n U_{xi}}{n} = 184,54914 \text{ mV}$$

- Nato izračunamo standardni odklon populacije meritev iz posameznih eksperimentalnih standardnih odklonov vzorcev meritev, iz serij meritev, ki so na razpolago in so bile izvedene z isto merilno opremo pod enakimi pogoji.

$$s_p = \sqrt{\frac{20 \cdot 57^2 \mu\text{V}^2 + 15 \cdot 54^2 \mu\text{V}^2 + 30 \cdot 72^2 \mu\text{V}^2 + 15 \cdot 63^2 \mu\text{V}^2 + 25 \cdot 78^2 \mu\text{V}^2 + 30 \cdot 51^2 \mu\text{V}^2}{(21-1) + (16-1) + (31-1) + (16-1) + (26-1) + (31-1)}} \\ = 64,0546 \mu\text{V}$$

- Naslednji korak je izračun merilne negotovosti izmerjenih tokov iz standardnega odklona populacije meritev, deljenega s številom izmerjenih vrednosti.

$$u(U_x) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{64,0546 \mu\text{V}}{\sqrt{7}} = 24,21 \mu\text{V}$$

- Pri rezultatu moramo upoštevati še korekcijo $(-7\mu\text{V})$, ki se prišteje rezultatu.

$$U_x = \bar{U}_x + K = 184,54914 + (-7\mu\text{V}) = 184,54214 \text{ mV}$$

- Po zaokrožitvi merilne negotovosti dobimo rezultat s standardno negotovostjo.

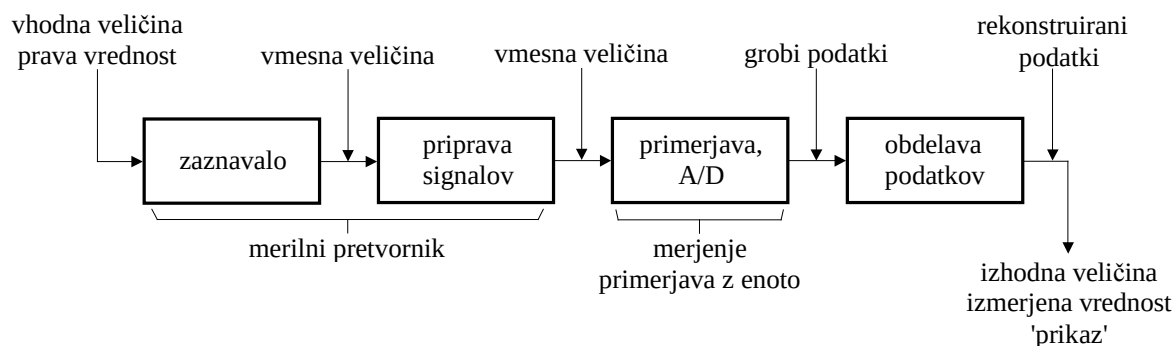
$$I_x = 184,542 \text{ mV} \quad u(I_x) = 25 \mu\text{V} \quad n = 7$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

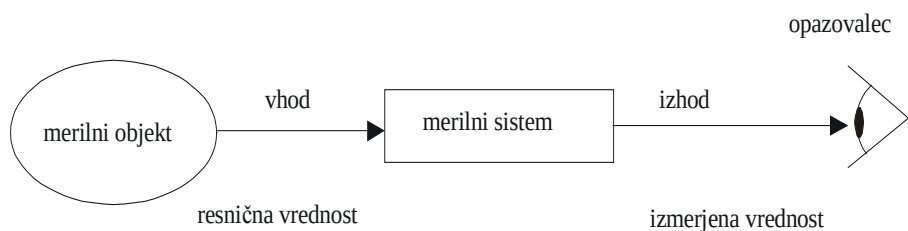
1. Skicirajte zgradbo merilnega sistema in opišite funkcije posameznih blokov v shemi! V čem se razlikujeta klasični in moderni pogled na merilni sistem?

Rešitev:

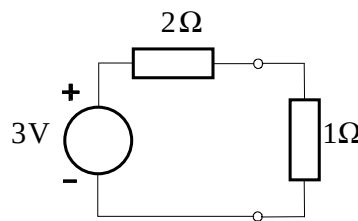
- Zgradba merilnega sistema:



- Vhodni signal vstopa v merilni pretvornik, ki je sestavljen iz zaznavala (tudi tipalo, čutilo ali senzor) in faze priprave signalov na obdelavo (ojačiti, preoblikovati, pretvoriti v veličino, ki je uporabna za neposredno primerjanje).
- Za merilnim pretvornikom je faza primerjanja merjene veličine z enoto:
 - Merjenje v ožjem smislu!
 - Izvrši se z analogno-digitalnim pretvornikom.
 - Signal za primerjavo mora biti v enosmerni obliki.
- Za analogno-digitalnim pretvornikom je faza obdelave signalov za :
 - interpretacijo podatkov, prikaz podatkov in prenos podatkov.
 - opravi funkcijo rekonstrukcije in različne matematične obdelave (npr. računanje povprečne vrednosti, integriranje, odvajanje ipd.).
- V klasični shemi je opravljal vlogo A/D pretvornika človek s svojimi čutili (tipično človeško oko).



2. Želimo izmeriti tok na upor 1Ω z ampermetroma, ki imata doseg $I_D = 1\text{ A}$. Prvi ima karakteristični padec napetosti $U_{A_0,1} = 50\text{ mV}$, drugi pa $U_{A_0,2} = 500\text{ mV}$. Ugotovite, koliko ampermetra kažeta in kolikšen je sistematični pogrešek pri posamezni meritvi?



Rešitev:

- Pred vključitvijo ampermetrov, je tok skozi oba zaporedno vezana upora enak:

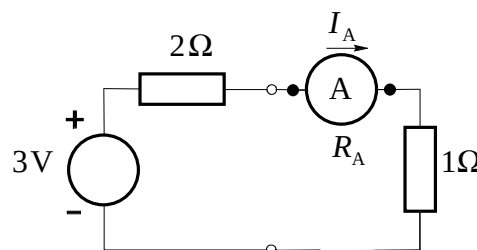
$$I_0 = \frac{3\text{ V}}{2\Omega + 1\Omega} = 1\text{ A}$$

- Po vključitvi ampermetrov z notranjima upornostima :

$$R_{A_1} = \frac{U_{A_0,1}}{I_D} = \frac{50\text{ mV}}{1\text{ A}} = 0,05\Omega \text{ oziroma}$$

$$R_{A_2} = \frac{U_{A_0,2}}{I_D} = \frac{500\text{ mV}}{1\text{ A}} = 0,5\Omega$$

- dobimo naslednje nadomestno vezje:



- Kazanje prvega ampermetra je tako enako:

$$I_{A,1} = \frac{3\text{ V}}{2\Omega + 1\Omega + R_{A_1}} = 0,9836\text{ A}$$

- in sistematični pogrešek je negativen:

$$E_1 = I_{A,1} - I_0 = 0,9836\text{ A} - 1\text{ A} = -0,0164\text{ A} ;$$

$$e_{A,1} = \frac{I_{A,1} - I_0}{I_0} = -1,64 \cdot 10^{-2}$$

- Kazanje drugega ampermetra je enako:

$$I_{A,2} = \frac{3\text{ V}}{2\Omega + 1\Omega + R_{A_2}} = 0,8571\text{ A}$$

- in sistematični pogrešek je večji:

$$E_1 = I_{A,2} - I_0 = 0,8571\text{ A} - 1\text{ A} = -0,143\text{ A} ;$$

$$e_{A,2} = \frac{I_{A,2} - I_0}{I_0} = -1,43 \cdot 10^{-1}$$

3. Kako bi se spreminjalo efektivno število amplitudnih stopenj m_D voltmetra ($U_D = 1V$), če bi imel lastni šum voltmetra enakomerno ali trikotno ali trapezno ($\beta = 0,7$) ali Gaussovo ($z = 3$) porazdelitev gostote pogreška z enakimi mejnimi vrednostmi $M_e = M_{tri} = M_{tra} = M_G = M = 0,1mV$? Koliko je pri tem efektivno število mest prikaza $ENOD$?

$$ENOD = \log_{10} \left(\frac{U_D}{s(u)} \right)$$

Rešitev:

- Za določitev efektivnega števila amplitudnih stopenj moramo poznati standardni odklon lastnega šuma, ki je za dane porazdelitve enak:

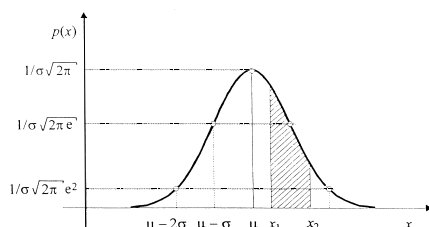
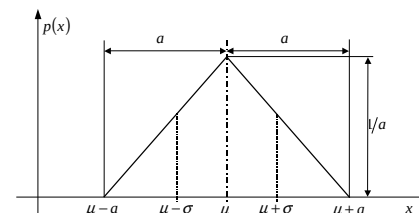
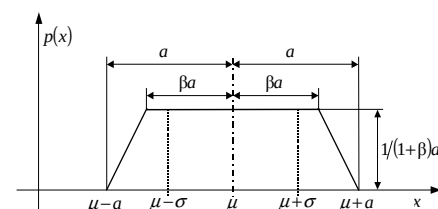
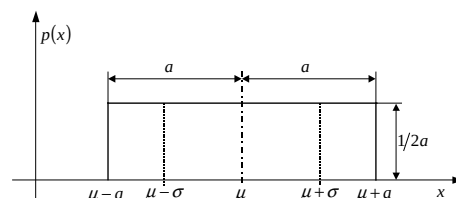
- Enakomerna porazdelitev: $\sigma_e = M_e / \sqrt{3}$

- Trapezna porazdelitev:

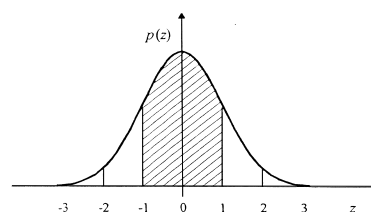
$$\sigma_{tra} = M_{tra} \sqrt{1 + \beta^2} / \sqrt{6} = M_{tra} \sqrt{1 + 0,7^2} / \sqrt{6}$$

- Trikotna porazdelitev: $\sigma_{tri} = M_{tri} / \sqrt{6}$

- Gaussova porazdelitev: $\sigma_G = M_G / 3$



$\Rightarrow$



$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$z = (x - \mu) / \sigma$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

