



1. UVOD

Zakaj meriti?

- Zato, da dobimo **objektiven** in **ponovljiv** podatek o:
 - **velikosti**, množini, jakosti fizikalnih veličin:
 - dolžina, čas, napetost, tok, moč itn.
- Izmerjena vrednost naj bo zadosti **blizu resnične – prave vrednosti**

Pri merjenju primerjamo neznano veličino z objektivnim merilom (**mero**).

- Pri **ocenjevanju** pa s podatkom v spominu (izkušnje).





Čemu meriti?

- **Zakonov narave ni moč odkriti brez sredstev za detekcijo in merjenje fizikalnih veličin.**
- **Znanstvene teorije niso sprejemljive brez zadržka, dokler niso potrjene z meritvami.**
- **Avtomatizacije proizvodnih in drugih procesov si ni moč zamisliti brez merenj.**
- **S pomočjo merenj se more človek dokopati do znanja in spoznanja ter se dvigniti na raven, kjer lahko postavlja vprašanja.**
- **Izmenjava dobrin (trgovina) lahko poteka šele po poenotenju mer.**





Kako meriti?

- Grobe **delne rezultate meritev** ponavadi dobimo z merilno opremo oz. **merilno instrumentacijo** – govorim o **posrednem merjenju**.

Upoštevati je potrebno:

- razpoložljivo opremo,
- zahtevano točnost,
- znanje izvajalcev meritev,
- potreben čas,
- vrsto merjene veličine,
- pogoje merjenj,
- ali je merjena veličina stalna ali se s časom spreminja itn.

Inženir ima več dela z meritvami še preden priključi instrument





1.1 Temeljni pojmi merilne tehnike

1.1.1 Osnovna shema merjenja

Merjenje je postopek, pri katerem **primerjamo neznano vrednost** neke fizikalne veličine **z znano količino** istovrstne veličine (**enoto**) – **neposredno merjenje**.

$$I = 6 \text{ A}$$

I - efektivna **vrednost** električnega toka,

- i - trenutna vrednost, \hat{i} - temenska vrednost

\bar{I} - srednja vrednost itn.

6 - **številski vrednost**,

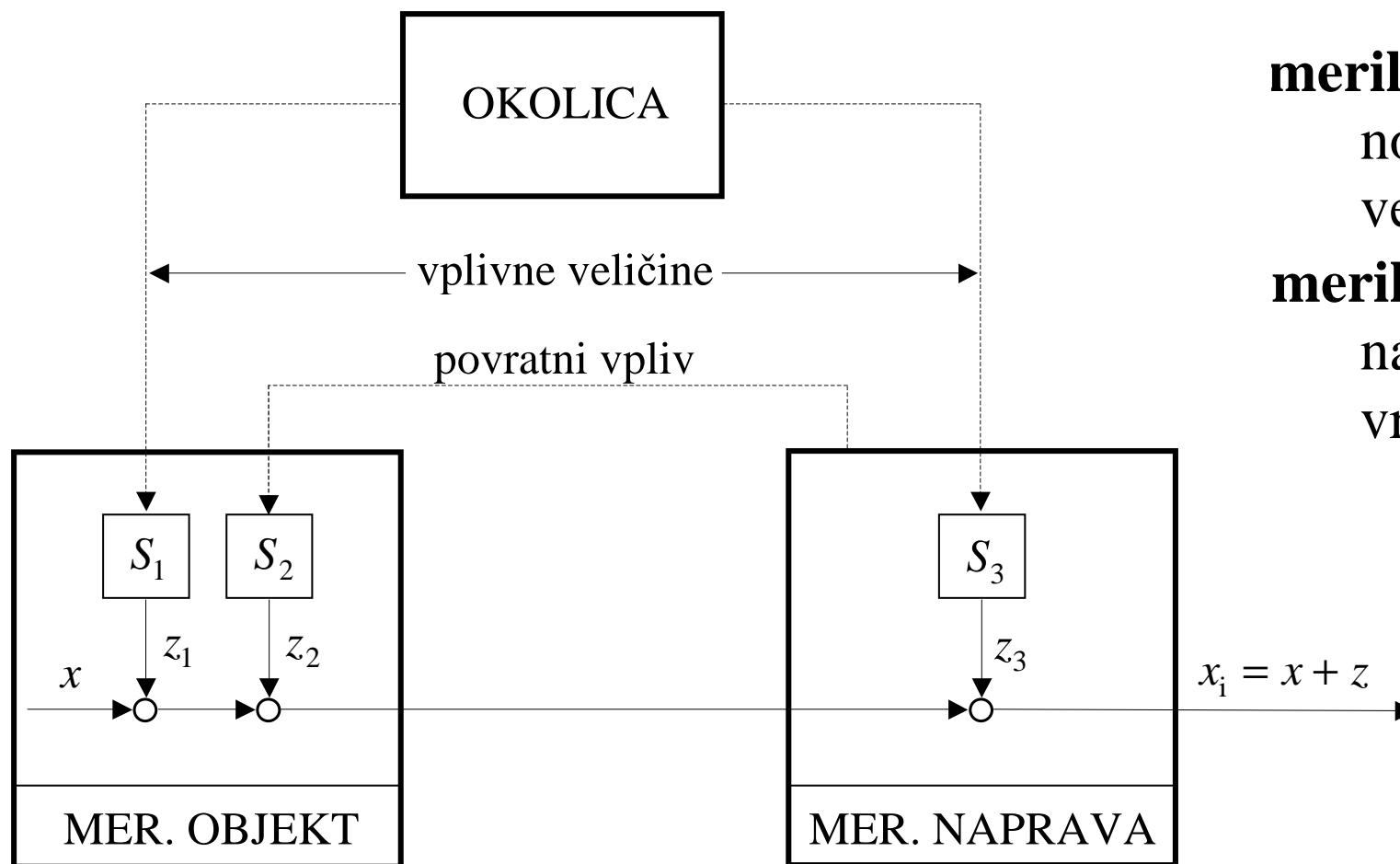
A(amper) - **enota** za električni tok.

Izmerjena vrednost je eden od **parametrov** neke fiz. veličine.





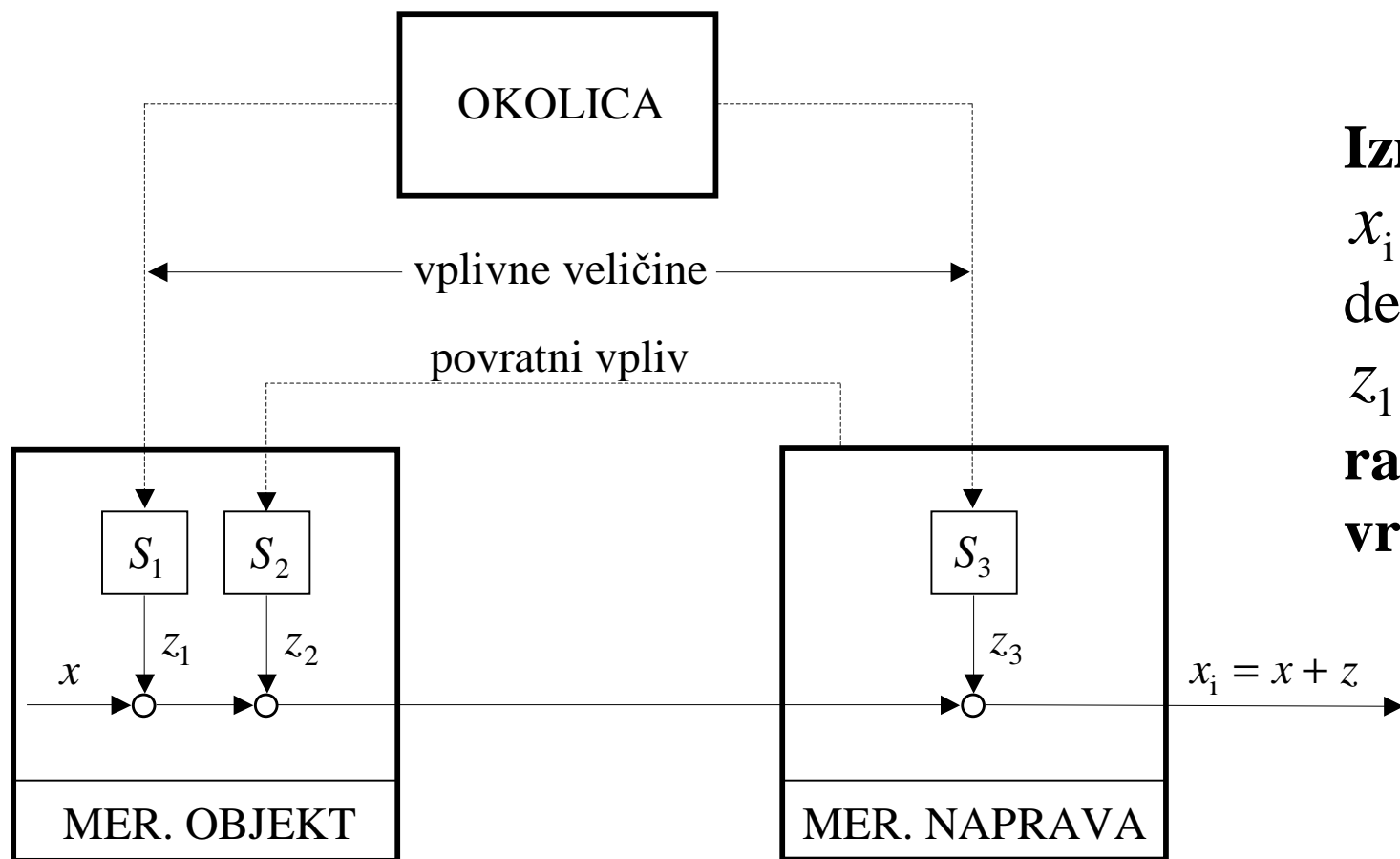
Izmerjena vrednost se razlikuje od dogovorjene prave vrednosti.



merilni objekt –
nosilec merjene
veličine,
merilna naprava –
nam daje izmerjeno
vrednost.

Slika 1.1 Osnovna shema merjenja





Izmerjena vrednost
 x_i se za vsoto treh
delnih motenj
 $z_1 + z_2 + z_3$
razlikuje od prave
vrednosti.

Slika 1.1 Osnovna shema merjenja

S_1 - občutljivost merilnega objekta na vplivne veličine,

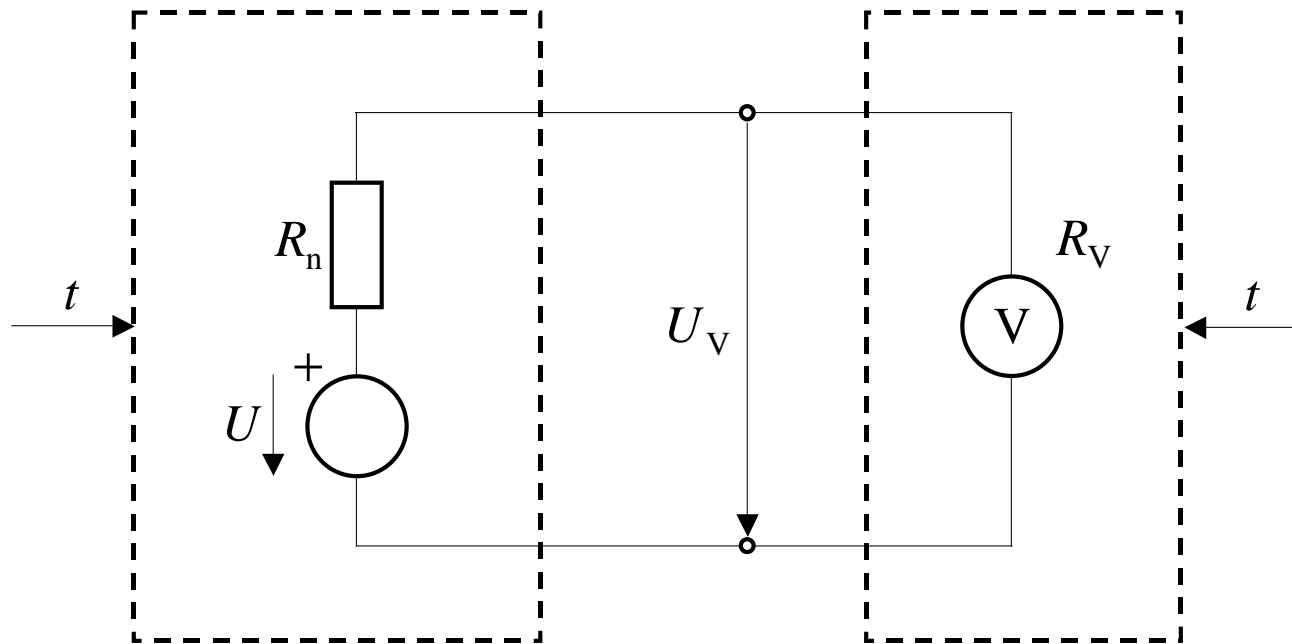
S_2 - povratni vpliv na priključitev merilne naprave,

S_3 - občutljivost merilne naprave na vplivne veličine.





Primer:



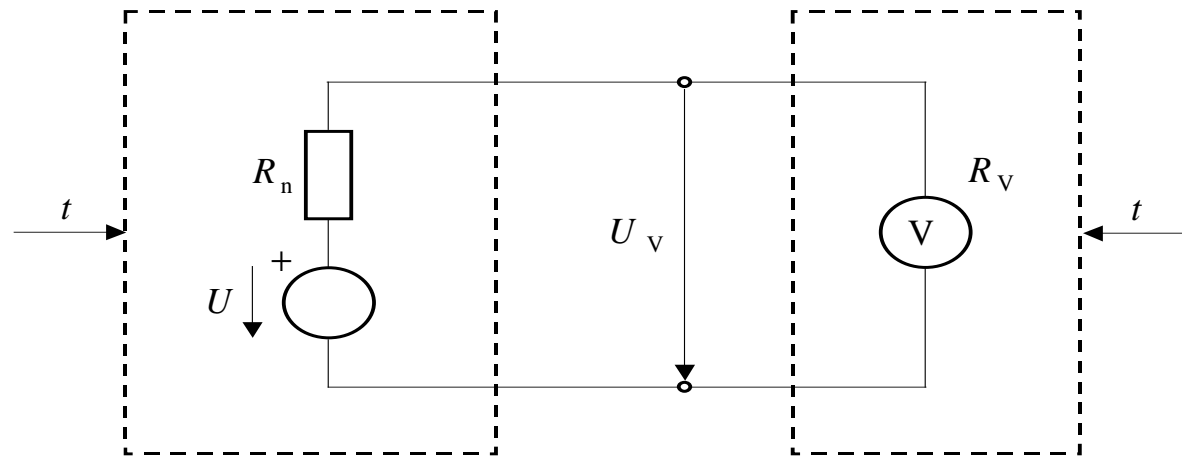
- Lastna napetost U galvanskega člena se s temperaturo t spremeni (S_1, z_1)
- Ko priključimo voltmetr, steče tok, ki povzroči padec napetosti na notranji upornosti R_n (S_2, z_2),
- Voltmetru s povišanjem temperature naraste upornost R_V (S_3, z_3).

Slika 1.2 Merjenje napetosti in pogrešek zaradi priključitve voltmetra

Razliko med izmerjeno vrednostjo in pravo vrednostjo imenujemo **merilni pogrešek**.

- Zelo zahtevna analiza vplivov na merilni rezultat!!





Kolikšen je pogrešek zaradi priključitve?

- izmerjena vrednost: $U_i = U_V = U \frac{R_V}{R_V + R_n}$
- 'prava' vrednost: $U = U_i \frac{R_V + R_n}{R_V} = U_i + U_i \frac{R_n}{R_V}$
- pogrešek (absolutna vrednost): $U_i - U = -U_i \frac{R_n}{R_V}$
- relativna vrednost: $\frac{U_i - U}{U} = \frac{-U_i R_n / R_V}{U_i (R_V + R_n) / R_V} = -\frac{1}{1 + R_V / R_n}$





Vseh učinkov vplivnih veličin se ne da ugotoviti.

- Vedno ostane pogrešek, katerega **predznak je nedoločen.**

Za izmerjeno vrednost zapišemo **merilni rezultat** (iz **enega odčitka** z instrumenta, ali iz **aritmetične sredine** izmerjenih vrednosti, ali **posredno** iz neposredno merjenih veličin, ...)

- Popolni **merilni rezultat ni ena sama vrednost, temveč območje vrednosti!!**

ali drugače:

- odstopanje navzgor oz. navzdol od izmerjene vrednosti imenujemo **merilna negotovost.**





Primer:

- izmerjena vrednost: $R = 123,4\Omega$
- **popolni merilni rezultat v absolutni obliki:**

$$R = 123,4\Omega \pm 0,5\Omega$$

- **popolni merilni rezultat v relativni obliki:**

$$R = 123,4(1 \pm 4 \cdot 10^{-3})\Omega$$

- **okoliščine**, v katerih je potekalo merjenje:
 - podatki o temperaturi, vlagi, številu izmerjenih vrednosti, ..





1.1.2 Merilne metode

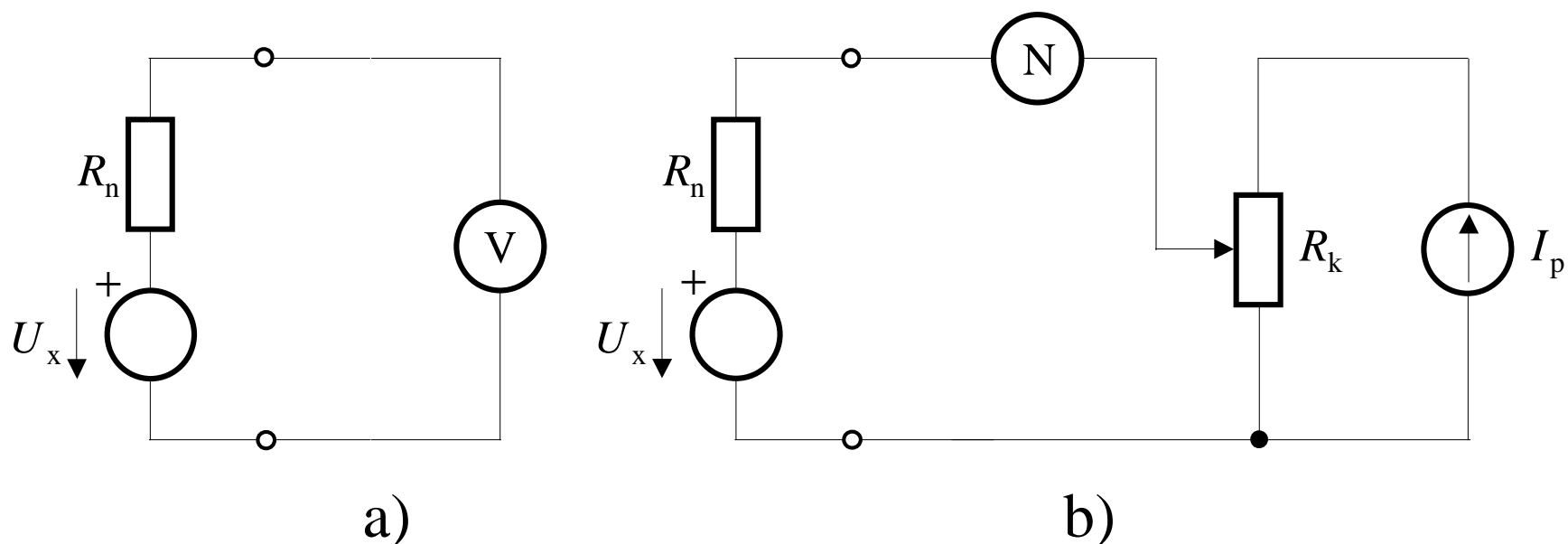
Poznamo dve bistveno različni metodi:

- **odklonsko**, pri kateri je odklon (ali kazanje) instrumenta osnova za določitev vrednosti merjene veličine;
- **ničelno**, ko instrument kaže nič oziroma nima odklona in določimo vrednost merjene veličine na podlagi drugih, znanih pogojev merilnega vezja

Obe metodi lahko nadalje delimo še na:

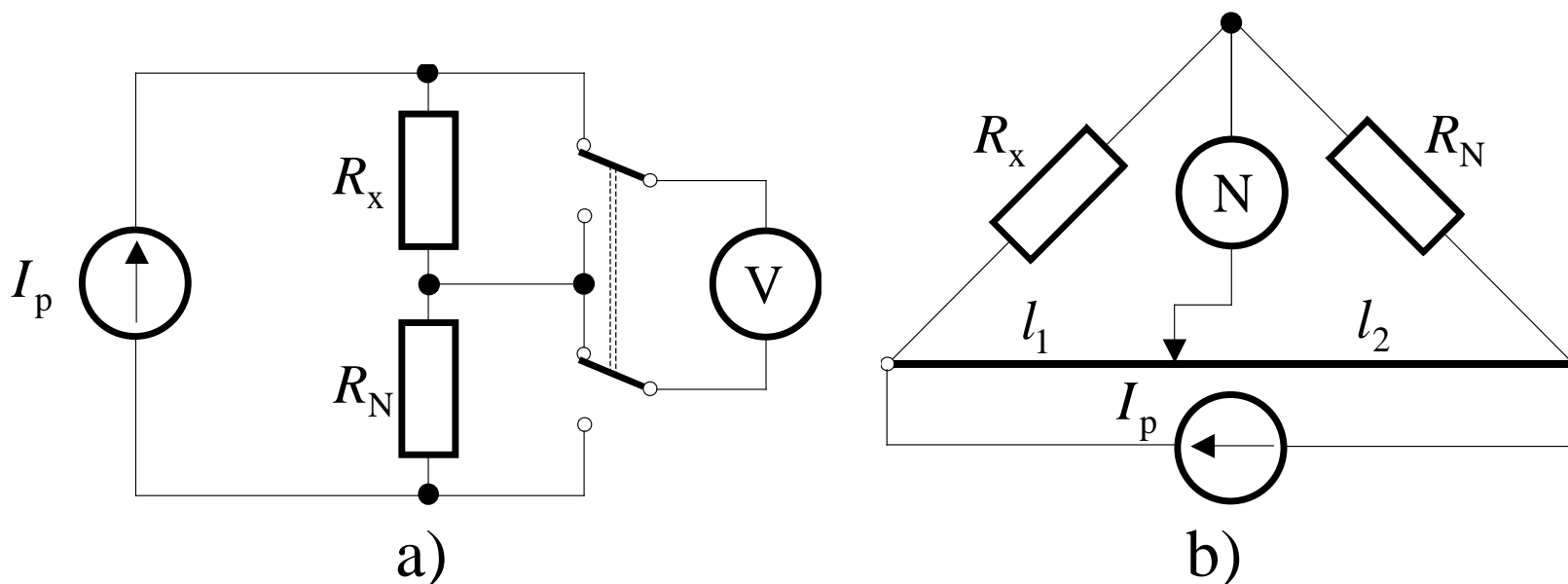
- **navadne,**
- **primerjalne,**
- **zamenjalne,**
- **diferenčne,**
- **in posebne.**





Slika 1.3 **Navadna** odklonska in ničelna metoda

- odklonska metoda je hitrejša od ničelne;
- ničelna metoda je bolj točna;
- pri ničelni metodi je večja poraba instrumentarija;
- pri ničelni metodi mora biti ničelni indikator zelo občutljiv
- tokovi in napetosti morajo biti stabilni.

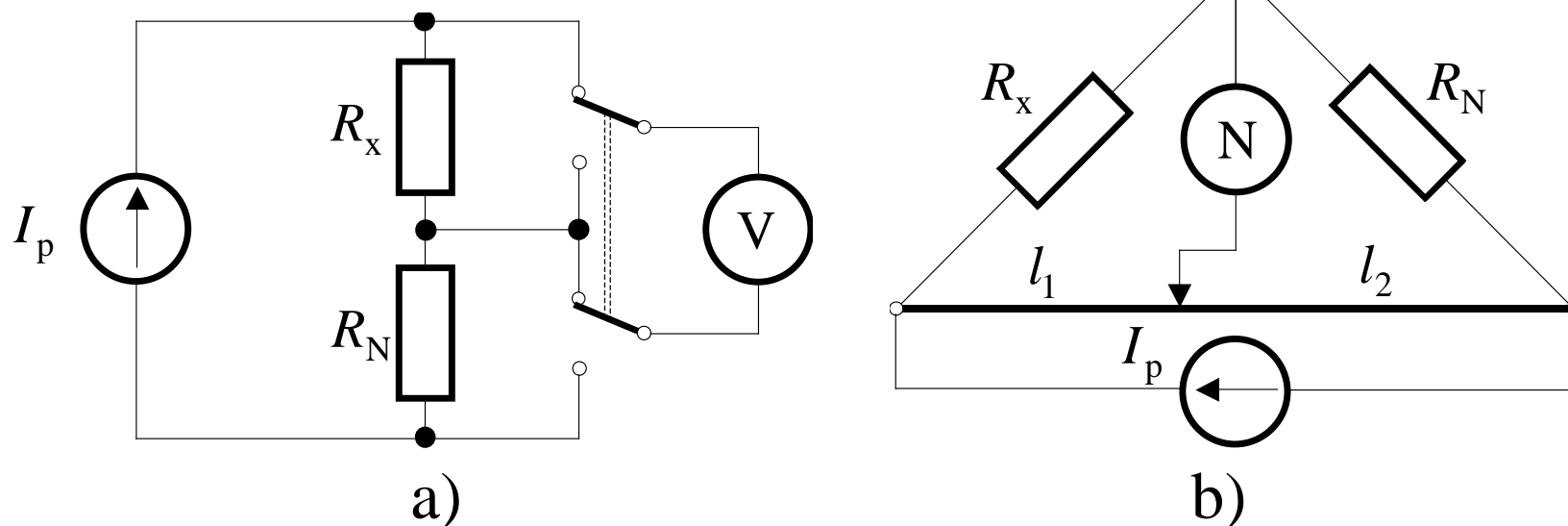


Slika 1.4 **Primerjalna** odklonska in ničelna merilna metoda

Primerjalna odklonska metoda:

- med seboj primerjamo napetost na neznanem uporu z napetostjo na znanem (tok mora biti **konstanten!**):

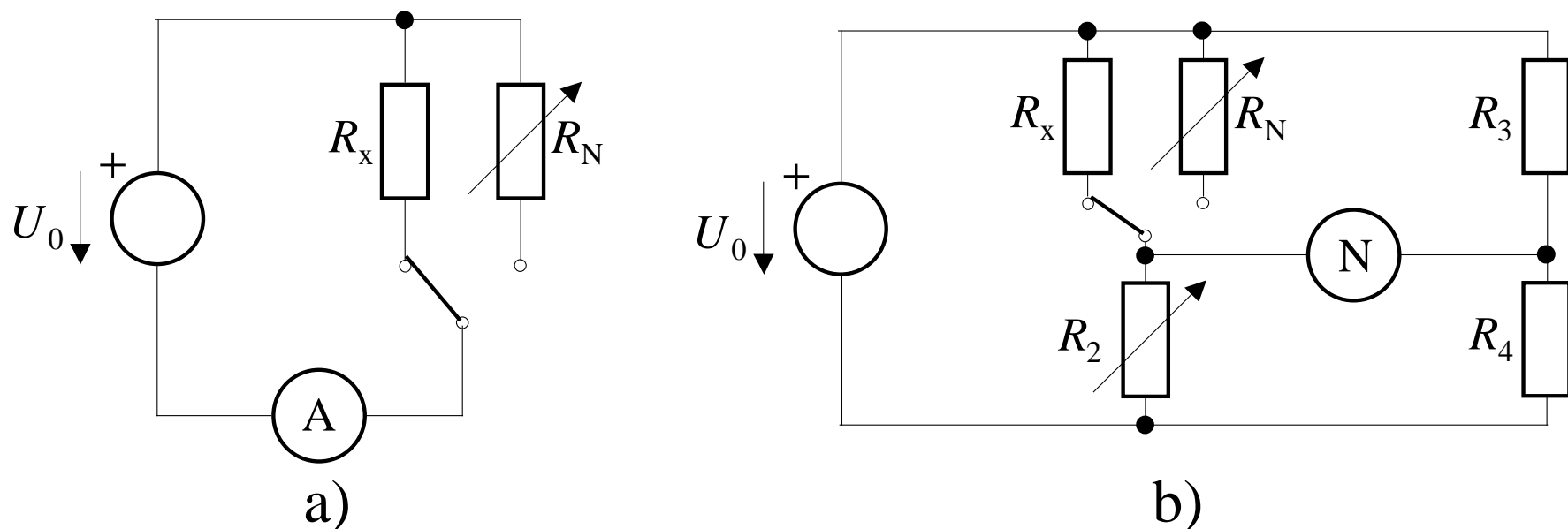
$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} \quad \Leftrightarrow \quad I_p = \text{konst.} = \frac{U_x}{R_x} = \frac{U_N}{R_N}$$



Slika 1.4 **Primerjalna** odklonska in ničelna merilna metoda

Primerjalna ničelna metoda:

- mostiček moramo s premikanjem drsnika po uporovni žici najprej uravnovesiti (tok ni nujno, da je stalen!):
$$R_x = R_N \frac{l_1}{l_2}$$



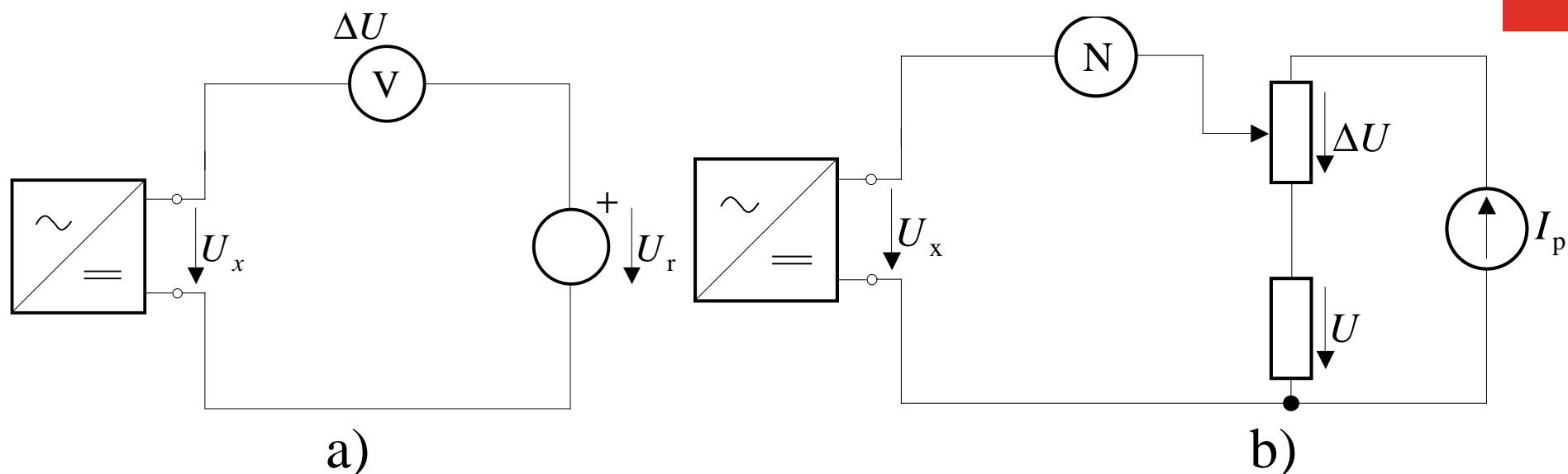
Slika 1.5 Zamenjalna odklonska in ničelna metoda

Zamenjalna (substitucijska) metoda:

- vrednost iskane veličine ugotovimo tako, da **vzpostavimo** v merilnem vezju **dvakrat enake pogoje**:
 - **prvič** je vključen **neznani** upor (merjenec);
 - **drugič** je vključen **znani** in **spremenljivi** upor -referenca

Točnost ampermetra ni pomembna.





Slika 1.6 Diferenčna odklonska in ničelna metoda

Diferenčna metoda:

- kadar nas zanima **sprememba** fizikalne veličine:
 - razlike med neznano vrednostjo in referenčno vrednostjo **ni potrebno meriti zelo točno**, kadar je **razlika majhna!**

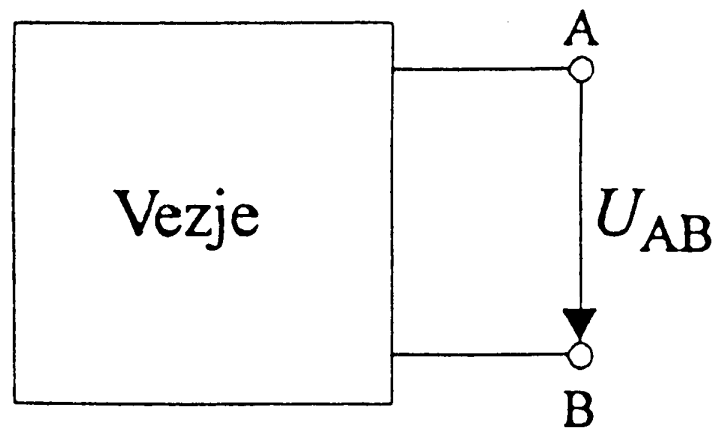


1.1.2.1 Odklonska metoda in primeri vključitve merilnih instrumentov

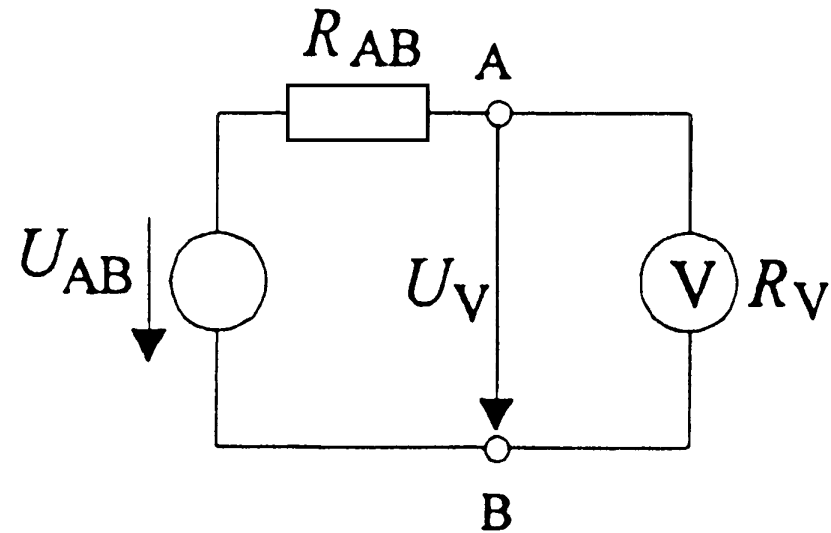


Vključitev merilnih instrumentov ima za posledico spremembo razmer.

Priključitev voltmetra



a)



b)

Slika 1.7 Vpliv priključitve voltmetra

Napetost med sponkama A, B
po priključitvi voltmetra:

$$U_V = U_{AB} \frac{R_V}{R_V + R_{AB}}$$





- Relativna sprememba napetosti:

$$\frac{\Delta U}{U_{AB}} = \frac{U_V - U_{AB}}{U_{AB}} = -\frac{1}{1 + R_V/R_{AB}}$$

- **napetost je manjša,**
- odvisna od razmerja $\frac{R_V}{R_{AB}}$
- Če učinek priključitve (končne vrednosti upornosti) zanemarimo, naredimo **sistematični pogrešek** merilne

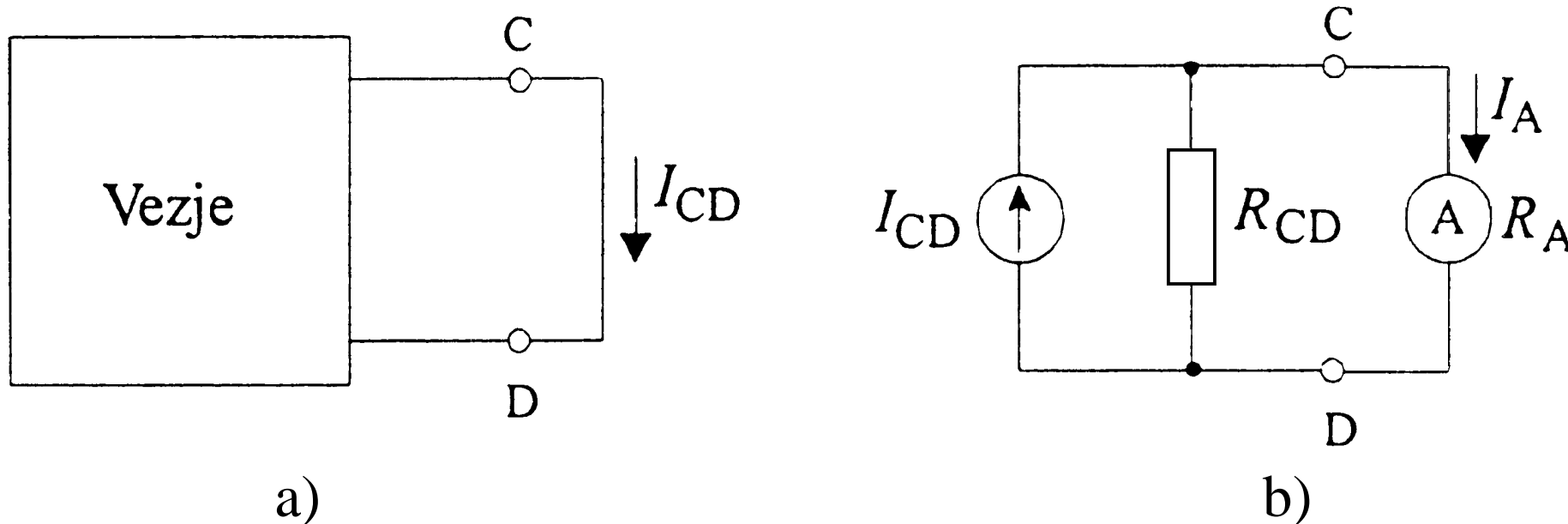
metode:

$$e = -\frac{1}{1 + R_V/R_{AB}}$$





Vključitev ampermetra



Slika 1.8 Vpliv vključitve ampermetra

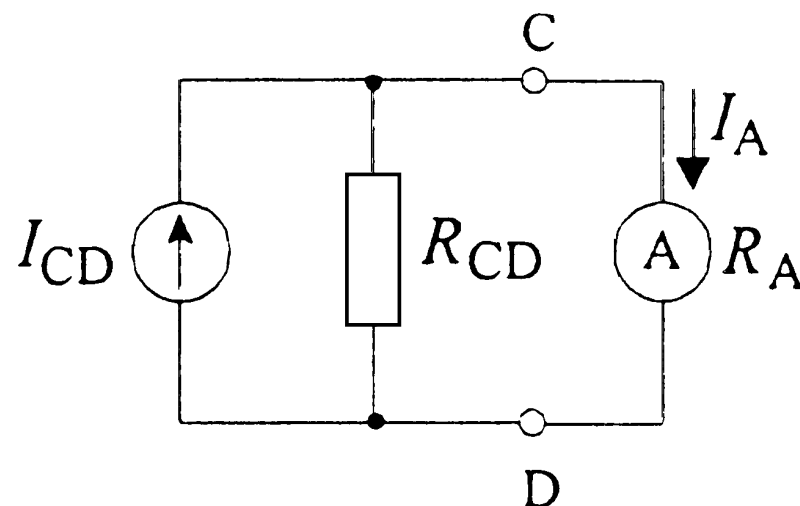
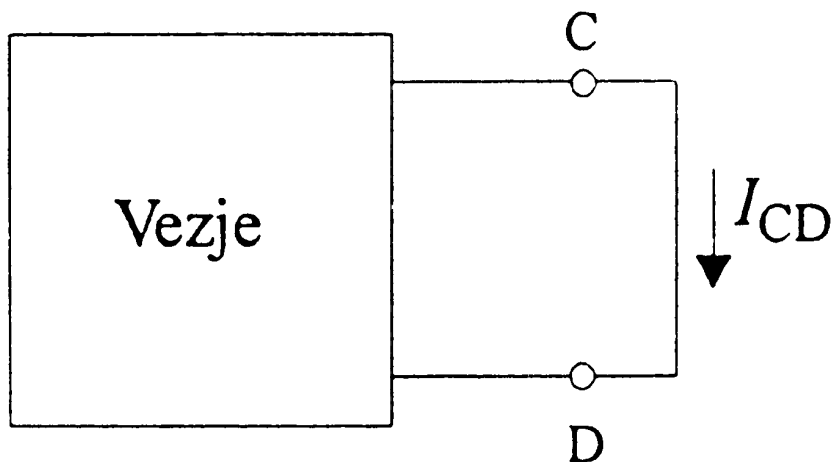
Tok med sponkama C, D **po vključitvi ampermetra** (pred tem je bila kratka vez):

$$I_A = I_{CD} \frac{R_{CD}}{R_{CD} + R_A}$$

Relativna sprememba toka:

$$\frac{\Delta I}{I_{CD}} = \frac{I_A - I_{CD}}{I_{CD}} = -\frac{1}{1 + R_{CD}/R_A}$$





$$\frac{\Delta I}{I_{CD}} = \frac{I_A - I_{CD}}{I_{CD}} = -\frac{1}{1 + R_{CD}/R_A}$$

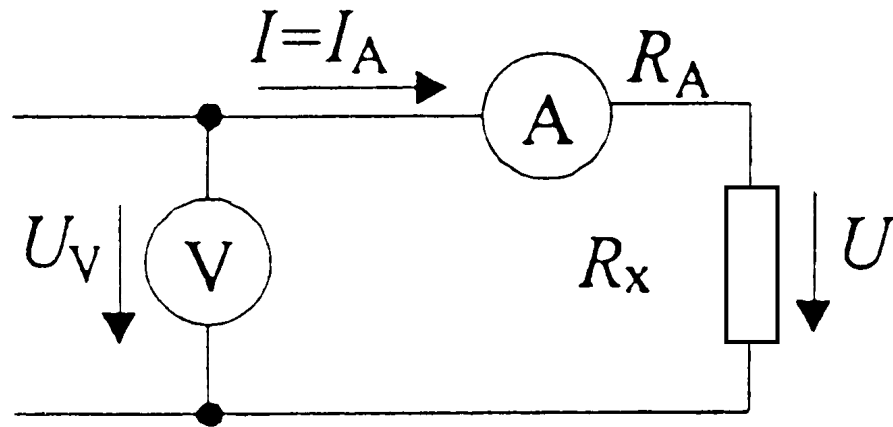
- tok je manjši,
- odvisna od razmerja $\frac{R_{CD}}{R_A}$

Če učinek priključitve (končne vrednosti upornosti) zanemarimo, naredimo **systematični pogrešek**:

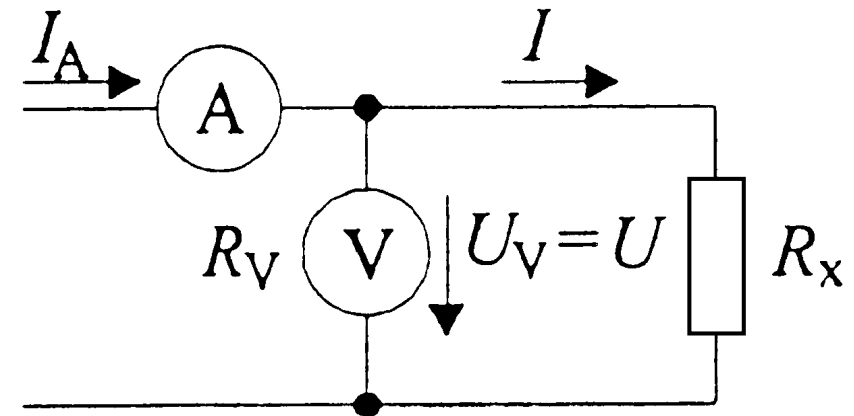
$$e = -\frac{1}{1 + R_{CD}/R_A}$$



1.1.2.2 Odklonska U - I metoda merjenja upornosti



a)



b)

Slika 1.9 U - I metoda merjenja upornosti

Varianta a:

- tok je pravilen: $I_A = I$,

- napetost je prevelika: $U_V = U + IR_A$

Razmerje je **večje** kot R_x :
$$\frac{U_V}{I_A} = \frac{U + IR_A}{I} = R_x + R_A$$





$$\frac{U_V}{I_A} = \frac{U + IR_A}{I} = R_x + R_A$$

- če upoštevamo samo U_V in I_A , je **systematični pogrešek**:

$$R_i = \frac{U_V}{I_A} \Rightarrow e = \frac{U_V/I_A - R_x}{R_x} = \frac{R_A}{R_x}$$

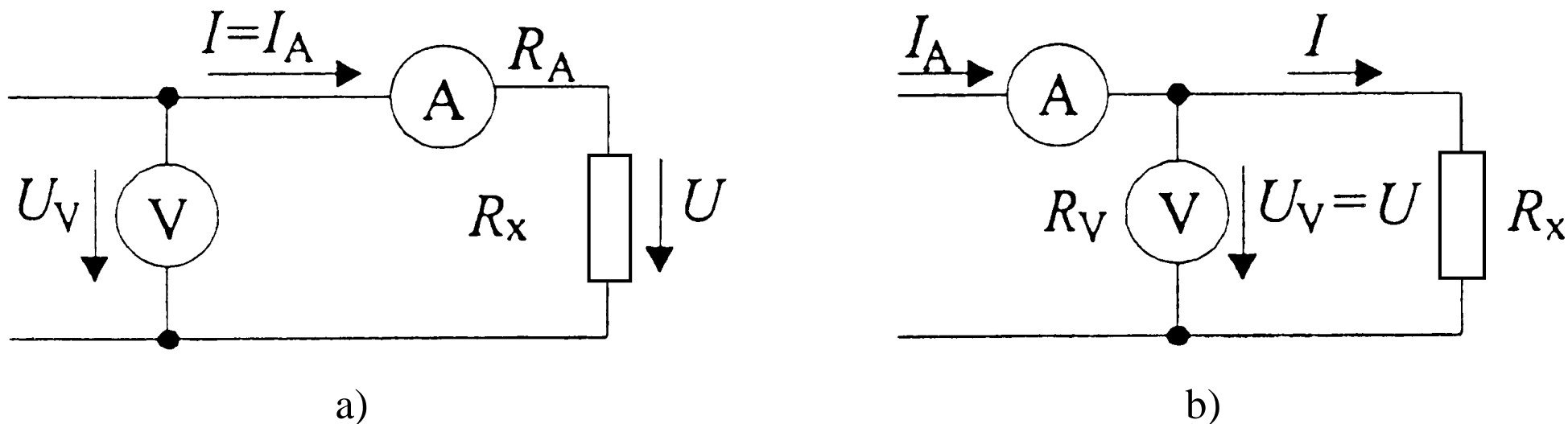
Ta metoda se uporablja za **merjenje velikih upornosti**,

- pogrešek (R_A) je zanemarljiv.

Pri **zelo velikih upornostih** moramo upoštevati **dopustno obremenitev** $I^2 R_x$.

Merilni pogrešek je odvisen od pogreška pri merjenju napetosti in toka.





Slika 1.9 U - I metoda merjenja upornosti

Varianta b:

- napetost je pravilna: $U_V = U$,
- tok je prevelik: $I_A = I + U_V / R_V$,

Razmerje je **manjše** kot R_x :
$$\frac{U_V}{I_A} = \frac{R_x R_V}{R_x + R_V}$$





$$\frac{U_V}{I_A} = \frac{R_x R_V}{R_x + R_V}$$

- če upoštevamo samo U_V in I_A , je **sistematični pogrešek**:

$$R_i = \frac{U_V}{I_A} \Rightarrow e = \frac{U_V/I_A - R_x}{R_x} = -\frac{R_x}{R_x + R_V} \approx -\frac{R_x}{R_V}$$

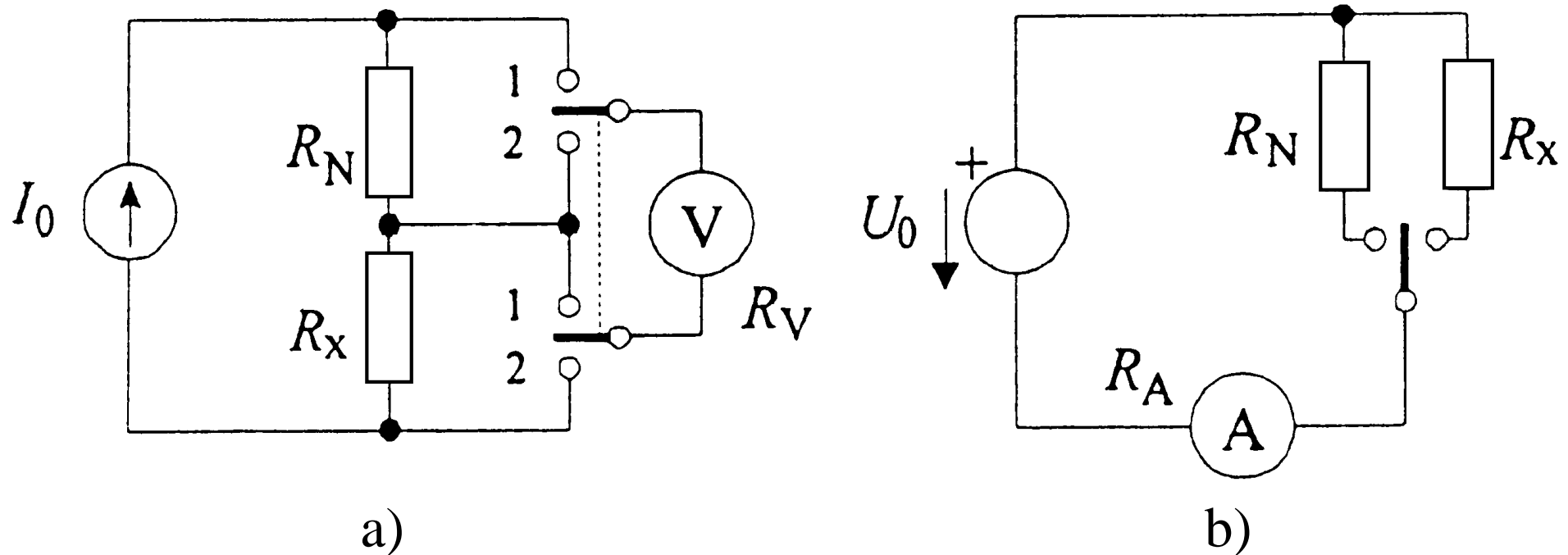
Ta metoda se uporablja **za merjenje majhnih upornosti**,

- Upornost R_V je praviloma dosti večja od R_x .
- Pri **zelo majhnih upornostih** moramo upoštevati **dopustno obremenitev** U^2/R_x .

Merilni pogrešek je odvisen od pogreška pri merjenju napetosti in toka.



1.1.2.3 Primerjalna metoda merjenja upornosti



Slika 1.10 Napetostna in tokovna primerjalna metoda

Napetostna primerjalna metoda (a)

- Položaj 1-1:
$$U_N = I_0 \frac{R_N R_V}{R_N + R_V},$$
- Položaj 2-2:
$$U_x = I_0 \frac{R_x R_V}{R_x + R_V}.$$





Pri konstantnem I_0 :
$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} \cdot \frac{1}{1 + (1 - U_x/U_N) R_N/R_V}$$

Če uporabimo izraz $R_i = R_N \frac{U_x}{U_N}$, 'pridelamo' sistematični pogrešek:

$$e = \frac{R_i - R_x}{R_x} \quad \text{oz.} \quad e = \frac{R_N}{R_V} \left(1 - \frac{U_x}{U_N} \right)$$

$$\text{oz.} \quad e = \frac{R_N - R_x}{R_x + R_V} = \frac{R_N - R_x}{R_V}$$

- odločilno je razmerje razlike upornosti $R_N - R_x$ proti upornosti voltmetra R_V .
 - primerna za **merjenje majhnih upornosti**.





Merilni pogrešek napetostne primerjalne metode

Če izvedemo primerjavo **z istim voltmetrom**, lastni **pogrešek E ne vpliva na negotovost**, kadar sta upornosti (napetosti) blizu skupaj:

$$R_N \approx R_x \quad \Leftrightarrow \quad U_x / U_N - 1 \approx 0,01$$

Pogreška voltmetra E ne poznamo, vendar se v kvocientu njegov vpliv izloči:

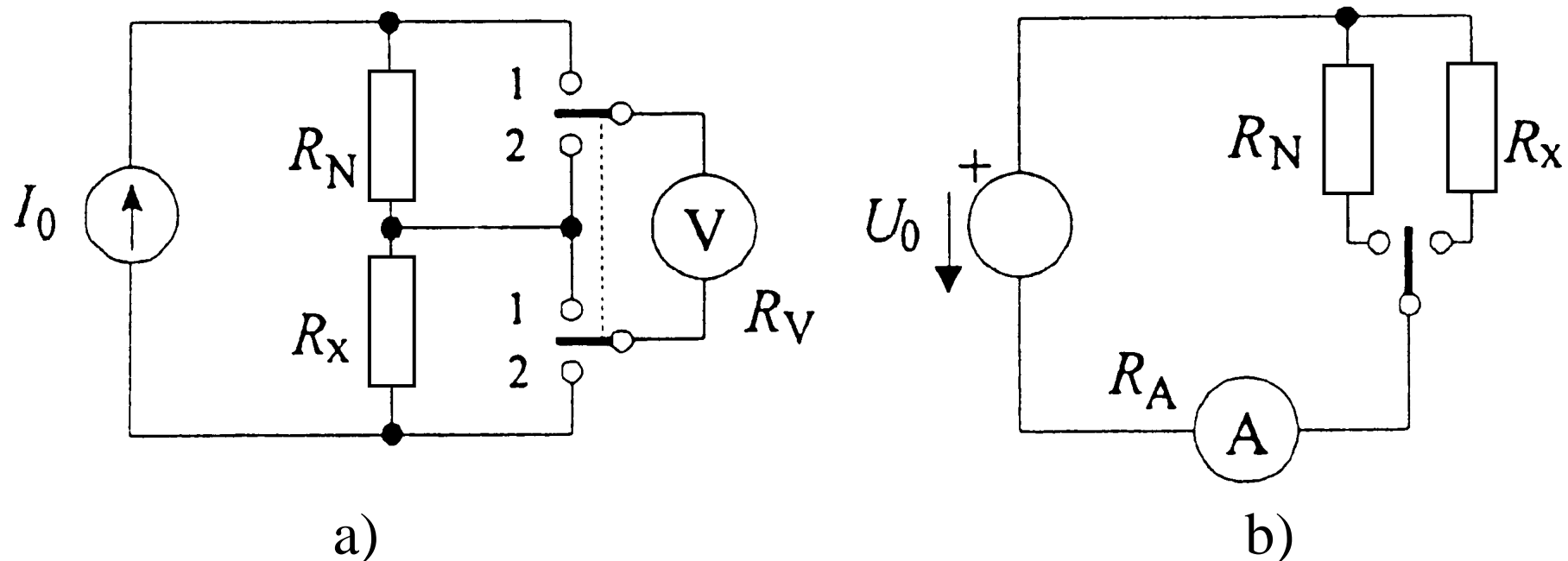
$$R_i = R_N \frac{U_x - E}{U_N - E} = R_N \frac{U_x}{U_N} \cdot \frac{1 - E/U_x}{1 - E/U_N} \approx R_N \frac{U_x}{U_N}$$

Primer: $U_x = 1,025 \text{ V}$ in $U_N = 1,018 \text{ V}$, $E = 0,015 \text{ V}$

$$\frac{U_x - E}{U_N - E} = \frac{1,025 \text{ V} - 0,015 \text{ V}}{1,018 \text{ V} - 0,015 \text{ V}} = 1,0070$$

$$\frac{U_x}{U_N} = \frac{1,025 \text{ V}}{1,018 \text{ V}} = 1,0069 \quad - \text{ samo za } 0,01\% \text{ manj!} \quad \Leftrightarrow \quad e = 1,5\%$$





Slika 1.10 Napetostna in tokovna primerjalna metoda

Tokovna primerjalna metoda (b)

- čez upor R_N teče tok:
$$I_N = \frac{U_0}{R_N + R_A}$$
- čez upor R_x teče tok:
$$I_x = \frac{U_0}{R_x + R_A}$$



Pri **konstantni napetosti** U_0 :
$$R_x = R_N \frac{I_N}{I_x} \left[1 + \frac{R_A}{R_N} \left(1 - \frac{I_x}{I_N} \right) \right]$$

Če uporabimo izraz:
$$R_i = R_N \frac{I_N}{I_x},$$

- ‘pridelamo’ sistematični pogrešek:

$$e = \frac{G_x - G_N}{G_A + G_N} \approx \frac{G_x - G_N}{G_A}$$

Primerjanje je tem bolj točno, čim bliže sta si merjeni veličini!

Če je etalon R_N spremenljiv in vzpostavimo $I_x = I_N$, se metoda spremeni v **zamenjalno** (R_A nepomembna)!





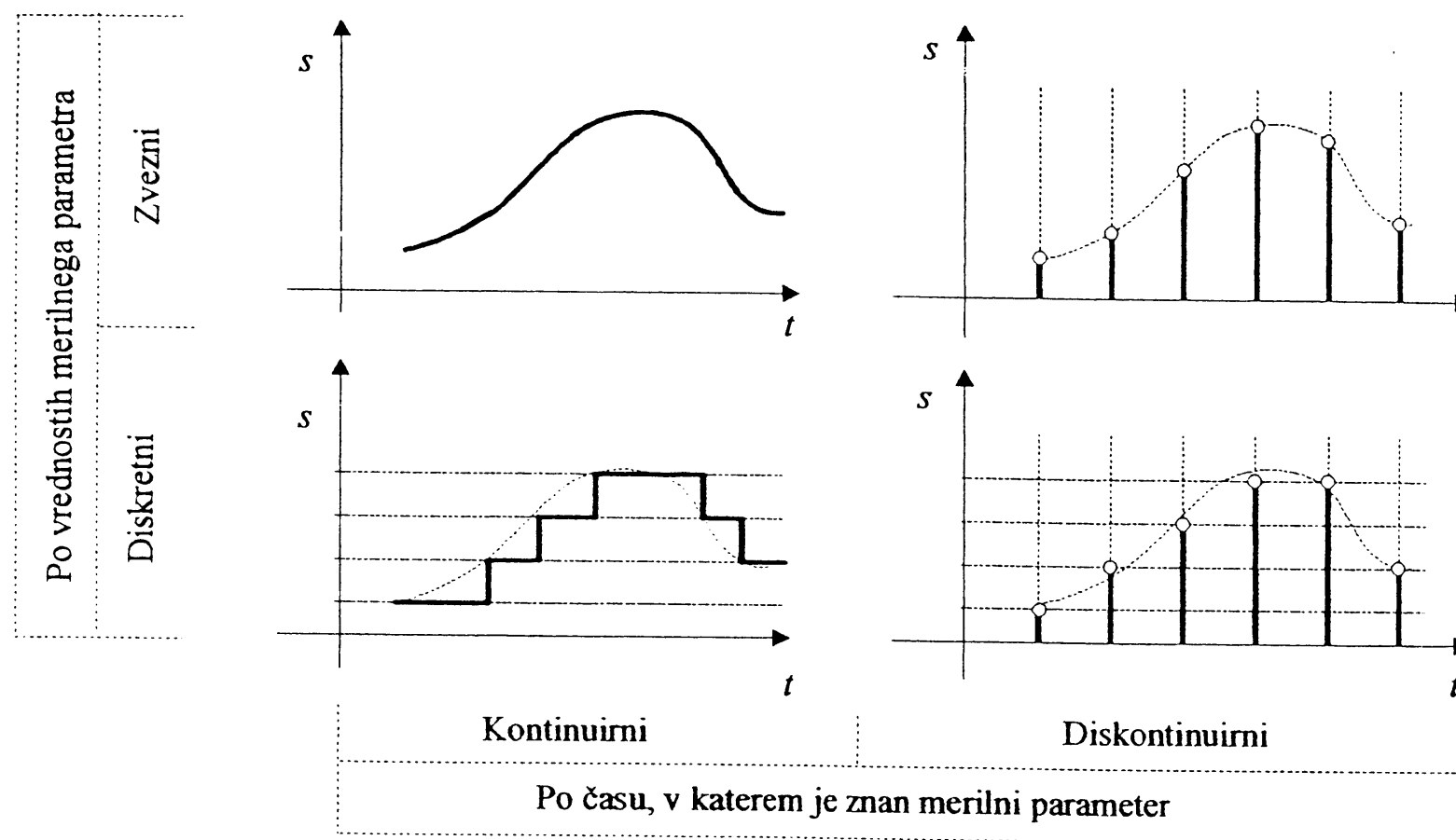
1.1.3 Merilni postopek

- Ločimo **analogni** in **digitalni** del merilnega postopka.
 - Če se fizikalne veličine **spreminjajo zvezno** – pri majhni spremembi časa se tudi veličina malo spremeni – imamo opravka z **analognim** postopkom.
 - Značilno za **predležje** pred **Analogno-Digitalno** pretvorbo.
 - Če prave vrednosti ne pripadajo **realnim številom** temveč naravnim (npr. štetje) in to v **diskretnih časovnih trenutkih** – imamo opravka z **digitalnim** postopkom.
 - Značilno za vsako **kvantizacijo** oziroma **določanje številske vrdnosti**.



1.1.4 Merilni signal

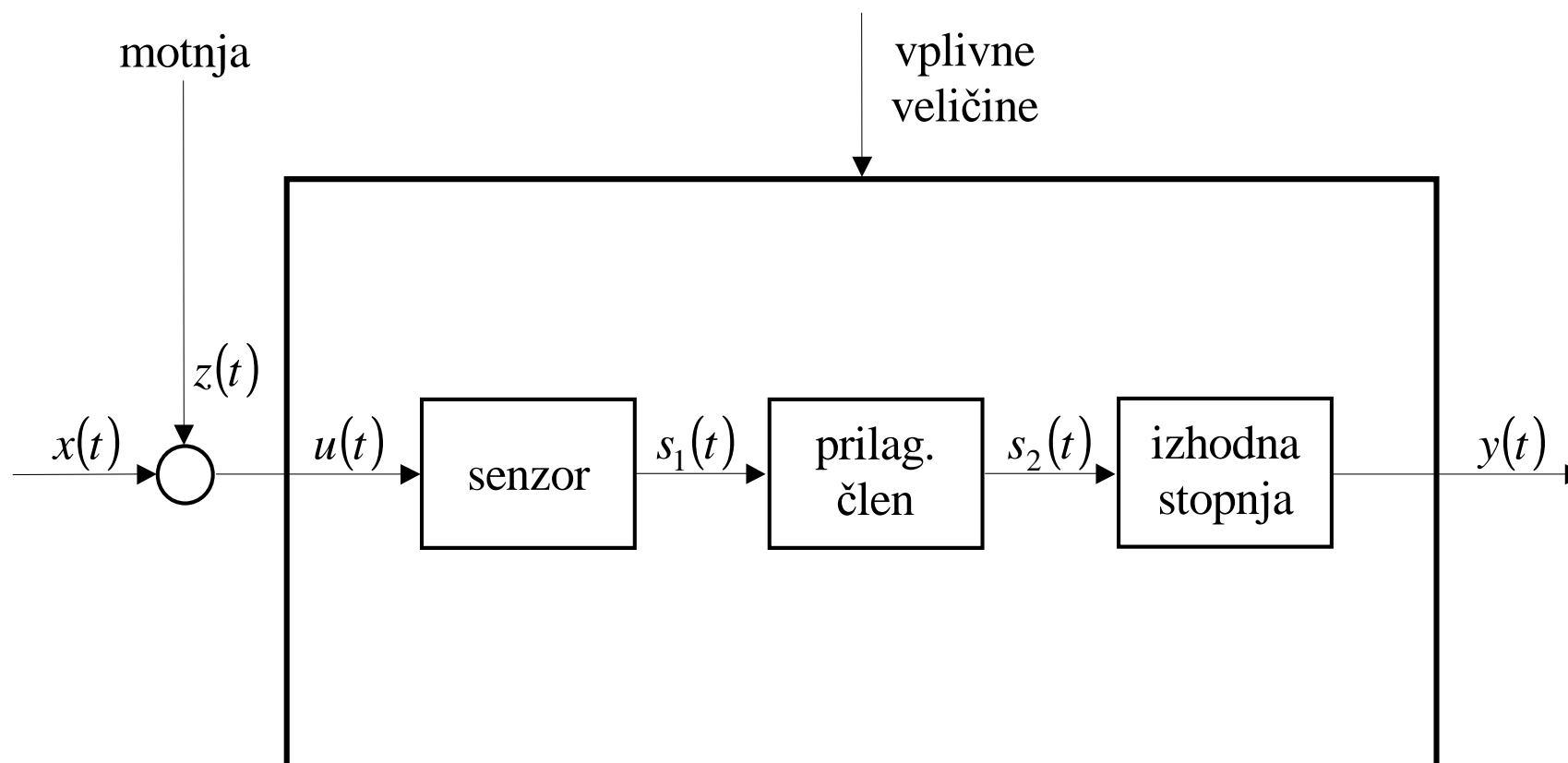
Nosilec informacije je **merilni signal** – časovni potek fizikalne veličine, ki odslikava merjeno veličino.