- Efektivno število amplitudnih stopenj m za posamezno porazdelitev je enako:

$$m_e = \frac{U_D}{\sigma_e} = \sqrt{3} \frac{U_D}{M} = \sqrt{3} \frac{1V}{0,1mV} = \sqrt{3} \cdot 10^4 = 1,73 \cdot 10^4;$$

$$ENOD_e = \log_{10}(m_e) = \log_{10}(1,732 \cdot 10^4) = 4,24$$

$$m_{tra} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1 + 0,7^2}} \cdot 10^4 = 2,01 \cdot 10^4, \quad ENOD_{tra} = \log_{10}(m_{tra}) = 4,30;$$

$$m_{tri} = \sqrt{6} \cdot 10^4 = 2,45 \cdot 10^4, \quad ENOD_{tri} = \log_{10}(m_{tri}) = 4,39;$$

$$m_G = 3 \cdot 10^4, \quad ENOD_G = \log_{10}(m_G) = 4,48$$

4. Izpeljite prikrojeno veličinsko enačbo za zapisano izhodno veličino E , če jo želimo izračunati iz izmerjenih podatkov, kjer je $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$, $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ in

$$E = \sqrt{\frac{P\mu_0 c_0}{2\pi x^2}} \quad [E] = \text{V/m}; \quad [P] = \text{kW}; \quad [x] = \text{km}$$

Rešitev:

- Veličinska enačba: $E = \sqrt{P\mu_0 c_0 / 2\pi x^2}$
- Pri prehodu na prikrojeno veličinsko enačbo moramo vsako veličino, za katero hočemo, da nastopa v izrazu, množiti in deliti z željeno enoto :

$$E \frac{\text{V/m}}{\text{V/m}} = \sqrt{P \frac{\text{kW}}{\text{kW}} \cdot \mu_0 c_0 / 2\pi \left(x \frac{\text{km}}{\text{km}}\right)^2}$$

- in urediti enačbo tako, da nam ostanejo kvocienti veličin z enotami in ustrezni številski faktor:

$$E/\text{V/m} = \sqrt{P/\text{kW} / (x/\text{km})^2} \cdot \frac{\sqrt{10^3 \text{ W}}}{\text{V/m}} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{10^3 \text{ m}} = \sqrt{P/\text{kW} / (x/\text{km})^2} \cdot K$$

- Številski faktor je v našem primeru enak:

$$K = \frac{\sqrt{10^3 \text{ VA}}}{10^3 \text{ V}} \frac{\sqrt{\mu_0 c_0}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Upoštevajoč vrednosti za $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ in $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

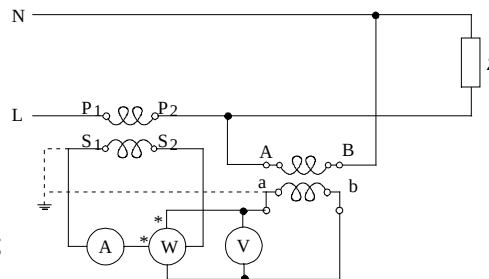
$$\text{dobimo: } K = \frac{\sqrt{10^3}}{10^3} \frac{\sqrt{\text{VA}}}{\text{V}} \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2\pi}}$$

- in končno $K = 3,162 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{\text{A}}{\text{V}}} \sqrt{60 \frac{\text{H}}{\text{s}}} = 0,24495 \sqrt{\frac{\text{A}}{\text{V}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot \frac{1}{\text{s}}} \approx 0,245$

- Prikrojena veličinska enačba je: $E/\text{V/m} = 0,245 \cdot \sqrt{P/\text{kW} / (x/\text{km})^2}$

5. Podajte popolni merilni rezultat s standardno negotovostjo za faktor moči porabnika! $\lambda = P/S$

- vatmeter: $U_n = 100 \text{ V}$, $I_n = 5 \text{ A}$, $y_D = 20000$,
 $y = 19111$, $r = 0,2$;
- voltmeter: $U = 105,0 \text{ V}$, $M_U = \pm(0,1\%U + 1\text{dig})$;
- ampermeter: $I = 4,820 \text{ A}$, $M_I = \pm(0,2\%I + 2\text{dig})$;
- tokovnik: $I_{pn} = 75 \text{ A}$, $I_{sn} = 5 \text{ A}$, $r = 0,1$;
- napetostnik: $U_{pn} = 50 \text{ kV}$, $U_{sn} = 100 \text{ V}$, $r = 0,1$



Rešitev:

- Faktor moči je enak razmerju delovne in navidezne moči porabnika $\lambda = P/S = P/UI$. Ker se tako vatmeter kot voltmeter in ampermeter nahajajo na sekundarni strani merilnih transformatorjev, lahko zapišemo:

$$\lambda = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{K_{um} K_{in} P_W}{K_{um} U_V \cdot K_{in} I_A} = \frac{P_W}{U_V I_A}$$

- Delovna moč, ki jo kaže vatmeter, je enaka:

$$P_W = U_n \cdot I_n \cdot \frac{y}{y_D} = 100 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} \cdot \frac{19111}{20000} = 477,78 \text{ W}$$

- in faktor moči je:

$$\lambda = \frac{P_W}{U_V I_A} = \frac{477,78 \text{ W}}{105,0 \text{ V} \cdot 4,820 \text{ A}} = 0,94403$$

- Ker je izhodna veličina λ enaka produktu in kvocientu vhodnih veličin, je skupna standardna negotovost za faktor moči v relativni obliki je sestavljena iz treh prispevkov na spodnji način:

$$w_c(\lambda) = \sqrt{w^2(U_V) + w^2(I_A) + w^2(P_W)} = 2,16 \cdot 10^{-3}$$

- kjer so posamezni deleži:

$$w(U_V) = \frac{M_U}{U \sqrt{3}} = \frac{10^{-3} + 0,1 \text{ V} / 105,0 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 1,127 \cdot 10^{-3},$$

$$w(I_A) = \frac{M_I}{I \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 0,001 \text{ A} / 4,820 \text{ A}}{\sqrt{3}} = 1,394 \cdot 10^{-3},$$

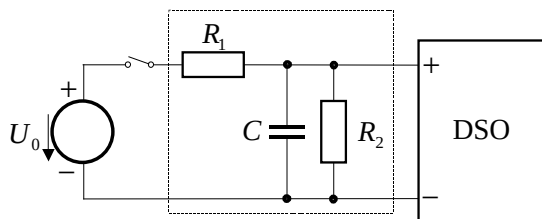
$$w(P_W) = \frac{r(P_W)}{100} \frac{y_D}{y} \frac{1}{\sqrt{3}} = 1,208 \cdot 10^{-3} \quad (\text{razred je podan na doseg})$$

- Zaokrožen popolni merilni rezultat zapišemo s standardno negotovostjo $u_c(\lambda) = w_c(\lambda) \cdot \lambda = 2,04 \cdot 10^{-3}$:

$$\lambda = 0,9440, \quad u_c(\lambda) = 0,0021, \quad n = 1$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Narišite odziv člena, ki ga merimo z osciloskopom, ko vklopimo stikalo. Izračunajte kapacitivnost kondenzatorja C , če je odzivni čas znotraj enega odstotka stacionarnega stanja $T_{a,1\%} = 7,52 \text{ ms}$ in je $U_0 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 763 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 92,4 \text{ k}\Omega$.

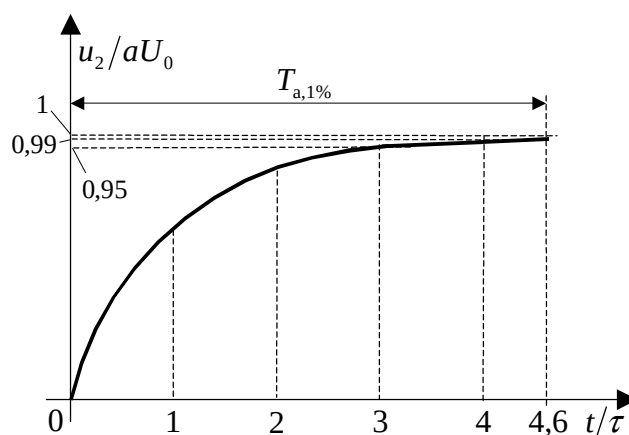


Rešitev:

- Opraviti imamo s členom 1. reda, ki ima časovno konstanto τ enako:

$$\tau = a\tau_1 = aR_1C$$

- pri čemer je a delilno razmerje uporov in določa napetost v stacionarnem stanju:



$$a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,108 ; \quad U_2 = aU_0 = 1,08 \text{ V}$$

- Časovna konstanta je:

$$\tau = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} C$$

- Odzivni čas T_a je po dogovoru čas, v katerem ostane izhodna veličina trajno v intervalu znotraj predpisanih mej končne vrednosti. V primeru, da so te meje $\pm 1\%$ končne vrednosti, velja za člen 1. reda:

$$\frac{u_2}{aU_0} = 0,99 = \left(1 - e^{-T_{a,1\%}/\tau}\right) \Rightarrow T_{a,1\%} = \ln 100 \cdot \tau \approx 4,6 \tau$$

- V našem primeru je odzivni čas enak $T_{a,1\%} = 7,52 \text{ ms}$ in od tod izračunamo iskano kapacitivnost:

$$C = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \tau = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cdot \frac{T_{a,1\%}}{4,6}$$

$$C = \frac{763 \cdot 10^3 \Omega + 92,4 \cdot 10^3 \Omega}{763 \cdot 10^3 \Omega \cdot 92,4 \cdot 10^3 \Omega} \cdot \frac{7,52 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{4,6} = 19,84 \text{ nF}$$

2. Koliko kažeta voltmeter, ki se odziva na pravilno efektivno vrednost napetosti, in voltmeter, ki se odziva na usmerjeno vrednost napetosti, če ju priključimo na napetost $u/V = 150 + 100 \sin \omega t + 30 \sin 3\omega t$?

Rešitev:

- Pravilno efektivno vrednost napetosti dobimo z geometričnim seštevanjem efektivnih vrednosti komponent signala (enosmerne, osnovne in tretje harmonske komponente):

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{(150 \text{ V})^2 + \left(\frac{100 \text{ V}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30 \text{ V}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 167,18 \text{ V}$$

- Usmerjena vrednost napetosti je enaka:

$$U_r = |\bar{u}| = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

- Ker v našem primeru signal ($u/V = 150 + 100 \sin \omega t + 30 \sin 3\omega t$) nima negativne vrednosti, lahko zapišemo: $U_r = \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$. Srednja vrednost obeh sinusnih komponent v periodi je enaka nič in za naš primer zapišemo:

$$\bar{u} = 150 \text{ V}$$

- Instrumenti, ki se odzivajo na usmerjeno vrednost napetosti, imajo pomnoženo skalo z **oblikovni faktorjem** za sinusno obliko:

$$F_0 = \frac{X}{X_r} = \frac{\hat{x}/\sqrt{2}}{2\hat{x}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111$$

- Voltmeter, ki se odziva na usmerjeno vrednost napetosti, nam zato kaže:

$$U = F_0 \cdot \bar{u} = 1,111 \cdot 150 \text{ V} = 166,65 \text{ V}$$

3. Naštejte osnovne veličine in osnovne enote SI sistema. Zapišite upornost $R = 10\Omega$ le z osnovnimi enotami SI sistema (npr. preko izpeljanih veličin moči, sile)?