Slika 1.11 Štiri osnovne vrste merilnih signalov



1.1.5 Merilna naprava

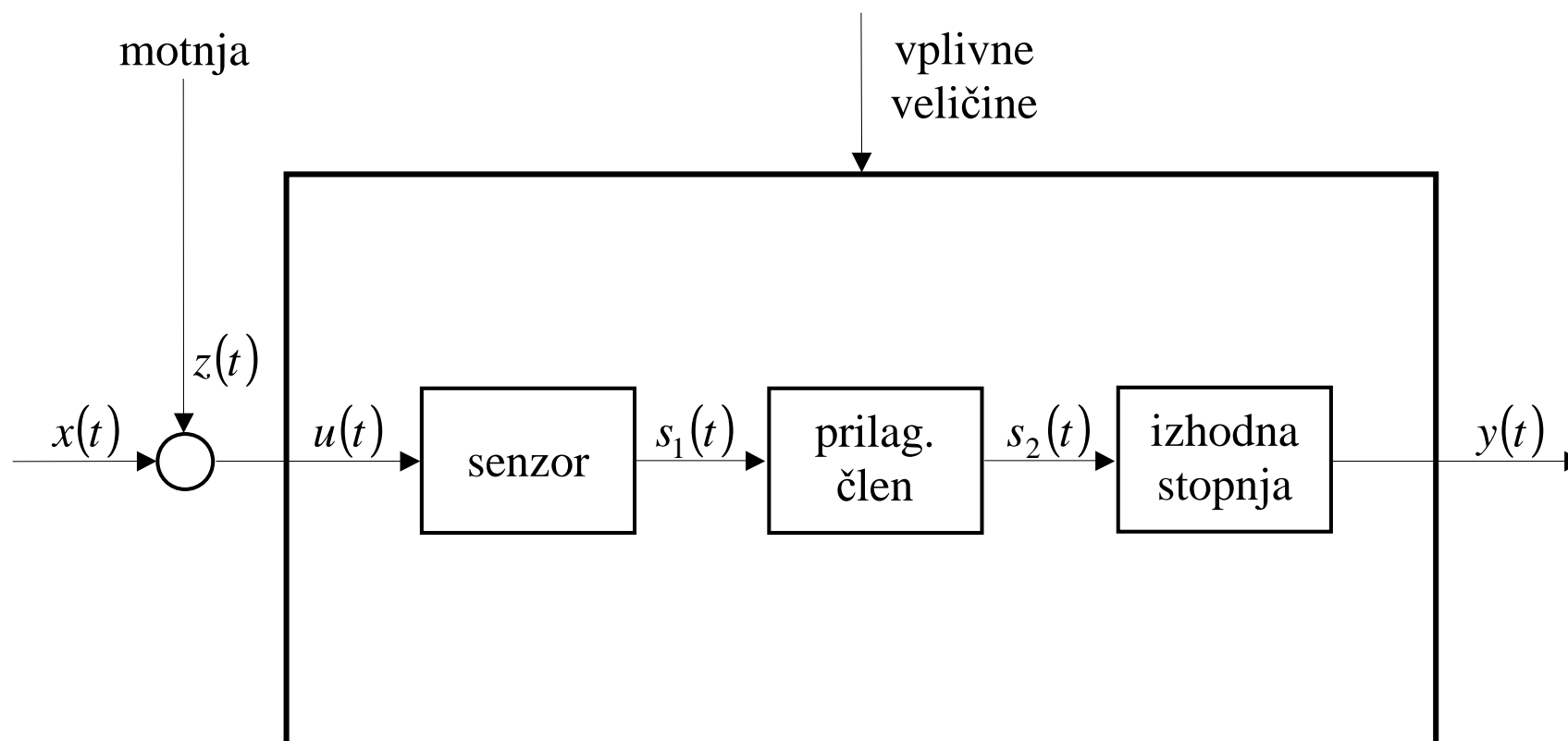


Slika 1.12 Blokovna shema **merilne naprave**

Trije poglavitni **merilni členi**:

- **Senzor** (zaznavalo), ki zaznava merjeno veličino,
- **Prilagoditveni člen** (ojačenje, slabljenje, preoblikovanje,...),
- **Izhodna stopnja** (informacija postane zaznavna našim čutilom, za prenos,.





Merilni signal:

- vhodna veličina,
- vmesne veličine,
- izhodna veličina.
- napetost,
- tok,
- upornost,
- kapacitivnost,
- električno polje, ...

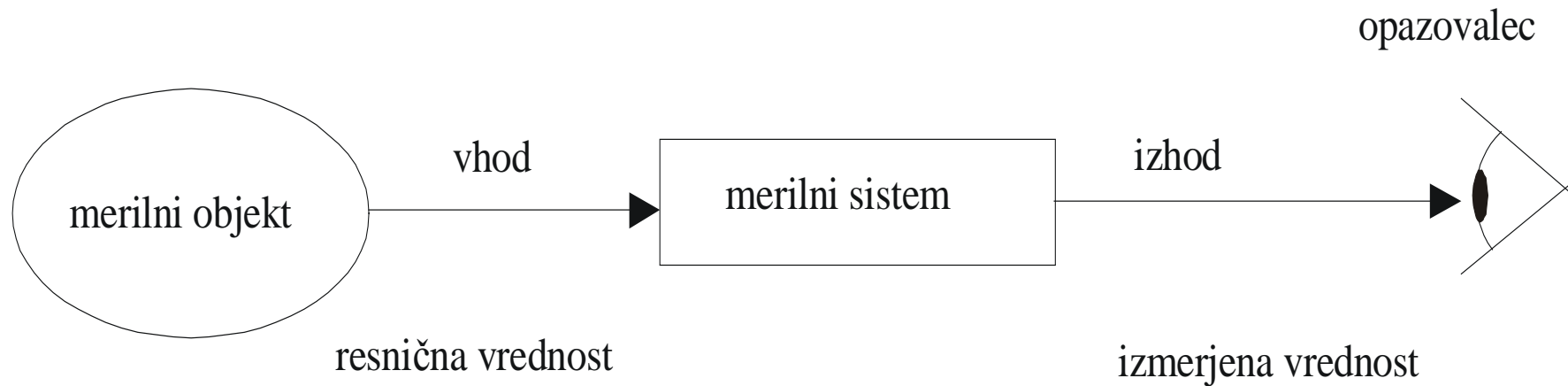
Informacijski parameter:

- frekvenca,
- amplituda,
- fazni kot,
- srednja vrednost, ..





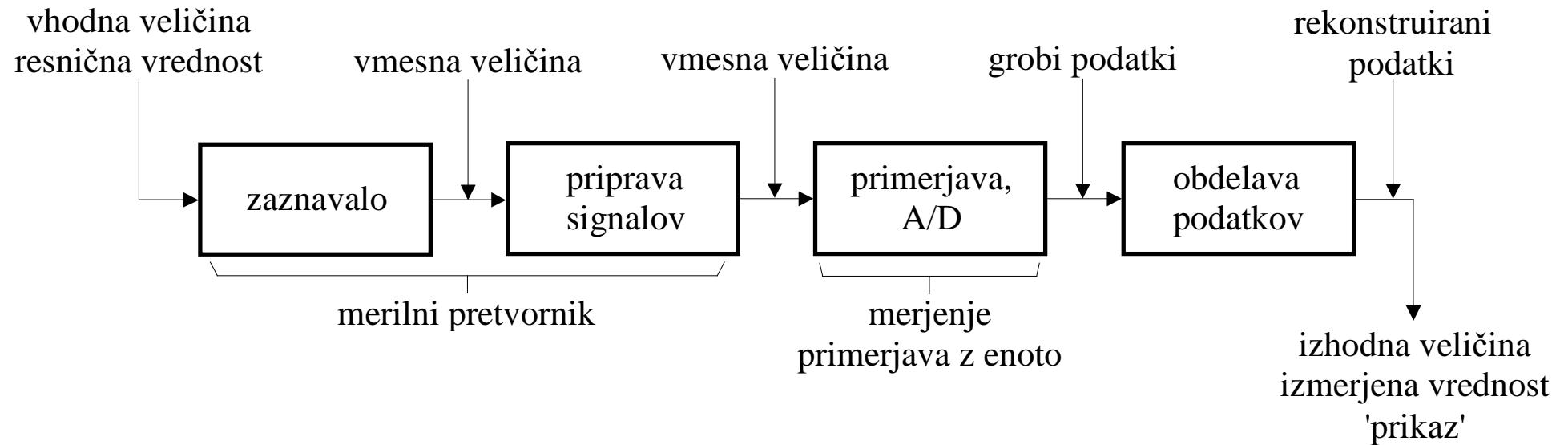
1.1.6 Merilni sistem



Slika 1.13 Vloga merilnega sistema pri merjenju (klasični pogled)

Fizikalno veličino merilnega objekta privedemo na vhod merilnega sistema, nakar ta izmeri veličino in na izhodu poda **izmerjeno vrednost**, ki se **razlikuje od resnične vrednosti**.



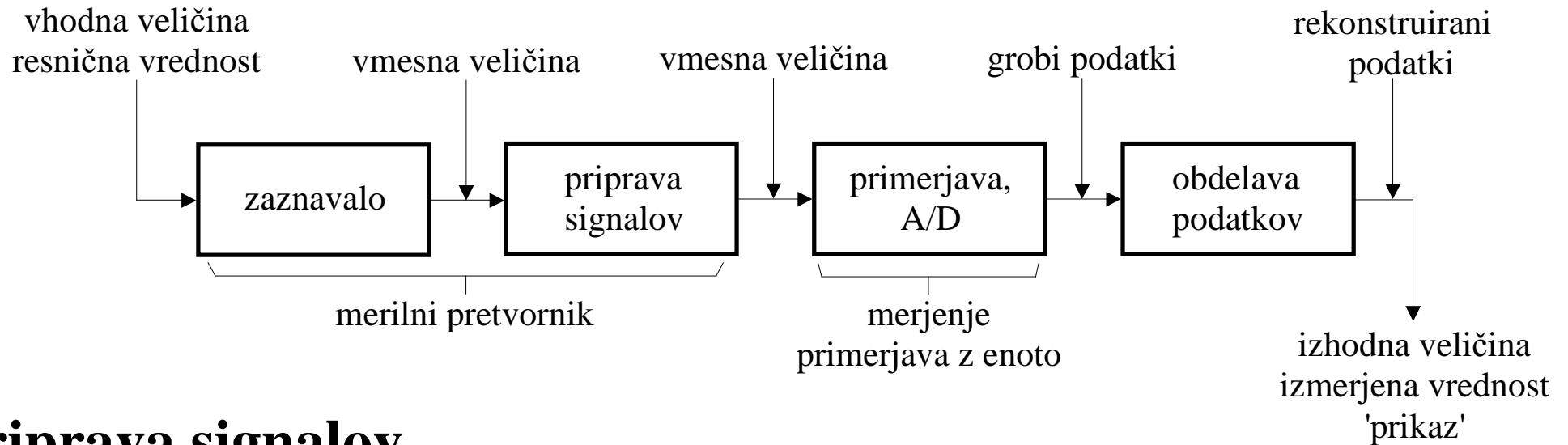


Slika 1.14 Zgradba merilnega sistema

Senzor

Vhodni signal vstopa v **merilni pretvornik**, ki je sestavljen iz **zaznavala** (tudi tipalo, čutilo ali **senzor**) in faze **priprave signalov** na obdelavo.



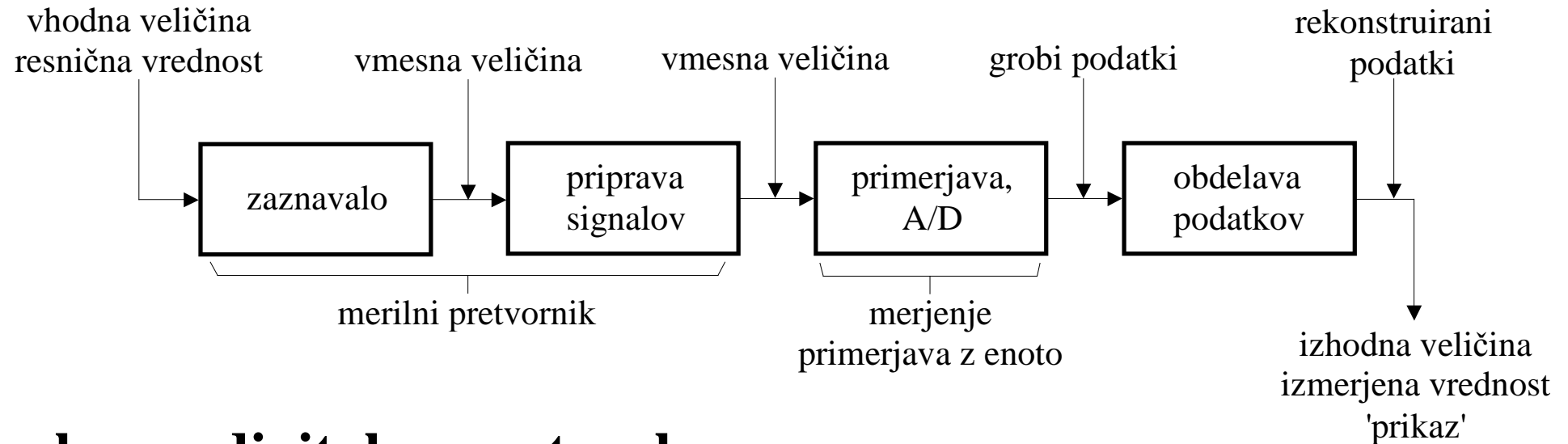


Priprava signalov

Vhodno veličino je potrebno pred primerjavo z enoto:

- **pretvoriti** v drugo obliko, ki jo bo lažje obdelati, na primer **napetost, tok**
 - npr.: napetost termočlena je sorazmerna temperaturi.
- **ojačiti, preoblikovati, pretvoriti** v veličino, ki je uporabna za neposredno primerjanje.



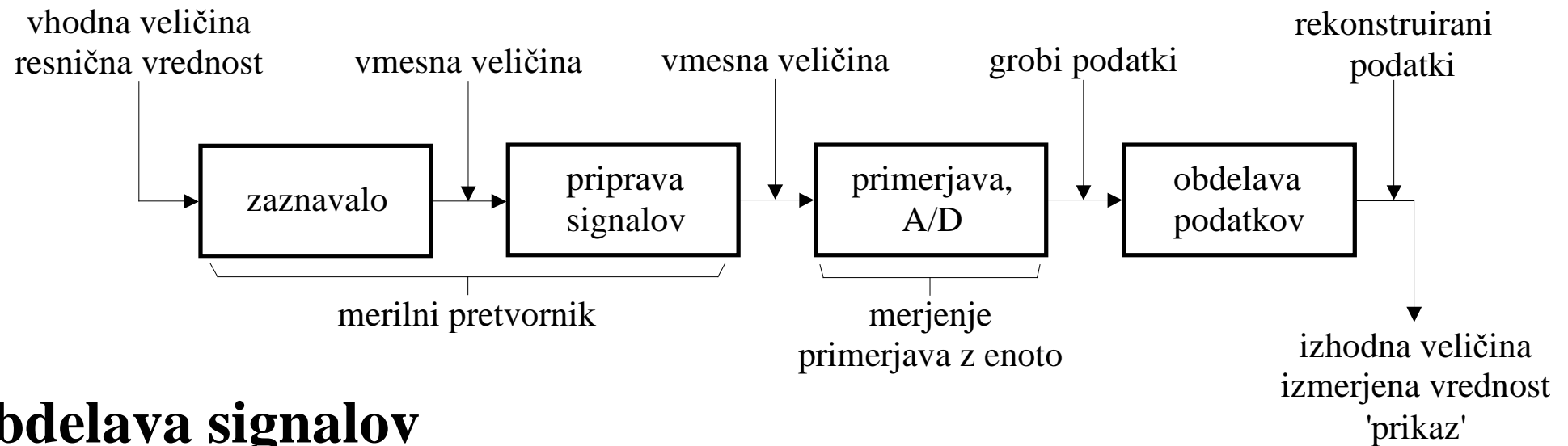


Analogno-digitalna pretvorba

Za merilnim pretvornikom je faza **primerjanja** merjene veličine **z enoto**:

- **merjenje v ožjem smislu!**
 - izhod so **grobi podatki**, iz katerih rekonstruiramo merjeno veličino.





Obdelava signalov

Za merilnim pretvornikom je faza **obdelave signalov**:

- opravi funkcijo **rekonstrukcije** in različne **matematične obdelave** (npr. računanje povprečne vrednosti, integriranje, odvajanje ipd.)
- **interpretacija** podatkov,
- **prikaz** podatkov,
- **prenos** podatkov.



1.1.7 Digitalni merilni postopek oz. digitalizacija merilnega signala

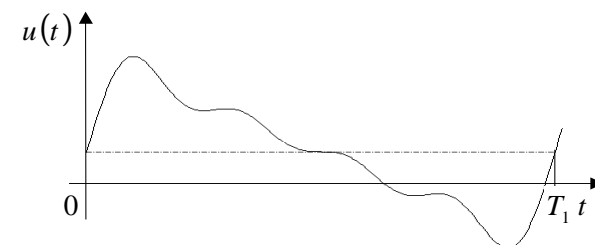


Digitalizacija predstavlja določanje vrednosti signala **v diskretnih časovnih točkah s končno ločljivostjo.**

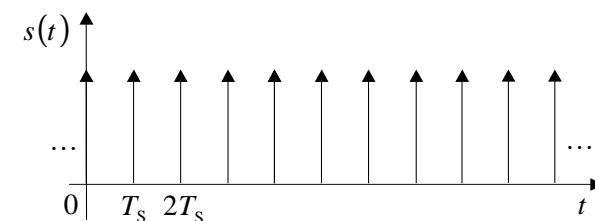
V grobem jo sestavljajo **tri operacije:**

a. **časovno vzorčenje** analognega signala,

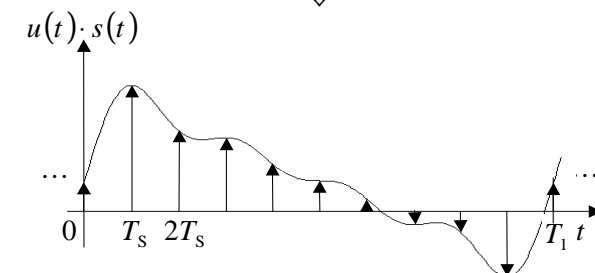
- vrednost signala znana le v določenih trenutkih (ponavadi enakomerno razmaknjeni),



× – produkt



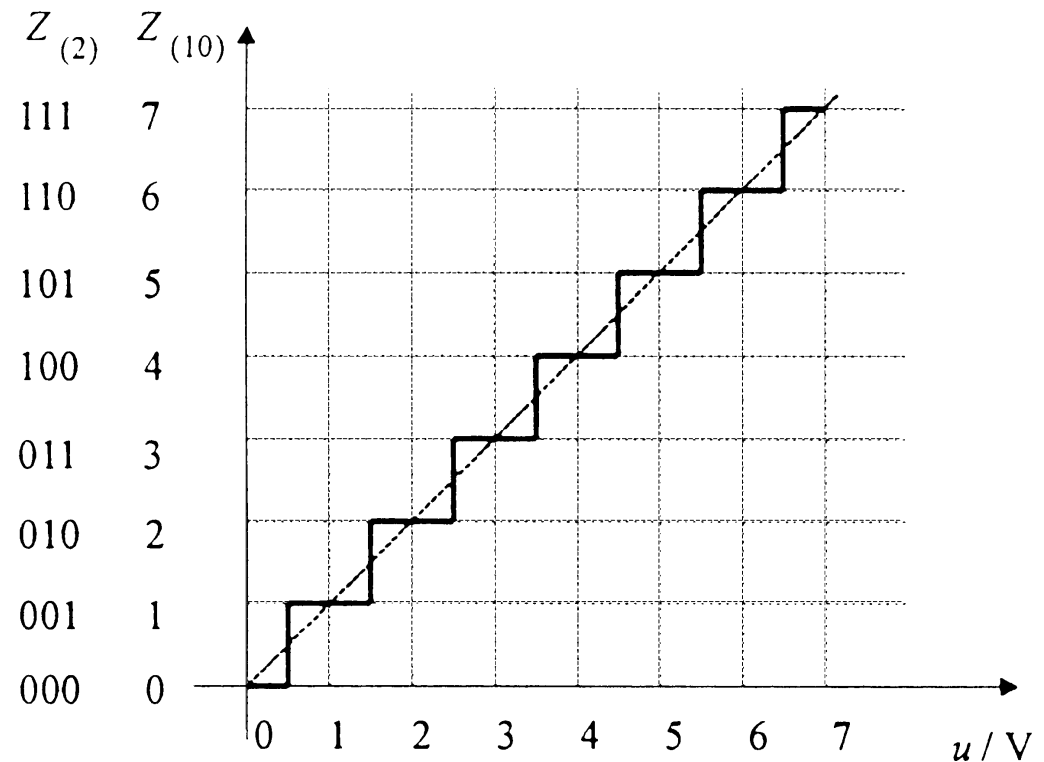
⇓





b. **kvantizacija** analogne vrednosti posameznega vzorca,

- celotno merilno območje razdelimo na končno število podobmočij – **kvant (korak)** kvantizacije;



Slika 1.15 Kvantizacijska karakteristika 3-bitnega ADP

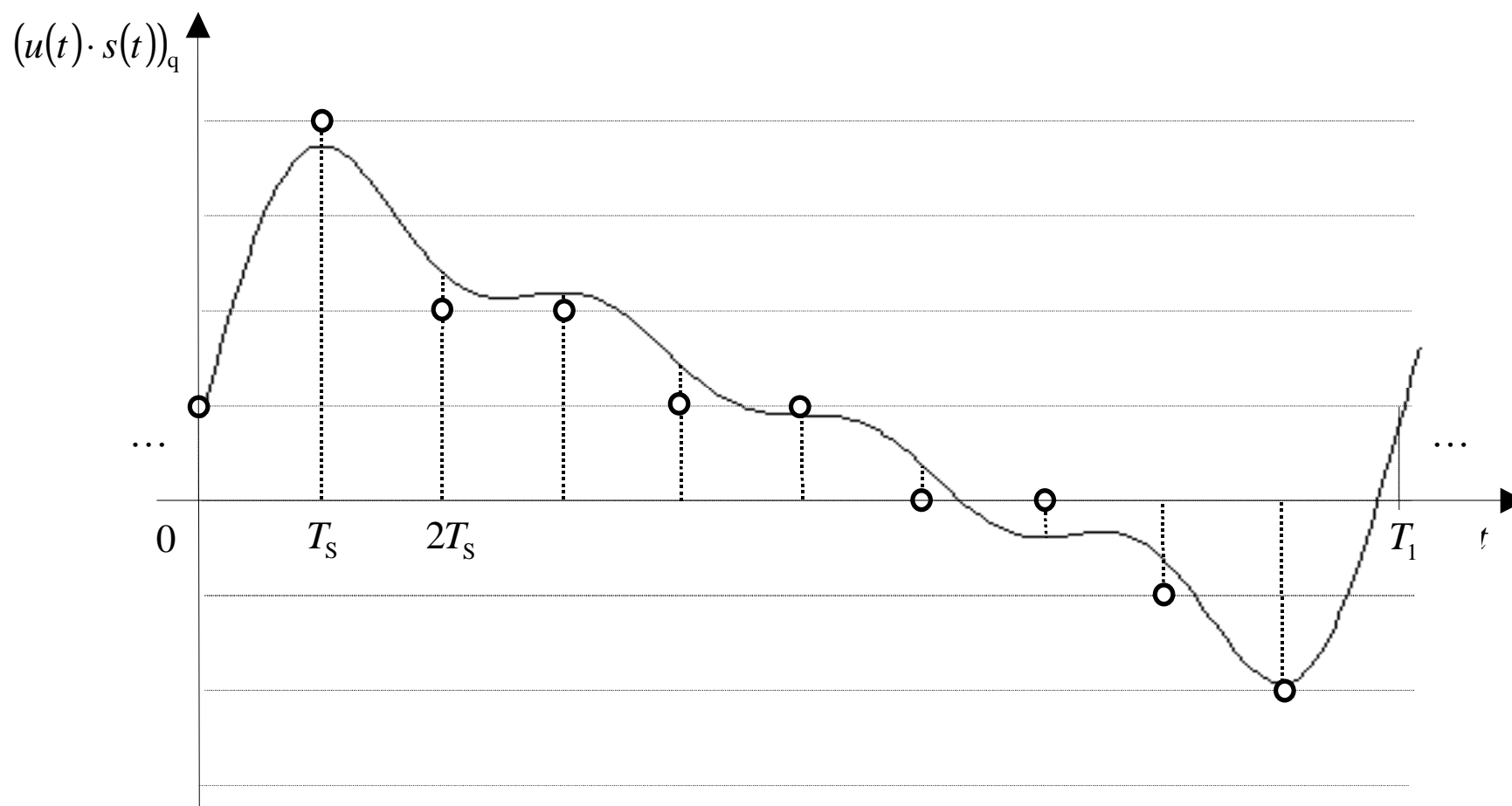
c. **kodiranje** kvantiziranih analognih vrednosti.

- različni številski sistemi (decimalna **koda**, BCDkoda, ..





Rezultat digitalizacije:



Slika 1.16 Vzorčenje in kvantizacija





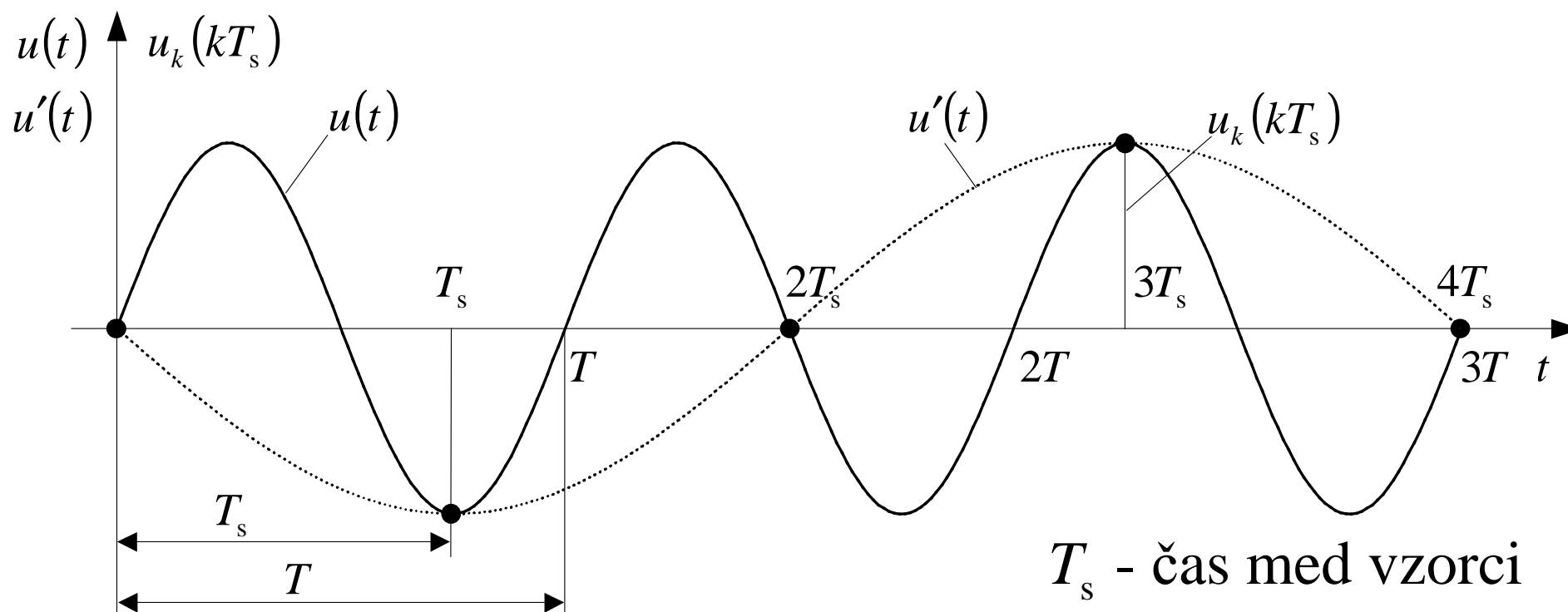
Pri digitalizaciji signala nastopi več pogoškov:

- **navideznost** zaradi prenizke frekvence vzorčenja,
 - pogrešek **prekrivanja**,
- problem **ne-koherentnega** vzorčenja,
 - **čas** merjenja **ni enak mnogokratniku** periode opazovanega signala,
- **ločljivost** v odvisnosti od **časa merjenja**,
- **kvantizacijska ločljivost**
- itd.





Navideznost zaradi prenizke frekvence vzorčenja:



Slika 1.17 Pogrešek zaradi prenizke frekvence vzorčenja

Rekonstruirani signal $u'(t)$ ima drugo frekvenco kot merjeni:

- primer: $T = 333\mu\text{s}$, $f = 3\text{kHz}$; $T_s = 250\mu\text{s}$, $f_s = 4\text{kHz}$
 $f' = 1\text{kHz}$





1.1.7.1 Teorem vzorčenja

(Shannonov, Kotelnikov, Nyquist, ...)

Za pravilno rekonstrukcijo signala mora biti **frekvenca vzorčenja dvakrat večja od najvišje frekvence** merjenega signala:

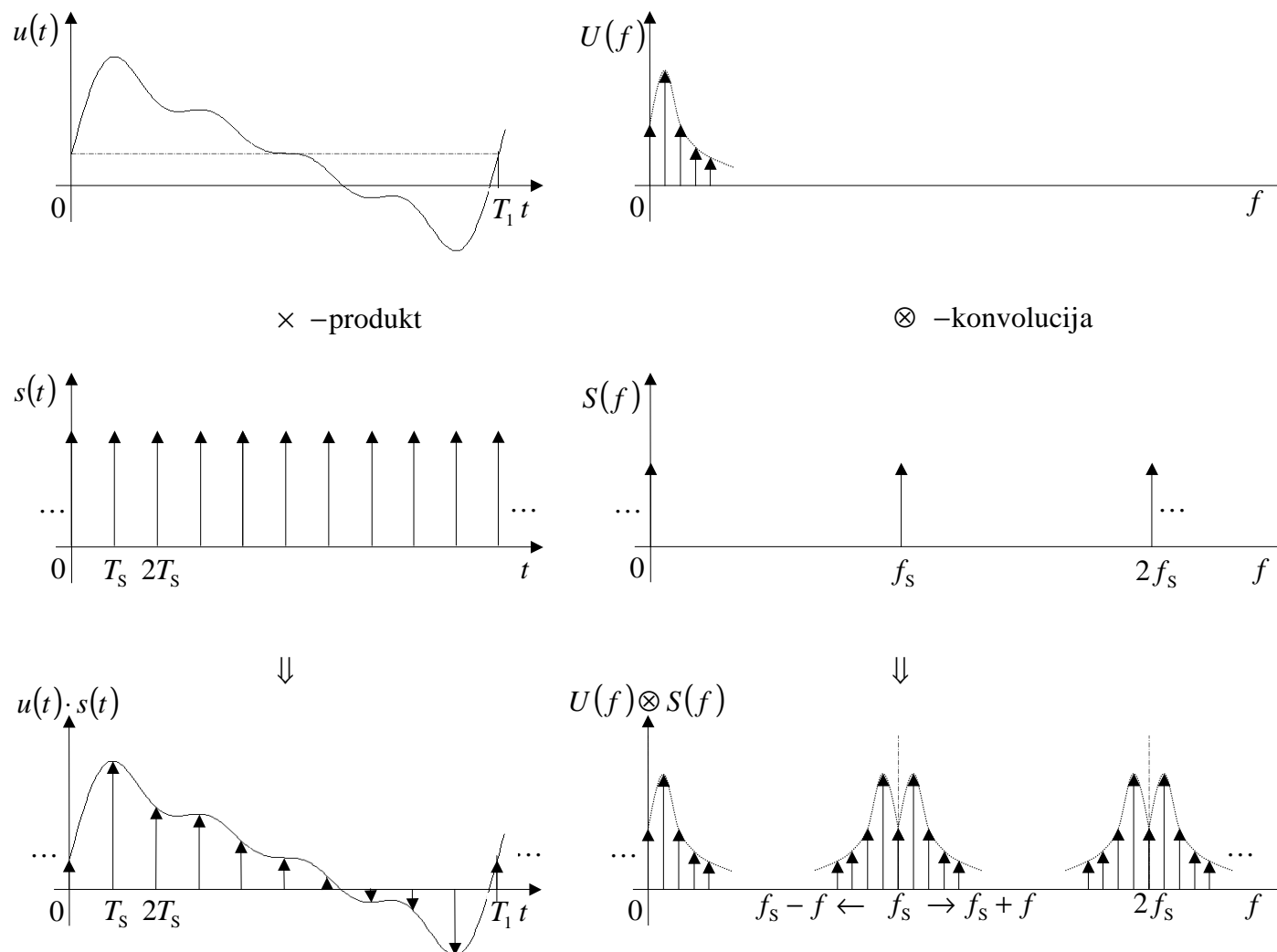
$$f_s > 2f_{\max}$$

Pogrešku se izognemo z uporabo **predvzorčevalnih filtrov** (filtri proti **navideznosti** – anti-aliasing filters), ki omejijo največjo frekvenco v signalu na polovico vzorčne frekvence – **Nyquist-ovo frekvenco**.