Rešitev:

- Mednarodni sistem veličin ISQ temelji na sedmih osnovnih veličinah: čas, dolžina, masa, električni tok, termodinamična temperatura, množina snovi in svetilnost.
 - Leta 2008 je Mednarodni urad za mere in uteži (BIPM) izdal 3. izdajo mednarodnega slovar iz metrologije (VIM), v katerem je za razliko od 2. izdaje, kjer je definiran le mednarodni sistem enot SI (fr. *Système international*), dodana še definicija mednarodnega sistema veličin ISQ (ang. *International System of Quantities*), na katerem SI temelji.
- Mednarodni sistem enot SI vsebuje sedem osnovnih enot: sekunda, meter, kilogram, amper, kelvin, mol in kandela.
- Da dobimo enote le osnovnih veličin, moramo upornost predstaviti z enačbo, v kateri nastopajo le osnovne veličine z osnovnimi enotami. Zato lahko uporabimo različne zakone, ki jih poznamo iz fizike. Upornost R lahko npr. zapišemo po ohmovem zakonu z enačbo:

$$R = \frac{U}{I}$$

- Ker je tok I že osnovna veličina, je potrebno razstaviti le napetost U . To lahko naredimo npr. preko električne moči P :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{P}{I^2}$$

- Ker tudi moč ni osnovna veličina, jo lahko razstavimo npr. preko sile F in hitrosti v . Silo nadalje preko pospeška a , preko hitrosti v do dolžine in časa.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{P}{I \cdot I} = \frac{F \cdot v}{I^2} = \frac{F \cdot l}{t \cdot I^2} = \frac{m \cdot a \cdot l}{t \cdot I^2} = \frac{m \cdot v \cdot l}{t \cdot t \cdot I^2} = \frac{m \cdot l \cdot l}{t \cdot t \cdot t \cdot I^2} = \frac{m \cdot l^2}{t^3 \cdot I^2}$$

- Zapišemo lahko tudi enotsko enačbo:

$$[R] = \frac{[m] \cdot [l]^2}{[t]^3 \cdot [I]^2}$$

- ter končno upornost $R = 10\Omega$ kot:

$$R = \{R\} \cdot [R] = 10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3 \cdot \text{A}^2}$$

4. Uporoma z enako nazivno vrednostjo, smo izmerili upornost z istim instrumentom. Standardna negotovost je bila $0,2 \text{ m}\Omega$. Upora vežemo vzporedno. Koliko je standardna negotovost upornosti te vezave? $r = 1$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

Rešitev:

- Upornost vzporedne vezave uporov je:

$$R_{\text{sk}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Skupno standardno negotovost zapišemo z upoštevanjem faktorjev korelacije:

$$u_c(R_{\text{sk}}) = \sqrt{[c_1 u(R_1)]^2 + [c_2 u(R_2)]^2 + 2[c_1 c_2 r(R_1, R_2) u(R_1) u(R_2)]}$$

- Faktorji občutljivosti so:

$$c_1 = \frac{\partial R_{\text{sk}}}{\partial R_1} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

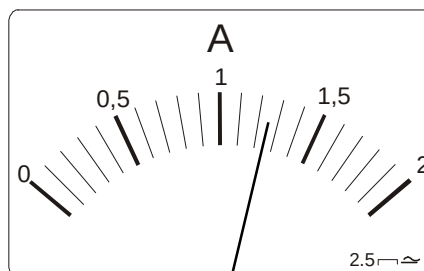
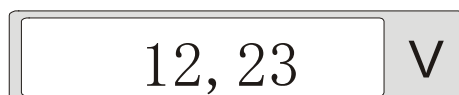
$$c_2 = \frac{\partial R_{\text{sk}}}{\partial R_2} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

- posamezne negotovosti pa: $u(R_1) = u(R_2) = u(R)$
- Standardna negotovost upornosti vzporedne vezave je:

$$u_c(R_{\text{sk}}) = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{u(R)}{4} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot 1 \cdot u^2(R)} = \sqrt{\frac{4}{16}} u(R) = \frac{u(R)}{2} = 0,1 \text{ m}\Omega$$

5. S pomočjo analognega ampermetra in digitalnega voltmetra merimo enosmerno moč P , ki se troši na bremenu. S spodnjih slik odčitajte izmerjeni vrednosti za tok I_A in napetost U_V . Podajte popolni merilni rezultat za moč bremena P . Ugotovite, ali ločljivosti inštrumentov lahko zanemarimo?

Sistematične pogreške zaradi vključitve inštrumentov zanemarimo. Največja merilna napaka (meja pogreška) za voltmeter je $M_U = \pm(0,10\% U + 7 \text{ dig})$. Predpostavite, da ste sposobni analogni inštrument odčitati na eno desetinko razdelka natančno.



Rešitev:

- Voltmeter kaže $U_V = 12,23 \text{ V}$, ampermeter pa $I_A = 1,25 \text{ A}$.
 - Iskana moč je enaka: $P = I_A U_V = 1,25 \text{ A} \cdot 12,23 \text{ V} = 15,2875 \text{ W}$
- Doseg ampermetra je $I_D = 2 \text{ A}$. Razred ampermetra je $r = 2,5$.
- Ločljivost prikazovalnika voltmetra je $1 \text{ dig} = 0,01 \text{ V}$.
- Zaokroženi merilni negotovosti ampermetra in voltmetra v relativni obliki sta:

$$w(I_A) = \frac{u(I_A)}{I_A} = \frac{M_I}{\sqrt{3}} \frac{1}{I_A} = \frac{r}{100} I_D \frac{1}{I_A \sqrt{3}}$$

$$w(I_A) = \frac{2,5}{100} \frac{2 \text{ A}}{1,25 \text{ A}} \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,02309 \approx 0,024$$

$$w(U_V) = \frac{u(U_V)}{U_V} = \frac{M_U}{\sqrt{3}} \frac{1}{U_V} = \frac{(0,10\% U_V + 7 \text{ dig})}{\sqrt{3} \cdot U_V}$$

$$w(U_V) = \frac{(0,10\% \cdot 12,23 \text{ V} + 7 \cdot 0,01 \text{ V})}{\sqrt{3} \cdot 12,23 \text{ V}} = 0,003882 \approx 0,0039$$

- Zaokroženi negotovosti zaradi odčitavanja in ločljivosti instrumenta (ampermeter smo odčitali z efektivno ločljivostjo ene desetine razdelka $Q_I = 0,1 \text{ A}/10 = 0,01 \text{ A}$):

$$w(I_A)_q = \frac{u(I_A)_q}{I_A} = \frac{Q_I}{I_A \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{0,01 \text{ A}}{1,25 \text{ A} \cdot 2\sqrt{3}} = 0,0023094 \approx 0,0023$$

$$w(U_V)_q = \frac{u(U_V)}{U_V} = \frac{1 \text{ dig}}{U_V \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{0,01 \text{ V}}{12,23 \text{ V} \cdot 2\sqrt{3}} = 2,3603 \cdot 10^{-4} \equiv 2,4 \cdot 10^{-4}$$

- Negotovost zaradi ločljivosti voltmetra je zanemarljiva.

$$w(P) = \sqrt{w^2(I_A) + w^2(I_A)_q + w^2(U_V) + w^2(U_V)_q}$$

$$w(P) = \sqrt{(0,024)^2 + (0,0023)^2 + (0,0039)^2 + (0,00024)^2}$$

$$w(P) = 0,02442 \equiv 0,025$$

$$w(P) = \sqrt{w^2(I_A) + w^2(U_V)} = \sqrt{(0,024)^2 + (0,0039)^2} = 0,02431 \equiv 0,025$$

$$u(P) = w(P)P = 0,025 \cdot 15,2875 \text{ W} = 0,3822 \text{ W} = 0,39 \text{ W}$$

- Popolni merilni rezultat je:

$$P = 15,29 \text{ W} , \quad u(P) = 0,39 \text{ W} , \quad n = 1$$

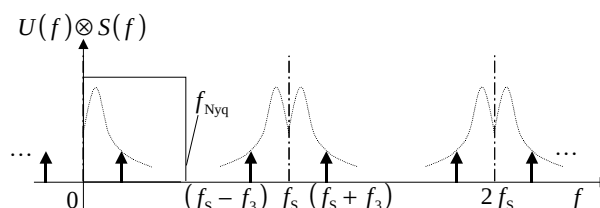
Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Naštejte pogoške, ki nastopijo pri digitalizaciji signala in jih na kratko opišite. Koliko je največji pogrešek ne-koherence pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti $u(t)/V = 1 \sin(100\pi t/s)$, če jo merimo v intervalu dolgem $T_M = 30 \text{ ms}$?

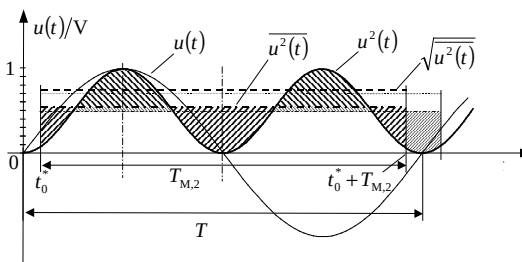
Rešitev:

- Pri digitalizaciji signala nastopi več pogreškov:

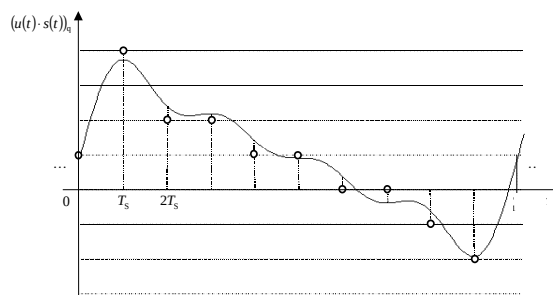
- **navideznost** zaradi prenizke frekvence vzorčenja (pogrešek **prekrivanja**);



- pogrešek **ne-koherentnega** vzorčenja, kadar **čas** merjenja **ni enak mnogokratniku** periode opazovanega signala;

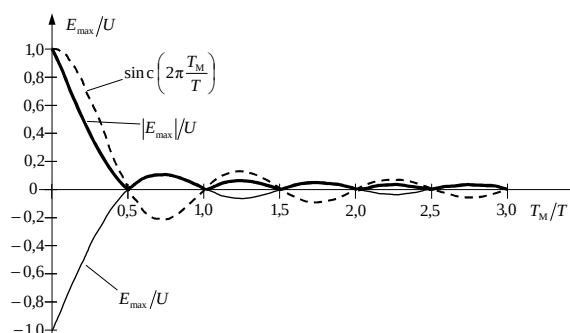


- **kvantizacijska ločljivost**;



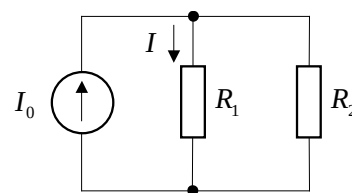
- **ločljivost** v odvisnosti od časa merjenja, itd.