Vzorčenje je množenje merjenega signala $u(t)$ in vzorčevalne funkcije $s(t)$



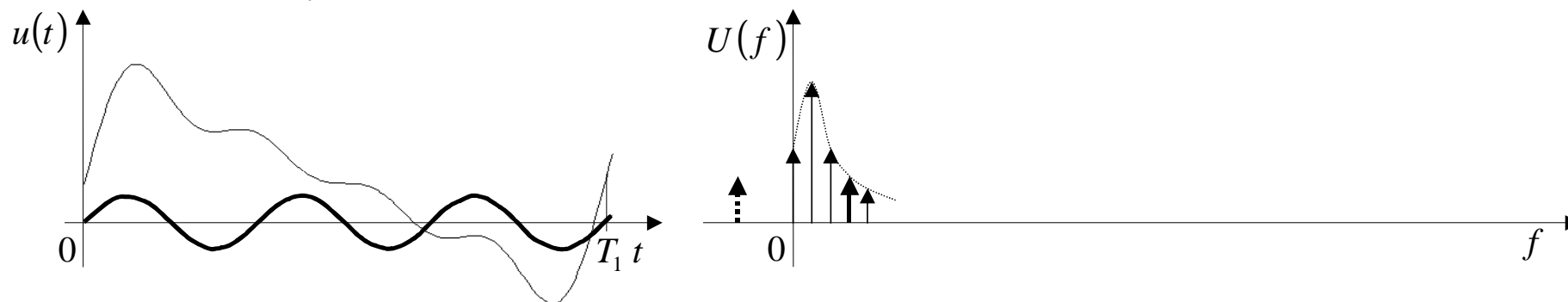
Slika 1.18 Prikaz vzorčenja v časovnem in frekvenčnem prostoru





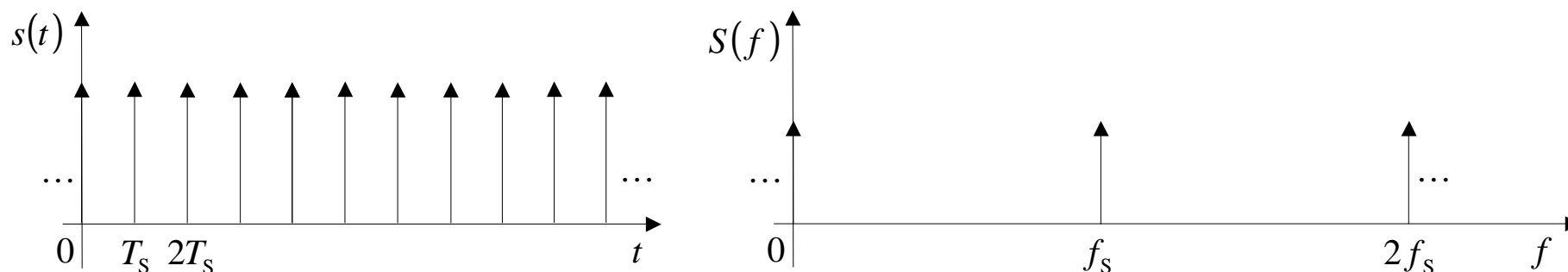
Merjeni signal naj bo omejen ($f_{\max} = Nf_1$):

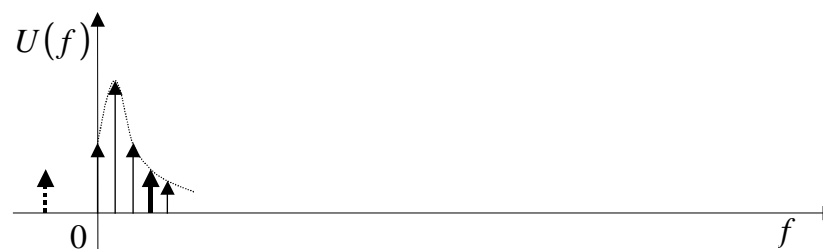
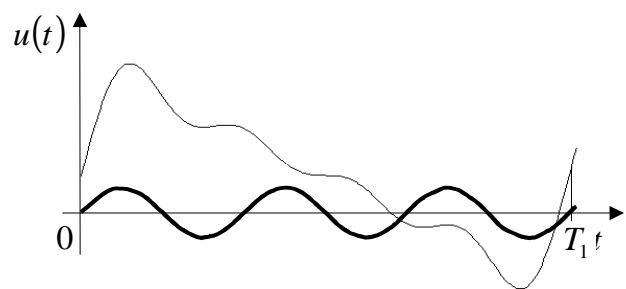
$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \sin n2\pi f_1 t \quad f_1 = 1/T_1$$



Vzorčevalna funkcija je periodična **Diracova** funkcija:

$$s(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_s) \quad \Leftrightarrow \quad S(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s) \quad f_s = 1/T_s$$

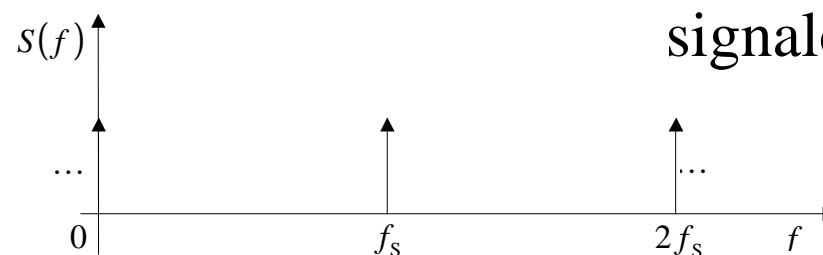
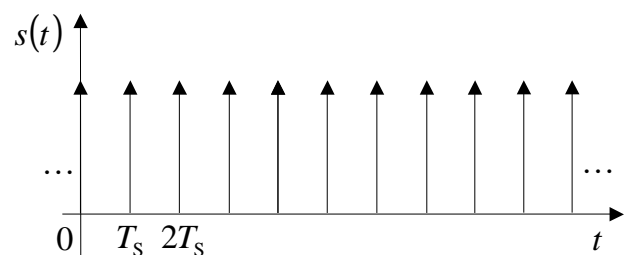




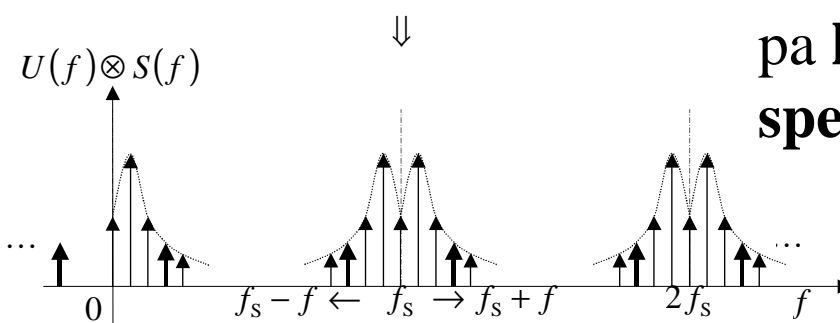
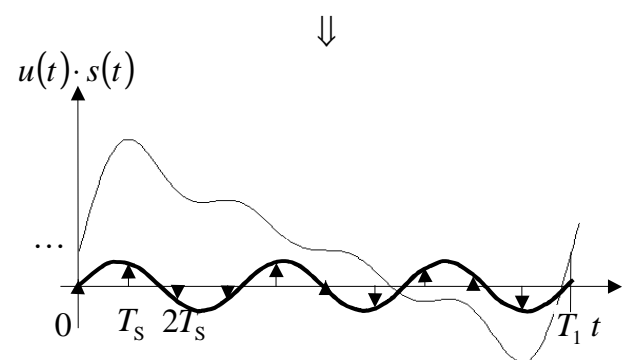
\times -produkt

\otimes -konvolucija

V časovnem prostoru je vzorčenje enako množenju signalov $u(t)$ in $s(t)$.



V frekvenčnem prostoru pa konvoluciji (oplet) spektrov obeh signalov.

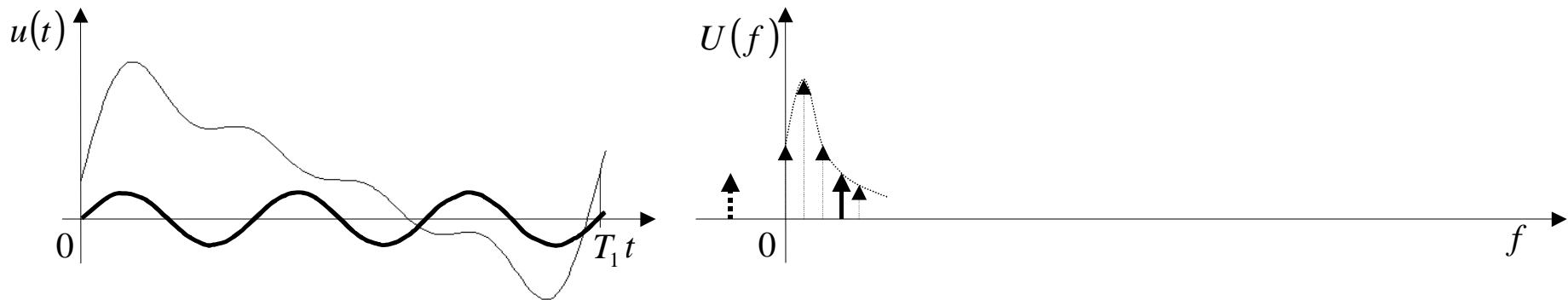


Spekter **vzorčenega - moduliranega** signala je **širši** od merjenega signala, ker se periodično ponavlja **okoli mnogokratnikov** vzorčne frekvence f_s .





- Primer: **n -ta harmonska** komponenta nf_1 (debela črta na sliki: $n = 3 \rightarrow f_3 = 3f_1$; $u(t) = \hat{u}_3 \sin 2\pi f_3 t$)



- Sinus. signal zapišemo z **Eulerjevo** formulo: $\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$

- Fourierjev par za eksp. funkcijo je: $e^{j2\pi f_3 t} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \delta(f - f_3)$

- in od tod **Fourierjev par za sinusno funkcijo:**

$$u_3(t) = \hat{u}_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} U_3(f) = \hat{u}_3 \frac{\delta(f - f_3) - \delta(f + f_3)}{2j}$$





Imamo **sinusni signal**:

$$u_3(t) = \hat{u}_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t) \quad \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \quad U_3(f) = \hat{u}_3 \frac{\delta(f - f_3) - \delta(f + f_3)}{2j}$$

in **vzorčevalno funkcijo**:

$$s(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_s) \quad \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \quad S(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s)$$

V **časovnem prostoru** je vzorčenje enako **množenju** signalov $u(t)$ in $s(t)$.

$$[u_3(t)s(t)] = \hat{u}_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t) \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_s)$$



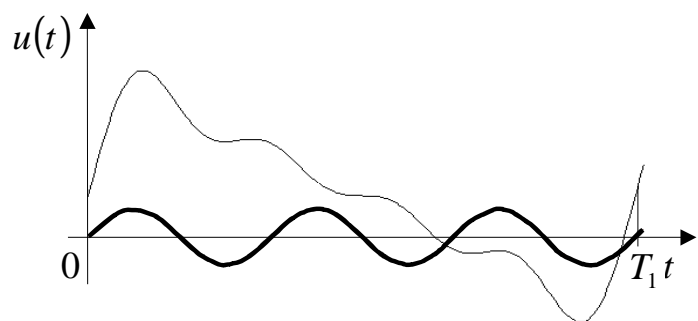


$$[u_3(t)s(t)] = \hat{u}_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t) \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_s)$$

V frekvenčnem prostoru pa konvoluciji (oplet) spektrov obeh signalov.

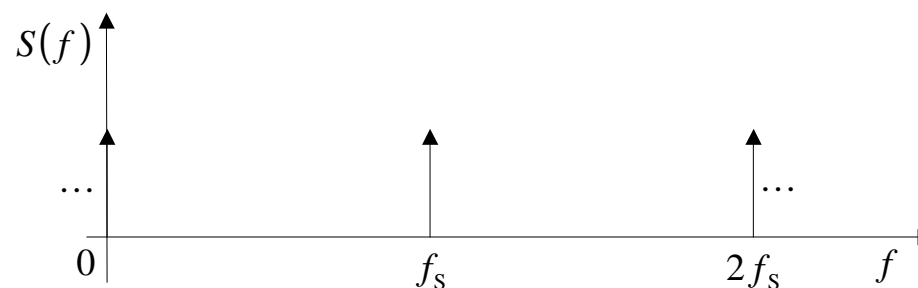
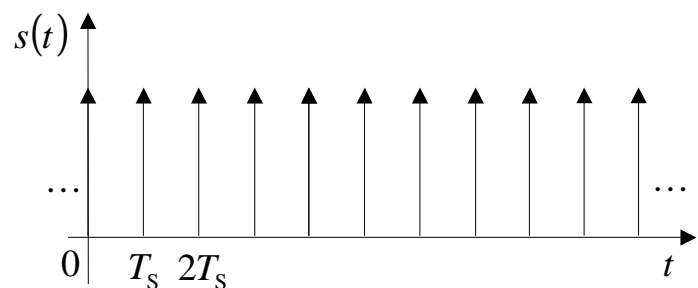
$$\begin{aligned} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} F[u(t)_3 s(t)] &= U_3(f) \otimes S(f) = \\ &= \hat{u}_3 \frac{\delta(f - f_3) - \delta(f + f_3)}{2j} \otimes \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s) \\ &= \frac{\hat{u}_3}{2jT_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(kf_s - f_3) - \delta(kf_s + f_3) \\ &= K \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(kf_s - f_3) - \delta(kf_s + f_3) \end{aligned}$$





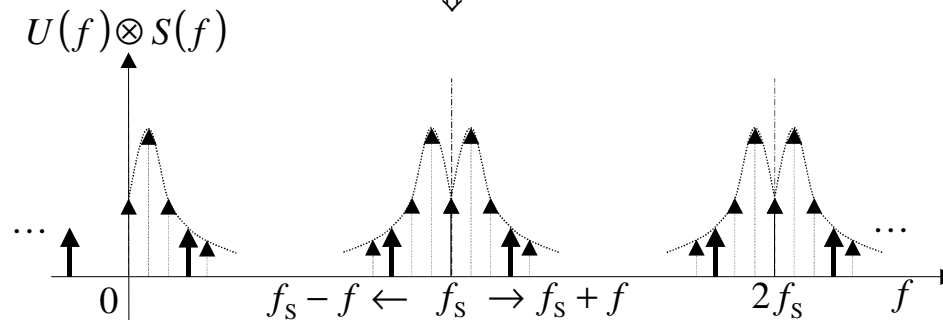
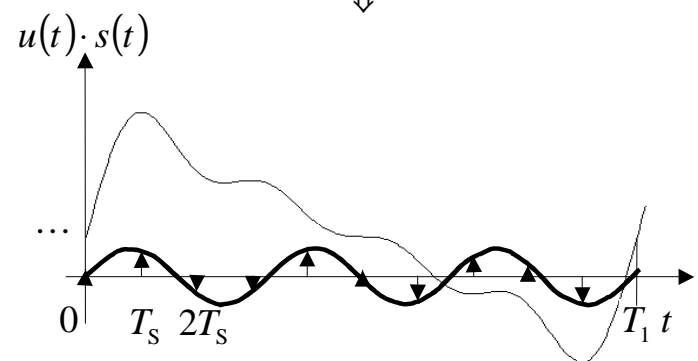
\times -produkt

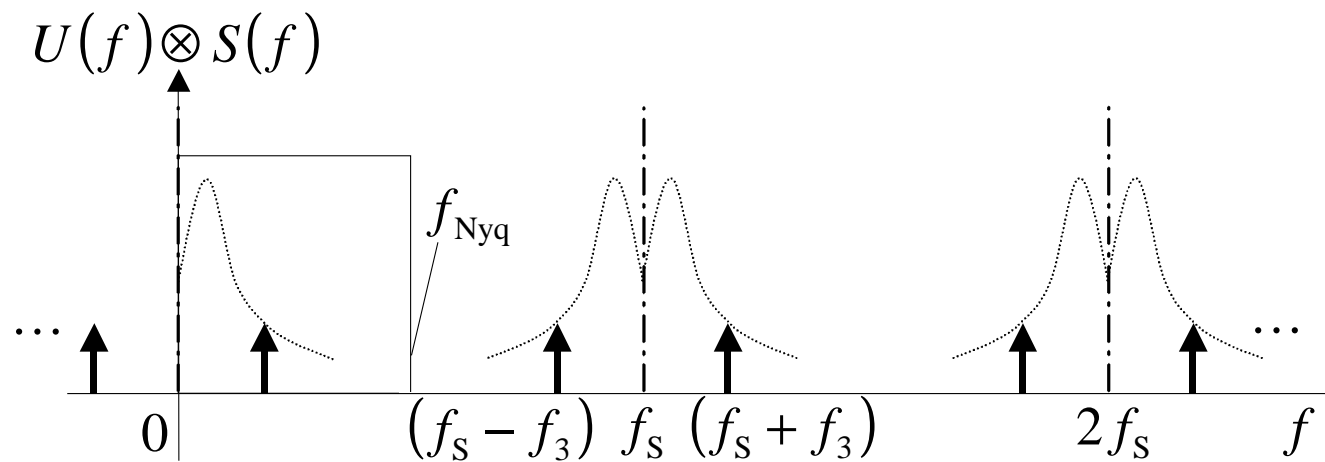
\otimes -konvolucija



\Downarrow

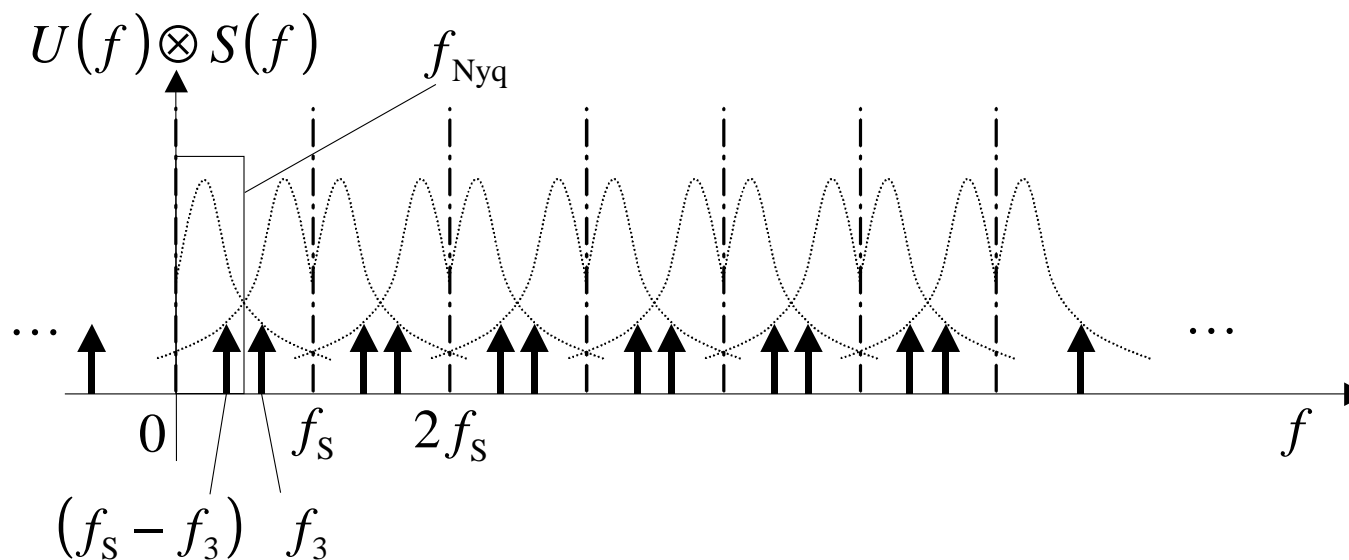
\Downarrow





Ker sega **spekter** v neskončnost in se **ponavlja**, je za pravilno rekonstrukcijo uporaben le **začetni del** spektra (do Nyquistove frekvence $f_{\text{Nyq}} = f_s/2$).

- **ne sme se prekrivati** z ostalimi delnimi spektri,
- **pogrešek prekrivanj (aliasing)**.





Primer: $f = 3\text{ kHz}$, $f_s = 4\text{ kHz}$

- spekter vzorčenega signala $K \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(kf_s - nf_1) - \delta(kf_s + nf_1)$:

nf_1		\rightarrow	3 kHz
$f_s - nf_1$	\rightarrow	$4\text{ kHz} - 3\text{ kHz}$	\rightarrow 1 kHz
$f_s + nf_1$	\rightarrow	$4\text{ kHz} + 3\text{ kHz}$	\rightarrow 7 kHz
$2f_s - nf_1$	\rightarrow	$2 \cdot 4\text{ kHz} - 3\text{ kHz}$	\rightarrow 5 kHz
$2f_s + nf_1$	\rightarrow	$8\text{ kHz} + 3\text{ kHz}$	\rightarrow 11 kHz itn.

- do $f_s/2 = 2\text{ kHz}$ leži le 1 kHz .

Splošno lahko zapišemo, da mora spekter rekonstruiranega signala ustrezati pogoju:

$$f' = |kf_s - nf| \quad ; \quad f' \leq f_s/2 \quad l = 1, 2, \dots$$

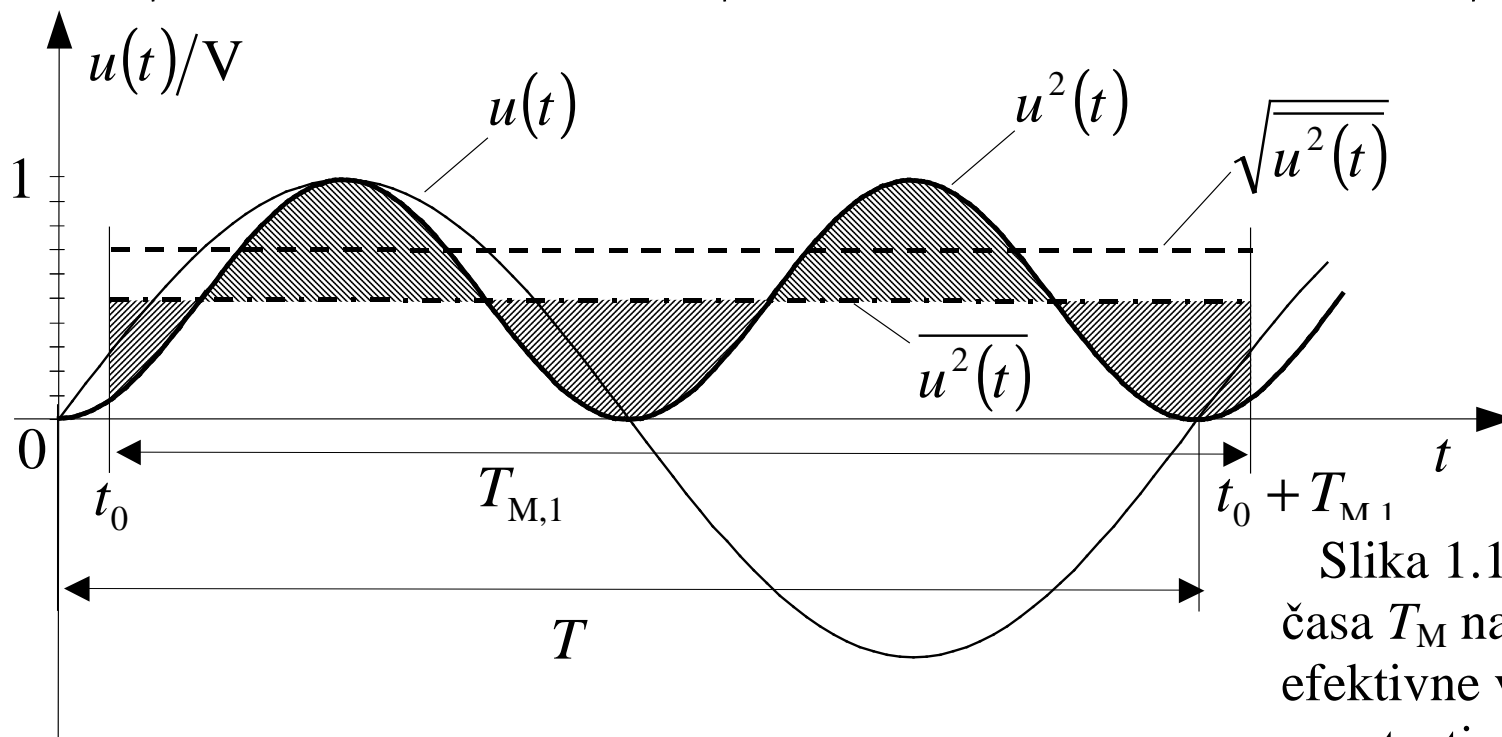




1.1.7.2 Vpliv časa merjenja (T_M) na napako merjenja efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti $u(t) = \hat{u} \sin \omega t$

- Kadar se čas merjenja ujema s periodo $T_{M,1} = T$, zapišemo:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T_{M,1}} \int_{t_0}^{t_0+T_{M,1}} u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T_{M,1}} \int_{t_0}^{t_0+T_{M,1}} \hat{u}^2 \sin^2 \omega t dt} = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{T_{M,1}} \int_{t_0}^{t_0+T_{M,1}} \sin^2 \omega t dt}$$



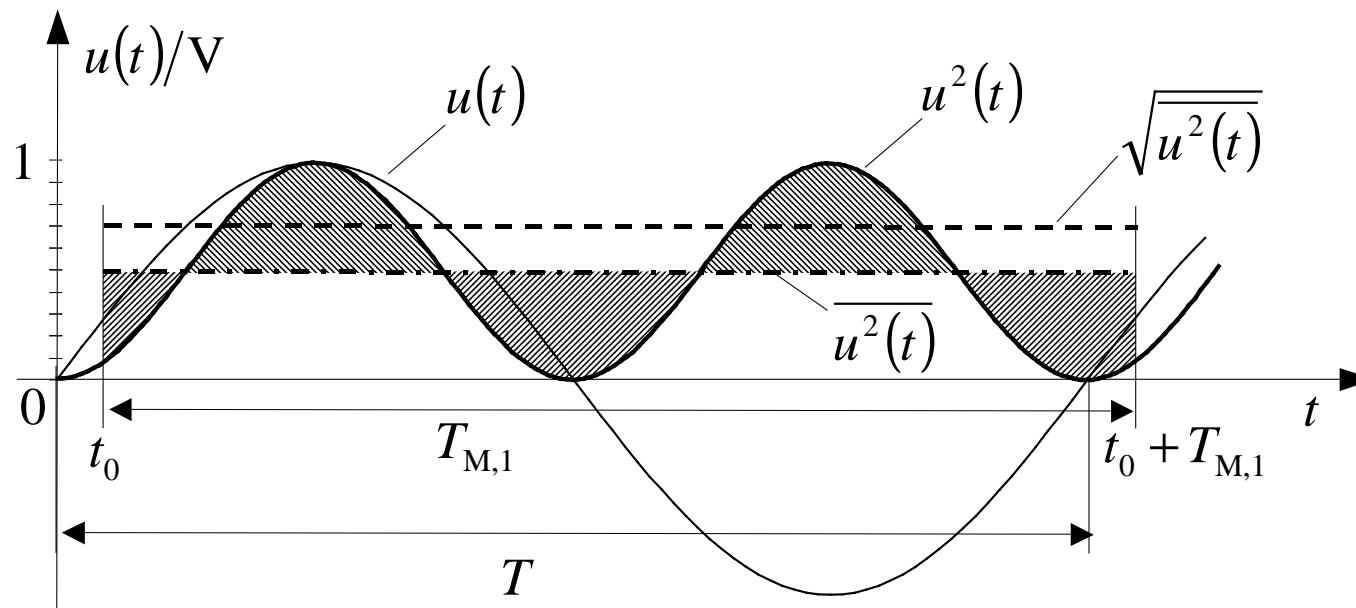
Slika 1.19 Vpliv integracijskega časa T_M na napako pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti: $u(t)/V = 1 \cdot \sin \omega t$; $T_M = T$





- Uporabimo izraz $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$ in dobimo:

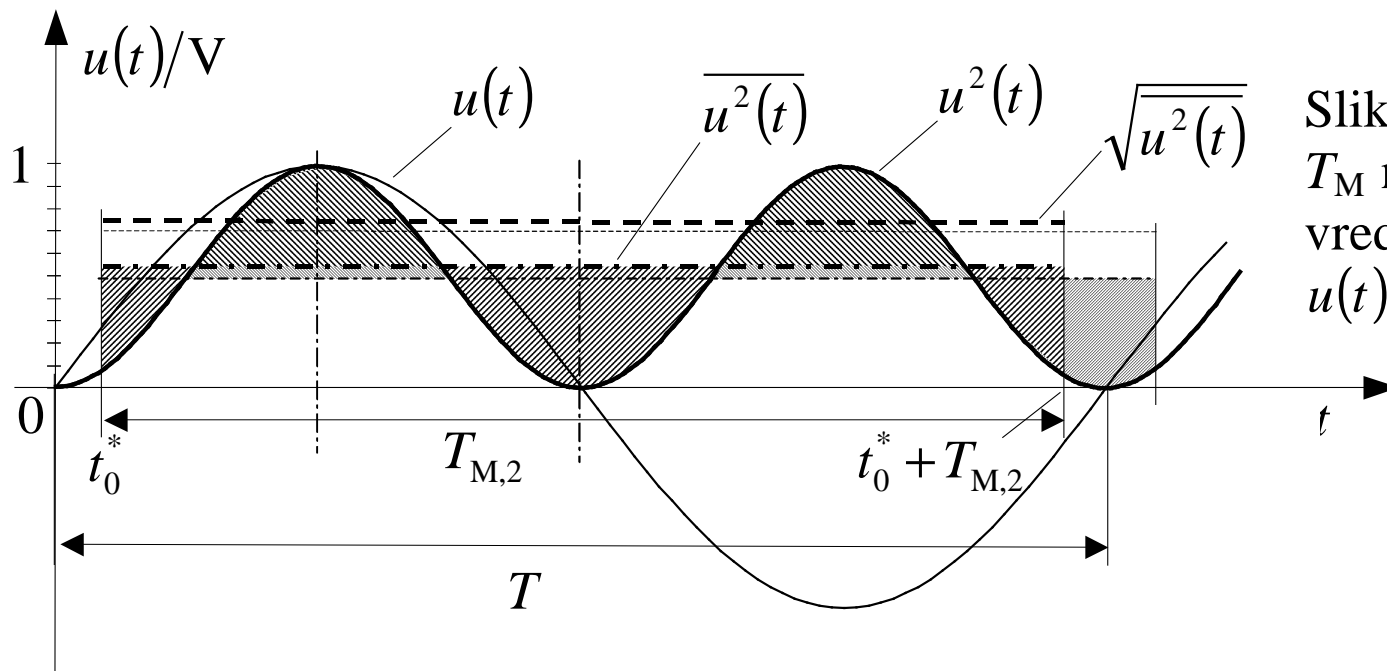
$$U = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{T_{M,1}} \int_{t_0}^{t_0+T_{M,1}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) dt} = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{2T_{M,1}} \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_{t_0}^{t_0+T_{M,1}}}$$
$$= \hat{u} \sqrt{\frac{1}{2T_{M,1}} \left(T_{M,1} - \frac{1}{2\omega} \underbrace{(\sin 2\omega(t_0 + T_{M,1}) - \sin 2\omega(t_0))}_{0 (T_{M,1}=T)} \right)} = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{2T_{M,1}} T_{M,1}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$





Če se **meji** integrala **ne ujemata** s periodo T in je čas merjenja različen od periode $T_{M,2} \neq T$, zapišemo:

$$U' = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{T_{M,2}} \int_{t_0}^{t_0+T_{M,2}} \sin^2 \omega t dt} = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{2T_{M,2}} \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_{t_0}^{t_0+T_{M,2}}} =$$
$$= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{T_{M,2}} \left(T_{M,2} - \frac{1}{2\omega} \underbrace{(\sin 2\omega(t_0 + T_{M,2}) - \sin 2\omega(t_0))}_{\neq 0 (T_{M,2} \neq T)} \right)}$$



Slika 1.20 Vpliv integracijskega časa T_M na napako pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti $u(t)/V = 1 \cdot \sin \omega t$; $T_M < T$





$$U' = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega T_{M,2}} \left(\sin(2\omega t_0 + 2\omega T_{M,2}) - \sin(2\omega t_0) \right)} =$$
$$= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega T_{M,2}} \left(\underbrace{\sin(2\omega t_0 + 2\omega T_{M,2})}_{\alpha} - \underbrace{\sin(2\omega t_0)}_{\beta} \right)}$$

- Uporabimo izraz $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ in dobimo:

$$U' = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega T_{M,2}} \left(2 \cos(2\omega t_0 + \omega T_{M,2}) \cdot \sin(\omega T_{M,2}) \right)}$$





Če torej $T_{M,2} \neq T$, napišemo:

$$U' = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\omega T_{M,2}} \cos(2\omega t_0 + \omega T_{M,2}) \cdot \sin(\omega T_{M,2})}$$

Napaka pri merjenju je:

$$E = U' - U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\omega T_{M,2}} \cos(2\omega t_0 + \omega T_{M,2}) \cdot \sin(\omega T_{M,2})} - 1 \right)$$

(oz. $\lambda = \pm(\pi, 2\pi, 3\pi, \dots)$)

- Ta je **največja** pri $2\omega t_0^* + \omega T_{M,2} = \lambda = 0$

$$\cos \lambda = 1 \quad \text{in} \quad E_{\max} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 - \frac{\sin(\omega T_{M,2})}{\omega T_{M,2}}} - 1 \right)$$

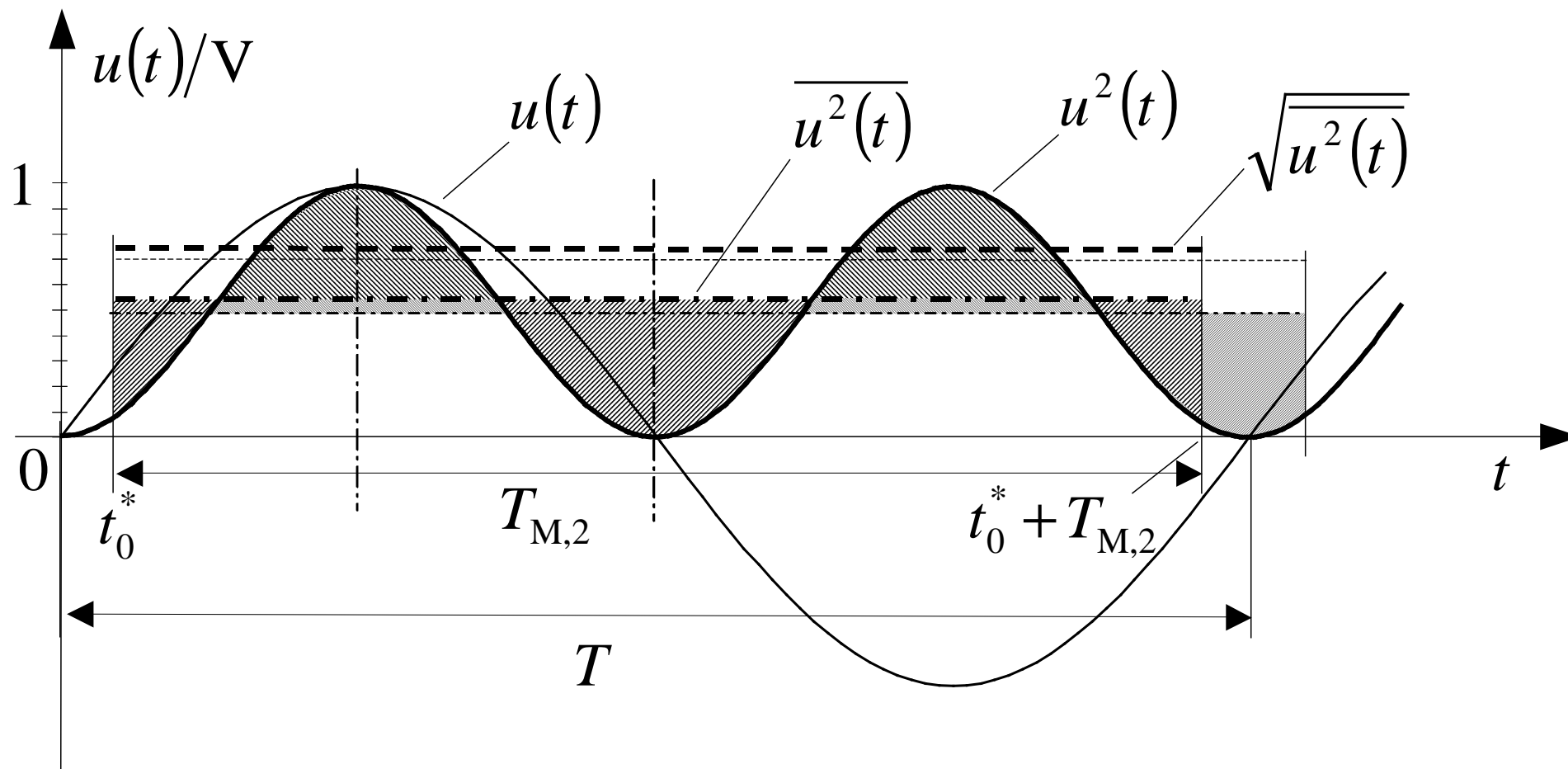
- ko je **spodnja meja integrala**: $t_0^* = \frac{\lambda - \omega T_{M,2}}{2\omega}$,

- **zgornja** pa: $t_0^* + T_{M,2} = \frac{\lambda + \omega T_{M,2}}{2\omega}$





Sredina integracijskega intervala se ujema z največjo (ali najmanjšo) trenutno vrednostjo kvadrata napetosti.



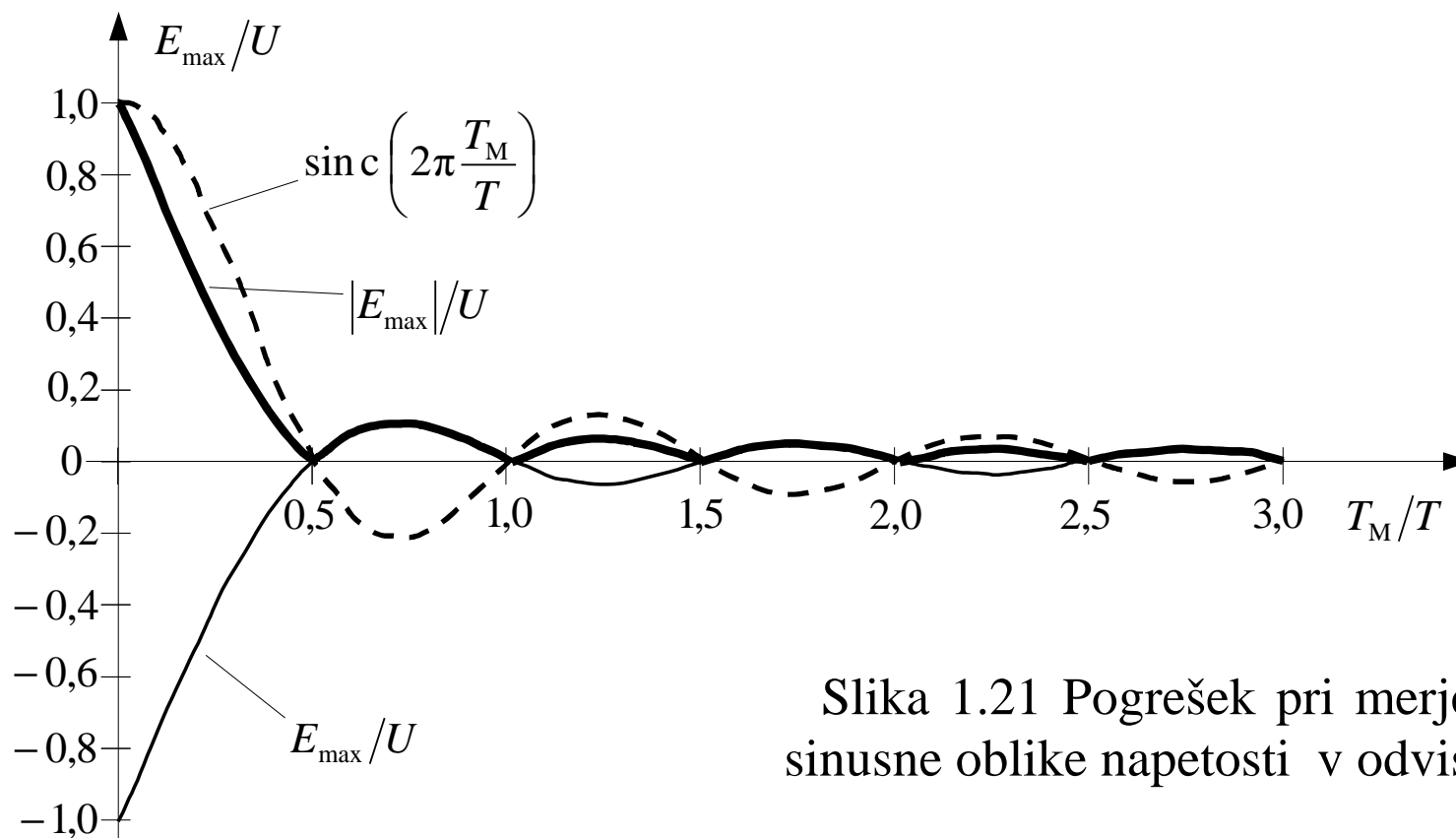
Slika 1.20 Vpliv integracijskega časa T_M na napako pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti $u(t)/V = 1 \cdot \sin \omega t$; $T_M < T$





Pogrešek je:

$$E_{\max} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 - \frac{\sin(\omega T_{M,2})}{\omega T_{M,2}}} - 1 \right) = U \left(\sqrt{1 - \operatorname{sinc} \left(2\pi \frac{T_{M,2}}{T} \right)} - 1 \right)$$



$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Slika 1.21 Pogrešek pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti v odvisnosti od razmerja T_M/T





1.2 Bistvene lastnosti merilnih naprav

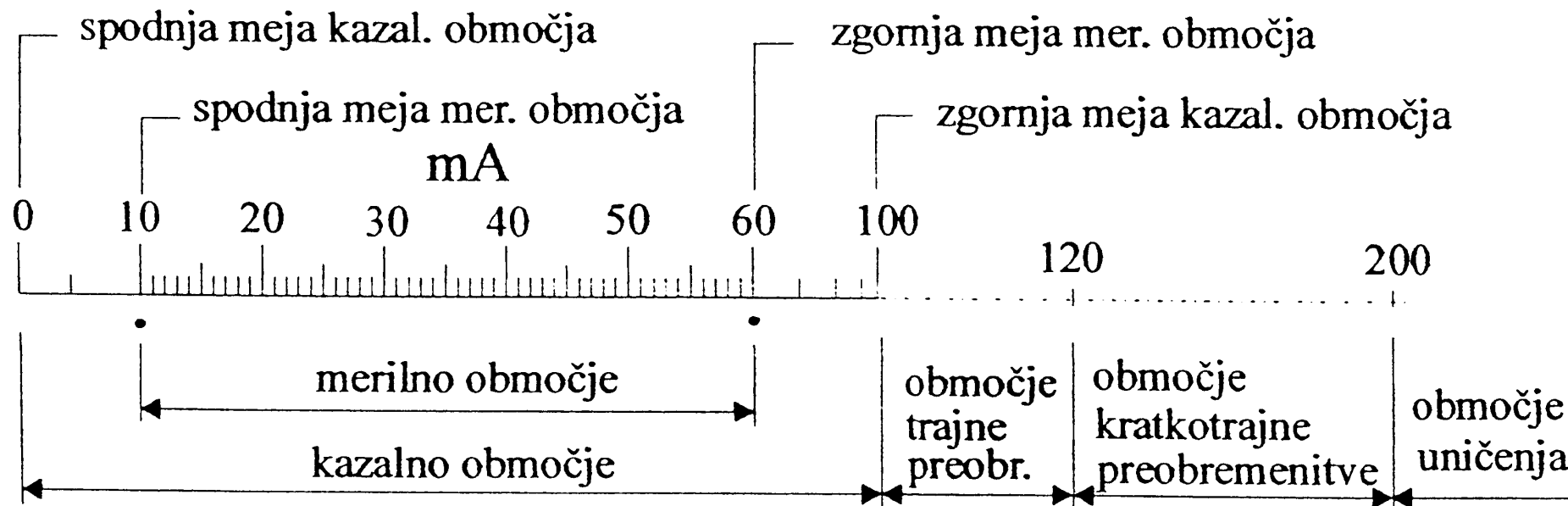
Pri izboru merilne opreme potrebujemo podatke o funkcionalnih lastnostih:

- **obratovalne lastnosti**
 - razlikujemo podatke, ki se nanašajo na **merjeno veličino** od podatkov za **vplivne veličine**.
- **merilne lastnosti:**
 - **statične lastnosti**
 - **prehodni pojav** je že **izvenel**,
 - **dinamične lastnosti**,
 - vhodna veličina se **hipoma spremeni** (aperiodični potek),
 - vhodna veličina se **periodično spreminja**





1.2.1 Obratovalne lastnosti glede na merjeno veličino

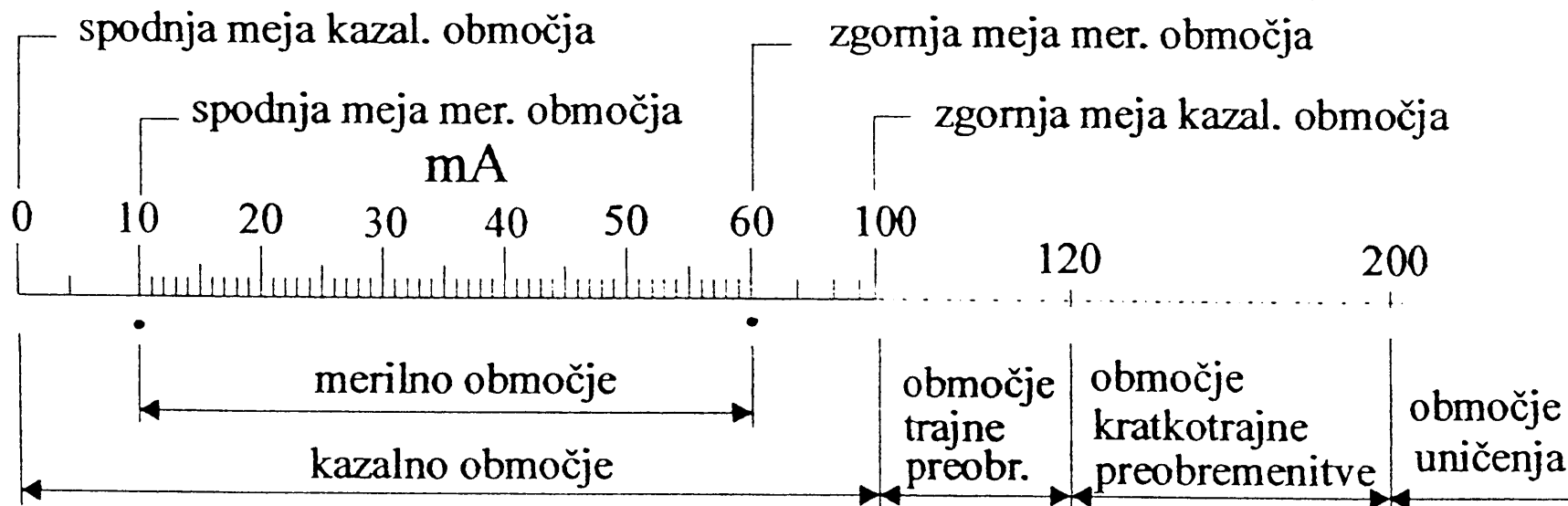


Slika 1.22 Območje in meje merjene veličine

Ločimo:

- **kazalno** območje - celotno območje skale instrumenta,
- **merilno** območje - kjer instrument meri z označeno točnostjo (npr. **razred točnosti**).





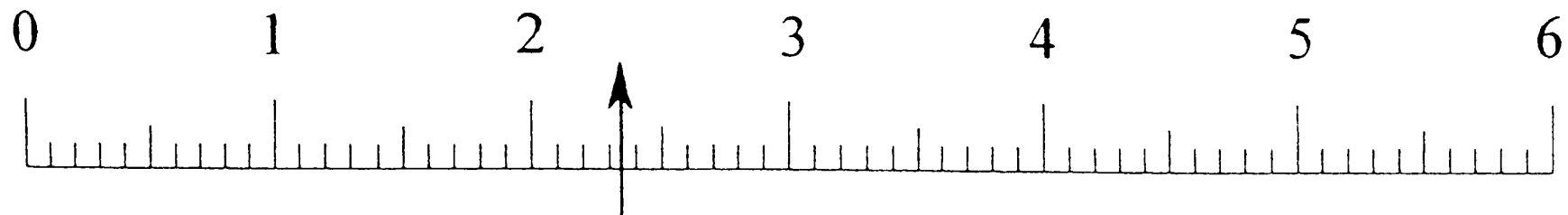
- območje **preobremenitev**,
 - instrument prenese brez poškodb.





Pri **analognih** instrumentih poznamo **črtno skalo**,

- zaporedje črtic na številčnici instrumenta,
- oštevilčenje.



Slika 1.23 Črtna skala instrumenta

Če ima instrument več območij uporabljamo za določitev kazanja **konstanto instrumenta**.

Primer: $0 \text{ mA} \dots 300 \text{ mA} \Rightarrow k_I = \frac{I_D}{y_D} = \frac{300 \text{ mA}}{6} = 50 \text{ mA}$

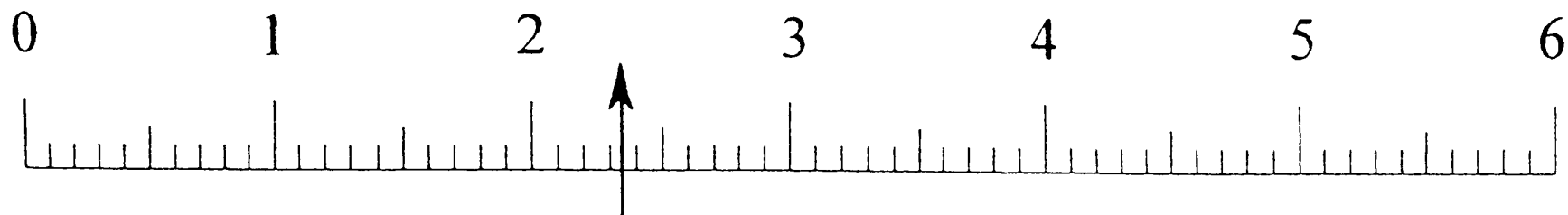
- odčitana vrednost (**neposredno kazanje**) $y = 2,34 \Rightarrow$
- izmerjena vrednost: $I_i = k_I y = 50 \text{ mA} \cdot 2,34 = 117 \text{ mA}$





Včasih se uporablja **skalna vrednost**

- kolikšna vrednost pripada enemu razdelku skale.
 - Primer 60 razdelkov: $300 \text{ mA} / 60 = 5 \text{ mA}$





Pri **digitalnih** instrumentih **digitalni prikazovalnik** kaže **številsko vrednost in enoto**.

Glede na to, katere vrednosti zavzame najbolj pomemben digit (MSD - **most significant digit**), ločimo:

- N - mestne, primeri $N = 3$:
 - katerakoli cifra desetiškega sistema, največ 999
- $N \frac{1}{2}$ - mestne,
 - prva cifra je lahko le 0 ali 1, največ 1999
- $N \frac{3}{4}$ - mestne,
 - prva cifra je lahko 0, 1, 2 ali 3. največ 3999

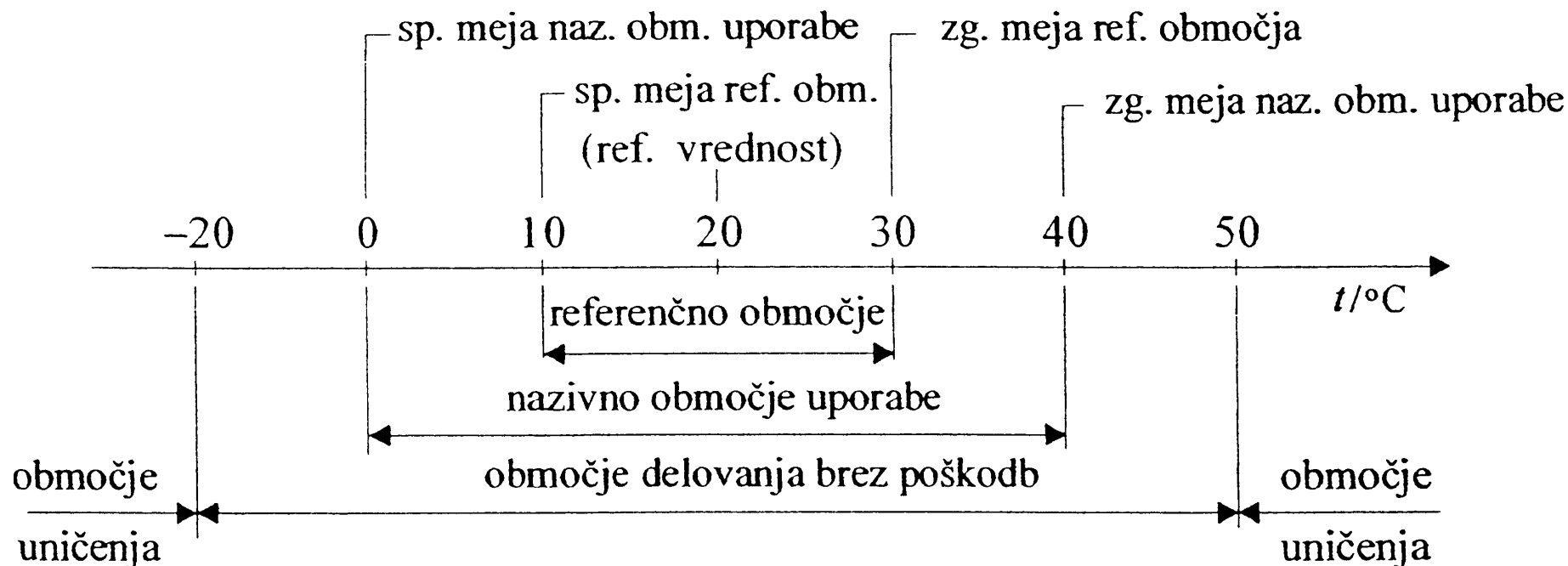
Pogosto se obratno vrednost največjega kazanja navaja kot **ločljivost prikazovalnika**: 10^{-3} , $5 \cdot 10^{-4}$, $2,5 \cdot 10^{-4}$,





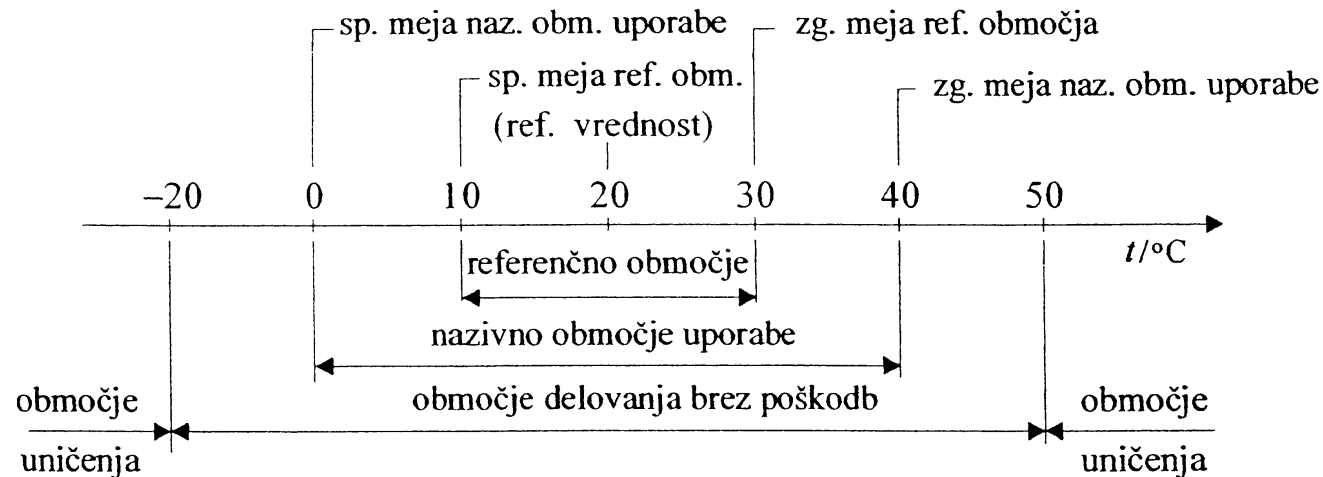
1.2.2 Obratovalne lastnosti glede na vplivne veličine

Vplivna veličina je fizikalna veličina, ki jo merilni instrument ne meri, vpliva pa na kazanje (npr.: temperatura, frekvenca, položaj,...).



Slika 1.24 Območje in meje vplivne veličine





Referenčna vrednost (območje) vplivne veličine je vrednost vplivne vel., pri kateri instrument meri z označeno točnostjo.

- **merimo pri referenčnih pogojih,**

V nazivnem območje uporabe se kazanje instrumenta spremeni v predpisanih mejah (npr.: odstopanje se poveča za dvakrat).

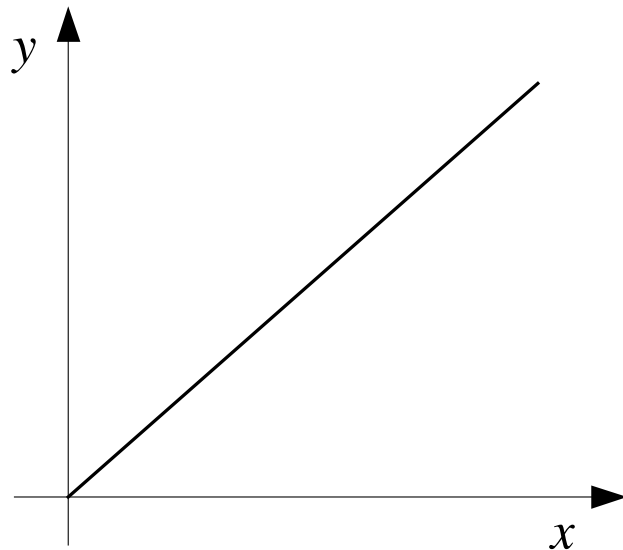
- **razliko v kazanju imenujemo sprememba kazanja ali variacija.**



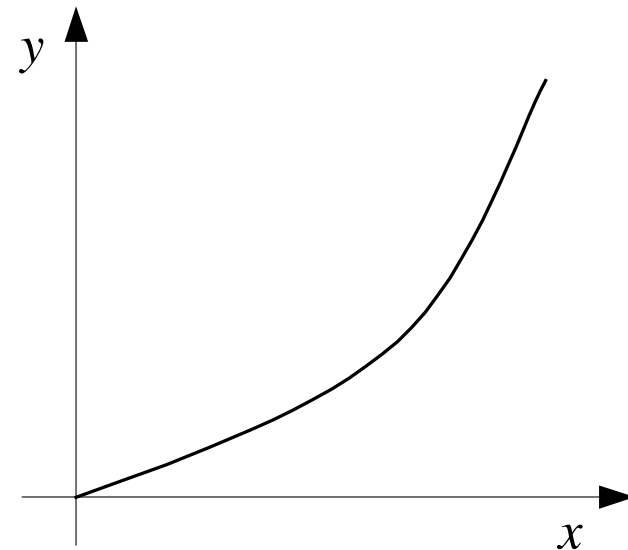


1.2.3 Statične merilne lastnosti

Gre za odnos med **izhodno** y in **vhodno veličino** x , ko postaneta obe veličini **od časa neodvisni**.



a) linearna



b) nelinearna

Slika 1.25 Statični karakteristiki merilne naprave

Parameter povezave je **občutljivost**: $S = \frac{dy}{dx}$





$S = \frac{dy}{dx}$ - razmerje **spremembe** izhodne veličine in **spremembe** vhodne veličine.

- navajamo v ustreznih **enotah**
- primer (občutljivi ampermeter):

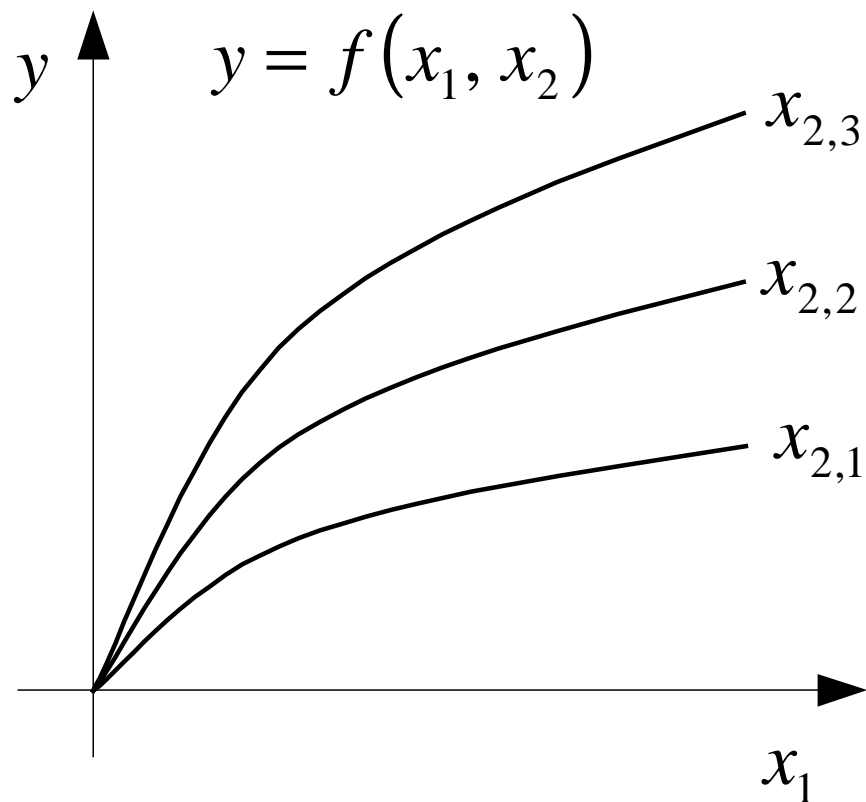
$$S = \frac{dl}{dI} = \frac{\Delta l}{\Delta I} = \frac{2 \text{ mm}}{5 \text{ nA}} = 0,4 \text{ mm/nA}$$





Več vhodnih veličin:

- **polje karakteristik:**



Več **delnih** občutljivosti:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots$$

$$\Rightarrow S_{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1},$$

$$\Rightarrow S_{x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots$$

Slika 1.26 Statična karakteristika merilne naprave z dvema vhodnima veličinama





Druge vrste občutljivosti:

- z **relativno spremembo** vhodne veličine (npr.: merilni mostiči in kompenzatorji):

$$S = \frac{\Delta I}{\Delta R/R} \quad \text{in} \quad S = \frac{\Delta I}{\Delta U/U}$$

ΔI - sprememba toka ničelnega indikatorja





Merilni prag:

- **najmanjša sprememba** vhodne veličine, pri kateri **dobimo učinek** na izhodu merilne naprave.

Ločljivost:

- vrednost vhodne veličine, ki jo še razločimo:
 - **ločljivost očesa** pri analognih instrumentih,
 - **zadnje decimalno mesto** pri digitalnih instrumentih.