- Efektivna vrednost sinusnega signala $u(t)/V = 1 \sin(50\text{Hz} \cdot 2\pi t)$ je $U = 1/\sqrt{2} \text{ V}$ in perioda $T = 1/f = 1/50\text{Hz} = 20 \text{ ms}$. Pogrešek ne-koherentnega merjenja je odvisen od časa merjenja. Ker je razmerje $T_M/T = 30 \text{ ms} / 20 \text{ ms} = 1,5$, je največji pogrešek pri merjenju efektivne vrednosti sinusne napetosti enak nič.



2. Koliko mora biti upornost ampermetra R_A , da bo sistematični pogrešek vključitve ampermetra pri merjenju toka I skozi upor R_1 zanemarljiv?

- vezje: $I_0 = 1\text{ A}$, $R_1 = 500\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$;
- ampermeter: $I_D = 600,0\text{ mA}$, $M_I = \pm(0,1\% I + 0,1\% I_D)$



Rešitev:

- Tok I , ki teče pred vključitvijo ampermetra v veji upora R_1 , izračunamo iz enačbe za tokovni delilnik:

$$I = I_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 375,0\text{ mA}$$

- Po vključitvi ampermetra z upornostjo R_A , teče v tej veji manjši tok:

$$I^* = I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} < I$$

- in sistematični pogrešek vključitve ampermetra je negativen:

$$E_s = I^* - I = I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} - I$$

- Sistematični pogrešek meritve je zanemarljiv, kadar je manjši kot od desetine standardne negotovosti.

$$|E_s| \leq \frac{u(I)}{10} = \frac{1}{10} \frac{M_I}{\sqrt{3}}$$

- Za podane vrednosti, privzeti pravokotni porazdelitvi pogreška ($u(I) = M_I / \sqrt{3}$) in upoštevanju, da se tokova I^* in I zanemarljivo malo razlikujeta, dobimo:

$$E_s \leq \frac{1}{10\sqrt{3}} (10^{-3} \cdot 375,0\text{ mA} + 10^{-3} \cdot 600,0\text{ mA}) = 0,0563\text{ mA}$$

- Od tod izračunamo iskano upornost R_A :

$$I_0 \frac{R_2}{R_A + R_1 + R_2} - I = -E_s$$

$$1\text{ A} \frac{300\ \Omega}{R_A + 800\ \Omega} - 375,0\text{ mA} = -0,0563\text{ mA}$$

$$R_A = 0,12\ \Omega$$

- Upornost ampermetra mora biti manjša od vrednosti $R_A \leq 0,12\ \Omega$, da je sistematični pogrešek pri merjenju toka I skozi upor R_1 zanemarljiv.

3. Z digitalnim ohmmetrom želimo izmeriti upornost neznanega upora R_x s pomočjo dvožične metode. Po priključitvi merjenega upora ohmmeter pokaže odčitek $R_1 = 89,35 \text{ m}\Omega$. Priključne vodnike nato kratko sklenemo, nakar ohmmeter pokaže odčitek $R_0 = 84,33 \text{ m}\Omega$. Zapišite popolni merilni rezultat za neznano upornost R_x . Meja pogreška ohmmetra je $M_R = \pm(0,1\% R + 5 \text{ dig})$. Korelacijo med obema merjenjema upornosti zanemarite.

Rešitev:

- Pri dvožičnem merjenju upornosti se k merjeni upornosti prišteje še upornost priključnih vodnikov, ki jo lahko izmerimo tako, da priključne vodnike kratko sklenemo. Neznana upornost R_x je tako

$$R_x = R_1 - R_0 = 89,35 \text{ m}\Omega - 84,33 \text{ m}\Omega = 5,02 \text{ m}\Omega$$

- Meja pogreška za posamezno meritev je:

$$M_{R1} = \pm(0,1\% R_1 + 5 \text{ dig}) = \pm(0,1\% \cdot 89,35 \text{ m}\Omega + 5 \cdot 0,01 \text{ m}\Omega) = \pm 0,139 \text{ m}\Omega$$

$$M_{R0} = \pm(0,1\% R_0 + 5 \text{ dig}) = \pm(0,1\% \cdot 84,33 \text{ m}\Omega + 5 \cdot 0,01 \text{ m}\Omega) = \pm 0,134 \text{ m}\Omega$$

- Skupno standardno negotovost dobimo iz prispevkov negotovosti posameznih meritev:

$$u(R_x) = \sqrt{(c_1 u(R_1))^2 + (c_0 u(R_0))^2}$$

$$u(R_1) = M_{R1} / \sqrt{3}, \quad u(R_0) = M_{R0} / \sqrt{3}; \quad c_1 = 1, \quad c_0 = -1;$$

$$u(R_x) = \sqrt{(M_{R1} / \sqrt{3})^2 + (M_{R0} / \sqrt{3})^2} = 0,112 \text{ m}\Omega$$

- Popolni merilni rezultat s standardno merilno negotovostjo je:

$$R_x = 5,02 \text{ m}\Omega, \quad u(R_x) = 0,12 \text{ m}\Omega, \quad n = 1$$

4. Koliko je celotna relativna standardna negotovost $w_c(R_x)$ pri posrednem merjenju upornosti z metodo praznjenja kondenzatorja? $R_x = \frac{t}{C \ln(U_1/U_2)}$

$$w(t) = 2 \cdot 10^{-3}, w(C) = 3 \cdot 10^{-3}, w(U_1) = 4 \cdot 10^{-3}, w(U_2) = 5 \cdot 10^{-3}; U_1/U_2 = 1,5$$

- korelacijski koeficienti med neposredno merjenimi veličinami so $r_i = 0$

Rešitev:

- Posredno merjeno upornost lahko poenostavljeno zapišemo s tremi členi:

$$R_x = \frac{t}{C \cdot \ln(U_1/U_2)} = \frac{t}{C \cdot A}$$

- Za izraz, kjer nastopajo vhodne veličine v produktu in kvocientu, zapišemo celotno relativno standardno negotovost z geometrijsko vsoto relativnih standardnih negotovosti vhodnih veličin:

$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(t) + w^2(C) + w^2(A)}$$

- Negotovost logaritma ulomka napetosti $A = \ln(U_1/U_2)$ ovrednotimo ločeno:

$$w(A) = u(A)/A$$

$$u(A) = \sqrt{(c_1 u(U_1))^2 + (c_2 u(U_2))^2}$$

- kjer sta faktorja občutljivosti:

$$c_1 = \frac{\partial A}{\partial U_1} = \frac{\partial \ln(U_1/U_2)}{\partial U_1} = \frac{1}{U_1/U_2} \cdot \frac{1}{U_2} = \frac{1}{U_1}$$

$$c_2 = \frac{\partial \ln(U_1/U_2)}{\partial U_2} = \frac{1}{U_1/U_2} \cdot \left(-\frac{U_1}{U_2^2}\right) = -\frac{1}{U_2}$$

- Absolutno obliko standardne negotovosti, ki je brez dimenzij (logaritem razmerja!), sedaj ovrednotimo:

$$u(A) = \sqrt{\left(\frac{u(U_1)}{U_1}\right)^2 + \left(\frac{u(U_2)}{U_2}\right)^2} = \sqrt{(w(U_1))^2 + (w(U_2))^2} = 6,403 \cdot 10^{-3}$$

- in od tod še relativno obliko standardne negotovosti:

$$w(A) = \frac{u(A)}{A} = \frac{u(\ln(U_1/U_2))}{\ln(U_1/U_2)} = \frac{6,403 \cdot 10^{-3}}{\ln 1,5} = 1,579 \cdot 10^{-2}$$

- Zaokrožena celotna relativna standardna negotovost za posredno merjeno veličino R_x je enaka:

$$w_c(R_x) = \sqrt{w^2(t) + w^2(C) + w^2(A)} = 1,619 \cdot 10^{-2} \rightarrow w_c(R_x) = 1,7 \cdot 10^{-2}$$

5. Izrazite merilni rezultat za impedanco Z za 99% stopnjo zaupanja, če jo izmerimo posredno preko napetosti U in toka I !

- $U = 230,0 \text{ V}$, $M_U = \pm(0,05\% U + 1 \text{ dig})$, $n_1 = 1$;
- $\bar{I} = 121,4 \text{ mA}$, $s(I) = 5,6 \text{ mA}$, $n_2 = 10$

Število prostostnih stopenj	Vrednosti za $t_p(v)$	
	$p=95\%$	$p=99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
12	2,18	3,05
14	2,14	2,98
16	2,12	2,92
18	2,10	2,88
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
100	1,98	2,63
∞	1,96	2,58

Rešitev:

- Standardna negotovost merilnega rezultata za impedanco

$$Z = U/I = 230,0 \text{ V} / 121,4 \text{ mA} = 1894,6 \Omega$$

- sestavljata dva prispevka: negotovost merjenja napetosti in negotovost merjenja toka.

$$u(Z) = \sqrt{(c_1 u(U))^2 + (c_2 u(I))^2} \quad \text{oz.} \quad w(Z) = \frac{u(Z)}{Z} = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)}$$

- Negotovost merjenja napetosti je negotovost tipa B kot prispevek lastnega pogreška voltmetra pri eni meritvi. Določimo jo iz mejne vrednosti pri predpostavki pravokotne gostote porazdelitve pogreška.

$$u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (5 \cdot 10^{-4} \cdot 230,0 \text{ V} + 0,1 \text{ V}) = 0,1241 \text{ V}$$

- in v relativni obliki: $w(U) = \frac{u(U)}{U} = \frac{0,1241 \text{ V}}{230,0 \text{ V}} = 5,396 \cdot 10^{-4}$

- Negotovost merjenja toka je negotovost tipa A zaradi ponavljanja meritev. Določimo jo iz podanega eksperimentalnega standardnega odklona $s(I)$ in števila meritev n_2

$$u(I) = \frac{s(I)}{\sqrt{n_2}} = \frac{5,6 \text{ mA}}{\sqrt{10}} = 1,77 \text{ mA} \quad \text{in} \quad w(I) = \frac{u(I)}{\bar{I}} = \frac{1,77 \text{ mA}}{121,4 \text{ mA}} = 1,458 \cdot 10^{-2}$$

- Ker je dominantna negotovost merjenja toka - negotovost tipa A:

$$w(Z) = \sqrt{w^2(U) + w^2(I)} = 1,459 \cdot 10^{-2} \quad \text{in} \quad u(Z) = w(Z) \cdot Z = 27,65 \Omega,$$

- je tudi gostota porazdelitev pogreška posredno merjene veličine Z enaka gostoti porazdelitev pogreška merjenja toka (več meritev) in lahko uporabimo Studentovo t-porazdelitev za vrednotenje razširjene negotovosti ($\nu = n_2 - 1 = 9 \rightarrow t_{99\%} = 3,25$)

$$U(Z) = t_{99\%} \cdot u(Z) = 3,25 \cdot 27,65 \Omega = 89,86 \Omega$$

- Zaokrožen popolni merilni rezultat z razširjeno negotovostjo za impedanco Z zapišemo:

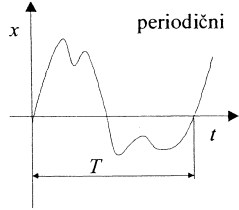
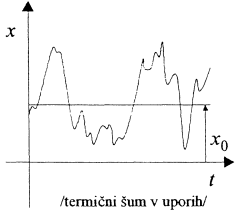
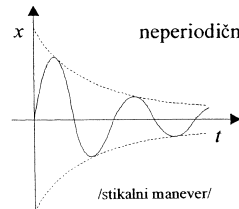
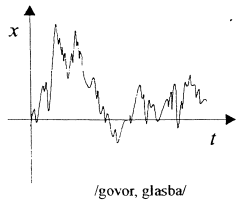
$$Z = 1895 \Omega, \quad U(Z) = 90 \Omega, \quad k = 3,25, \quad \nu_{\text{eff}} = 9, \quad p = 99\%$$

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. Kako delimo signale, ki opisujejo časovno spremenljive veličine? Opišite osnovne parametre pulznih neperiodičnih oblik signalov.