$(\Delta y)_q$ - najmanjša sprememba izhodne veličine, ki jo razločimo

$(\Delta x)_q = (\Delta y)_q / S$ - pripadajoča sprememba vhodne veličine





Primer:

- če ne vemo ali kaže 23,3mA ali 23,4mA, potem: sprememb od 23,25mA do 23,45mA ne ločimo in znaša ločljivost:

$$23,45\text{mA} - 23,25\text{mA} = 0,2\text{mA}$$





1.2.4 Dinamične merilne lastnosti

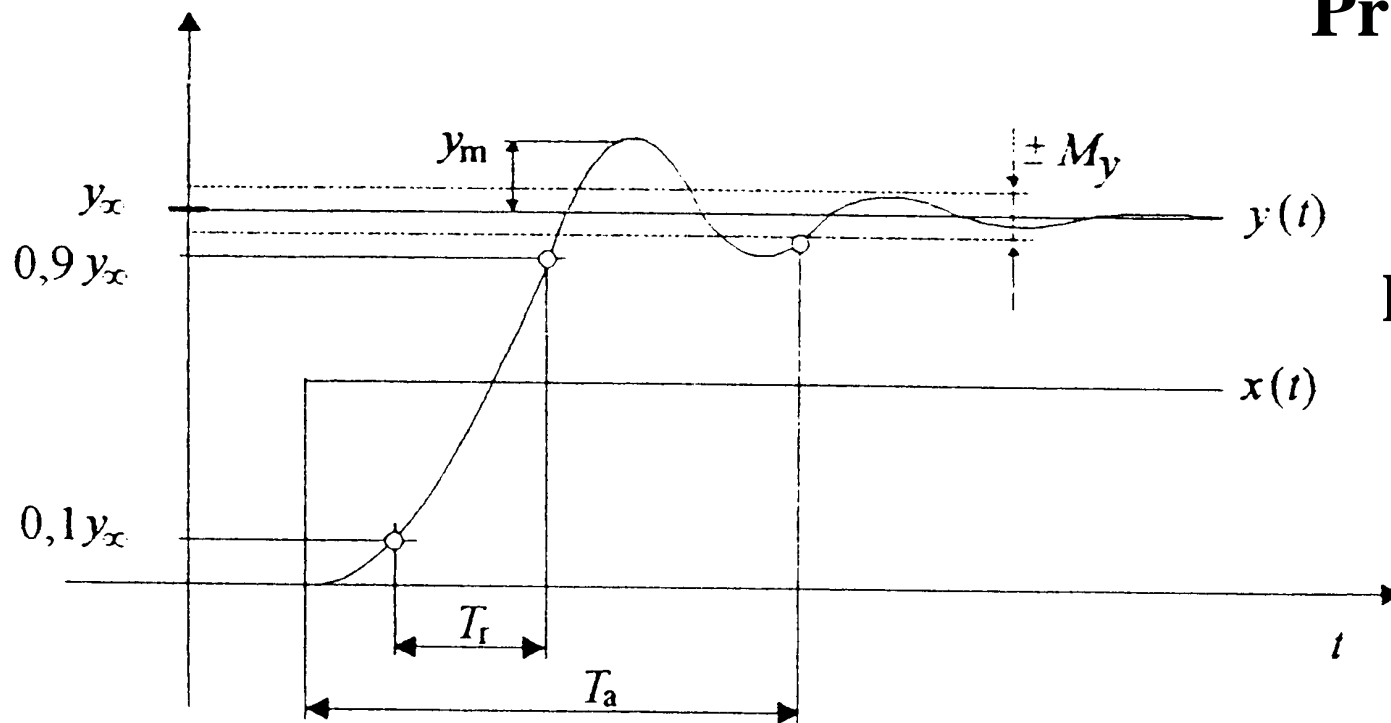
Tipična karakteristika pri hipni spremembi vhodne veličine:

Prehodna funkcija:

$$h(t) = \frac{y(t)}{x(t)} -$$

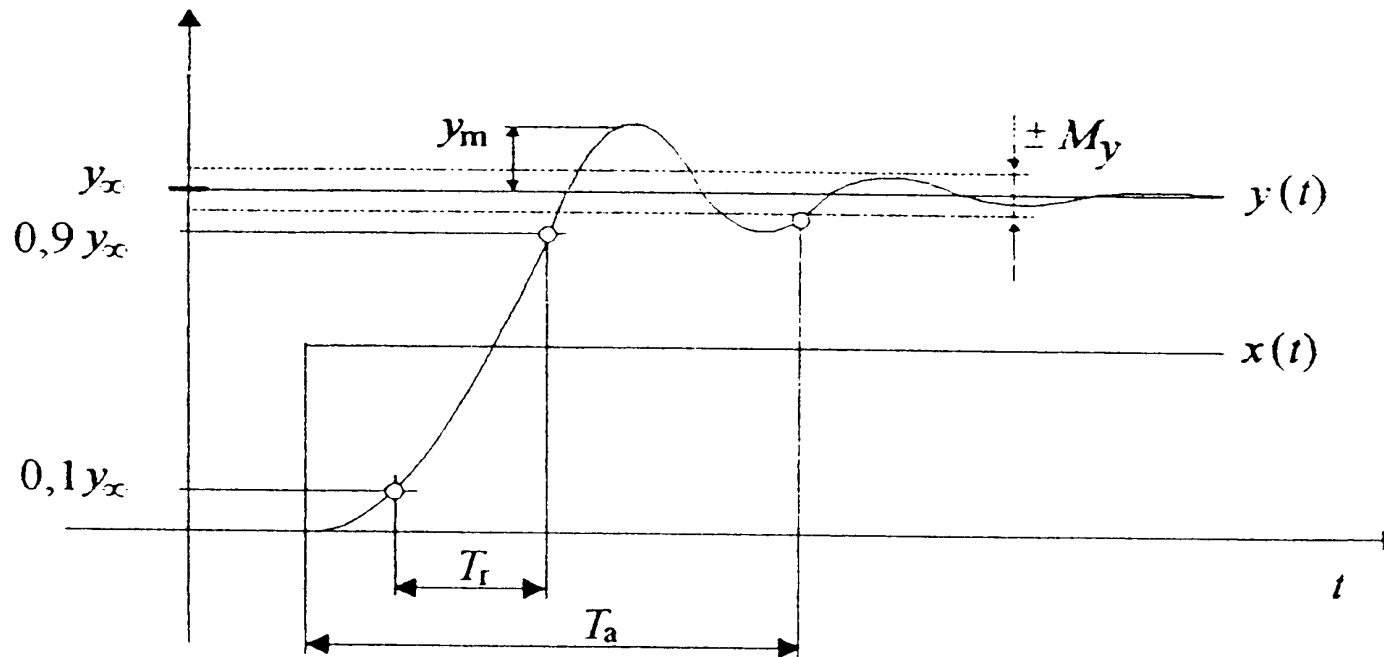
prehodna občutljivost
 $S(t)$

(vhodni signal je
stopnica!)



Slika 1.27 Odziv merilne naprave na hipno spremembo vhodne veličine





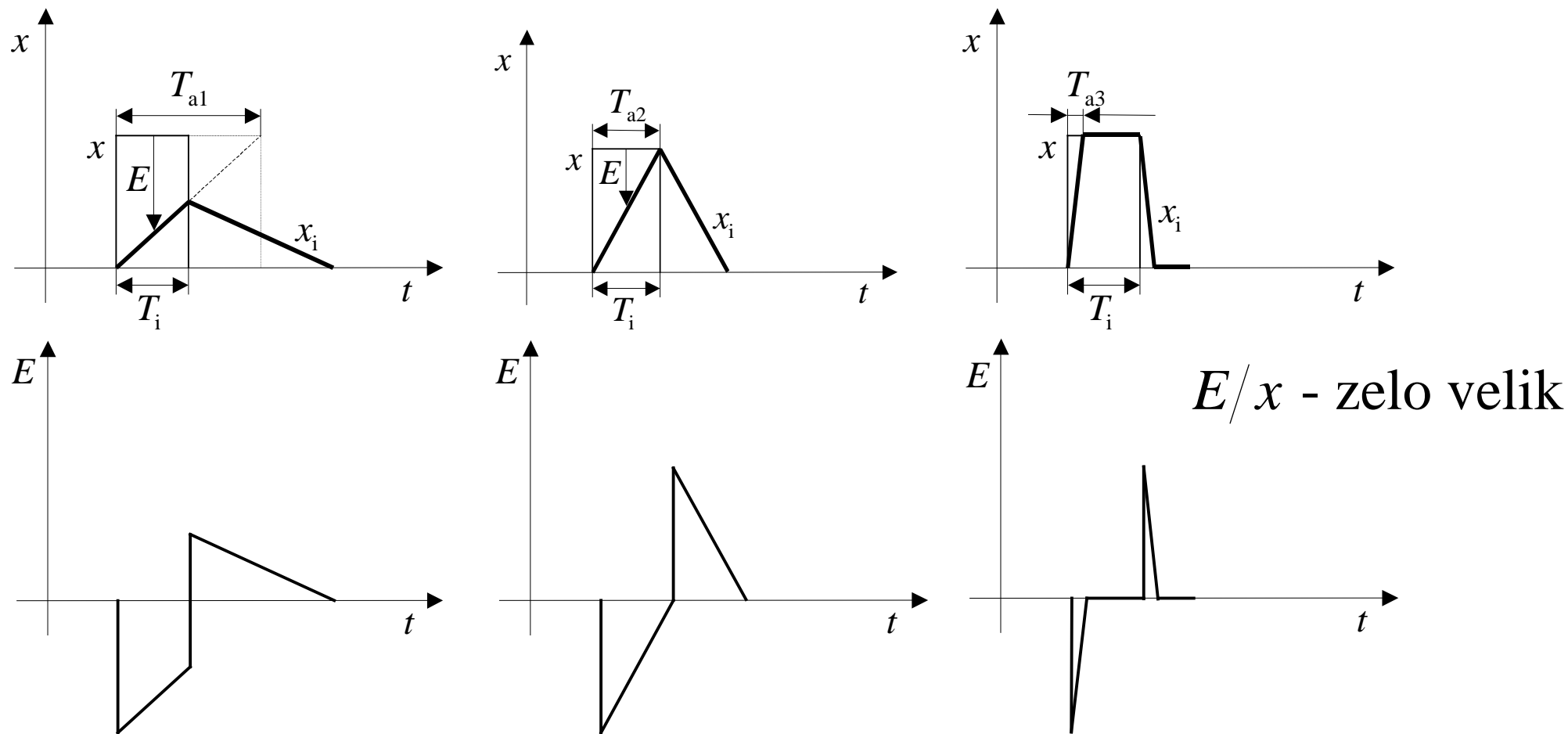
Karakteristični podatki za oceno odziva:

- **odzivni čas** T_a : od začetka do trenutka, ko ostane izhodna veličina **znotraj predpisanih mej** $\pm M_y$;
- **dvižni čas** T_r : ko **naraste** izhodna veličina od 10% do 90% končne vrednosti;
- **prenihanje** y_m : **največje odstopanje** od končne vrednosti.





Merjenje impulza in **dinamični merilni pogrešek**:



Slika 1.28 Merjenje impulza in dinamični merilni pogrešek pri različnih odzivnih časih mer. naprave: $T_{a1} = 2T_i$, $T_{a2} = T_i$, $T_{a3} = 0,2T_i$





Odzivanje merilne naprave na **sinusno obliko**.

- pri linearnih sistemih je izhod sinusne oblike (**amplituda in fazni kot** sta odvisna od frekvence).

Frekvenčna karakteristika:

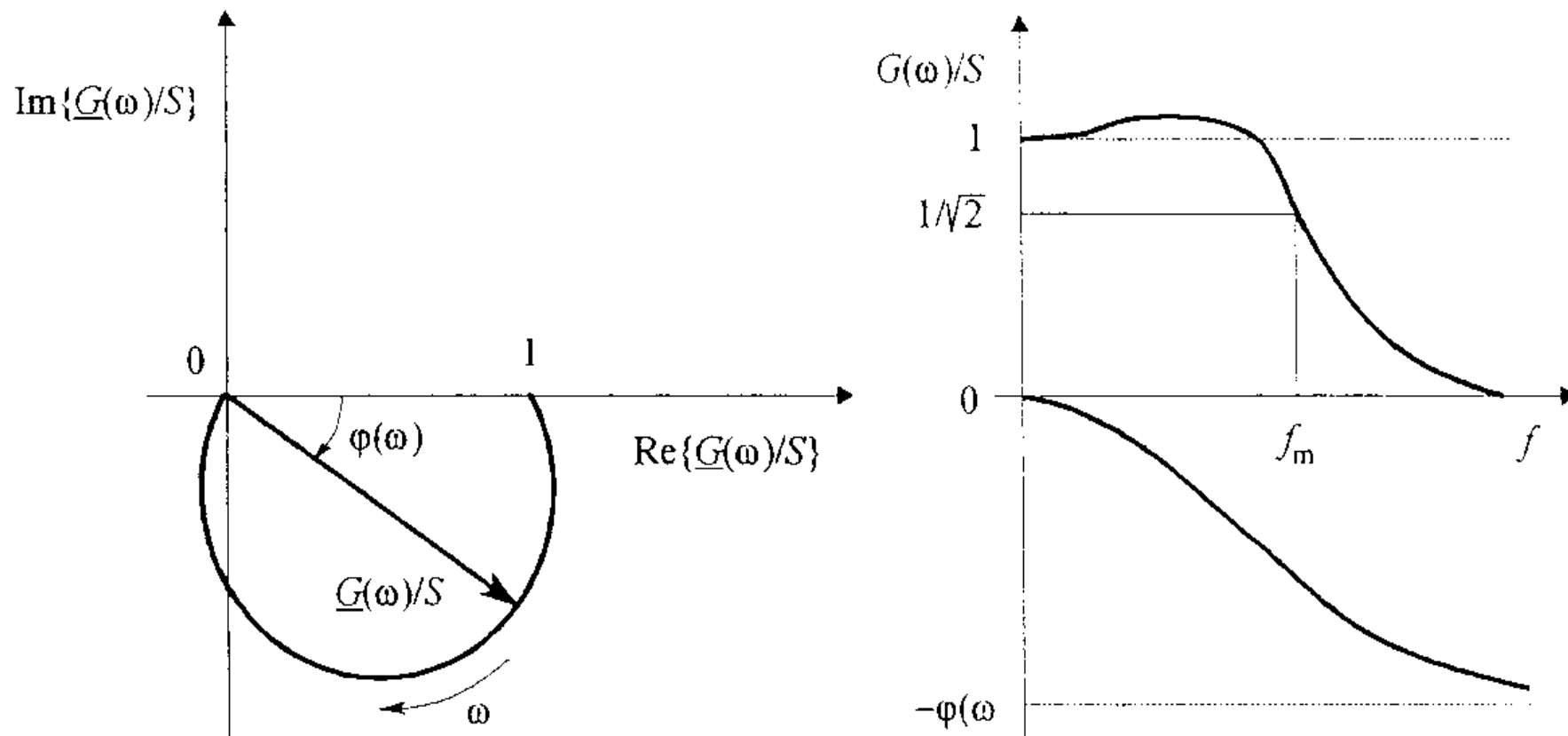
$$\underline{G}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)} = |\underline{G}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

- razmerje izhodne veličine $\underline{Y}(\omega)$ in vhodne veličine $\underline{X}(\omega)$ ima **kompleksni značaj**.

Kompleksna občutljivost $\underline{S}(\omega)$

- Pogosto jo **normiramo** s statično občutljivostjo $S = \underline{G}(0)$ (pri $\omega = 0$ ima vrednost 1)

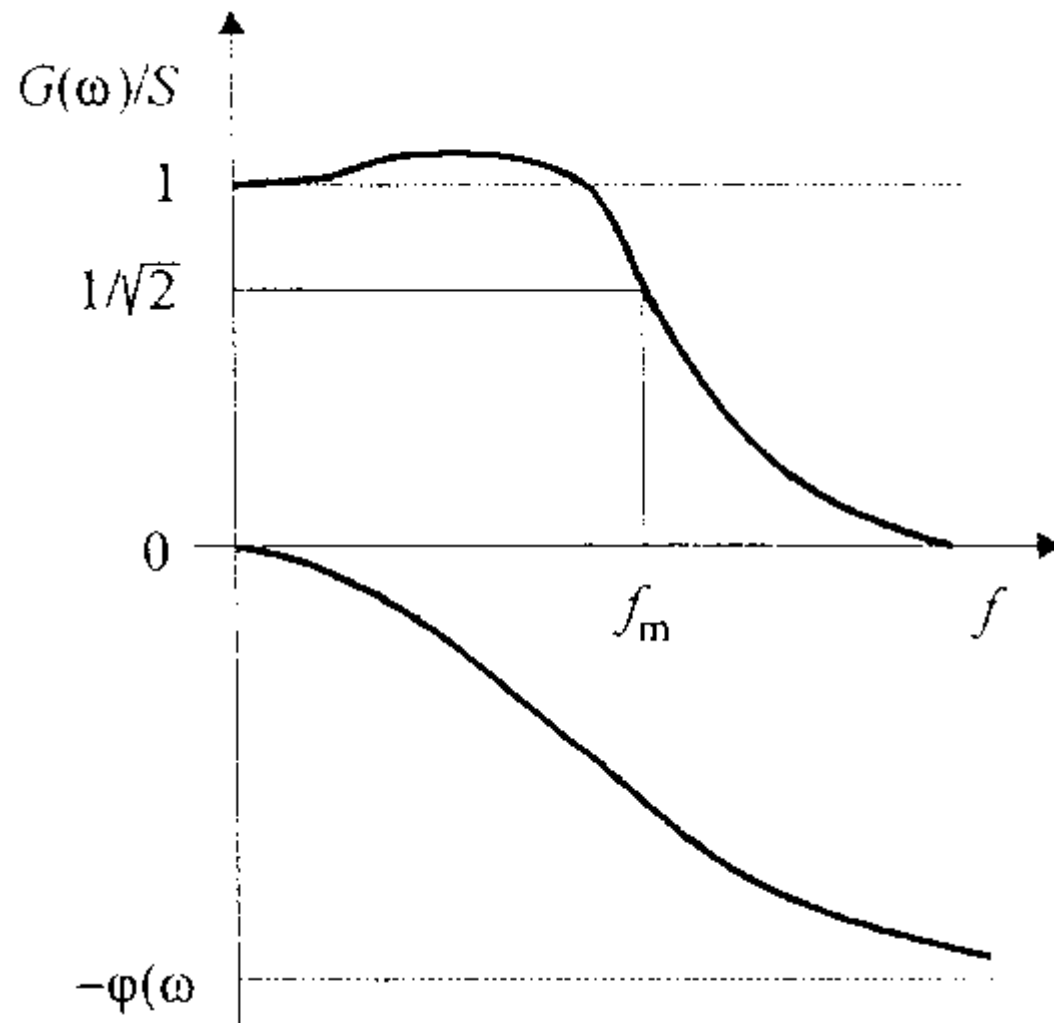




Slika 1.29 Frekvenčna, amplitudna in fazna karakteristika
Frekvenčno karakteristiko delimo v:

- **amplitudno** (amplitudni odziv),
- **fazno** (fazni odziv).





Karakteristični podatek:

- **Frekvenčna meja**

- kjer amplituda razmerja pade na $1/\sqrt{2}$ (za ca. 30%) proti dogovorjeni vrednosti
 - primer: proti statični občutljivost $G(0) = S$
- ločimo **zgornjo** in **spodnjo** mejno frekvenco.



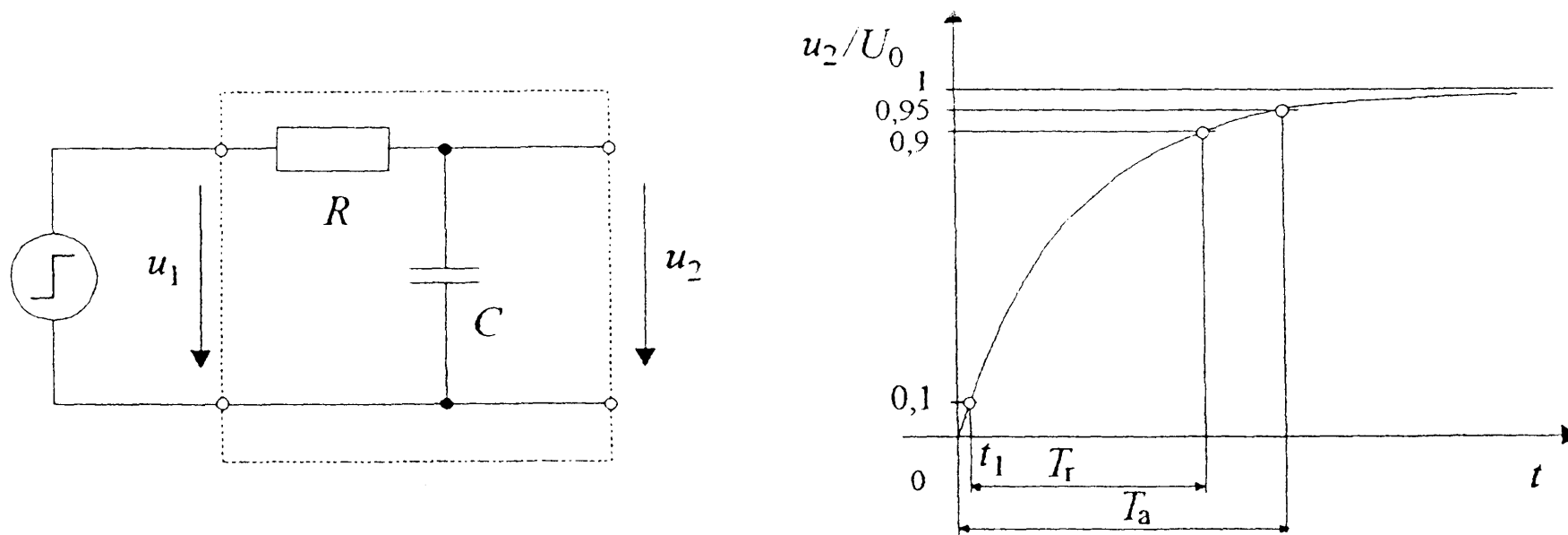


1.2.4.1 Povezava odzivnega časa in mejne frekvence

$$T_a \stackrel{?}{\Leftrightarrow} f_m$$

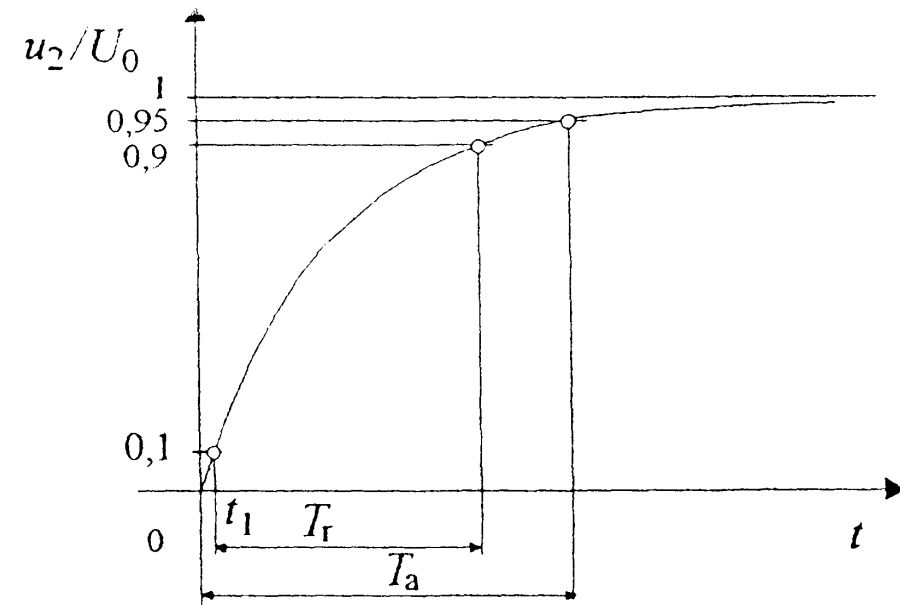
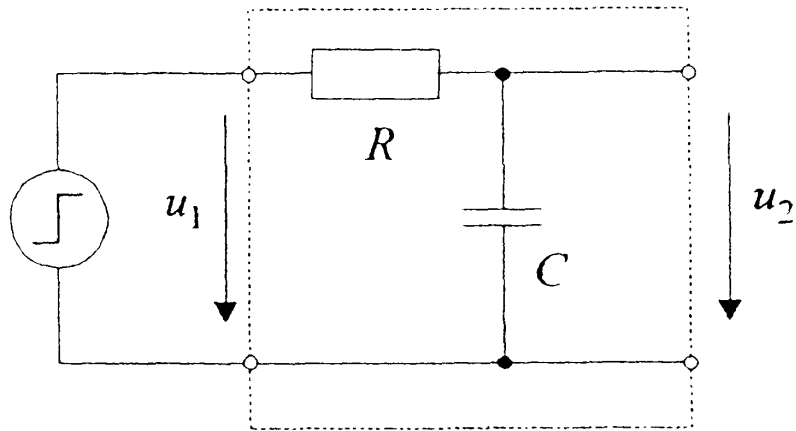
Med odzivnim časom ($M = \pm 5\%$) in zgornjo frekvenčno mejo ($1/\sqrt{2}$) obstaja povezava: $T_a \approx \frac{1}{2f_m}$

- Primer za člen prvega reda:



Slika 1.30 Poenostavljen model merilne naprave in odziv na stopnico





Časovni prostor:

- odziv na stopnico: $u_2 = U_0(1 - e^{-t/\tau})$, $\tau = RC$;
- narast signala do 95% :

$$0,95U_0 = U_0(1 - e^{-T_a/\tau}) \quad \Rightarrow \quad T_a = \tau \ln 20 \approx 3\tau$$





Frekvenčni prostor:

- odziv člena na **sinusno vzbujanje** (frekvenčna karakteristika):

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} \Rightarrow \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$$\text{oz. } \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{e^{j\varphi}}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \varphi = -\text{arctg } \omega\tau$$

- razmerje pade na $1/\sqrt{2}$ ($2\pi f_m \tau = 1$):

$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_m)^2 \tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_m = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Povezava med f_m in T_a : $f_m = \frac{1}{2\pi(T_a/\ln 20)} = \frac{1}{2,097T_a} \approx \frac{1}{2T_a}$





Povezava mejne frekvence f_m in dvižnega časa T_r :

- spodnji prag: $0,1U_0 = U_0(1 - e^{-t_1/\tau})$,
- zgornji prag: $0,9U_0 = U_0(1 - e^{-(t_1+T_r)/\tau})$
- povezava **dvižnega časa** in **časovne konstante**:
$$T_r = \tau \ln 9 = 2,2 \tau$$
- povezava mejne frekvence in dvižnega časa:

$$f_m = \frac{1}{2\pi(T_r/\ln 9)} = \frac{0,35}{T_r}$$

Primer:

$$f_m = 10 \text{ MHz} \quad \Rightarrow \quad T_r = \frac{0,35}{10 \text{ MHz}} = 35 \text{ ns}$$





Prevajalno funkcijo se pogosto podaja s frekvenco v razmerju proti mejni frekvenci:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + jf/f_m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_m)^2}}$$

- upoštevamo: $\omega\tau = 2\pi f\tau = 2\pi f_m\tau f/f_m = f/f_m$

V verigo (**kaskado**) zaporedno vezana dva člena – frekvenčna odziva se množita:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_{m1})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_{m2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_{ms})^2}}$$

- pri vzbujanju z $f = f_{ms}$ velja:

$$\left[1 + (f_{ms}/f_{m1})^2\right] \left[1 + (f_{ms}/f_{m2})^2\right] = 2$$





$$\left[1 + \left(f_{ms}/f_{m1}\right)^2\right] \left[1 + \left(f_{ms}/f_{m2}\right)^2\right] = 2$$

- po množenju dobimo:

$$\left(f_{ms}/f_{m1}\right)^2 + \left(f_{ms}/f_{m2}\right)^2 + \left(f_{ms}/f_{m1}\right)^2 \left(f_{ms}/f_{m2}\right)^2 = 1$$

- ker je $f_{ms}/f_{m1} < 1$ in $f_{ms}/f_{m2} < 1$, zapišemo:

$$\left(f_{ms}/f_{m1}\right)^2 + \left(f_{ms}/f_{m2}\right)^2 \approx 1$$

in dobimo znani odnos:

$$\frac{1}{f_{ms}^2} \doteq \frac{1}{f_{m1}^2} + \frac{1}{f_{m2}^2}$$

- izraženo z **dvižnim časom**:

$$\frac{1}{(0,35/T_{rs})^2} = \frac{1}{(0,35/T_{r1})^2} + \frac{1}{(0,35/T_{r2})^2} \Rightarrow T_{rs}^2 = T_{r1}^2 + T_{r2}^2$$

$$T_{rs}^2 = T_{r1}^2 + T_{r2}^2 + \dots + T_{rn}^2$$



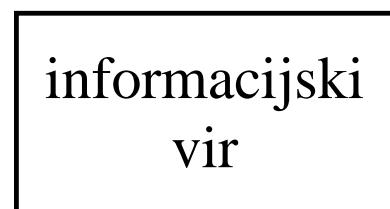
1.2.5 Lastnosti merilnih naprav v informacijskem prostoru



Merilno napravo lahko obravnavamo tudi kot komunikacijski kanal:

informacijski vir:

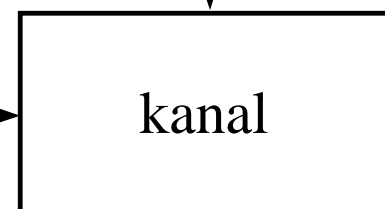
- merilni objekt z merjeno veličino



x



z



naslovljenec:

- merilec, nadzorni sistem, itd.

y



Slika 1.31 Prenos signala (**motnje se kažejo v merilnem pogrešku**)

Določeni vrednosti **oddanega** signala pripada **območje** vrednosti **sprejetega** signala.

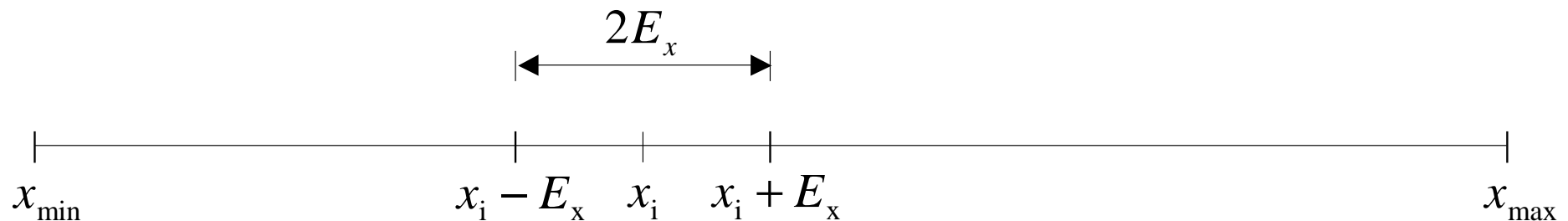




Razlikujemo m neodvisnih stopenj - amplitudnih stopenj:

$$m = 1 + \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2E_x}$$

- $x_{\max} - x_{\min}$ - območje merilnih vrednosti,
- $\pm E_x$ - merilni pogrešek. Je konstanten, če **ni odvisen** od vrednosti merjene veličine.



Slika 1.32 Število amplitudnih stopenj

Kadar je E_x odvisen od vrednosti merjene veličine, zapišemo:

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E_x(x)}$$





$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2E_x(x)}$$

Pimer digitalni mer. inst.: $E_x = \pm(ax + b)$

$$m = 1 + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{2(ax + b)} = 1 + \frac{1}{2a} \ln \frac{ax_{\max} + b}{ax_{\min} + b}$$

- enica izraža dejstvo, da je število stopenj za eno večje od intervalov (začetek štetja).

Množina informacije: $S = \text{lb}m$ - dvojiški logaritem od m v enoti **bit**.

- Odvisna od stopnje **zmanjšanja intervala nedoločenosti** okoli prave vrednosti!
- **Bolj ko zmanjšamo** interval $x_{\max} - x_{\min} \rightarrow 2E_x$, **več informacije** dobimo.





Hitrost prenašanja sporočil je omejena.

Informacijski pretok: $I = \frac{S}{T_M} = \frac{1}{T_M} \text{lbm}$

T_M - čas ene meritve:

- pri analognem odzivu: $T_M = T_a$ - odzivni čas
- pri digitalnem postopku: $T_M = T_s$ - vzorčni čas,
 - $T_a = 1/(2f_m) \Rightarrow T_s = 1/(2f_m)$
- I izrazimo z mejno frekvenco:
$$I = 2f_m \text{lbm}$$





Kapaciteta merilnega kanala – informacijska karakteristika merilne naprave:

$$C_k = \frac{S_{\max}}{T_M} = \frac{1}{T_M} \text{lb} m_{\max} = 2 f_m \text{lb} m_{\max}$$

- **Maksimalno** število amplitudnih stopenj na merilnem območju:

$$m_{\max} = 1 + \frac{x_D}{2E_x}, \quad x_D = x_{\max} - \text{merilno območje} (x_{\min} = 0)$$

- če je pogrešek linearno odvisen od izmerjene

$$\text{vrednosti: } m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{ax_D}{b} + 1 \right)$$

Informacijski pretok ne more biti večji kot kapaciteta kanala:

$$I \leq C_k$$





Zgled - voltmeter:

- merilno območje: $(0...30)V$,
- pogrešek: $E_U = \pm(0,007\%U + 4 \text{ dig})$,
 - ločljivost: $100\mu V$,
- hitrost merjenja: 3,7 meritve na sekundo.
- število amplitudnih stopenj:

$$m_{\max} = 1 + \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{ax_D}{b} + 1\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2 \cdot 7 \cdot 10^{-5}} \ln\left(\frac{7 \cdot 10^{-5} \cdot 30 V}{4 \cdot 100 \mu V} + 1\right) = 13091$$

- največja množina informacije:

$$S_{\max} = \lg m_{\max} = \lg 13091 = 13,7 \text{ bit}$$

- kapaciteta kanala: $C_k = \frac{S_{\max}}{T_M} = \frac{13,7 \text{ bit}}{1s/3,7} = 50,6 \text{ bit/s}$





1.3 Osnovni parametri časovno spremenljivih veličin

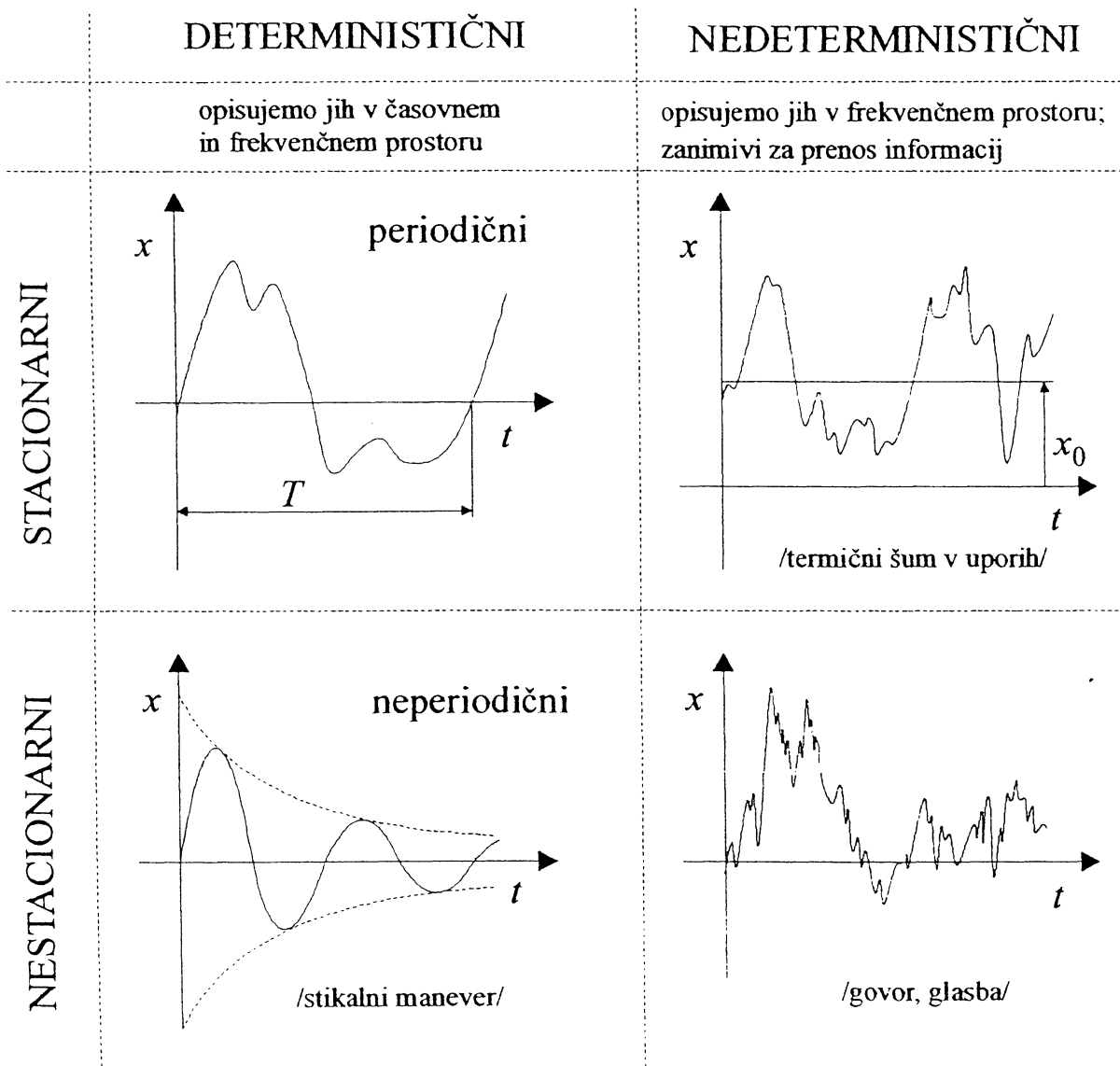
Veličine, ki jih merimo, se v splošnem spreminjajo - **dinamične veličine**

- Če se veličine s časom zelo počasi spreminjajo, jih imenujemo **kvazistatične**.

Delimo jih še na to, ali lahko matematično **opišemo trenutne vrednosti** veličin ali ne:

- **deterministične**,
- **nedeterministične** – naključne (stohastične).





Kadar se pomembni parametri dinamičnih veličin (aritmet. srednja vrednost, efektivna vrednost, itn.) s časom spreminjajo, ločimo signale na:

- stacionarne,
- nestacionarne.

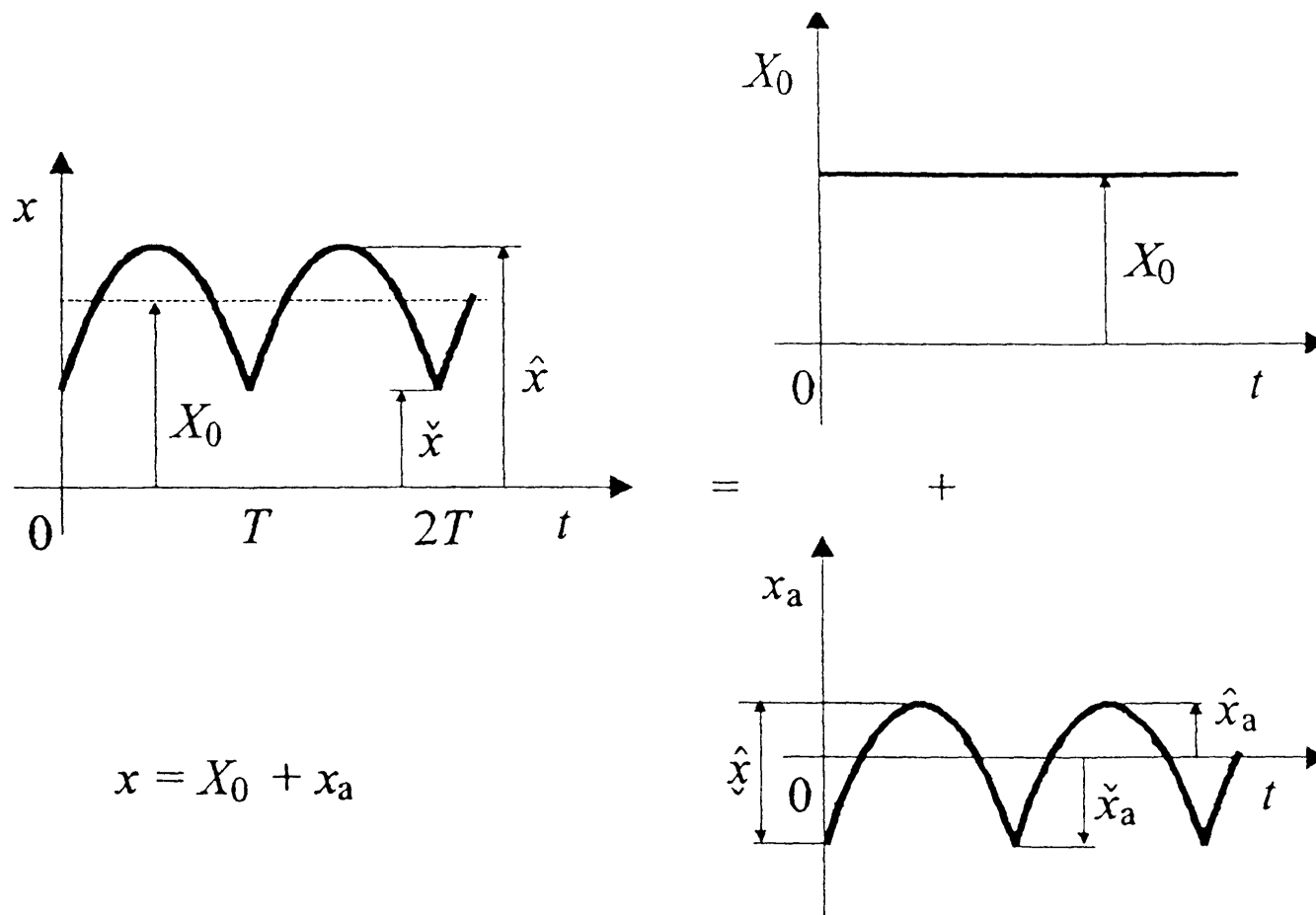
Slika 1.33 Nekaterne vrste signalov





1.3.1 Periodične veličine in najbolj uporabljeni parametri v časovnem prostoru

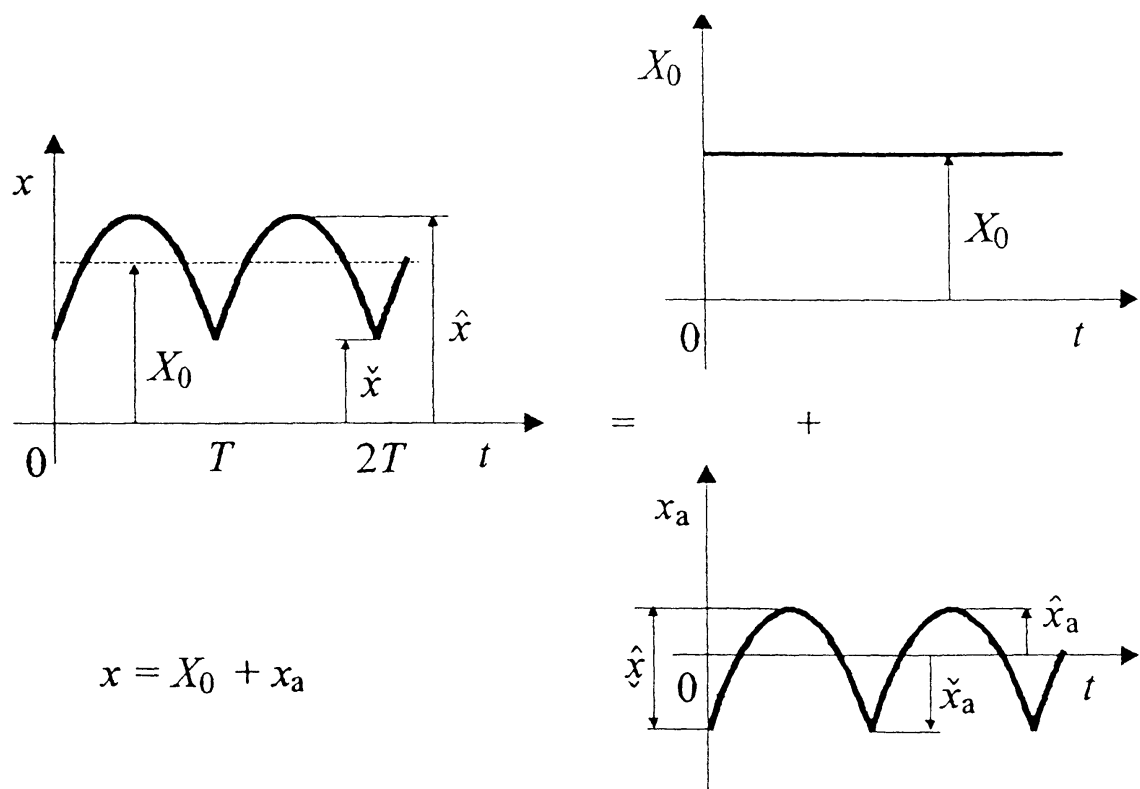
Pulzirajoča veličina je sestavljena iz **enosmerne** in **izmenične** komponente:



$$x = X_0 + x_a$$

Slika 1.34 Pulzirajoča veličina





Maksimalno vrednost označujemo z \hat{x} ali x_m ,
Minimalno vrednost označujemo z \check{x} ali x_{\min} ,
Enosmerno komponento označujemo z X_0 ,
Izmenično komp. pa z x_a

Aritmetična srednja vrednost – povprečna vrednost – je enaka **enosmerni** komponenti: $\bar{X} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = X_0$,

- ker je povprečna vrednost x_a nič: $\bar{X}_a = \frac{1}{T} \int_0^T x_a(t) dt = 0$





Efektivna vrednost pulzirajoče veličine: $X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$

- če upoštevamo $x(t) = X_0 + x_a(t)$, dobimo:

$$X = \sqrt{X_0^2 + X_a^2}$$

- kjer je $X_a = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x_a^2(t) dt}$ efektivna vrednost izmenične komponente.





Če pulzirajoča veličina **ne spreminja predznaka**, jo imenujemo **valovita veličina**.

Kadar je enosmerna komponenta primarnega pomena, podamo **valovitost** na tri načine:

- pulzacijski faktor: $p = \frac{X_a}{X}$,
- temenska valovitost: $q = \frac{x_e}{|X_0|}$,
- **efektivna valovitost**: $r = \frac{X_a}{|X_0|}$
 - najbolj pogosto uporabljen faktor.

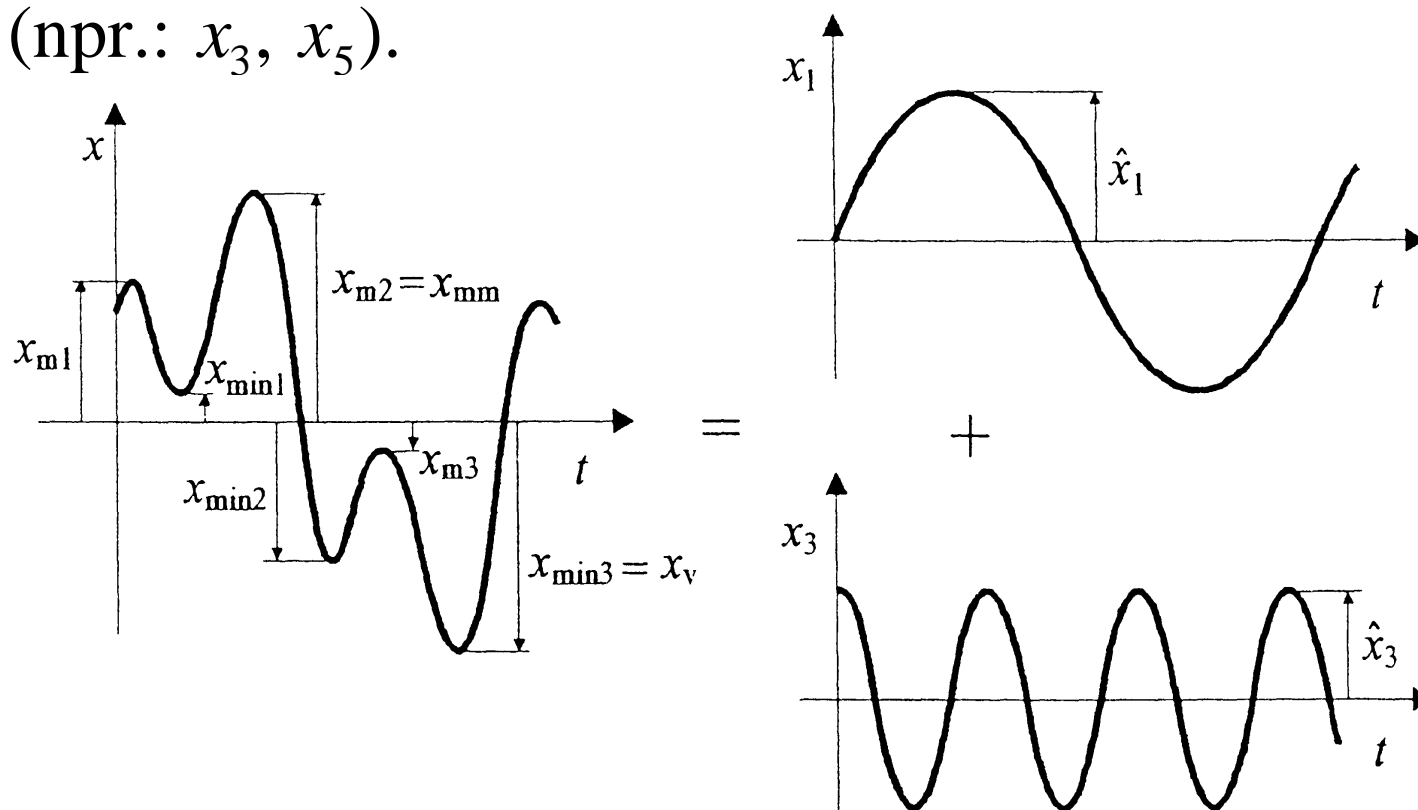




1.3.2 Izmenična veličina

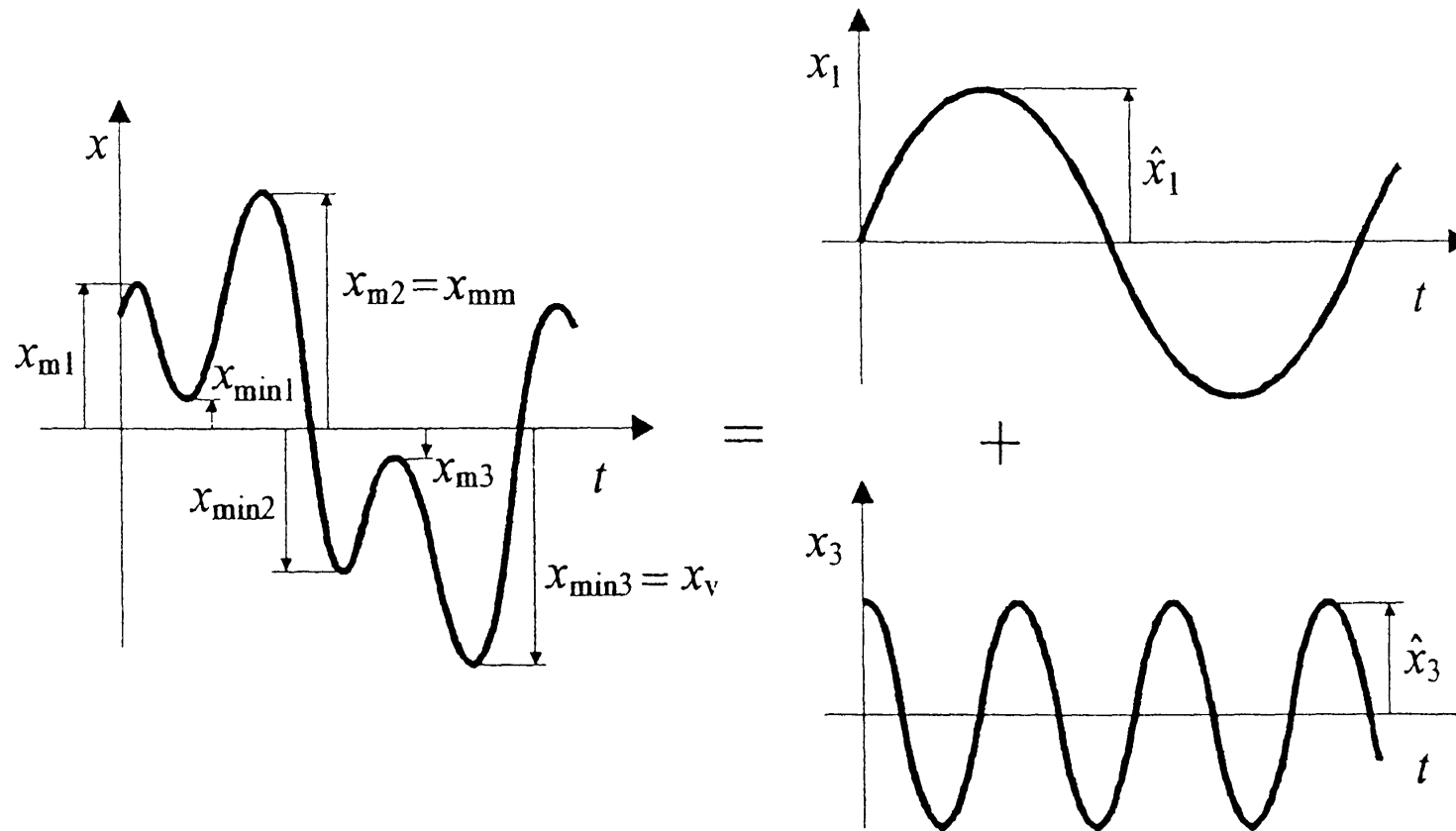
- kadar periodična veličina **nima enosmerne** komponente.

Sestavljena je iz: **osnovne komponente** x_1 in **harmonskih komponent** (npr.: x_3, x_5).



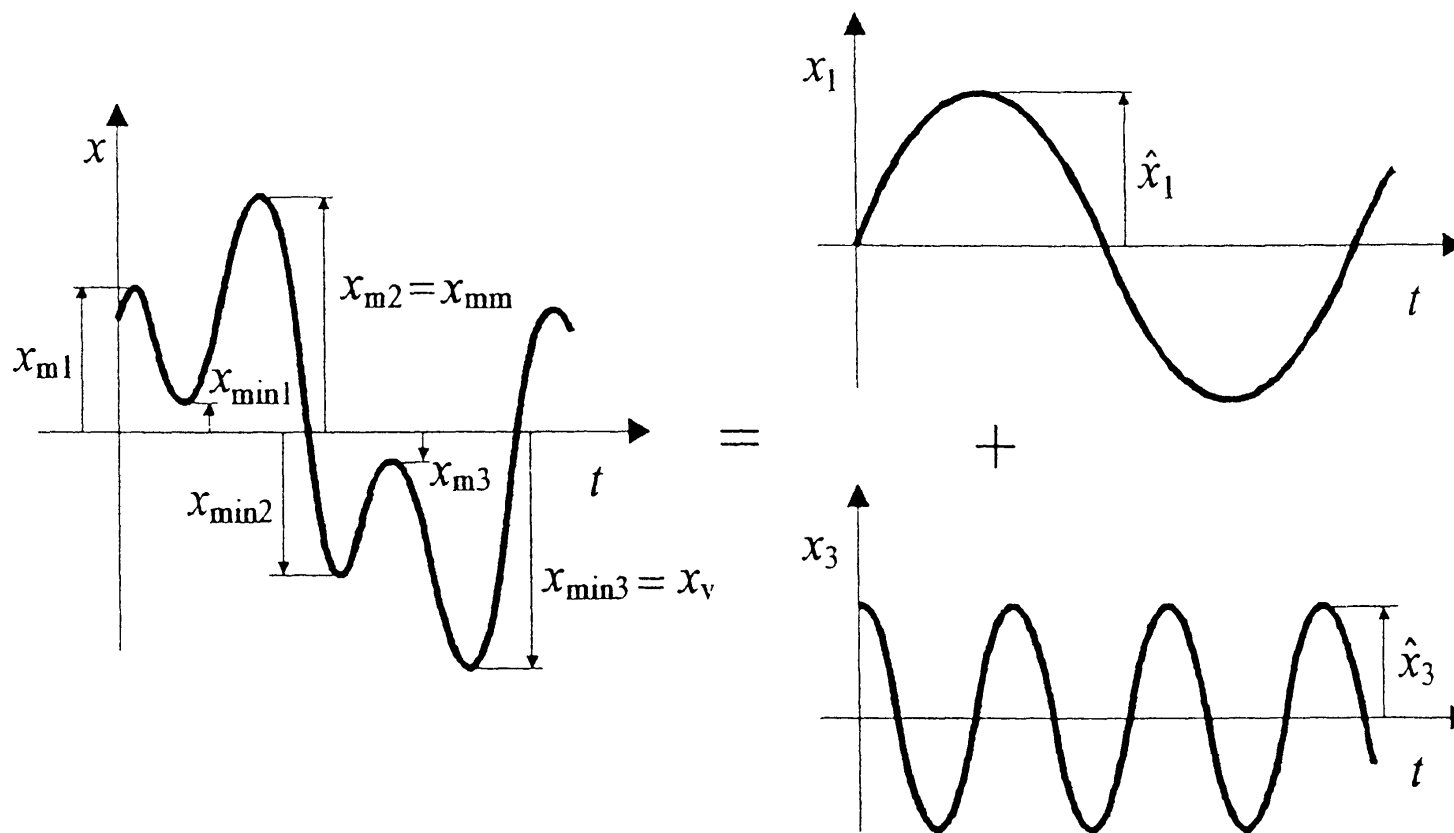
Slika 1.35 Izmenična veličina





- maksimalne vrednosti: x_{m1}, x_{m3}, x_{m5} ;
- minimalne vrednosti: $x_{min1}, x_{min3}, x_{min5}$;
- **temenska** vrednost – največja maksimalna v.: x_{mm} ali \widehat{x} ;





- **dolinska** vrednost – najmanjša minimalna v.: x_v ali $\hat{\bar{x}}$;
- **temensko-dolinska** vrednost (x_{pp} ..peak-to-peak): x_e ali \hat{x}_v ;





- **delež osnovne** komponente: $f = \frac{X_1}{X}$ - kolikšna je efektivna vrednost osnovne komponente v primerjavi s celotno efektivno vrednostjo.

Harmonsko popačenje (harmonski faktor, faktor distorzije, faktor popačenja, klirr faktor, THD- Total harmonic distortion):

$$h_{\text{IEC}} = \frac{X_h}{X_1} = \frac{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + \dots}}{X_1} = \frac{\sqrt{X^2 - X_1^2}}{X_1}$$

- kolikšna je efektivna vrednost (vseh) harmonskih komponent v primerjavi z osnovno.

$$h_{\text{DIN}} = \frac{\sqrt{X^2 - X_1^2}}{X} - \text{primerjava s celotno efektivno vred.}$$





Temenski faktor:

$$C = \frac{x_{\text{mm}}}{X}$$

- pomemben parameter za **instrumente z usmerniki**, ki se odzivajo na temenske vrednosti.

Večina enosmernih instrumentov s polprevodniškim usmernikom se odziva na **usmerjeno vrednost**:

$$X_r = \overline{|x|} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt$$

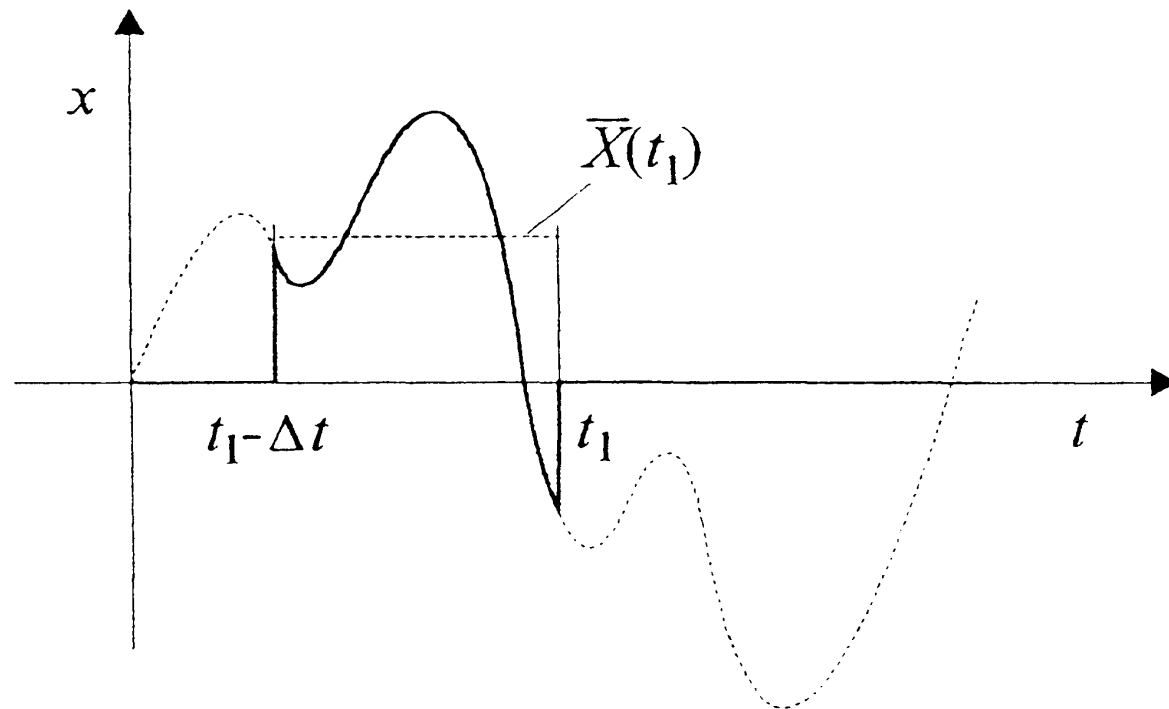
Oblikovni faktor nam poda razmerje efektivne in usmerjene vrednosti: $F = \frac{X}{X_r}$ (inst. z usmerniki, ločitev izgub, ..)





Tekoča povprečna vrednost je odvisna od širine opazovanja

Δt in položaja v periodi:
$$\bar{X}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t x(u) dt$$



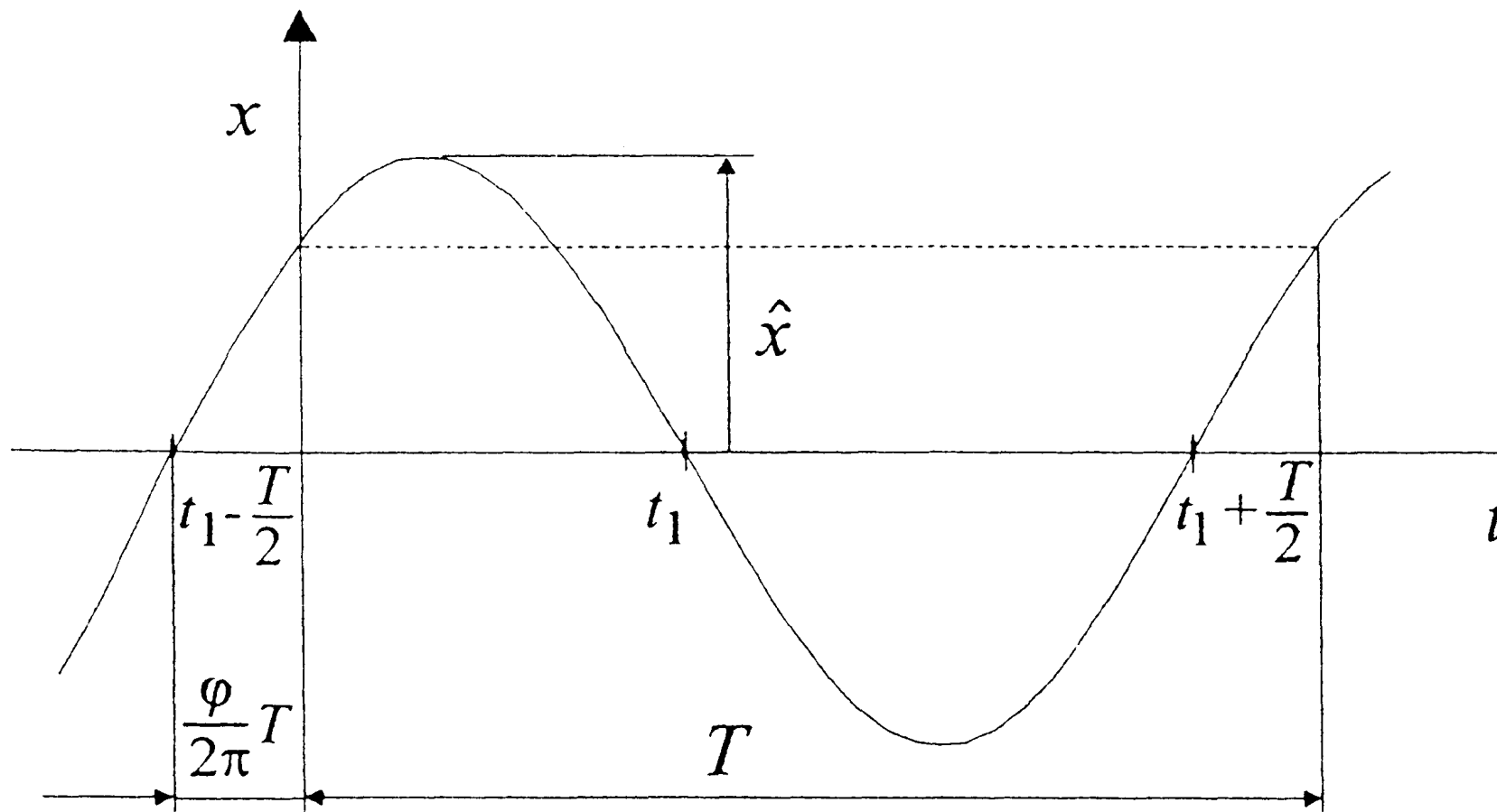
Slika 1.36 Tekoča povprečna vrednost





Osnovna oblika izmenične veličine je **sinusne** oblike:

$$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = 2\pi f = 2\pi/T - \text{krožna frekvenca}$$



Slika 1.37 Sinusna veličina





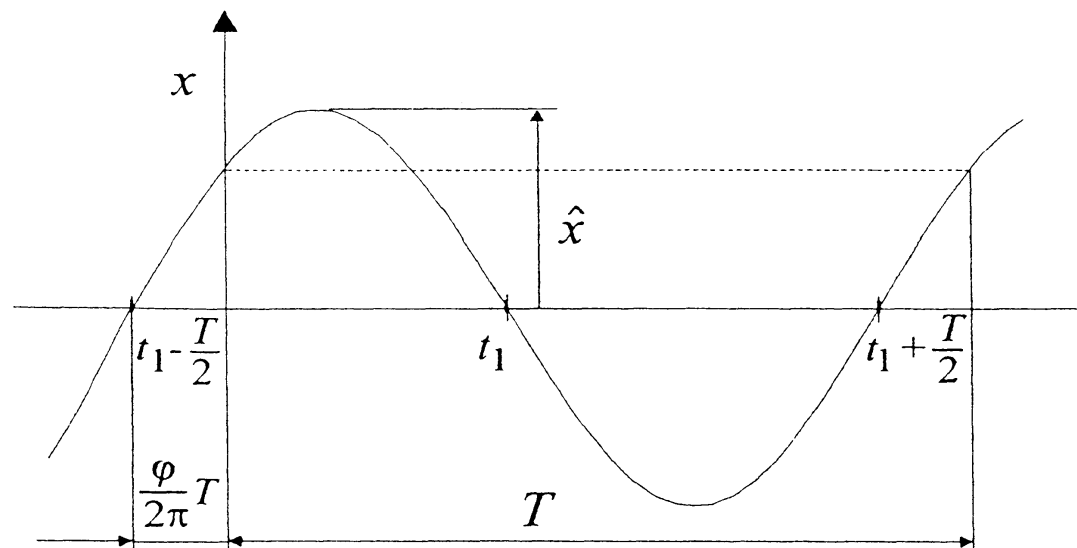
Usmerjena vrednost sinusne veličine:

$$X_r = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt = \frac{1}{T} \left[\int_{t_1 - T/2}^{t_1} x(t) dt - \int_{t_1}^{t_1 + T/2} x(t) dt \right]$$

- ker sta oba dela enaka, zapišemo:

$$X_r = \frac{1}{T/2} \int_{t_1 - T/2}^{t_1} x(t) dt = \frac{2\hat{x}}{\omega T} \int_{t_1 - T/2}^{t_1} \sin(\omega t + \varphi) d\omega t$$

- kar da: $X_r = \frac{2}{\pi} \hat{x}$





Efektivna vrednost sinusne veličine:

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1-T/2}^{t_1+T/2} x^2(t) dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_{t_1-T/2}^{t_1} x^2(t) dt} = \sqrt{\frac{2\hat{x}^2}{\omega T} \int_{t_1-T/2}^{t_1} \sin^2(\omega t + \varphi) d\omega t}$$

- kar da: $X = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$

Oblikovni faktor sinusne veličine:

$$F_0 = \frac{X}{X_r} = \frac{\hat{x}/\sqrt{2}}{2\hat{x}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,111$$

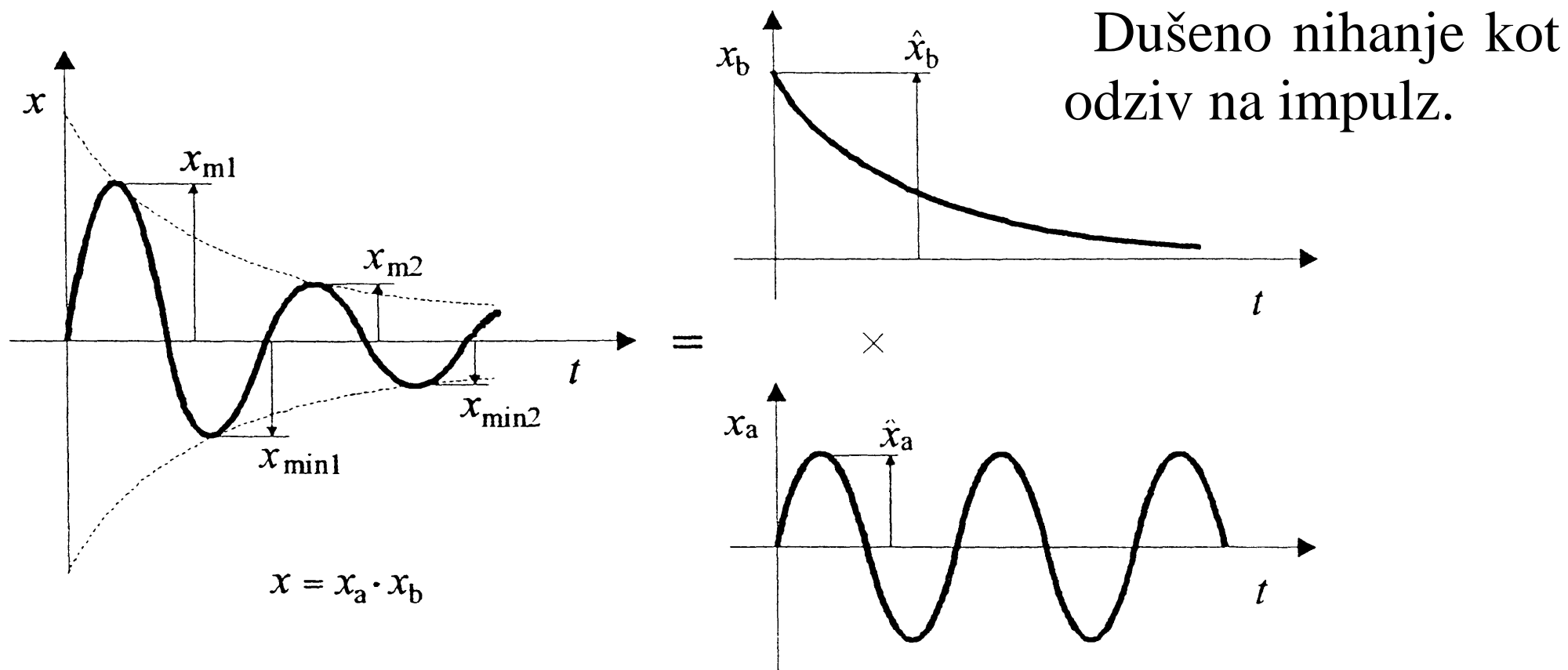
Temenski faktor sinusne veličine:

$$C_0 = \frac{\hat{x}}{X} = \frac{\hat{x}}{\hat{x}/\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,414$$



1.3.3 Neperiodične veličine

- se ne obnavljajo identično v enakih časovnih intervalih,
- opis **prehodnih pojavov**.