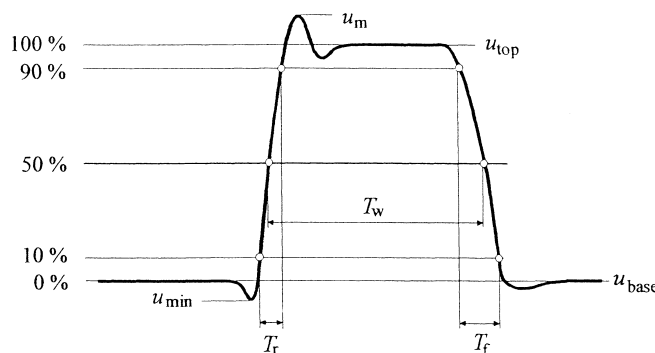
Rešitev:

- Delimo jih na to, ali lahko matematično opišemo trenutne vrednosti veličin ali ne:
 - deterministične,
 - nedeterministične – naključne (stohastične).
- Kadar se pomembni parametri dinamičnih veličin (aritmet. srednja vrednost, efektivna vrednost, itn.) s časom spreminjajo, ločimo signale na:
 - stacionarne,
 - nestacionarne.

	DETERMINISTIČNI	NEDETERMINISTIČNI
	opisujemo jih v časovnem in frekvenčnem prostoru	opisujemo jih v frekvenčnem prostoru; zanimivi za prenos informacij
STACIONARNI	 periodični	 /termični šum v uporih/
NESTACIONARNI	 neperiodični /stikalni maneuver/	 /govor, glasba/

- Nekateri parametri pulzne oblike signala.
- Izhodiščna parametra sta:

- osnovni ali **spodnji** nivo (u_{base} , 0%),
- zgornji** nivo (u_{top} , 100%),
- prevladujoči vrednosti v histogramu.



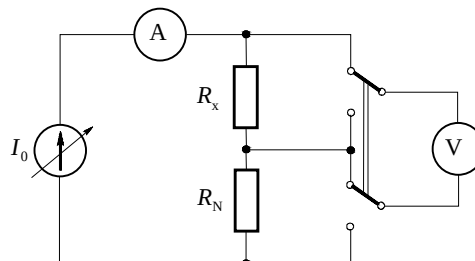
- Z obema izhodiščnima nivojema 0% in 100% sta določena tudi nivoja 10% in 90% za določitev **dviznega časa** T_r in **upadnega časa** T_f .
- Ugotovimo lahko tudi nivo 50%, ki določa **širino impulza** T_w .
 - Pri ponavljajočih pulzih je to nivo za merjenje in določanje periode, frekvence in relativne širine impulza.

2. Katerega izmed uporov $R_1 \approx 100,5 \Omega$ ali $R_2 \approx 95,0 \Omega$ lahko bolj točno zmerimo po napetostni primerjalni metodi z voltmetrom $M_U = \pm(0,1\% U + 0,1\% U_D)$, $U_D = 2 \text{ V}$, ločljivost 1 mV , in uporovnim etalonom $R_N = 100,00(1 \pm 10^{-4}) \text{ k}\Omega$? Vezje napajamo z idealnim tokovnim virom.

Rešitev:

- Standardna merilna negotovost napetostne primerjalne metode $R_x = R_N U_x / U_N$ je splošno ($U_x \neq U_N$) zapisana:

$$w_{R_x} = \sqrt{w_{R_N}^2 + w_{U_N}^2 + w_{U_x}^2}$$



- Kadar sta vrednosti upornosti in s tem obeh napetosti dovolj blizu skupaj $U_x \approx U_N$ (red velikosti 1%), se prispevek pogreška voltmetra v kvocientu izloči in ostane samo prispevek zaradi ločljivosti voltmetra:

$$w_{R_x} = \sqrt{w_{R_N}^2 + 2 \left(\frac{u(U_x)_q}{U_x} \right)^2}$$

- a) Prva upornost $R_x = R_1 \approx 100,5 \Omega$ je dovolj blizu referenčne $(R_x - R_N)/R_N = 0,005$, $U_x \approx U_N \approx 2 \text{ V}$ in lahko zapišemo standardno merilno negotovost:

$$\begin{aligned} w_{R_x} &= \sqrt{w_{R_N}^2 + 2 \left(\frac{u(U_x)_q}{U_x} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{m_{R_N}}{\sqrt{3}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\Delta U}{2\sqrt{3} U_x} \right)^2} \\ w_{R_1} &= \sqrt{\left(\frac{10^{-4}}{\sqrt{3}} \right)^2 + 2 \left(\frac{1 \text{ mV}}{2\sqrt{3} \cdot 2 \text{ V}} \right)^2} = 2,12 \cdot 10^{-4} \rightarrow w_{R_1} = 2,2 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

- b) Druga upornost $R_x = R_2 \approx 95,0 \Omega$ bolj odstopa od referenčne $(R_x - R_N)/R_N = -0,05$, $U_x = 1,9 \text{ V}$, $U_N = 2 \text{ V}$ in zato je standardna merilna negotovost večja:

$$\begin{aligned} w_{R_x} &= \sqrt{w_{R_N}^2 + w_{U_N}^2 + w_{U_x}^2} = \sqrt{\left(\frac{m_{R_N}}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{M_{U_N}}{\sqrt{3} U_N} \right)^2 + \left(\frac{M_{U_x}}{\sqrt{3} U_x} \right)^2} \\ w_{R_2} &= \sqrt{\left(\frac{10^{-4}}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{0,001 + 0,001 \cdot U_D / 2 \text{ V}}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{0,001 + 0,001 \cdot U_D / 1,9 \text{ V}}{\sqrt{3}} \right)^2} \\ w_{R_x} &= 1,65 \cdot 10^{-3} \rightarrow w_{R_2} = 1,7 \cdot 10^{-3} > w_{R_1} ! \end{aligned}$$

3. Pri preizkušanju točnosti ampermetra $M_I = \pm(1\% I + 1\% I_D + 2 \text{ dig})$, $I_D = 100 \text{ mA}$, ločljivost $0,1 \text{ mA}$, smo uporabili referenčni ampermeter $M_{I,r} = \pm(0,2\% I + 0,1\% I_{D,r} + 1 \text{ dig})$, $I_{D,r} = 150 \text{ mA}$, ločljivost $0,1 \text{ mA}$. Podajte intervala lastnega pogreška E pri vrednostih $I_1 = I_D$ in $I_2 = I_D/10$, za katera lahko s 100% verjetnostjo potrdite deklarirano točnost. Pri preizkušanju upoštevajte samo prispevek referenčnega ampermetra. Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Deklarirano točnost preskušane instrumenta moremo z gotovostjo potrditi, kadar je lastni pogrešek instrumenta manjši od razlike obeh mejnih pogreškov instrumentov, ker smo s tem zanesljivo izločili pogrešek referenčnega instrumenta:

$$|E| < M_I - M_{I,r}$$

- Pri toku $I_1 = I_D = 100 \text{ mA}$ imamo:

$$|E| < M_I - M_{I,r} = (1\% I + 1\% I_D + 2 \text{ dig}) - (0,2\% I + 0,1\% I_{D,r} + 1 \text{ dig})$$

$$|E| < (1 \text{ mA} + 1 \text{ mA} + 0,2 \text{ mA}) - (0,2 \text{ mA} + 0,15 \text{ mA} + 0,1 \text{ mA})$$

$$|E| < (2,2 \text{ mA}) - (0,45 \text{ mA}) = 1,75 \text{ mA}$$

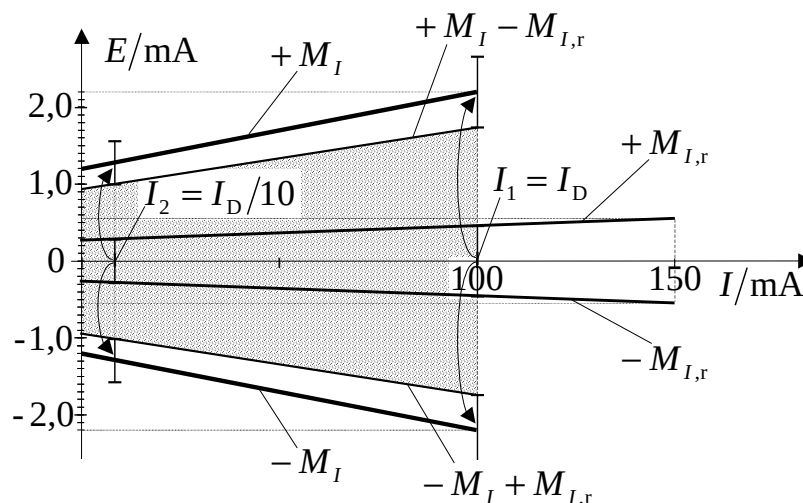
- Lastni pogrešek je lahko v mejah: $-1,75 \text{ mA} < E < 1,75 \text{ mA}$

- Pri toku $I_2 = I_D/10 = 10 \text{ mA}$ imamo:

$$|E| < (0,1 \text{ mA} + 1 \text{ mA} + 0,2 \text{ mA}) - (0,02 \text{ mA} + 0,15 \text{ mA} + 0,1 \text{ mA})$$

$$|E| < (1,3 \text{ mA}) - (0,27 \text{ mA}) = 1,03 \text{ mA}$$

- Lastni pogrešek je lahko v mejah: $-1,03 \text{ mA} < E < 1,03 \text{ mA}$
 - Skica:



4. Ker nimate W-metra, želite vhodno moč proizvoda (npr. sobnega ventilacijskega grelnika) izmeriti posredno. Katere inštrumente potrebujete, če predpostavimo sinusno obliko signalov? Izpeljite izraz za izračun skupne standardne merilne negotovosti. Navedite podatke, ki jih potrebujete za izračun merilne negotovosti vhodne moči! Predpostavimo, da je negotovost zaradi ločljivosti inštrumentov zanemarljiva.

Rešitev:

- Da bi posredno izmerili vhodno moč ventilacijskega grelnika potrebujemo A-meter, V-meter in $\cos \varphi$ -meter.
- Izračun moči: $P = UI \cos \varphi$

- Pri skupni negotovosti upoštevamo prispevke vseh treh inštrumentov:

$$u(P) = \sqrt{(|c_1| \cdot u(U))^2 + (|c_2| \cdot u(I))^2 + (|c_3| \cdot u(\cos \varphi))^2}$$

- Za izračun potrebujemo standardne merilne negotovosti merjenja vhodnih veličin ($u(U)$, $u(I)$, $u(\cos \varphi)$) in občutljivostne koeficiente:

$$|c_1| = \left| \frac{\partial P}{\partial U} \right| = |I \cos \varphi|; \quad |c_2| = \left| \frac{\partial P}{\partial I} \right| = |U \cos \varphi|; \quad |c_3| = \left| \frac{\partial P}{\partial \cos \varphi} \right| = UI$$

- Skupna standardna merilna negotovost je enaka

$$\begin{aligned} u(P) &= \sqrt{(I \cos \varphi \cdot u(U))^2 + (U \cos \varphi \cdot u(I))^2 + (UI \cdot u(\cos \varphi))^2} = \\ &= P \cdot \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U} \right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I} \right)^2 + \left(\frac{u(\cos \varphi)}{\cos \varphi} \right)^2} = P \cdot \sqrt{(w(U))^2 + (w(I))^2 + (w(\cos \varphi))^2} \end{aligned}$$

- Potrebni podatki inštrumentov:
 - izmerjena vrednost,
 - mejni pogrešek (absolutni ali relativni).

$$u(P) = P \cdot \sqrt{\left(\frac{m_U}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_I}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{m_{\cos \varphi}}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

$$\text{ali} \quad = P \cdot \sqrt{\left(\frac{M_U / \sqrt{3}}{U} \right)^2 + \left(\frac{M_I / \sqrt{3}}{I} \right)^2 + \left(\frac{M_{\cos \varphi} / \sqrt{3}}{\cos \varphi} \right)^2}$$

5. Za izraz $y = x_1 + x_2$ ugotovite, kolikokrat manjša mora biti negotovost druge vhodne veličine od prve $u(x_2) \leq u(x_1)/k$ ($k = ?$), da se ne bo poznala v skupni negotovosti $u(y) \cong u(x_1)$? $u(y)$ zaokrožimo ne dve cifri na intervalu $0,10 \div 0,99$.

Rešitev:

- Standardno negotovost izhodne veličine y , ob upoštevanju da sta faktorja občutljivosti $c_1 = \partial y / \partial x_1 = 1$ in $c_2 = \partial y / \partial x_2 = 1$, zapišemo:

$$u(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} u(x_2)\right)^2} = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$$

- Standardna negotovost veličine x_2 mora biti k -krat manjša od negotovosti veličine x_1 , da se njen prispevek ne pozna v skupni negotovosti

$$u(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)} = \sqrt{u^2(x_1) + (u(x_1)/k)^2} = u(x_1) \sqrt{1 + (1/k)^2}$$

- Ker zaokrožujemo merilno negotovost ne dve cifri na intervalu $0,10 \div 0,99$ vedno navzgor razen, kadar je naslednja tretja cifra 0, imamo na obeh mejah naslednje razmere:

- Na vrednost $u = 0,10$ zaokrožimo vse vrednosti od $u \geq 0,0991$ do $u = 0,10099.. < 0,101$, zato za najbolj neugodni primer zapišemo:

$$0,101 > 0,10 \sqrt{1 + (1/k)^2}$$

- in od tod: $k > 1 / \sqrt{\left(\frac{0,101}{0,10}\right)^2 - 1} = 7,053$

- Na vrednost $u = 0,99$ zaokrožimo vse vrednosti od $u \geq 0,981$ do $u = 0,99099.. < 0,991$, zato za najbolj neugodni primer zapišemo:

$$0,991 > 0,99 \sqrt{1 + (1/k)^2}$$

- in od tod: $k > 1 / \sqrt{\left(\frac{0,991}{0,99}\right)^2 - 1} = 22,243$

- Negotovost druge vhodne veličine mora biti $k = 22,25$ - krat manjša od prve vhodne veličine, da se zanesljivo ne bo poznala v skupni standardni negotovosti izhodne veličine na intervalu $0,10 \div 0,99$.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

1. V katerih mejah lahko pričakujemo rezultate merjenja amplitude sinusnega signala $U = 10\text{ V}$, $f = 1\text{ kHz}$ z merilnim členom prvega reda $T_r = 50\mu\text{s}$, če imamo na vходу prisoten še motilni signal $U_m = 1\text{ V}$, $f_m = 100\text{ kHz}$? Skicirajte razmere!

Rešitev:

- Merilni člen zaradi svojega dinamičnega odziva različno oslabi napetosti na vходу. Amplitudni del frekvenčne karakteristike člena 1. reda oziroma razmerje amplitud vhodnega in izhodnega signala pri sinusnem vzbujanju K lahko zapišemo z uporabo mejne frekvence f_m :

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$

- mejno frekvenco dobimo iz dvižnega časa:

$$f_m = \frac{1}{2\pi(T_r/\ln 9)} \doteq \frac{0,35}{T_r} = 7,0\text{ kHz}$$

- Merjeni signal ($f_1 = 1\text{ kHz}$) je slabljen z:

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f_m)^2}} = 0,9899$$

- in amplituda merjenega signala je enaka

$$A = K_1 \sqrt{2} U = 14,0000\text{ V}$$

- Motilni signal ($f_2 = 100\text{ kHz}$) je močnejše slabljen:

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_m)^2}} = 0,06983$$

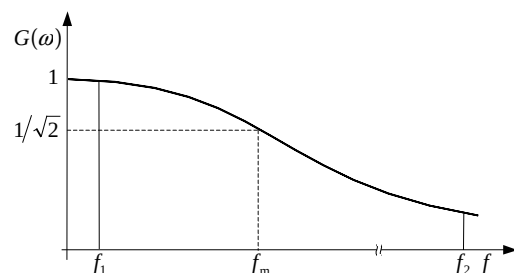
- in tudi amplituda motilnega signala:

$$A_m = K_2 \sqrt{2} U_m = 0,09875\text{ V}$$

- Ker ne poznamo faznega zamika med merjenim in motilnim signalom, lahko pričakujemo rezultate merjenja amplitude signala v mejah:

$$A - A_m \leq A \leq A + A_m$$

$$13,9013\text{ V} \leq A \leq 14,0988\text{ V}$$



2. Po napetostno primerjalni metodi merimo upornost $R_x \approx 1000 \Omega$. Kolikšno ločljivost mora imeti voltmeter ($\Delta U = ?$), da bo standardna negotovost zaradi ločljivosti zanemarljiva? Vezje napajamo s tokovnim virom $I_0 = 1,5 \text{ mA}$.

- voltmeter: $M_U = \pm(0,1\%U + 0,1\%U_D)$, $U_D = 2 \text{ V}$, $R_V = 10 \text{ M}\Omega$
- $R_N = 1 \cdot (1 \pm 10^{-4}) \text{ k}\Omega$

Rešitev:

- Ker sta vrednosti merjenega in referenčnega upora zelo blizu skupaj (red velikosti 1%), nam primerjalna metoda omogoča zmanjšanje standardne merilne negotovosti za lastni pogrešek voltmetra. Ostaneta prispevka referenčnega upora in ločljivosti voltmetra:

$$\frac{u_c(R_x)}{R_x} = \sqrt{\left(\frac{u(R_N)}{R_N}\right)^2 + 2\left(\frac{u(U_x)_q}{U_x}\right)^2}$$

- ki je zanemarljiva, kadar je manjša od petine skupne negotovosti:

$$\sqrt{2} \frac{u(U_x)_q}{U_x} < \frac{1}{5} \frac{u_c(R_x)}{R_x} \doteq \frac{1}{5} \frac{u(R_N)}{R_N} = \frac{1}{5} \frac{m(R_N)}{\sqrt{3}} = 1,155 \cdot 10^{-5}$$

- Napajalni tok $I_0 = 1,5 \text{ mA}$ povzroči padce napetosti:

$$U_x \approx U_N = 1,5 \text{ V}$$

- Pri negotovosti zaradi ločljivosti $u(U_x)_q$ upoštevamo pravokotno porazdelitev:

$$u(U_x)_q = \frac{\Delta U}{2\sqrt{3}}$$

- in od tod določimo ločljivost:

$$\Delta U < 2\sqrt{3} \cdot U_x / \sqrt{2} \cdot 1,155 \cdot 10^{-5} = 4,24 \cdot 10^{-5} \text{ V} \rightarrow \Delta U = 10 \mu\text{V}$$

3. S $5\frac{1}{2}$ -mestnim ohmmetrom $M_R = \pm(0,01\% R + 0,01\% R_D)$ smo merili stalno upornost pod enakimi pogoji ($n = 10$). Koliko je standardna negotovost merilnega rezultata?

R/Ω : 99,123; 99,135; 99,146; 99,079; 99,104; 99,115; 99,098; 99,087; 99,112; 99,061

Rešitev:

- Standardna negotovost merilnega rezultata sestavljata dva prispevka: negotovost tipa A zaradi ponavljanja meritev in negotovost tipa B kot prispevek merilne metode in instrumentacije. V primeru negotovosti tipa B je prevladujoč lastni pogrešek ohmmetra.
- Negotovost tipa A dobimo z določitvijo srednje vrednosti, standardnega odklona meritev in standardne negotovosti:

$$\bar{R} = 99,106\Omega$$

$$s(R) = \sqrt{\frac{\sum_i (R_i - \bar{R})^2}{n-1}} = 0,025884\Omega$$

$$u_A = \frac{s(R)}{\sqrt{n}} = 0,008185\Omega$$

- Negotovost tipa B dobimo iz mejne vrednosti pogreška, kjer predpostavljamo pravokotno porazdelitev pogreška:

$$u_B = \frac{1}{\sqrt{3}} M_R = \frac{1}{\sqrt{3}} (10^{-4} \cdot 99,106\Omega + 10^{-4} \cdot 200\Omega) = 0,01727\Omega$$

- $5\frac{1}{2}$ -mestni prikaz nam da $R_D = 200\Omega$ (maksimalni prikaz: 199,999).

- Skupna standardna negotovost je:

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0,01911\Omega \rightarrow u_c = 0,020\Omega$$

4. Merilnik toka ima kalibracijski certifikat z rezultati kalibracije navedenimi v tabeli. S tem inštrumentom ste izmerili tok 1,50 A. Podajte merilni rezultat izmerjene vrednosti, če je imel referenčni instrument $2\frac{3}{4}$ mestni prikazovalnik in mejo pogreška $M_{\text{ref}} = 0,2\% I_i + 0,1\% I_D + 2\text{dig}$. Ostale prispevke k merilni negotovosti uporabljenega inštrumenta zanemarimo. Podajte popoln merilni rezultat!

I_i / A	$I_{\text{ref}} / \text{A}$	E / A
1,00	1,25	-0,25
2,00	2,11	-0,11
3,00	3,13	-0,13
4,00	4,05	-0,05

Rešitev:

- Rezultat izmerjene vrednosti je potrebno korigirati glede na vrednosti v certifikatu. Korekcija se prišteje in ima obraten predznak od pogreška v obravnavani točki. Pogrešek je razlika med izmerjeno in pravo vrednostjo. Ker v certifikatu ni podatka za pogrešek pri kazanju inštrumenta 1,50 A, se ga pridobi z linearno interpolacijo med sosednjima točkama. Tako je

$$E_{1,50} = \frac{E_{1,00} + E_{2,00}}{2} = \frac{-0,25 \text{ A} - 0,11 \text{ A}}{2} = -0,18 \text{ A}$$

- Prava vrednost je tako

$$I = I_i + K = 1,50 \text{ A} + 0,18 \text{ A} = 1,68 \text{ A}$$

- Iz prikazovalnika in podatka proizvajalca o meji pogreška referenčnega inštrumenta določimo njegovo merilno negotovost.

$$2\frac{3}{4}\text{mestni prikazovalnik} \Rightarrow \text{prikaz 399} \Rightarrow I_D = 4,00 \text{ A}$$

$$M = 0,2\% I_i + 0,1\% I_D + 2\text{dig} = 0,2\% \cdot 1,50 \text{ A} + 0,1\% \cdot 4,00 \text{ A} + 2 \cdot 0,01 \text{ A} = 0,027 \text{ A}$$

$$u(I) = \frac{M_i}{\sqrt{3}} = 0,0156 \text{ A}$$

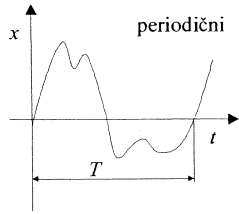
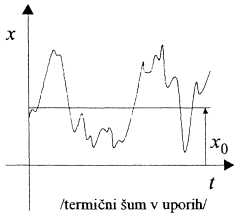
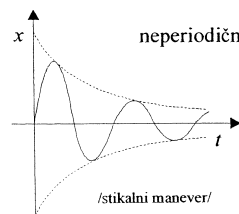
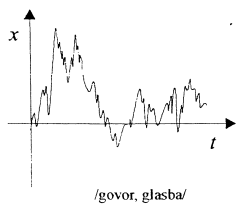
- Popolni merilni rezultat je tako

$$I = 1,68 \text{ A} \quad , \quad u(I) = 0,02 \text{ A} \quad , \quad n = 1$$

5. Kako delimo signale, ki opisujejo časovno spremenljive veličine? Opišite osnovne parametre pulznih neperiodičnih oblik signalov.

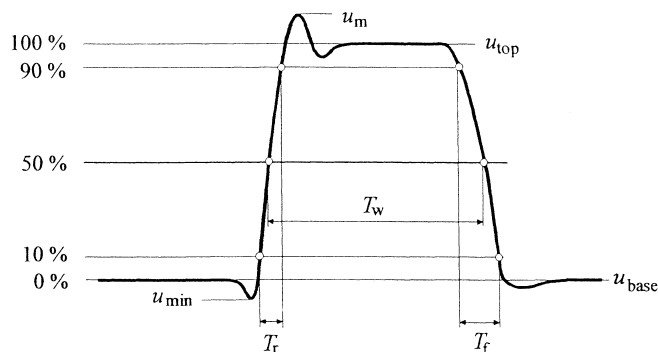
Rešitev:

- Delimo jih na to, ali lahko matematično opišemo trenutne vrednosti veličin ali ne:
 - deterministične,
 - nedeterministične – naključne (stohastične).
- Kadar se pomembni parametri dinamičnih veličin (aritmet. srednja vrednost, efektivna vrednost, itn.) s časom spreminjajo, ločimo signale na:
 - stacionarne,
 - nestacionarne.

	DETERMINISTIČNI	NEDETERMINISTIČNI
	opisujemo jih v časovnem in frekvenčnem prostoru	opisujemo jih v frekvenčnem prostoru; zanimivi za prenos informacij
STACIONARNI	periodični 	 /termični šum v uporih/
NESTACIONARNI	neperiodični  /stikalni maneuver/	 /govor, glasba/

- Nekateri parametri pulzne oblike signala.
- Izhodiščna parametra sta:

- osnovni ali **spodnji** nivo (u_{base} , 0%),
- **zgornji** nivo (u_{top} , 100%),
- prevladujoči vrednosti v histogramu.



- Z obema izhodiščnima nivojema 0% in 100% sta določena tudi nivoja 10% in 90% za določitev **dvižnega časa** T_r in **upadnega časa** T_f .
- Ugotovimo lahko tudi nivo 50%, ki določa **širino impulza** T_w .
 - Pri ponavljajočih pulzih je to nivo za merjenje in določanje periode, frekvence in relativne širine impulza.

Rešitve nalog – MERITVE 1. del

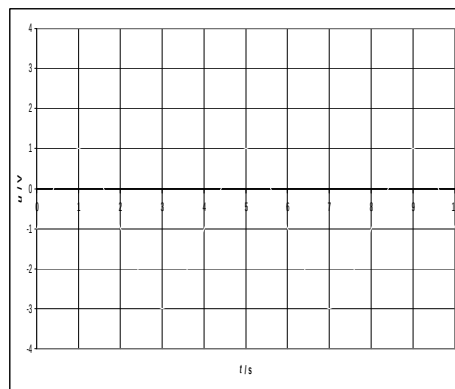
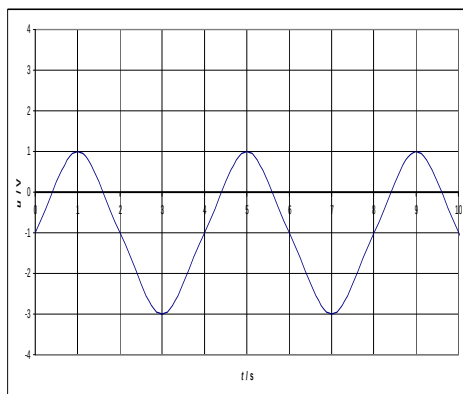
1. Funkcijski generator generira napetostni signal $u(t)/V = 2 \sin(\pi t/2s) - 1$. Določite frekvenco signala, periodo signala, vrednost amplitude od vrha do vrha (peak-to-peak).
- Narišite sliko na osciloskopu, s katerim opazujete ta signal, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = -1V$ in $S > 0$ pri $k_t = 1s/d$ in $k_y = 1V/d$.
 - Narišite sliko na osciloskopu, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = 3V$ in $S > 0$ pri $k_t = 1s/d$ in $k_y = 2V/d$.
 - Narišite sliko na osciloskopu, če je proženje osciloskopa nastavljeno na $N = 0V$ in $S < 0$ pri $k_t = 250ms/d$ in $k_y = 500mV/d$.

Rešitev:

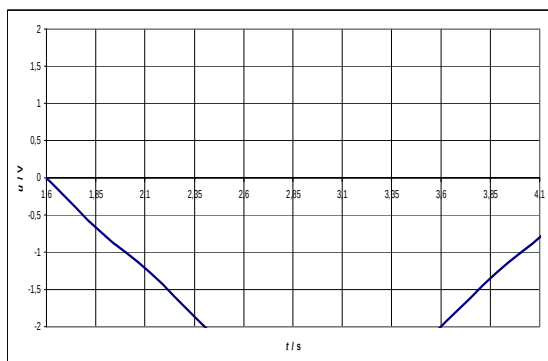
- Če splošni argument sinusa v obliki $2\pi ft$ izenačimo z argumentom napetostnega signala, lahko izračunamo frekvenco:

$$2\pi ft = \pi t/2s \rightarrow f = 1/4s = 0,25Hz \quad \text{in} \quad T = 1/f = 4s$$

- Vrednost amplitude od vrha do vrha je $U_{pp} = 2\hat{u}_{\sin} = 4V$.
- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> a. $N = -1V$, $S > 0$, $k_t = 1s/d$,
$k_y = 1V/d$. | <ul style="list-style-type: none"> b. $N = 3V$, $S > 0$, $k_t = 1s/d$,
$k_y = 2V/d$. |
|---|--|

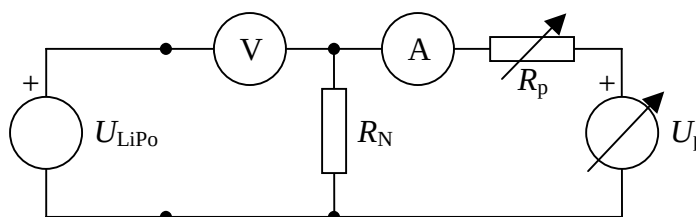


- c. $N = 0V$, $S < 0$, $k_t = 250ms/d$, $k_y = 500mV/d$.



2. Zapišite merilni rezultat za napetost U_{LiPo} litij-polimerne baterije z notranjo upornostjo $60 \text{ m}\Omega$, ki jo izmerite s kompenzacijsko metodo (glej vezje). Merilni podatki so naslednji:

- izmerjeni tok je znašal $4,120 \text{ mA}$; relativna standardna negotovost umerjenega A-metra: $w_I = 0,3\%$;
- vrednost etalonskega upora je znašala $1002,0 \Omega$; $w_R = 0,05\%$;
- voltmeter je imel odklon 0 V in standardni odklon te izmerjene napetosti $s(u) = 152 \mu\text{V}$.



Rešitev:

- Tip baterije (litij-polimerna) nima vpliva na rezultat merjenja. Prav tako pri kompenzacijski metodi nima vpliva notranja upornost baterije ($60 \text{ m}\Omega$), saj s to metodo merimo napetost odprtih sponk oz. napetost neobremenjene baterije. V ravnovesju, ko je vezje kompenzirano, namreč voltmeter kaže v povprečju nič (zanemarljiv ničelni odklon).
- Napetost litij-polimerne U_{LiPo} baterije izmerimo tako, da z delom vezja, ki je desno od voltmetra, kompenziramo U_{LiPo} . Z U_p in R_p nastavimo padec napetosti na etalonskem uporu R_N enak U_{LiPo} , kar ugotovimo z voltmetrom, ki kaže razliko 0 V .
- Napetost baterije U_{LiPo} določimo iz izmerjenega toka $I_A = I_p$, vrednosti etalona R_N in napetosti na voltmetru:

$$U_{\text{LiPo}} = U_V + I_p \cdot R_N = 0 \text{ V} + 4,120 \text{ mA} \cdot 1002,0 \Omega = 4,1283 \text{ V}$$

- Negotovost U_{LiPo} dobimo iz posameznih prispevkov negotovosti po naslednji enačbi:

$$\begin{aligned} u(U_{\text{LiPo}}) &= \sqrt{\left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial U_V} \right| \cdot u(U_V) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial I_p} \right| \cdot u(I_p) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial R_N} \right| \cdot u(R_N) \right]^2} = \\ &= \sqrt{\left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial U_V} \right| \cdot s(u) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial I_p} \right| \cdot w(I_p) \cdot I_p \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial U_{\text{LiPo}}}{\partial R_N} \right| \cdot w(R_N) \cdot R_N \right]^2} = \\ &= \sqrt{[s(u)]^2 + [R_N \cdot w(I_p) \cdot I_p]^2 + [I_p \cdot w(R_N) \cdot R_N]^2} = \\ &= \sqrt{152 \mu\text{V}^2 + [4,1283 \text{ V} \cdot 3 \cdot 10^{-3}]^2 + [4,1283 \text{ V} \cdot 5 \cdot 10^{-4}]^2} = 12,6 \text{ mV} \end{aligned}$$

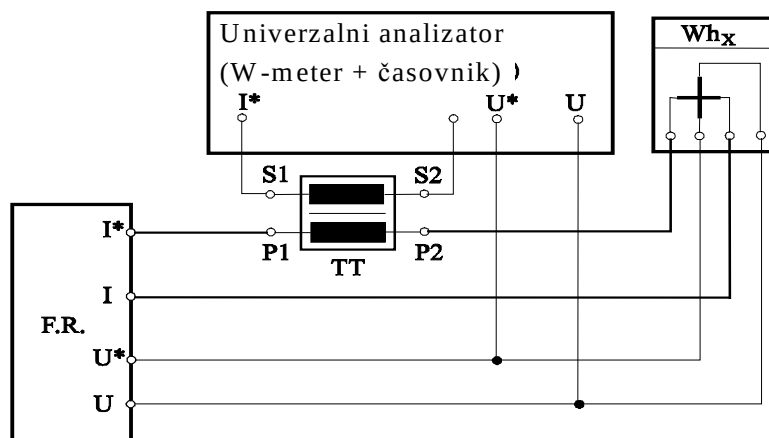
- in zaokrožen merilni rezultat:

$$U_{\text{LiPo}} = 4,128 \text{ V}, \quad u(U_{\text{LiPo}}) = 13 \text{ mV}, \quad n = 1$$

3. Skicirajte vezje za preizkus števca delovne energije po časovni metodi in izpeljite številsko enačbo za lastni pogrešek, če so veličine izražene z naslednjimi enotami:
 $[e] = \%$, $[K] = \text{vrt/kWh}$, $[P] = \text{kW}$, $[t] = \text{s}$, $[N] = \text{vrt}$

Rešitev:

- Za preizkus števca delovne energije po časovni metodi, potrebujemo stabilen vir, vatmeter in časovnik za merjenje časa obratov.



- Ugotavlja se razlika med energijo, ki jo kaže preizkušani števec delovne energije Wh_x , in pravo vrednostjo, ki je enaka produktu moči P in časa t pri časovni metodi. Ta razlika je enaka lastnemu pogrešku števca e .

$$e = \frac{W_s - W}{W}$$

- Energijo števca W_s izračunamo na osnovi števila vrtljajev rotorja števca N in njegove konstante K : $W_s = N/K$
- Prava vrednost energije W je: $W = Pt = P_w t$
- Lastni pogrešek števca e je enak: $e = \frac{W_s - W}{W} = \frac{N}{K P_w t} - 1$

- Za prehod iz veličinske enačbe v številsko izrazimo veličine kot produkt številskih vrednosti in enot:

$$\{e\}[e] = \frac{\{N\}[N]}{\{K\}[K]\{P_w\}[P_w]\{t\}[t]} - 1$$

$$\text{in preoblikujemo v } \{e\} = \frac{\{N\}}{\{K\}\{P_w\}\{t\}} \frac{[N]}{[K][P_w][t]} \frac{1}{[e]} - \frac{1}{[e]}$$

- Za splošne enote posameznih veličin vstavimo enote, ki jih želimo uporabljati:

$$\frac{[N]}{[K][P_w][t]} \frac{1}{[e]} = \frac{\text{vrt}}{\text{vrt/kWh} \cdot \text{kW} \cdot \text{s}} \cdot \frac{1}{\%} = \frac{3600 \text{ s}}{\text{s}} \frac{1}{\%} = \frac{3600}{\%}$$

- Če upoštevamo, da je $\% = 0,01$, se zelena številaska enačba zapiše:

$$e = \left(3600 \cdot \frac{N}{K P_w t} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\%} \quad \text{oz.} \quad e = \left(3600 \cdot \frac{N}{K P_w t} - 1 \right) \cdot 100$$

4. Koliko je standardna negotovost aritmetične sredine devetih vrednosti napetosti U_i ($i = 1, \dots, 9$), če so vzete iz populacije z eksperimentalno standardno negotovostjo $s_p = 3,0 \text{ mV}$ ($n_p = 1000$)? Koliko vrednosti moramo uporabiti, da bi bila standardna negotovost aritmetične sredine manjša od $0,2 \text{ mV}$?

Rešitev:

- Standardno negotovost aritmetične sredine $n = 9$ vrednosti $\bar{U} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 U_i = \frac{1}{9} (U_1 + \dots + U_9)$ določajo prispevki negotovosti neposredno merjenih vrednosti napetosti:

$$u_c(\bar{U}) = \sqrt{(c_1 u(U_1))^2 + \dots + (c_9 u(U_9))^2}$$

- Ker so vrednosti vzete iz iste populacije z eksperimentalno ocenjeno standardno negotovostjo $s_p = 4,0 \text{ mV}$ na velikem številu meritev $n_p = 1000$, imajo vse enako standardno negotovost:

$$u(U_1) = \dots = u(U_9) \doteq s_p$$

- Faktorji občutljivosti so enaki delnim odvodom:

$$c_1 = \frac{\partial \bar{U}}{\partial U_1} = c_i = \frac{1}{9} \quad \text{oz. splošno } c_n = \frac{1}{n}$$

- Standardna negotovost aritmetične sredine je enaka:

$$u_c(\bar{U}) = \frac{1}{9} \sqrt{9 s_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{9}} = \frac{s_p}{3} = 1,0 \text{ mV}$$

- oz. splošno: $u_c(\bar{U}) = \frac{1}{n} \sqrt{n s_p^2} = \frac{s_p}{\sqrt{n}}$!!

- Če želimo standardno negotovost aritmetične sredine zmanjšati, moramo pri tvorjenju uporabiti več vrednosti:

$$\sqrt{n} > \frac{s_p}{u_c(\bar{U})} = \frac{3,0 \text{ mV}}{0,2 \text{ mV}} = 15 \quad \Leftrightarrow \quad n > 225$$

5. Ugotovite, kateri izmed uporovnih senzorjev temperature, ki imata karakteristiko oblike $R_t = R_0 e^{bt}$, ima manjšo nelinearnost v območju $t = 0^\circ\text{C} \div 100^\circ\text{C}$?

- Senzor 1: $R_0 = R_{0^\circ\text{C}} = 1000\Omega$, $R_{100^\circ\text{C}} = 1500\Omega$
- Senzor 2: $R_0 = R_{0^\circ\text{C}} = 1500\Omega$, $R_{100^\circ\text{C}} = 2100\Omega$

Rešitev:

- Iz karakteristike uporovnih senzorjev, ki je podana z enačbo $R_t = R_0 e^{bt}$, pri čemer je R_0 upornost senzorja pri referenčni temperaturi 0°C , izračunamo koeficienta b_i :

$$\text{S. 1: } R_{1,100^\circ\text{C}} = R_{1,0^\circ\text{C}} e^{b_1 \cdot 100^\circ\text{C}} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{100^\circ\text{C}} \cdot \ln\left(\frac{R_{1,100^\circ\text{C}}}{R_{1,0^\circ\text{C}}}\right) = 4,055 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$$

$$\text{S. 2: } R_{2,100^\circ\text{C}} = R_{2,0^\circ\text{C}} e^{b_2 \cdot 100^\circ\text{C}} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{100^\circ\text{C}} \cdot \ln\left(\frac{R_{2,100^\circ\text{C}}}{R_{2,0^\circ\text{C}}}\right) = 3,365 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$$

- Nazivna (idealna) karakteristika $R_n = R_{t,\min} + S(t - t_{\min})$ gre skozi začetno in končno točko dejanske karakteristike. Občutljivosti sta tako:

$$\text{S. 1: } S_1 = \frac{R_{t_{\max}} - R_{t_{\min}}}{t_{\max} - t_{\min}} = \frac{R_{1,100^\circ\text{C}} - R_{1,0^\circ\text{C}}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 5\Omega / ^\circ\text{C}$$

$$\text{S. 2: } S_2 = \frac{R_{2,100^\circ\text{C}} - R_{2,0^\circ\text{C}}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} = 6\Omega / ^\circ\text{C}$$

- Iz karakteristike senzorja R_t in nazivne karakteristike R_n lahko ugotovimo nelinearnost senzorja, ki je enaka

$$n = |e_1|_{\max} = \frac{|R_t - R_n|_{\max}}{R_{t,\max} - R_{t,\min}}.$$

- Največje odstopanje $\Delta R_{\max} = |R_t - R_n|_{\max} = ?$ moremo iskati z delnim odvajanjem razlike karakteristik in enačenjem z 0:

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial t} = b_i R_{i,0} e^{b_i t} - S_i = 0 \rightarrow t_{\Delta R_{\max,i}} = \frac{1}{b_i} \ln(S_i / b_i R_{i,0})$$

$$\text{S. 1: } t_{\Delta R_{\max,1}} = \frac{1}{b_1} \ln(S_1 / b_1 R_{1,0}) = 51,66^\circ\text{C} \text{ in } \Delta R_{\max,1} = -25,26\Omega$$

$$\text{S. 2: } t_{\Delta R_{\max,2}} = \frac{1}{b_2} \ln(S_2 / b_2 R_{2,0}) = 51,37^\circ\text{C} \text{ in } \Delta R_{\max,2} = -25,17\Omega$$

- Za dano območje $t = 0^\circ\text{C} \div 100^\circ\text{C}$ sta nelinearnosti enaki:

$$n_1 = \frac{25,26\Omega}{500\Omega} = 5,0\%, \quad n_2 = \frac{25,17\Omega}{600\Omega} = 4,2\%$$