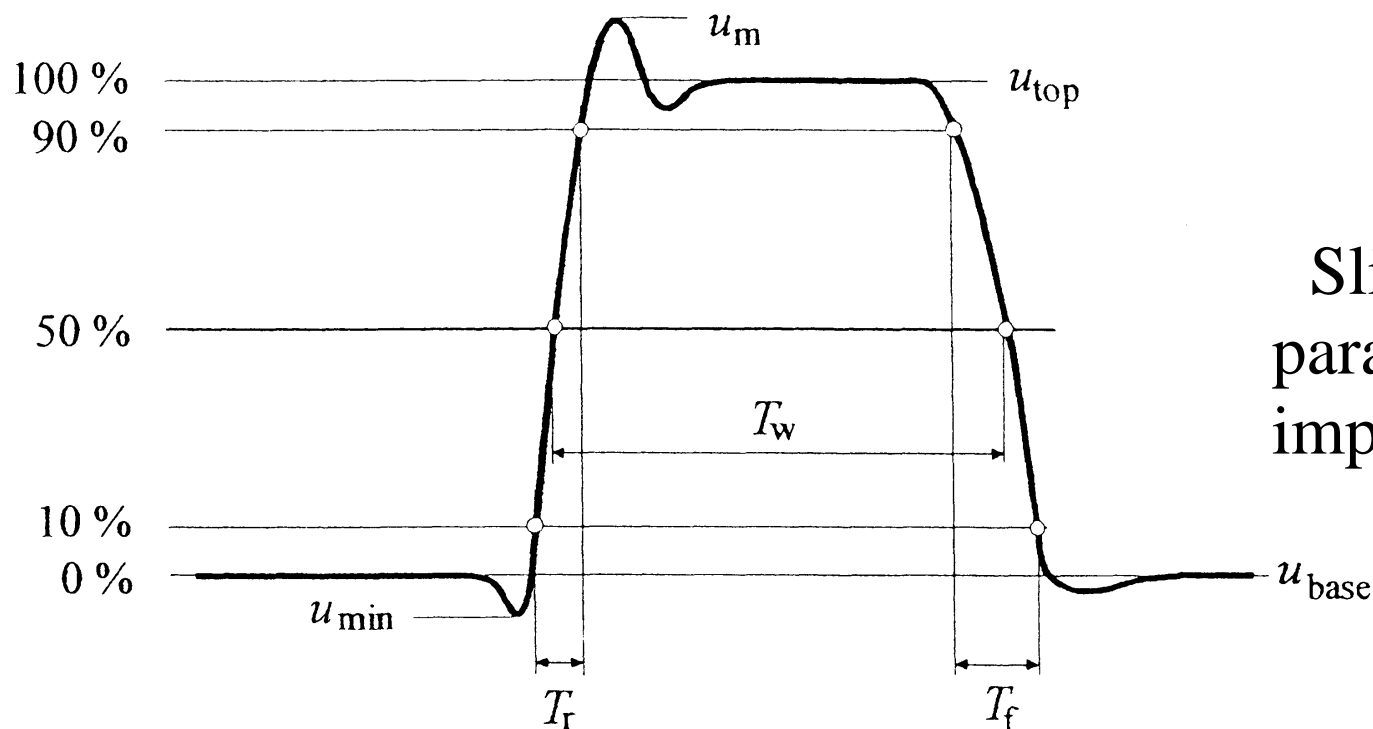


Slika 1.38 Neperiodična veličina



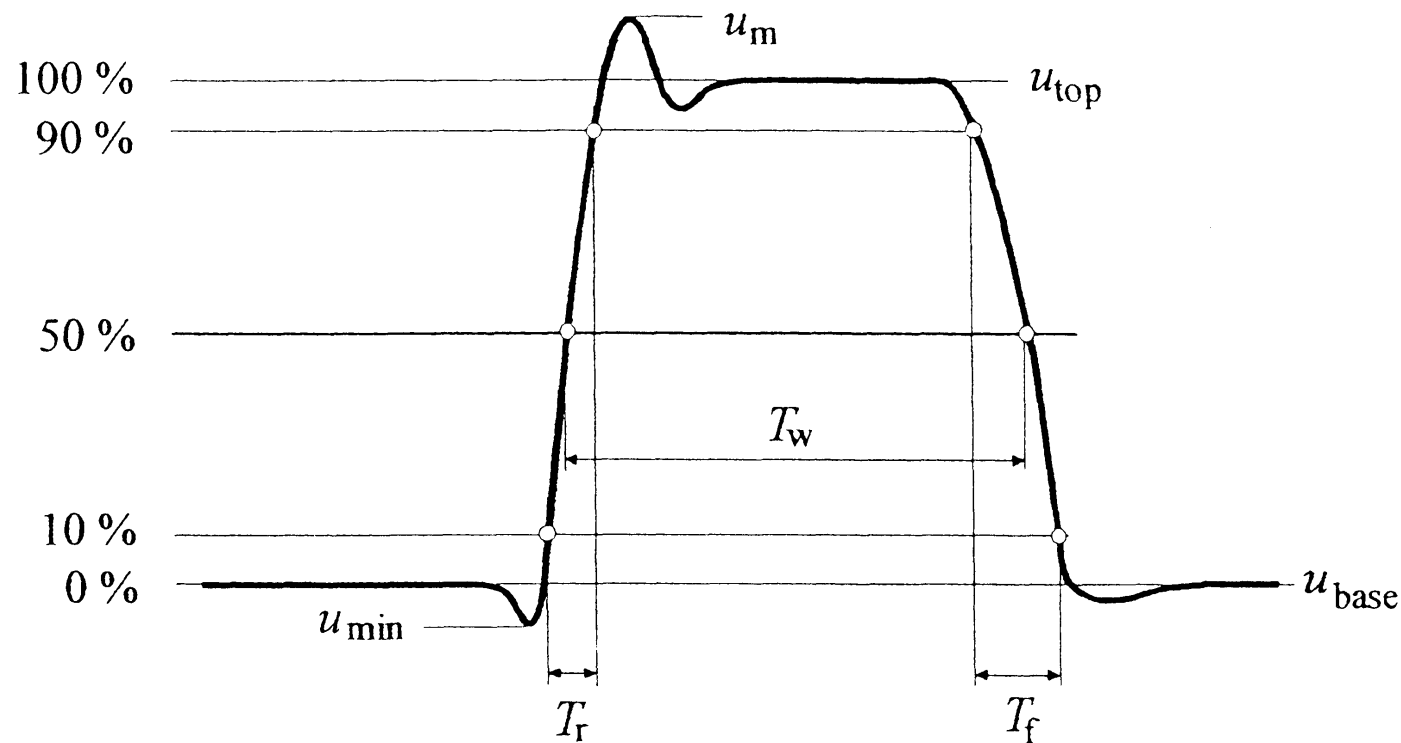
Parametri napetostnih impulzov:

- izhiščna parametra:
 - osnovni ali **spodnji** nivo (u_{base} , 0%),
 - **zgornji** nivo (u_{top} , 100%),
 - **prevladujoči** vrednosti v histogramu



Slika 1.39 Nekateri parametri napetostnega impulza

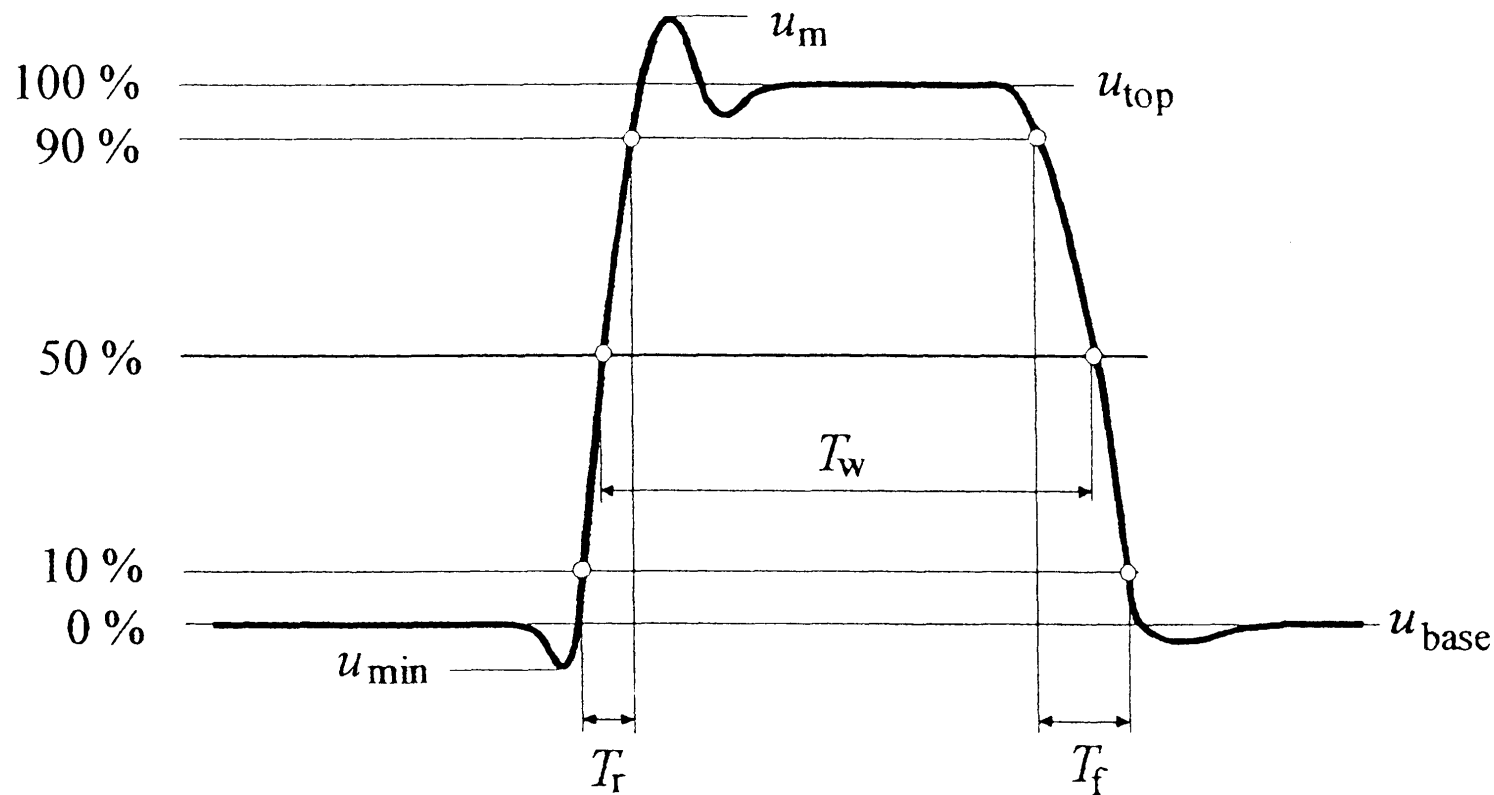




- Če ni prevladujočih vrednosti, je $u_{\text{base}} = u_{\min}$ in $u_{\text{top}} = u_m$.

Z obema izhodiščnima nivojema 0% in 100% sta določena tudi **nivoja** 10% in 90% za določitev **dvižnega časa** T_r in **upadnega časa** T_f .





Ugotovimo lahko tudi nivo 50%, ki določa **širino impulza** T_w .

- Pri ponavljajočih pulzih je to nivo za merjenje in določanje **periode, frekvence in relativne širine** impulza.





Dvižni rob je popoln:

- če prečka v pozitivni smeri 10% nivo,
- 50% nivo lahko tudi večkrat (v pozitivni in negativni smeri),
- in 90% nivo, ne da bi dodatno prečkal 10% nivo.

Upadni rob

- definiran podobno kot dvižni rob le v negativni smeri (90% → 50% → 10%).





2. Pogreški pri merjenju in merilna negotovost

Kljub ‘**objektivnosti**’ merilnega postopka **ne dobimo prave** vrednosti veličine. Vzroki:

- učinki **vplivnih** veličin,
- **nepopolnost** merilnih **metod**,
- **nepopolnost** merilnih **naprav**, ...





Opravka imamo z **merilnim pogreškom**.

- **Absolutni** (merilni) **pogrešek** podan z enotami:

$$E = x_i - x$$

- **Relativni** (merilni) **pogrešek** v razmerju do (delovne) prave vrednosti:

$$e = \frac{E}{x} = \frac{x_i - x}{x}$$

- podan v procentih ($1\% = 10^{-2}$) je **procentualni** pogrešek:

$$e = 100 \frac{E}{x} \% = 100 \frac{x_i - x}{x} \%$$

- tudi v **promilih** ($1\text{‰} = 10^{-3}$) in **milijoninkah** (ppm – part per million: $1 \text{ ppm} = 10^{-6}$).





Primer:

- izmerjena vrednost: $C_i = 62,7 \text{ nF}$;
- prava vrednost: $C = 63,4 \text{ nF}$;
- absolutni pogrešek: $E = C_i - C = 62,7 \text{ nF} - 63,4 \text{ nF} = -0,7 \text{ nF}$
- relativni pogrešek: $e = \frac{C_i - C}{C} = \frac{-0,7 \text{ nF}}{63,4 \text{ nF}} = -0,011 = -1,1\%$

Pri merah je pogrešek definiran kot:

- **razlika nazivne** (označene) vrednosti in **prave** vrednosti.

Primer:

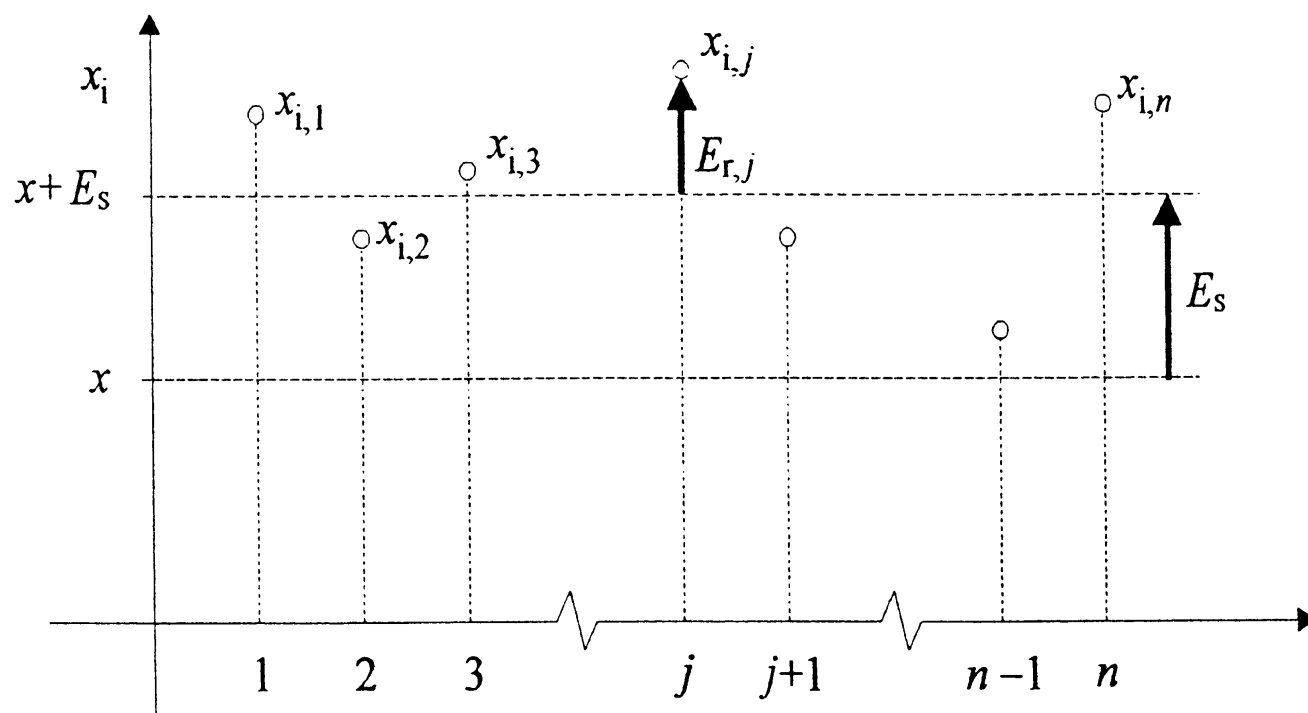
- nazivna vrednost uporovnega etalona: $R_N = 1000 \Omega$;
- s precizno napravo ugotovljena prava vrednost: $R = 999,7 \Omega$
- pogrešek: $E = R_N - R = 1000 \Omega - 999,7 \Omega = 0,3 \Omega$,
 $e = 3 \cdot 10^{-4}$ ali $e = 0,03\%$





2.1 Sistematični in naključni pogrešek

Če se meritev ponovi z isto merilno napravo, pod enakimi pogoji, se nova izmerjena vrednost v splošnem razlikuje od prejšnje.



x - prava vrednost veličine,
 $x_{i,j}$ - j -ta izmerjena vrednost,
 E_s - sistematični pogrešek,
 $E_{r,j}$ - naključni pogrešek j -te izmerjene vrednosti,
 n - število ponovljenih meritev.

Slika 2.1 Potek izmerjenih vrednosti pod enakimi pogoji





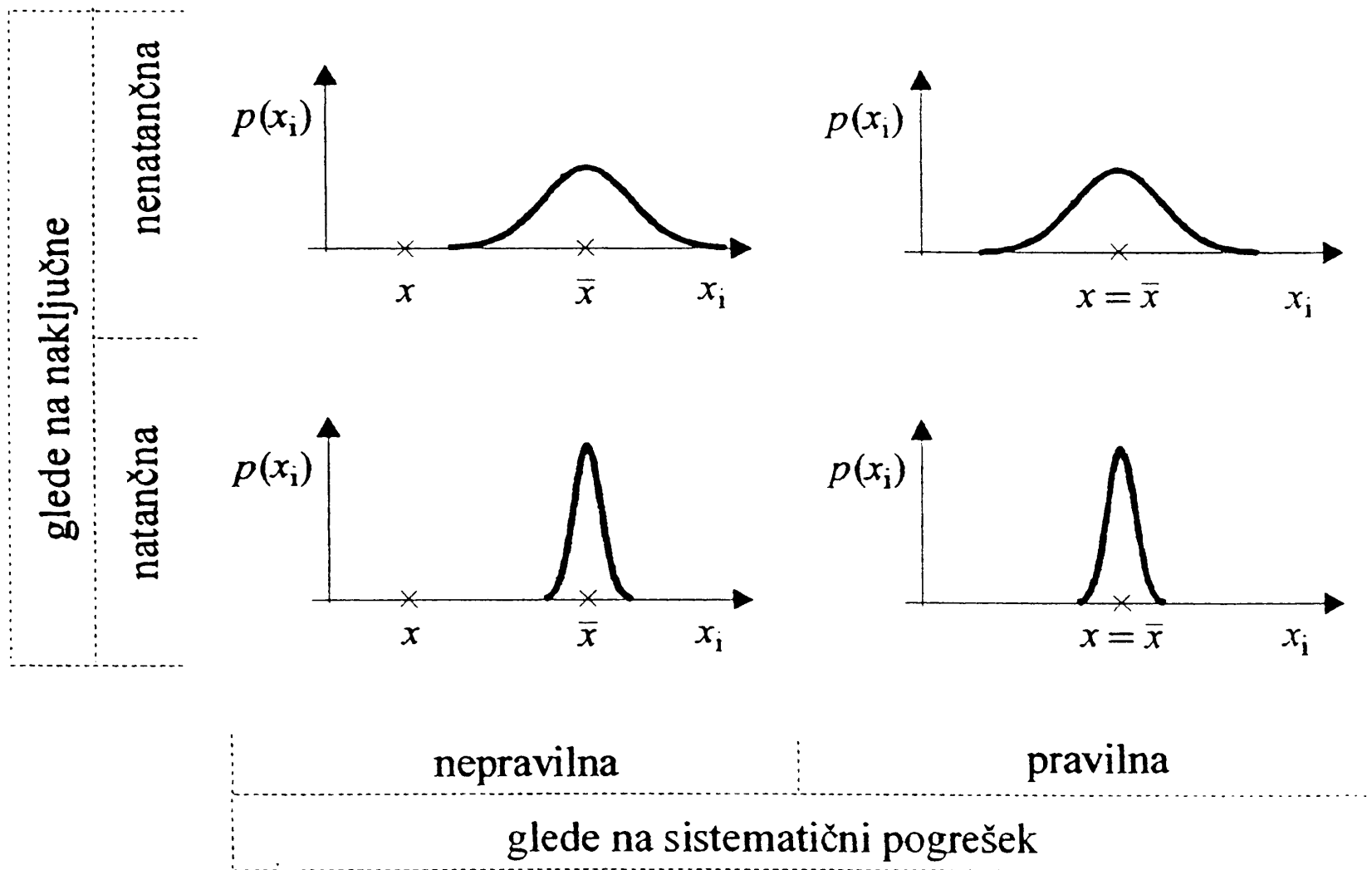
Ločimo:

- **sistematični** pogrešek – **meritev je nepravilna**,
 - vzrok povzroča **nespremenjeni** učinek,
 - načeloma **ugotovljiv** in ga lahko izločimo.
- **naključni** pogrešek – **meritev je nenatančna**,
 - vzroki povzročajo **naključno razpršenost** izmerjenih vrednosti,
 - naključnega pogreška **ne moremo kompenzirati**.





Točna meritev je **pravilna** in **natančna**.



Slika 2.2 Meritev glede na vpliv sistematičnega in naključnih pogreškov





Povezava med izmerjeno in pravo vrednostjo:

$$x_{i,j} = x + E_j = x + E_s + E_{r,j}$$

- **aritmetična sredina** izmerjenih vrednosti:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x + E_s + E_{r,j}) = x + E_s + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_{r,j}$$

- ker je **pogostost** nastopa naključnih **pozitivnih in negativnih** pogreškov **enaka**, se njihov **vpliv s ponavljanjem manjša**:

$$n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_{r,j} \rightarrow 0$$

- če je število ponovitev **pod ‘enakimi’ pogoji** veliko:

$$n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x + E_s$$





$$n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x + E_s ! \quad \Rightarrow \quad E_s = \bar{x} - x$$

- **aritmetična sredina** neskončne množice izmerjenih vrednosti še **ni enaka pravi** vrednosti!
- poglavitni vir netočnosti je **sistematični pogrešek!**
 - **odkrivamo** ga:
 - **z različnimi metodami,**
 - **spreminjamo** posamezne **dele** merilne naprave,
 - **spreminjamo** vplivne veličine,
 - **primerjamo** z meritvami **drugih** laboratorijev.
 - v celoti ga ne moremo odpraviti!
 - **znižamo** ga do tiste mere, ki je zahtevana ali **gospodarsko upravičena.**





Pogrešek naj bo tolikšen, da še omogoča pravilno sklepanje in nadaljnje odločitve.

Korekcija ali popravek je enak odkritemu delu sistematičnega pogreška z nasprotnim predznakom.

- ker sistematski pogrešek ni v popolnosti znan, tudi **korekcija ni popolna.**

Grobi pogreški:

- odčitavanje na napačni skali,
- napačna raba instrumentov,
- napačno računanje,
- pokvarjena merila, ...





2.1.1 Razširjanje pogreškov

Sistematični in naključni pogrešek **pri posredno** merjeni veličini (npr.: $R = U/I$, $P = UI \cos \varphi$)

- določimo ga s pogreški neposredno merjenih veličin - **razširjanje pogreškov**.
 - zanima nas, kako posamezna **neposredno** merjena veličina **vpliva na posredno** merjeno veličino?

$$y = f(x)$$

Sprememba x za dx povzroči spremembo y za dy :

$$y + dy = f(x + dx)$$





$$y + dy = f(x + dx)$$

- po razvoju desne strani v **Taylorjevo vrsto** in **zanemaritvi** členov drugega in višjega reda dobimo:

$$y + \underline{dy} = f(x) + \underline{f'(x)dx} + f''(x)\frac{d^2x}{2!} + \dots$$

- in od tod: $dy = f'(x)dx$

oz. $\Delta y = f'(x)\Delta x$ (končne spremembe)

- če je Δx majhna, smemo člene višjih redov zanemariti!





Kadar je posredno merjena veličina **funkcija** N **spremenljivk**:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_N} \Delta x_N = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i$$

- **Sistematični pogrešek** posredno merjene veličine dobimo iz sistematičnih pogreškov neposredno merjenih veličin.

$$E_{s,y} = \frac{\partial y}{\partial x_1} E_{s,1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} E_{s,2} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_N} E_{s,N} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y}{\partial x_i} E_{s,i}$$

- enačba ima pomen **pri** močno **nelinearnih** sistemih.
- v praksi **korigiramo** sistematske pogreške že **pri neposredno** merjenih veličinah.
- Ker je narava **naključnih pogreškov** drugačna (predznak in velikost nista znana) se drugače razširjajo - geometrično





2.2 Statistična obdelava izmerjenih vrednosti

Iz vrste meritev, ki so **ponovljene pod enakimi pogoji**, dobimo najboljšo **oceno za pravo** vrednost.

Na osnovi **vzorca** (končno število izmerkov) **spoznamo lastnosti celotne populacije** (neskončno število meritev).

- **predvidimo** lahko pričakovane **rezultate bodočih merenj** pod enakimi pogoji.
- **sistematični pogrešek** ne moremo odpraviti!





2.2.1 Aritmetična sredina in eksperimentalni standardni odklon

Če ima vzorec n izmerkov $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}$ je aritmetična sredina:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j}$$

in eksperimentalni standardni odklon (merilo razpršenosti):

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Kvadrat standardnega odklona je **varianca**: $v(x) = s^2(x)$





Pri **velikem** n je eksperimentalni standardni odklon **enak srednji kvadratični vrednosti** naključnih pogreškov:

$$n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad x_{i,j} - \bar{x} = (x + E_s + E_{r,j}) - (x + E_s) = E_{r,j}$$

in zato:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n-1}} \approx \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n E_{r,j}^2}{n-1}}$$

- Standardni odklon se od izmerka do izmerka ne spreminja.
- Je **ocena za srednjo kvadratično vrednost** naključnih pogreškov,
- **Merilo negotovosti** aritmetične sredine!





Če se izmerjene vrednosti $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,m}$ **ponavljajo** s **frekvencami** (število ponovitev) f_1, f_2, \dots, f_m , je aritmetična sredina:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m f_j x_{i,j}}{\sum_{j=1}^m f_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m f_j x_{i,j}$$

in eksperimentalni standardni odklon:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m f_j (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n-1}}$$





Zgled:

Kolikšni so aritmetična sredina, varianca in standardni odklon?

j	1	2	3	4	5	6
x_i	8,260	8,263	8,264	8,265	8,267	8,268
f	1	5	8	7	3	1

- aritmetična sredina:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 8,260 + 5 \cdot 8,263 + \dots + 1 \cdot 8,268}{1 + 5 + \dots + 1} = 8,2644$$

- varianca:

$$s^2(x) = \frac{1 \cdot (8,260 - 8,2644)^2 + 5 \cdot (8,263 - 8,2644)^2 + \dots}{25 - 1} = 2,76 \cdot 10^{-6}$$

- standardni odklon: $s(x) = 0,0017$





2.2.2 Združeni eksperimentalni standardni odklon

Včasih imamo na voljo **več (r) serij meritev** (ista merilna oprema, pod enakimi pogoji, ustaljeni merilni postopek)

- najboljša **ocena standardnega odklona celotne populacije** je **združeni eksperimentalni standardni odklon**:

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2(x) + (n_2 - 1)s_2^2(x) + \dots + (n_r - 1)s_r^2(x)}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_r - 1)}}$$

- n_r - število izmerkov in $s_r(x)$ - eksperimentalni standardni odklon r -te serije meritev.





2.2.3 Grupiranje, urejanje in prikazovanje podatkov

Množico izmerjenih vrednosti (pod enakimi pogoji) moramo **urediti** in jo podati z **nekaj značilnimi** vrednostmi.

Tabela 2.1 Niz 24 izmerjenih vrednosti

j	R_i/Ω	j	R_i/Ω	j	R_i/Ω	j	R_i/Ω
1	999,0	7	1001,6	13	998,5	19	1002,9
2	998,4	8	1001,4	14	1001,7	20	1003,3
3	1002,4	9	999,7	15	1000,1	21	1000,9
4	1000,9	10	1003,4	16	1001,0	22	999,9
5	999,3	11	999,0	17	1001,9	23	1001,4
6	1000,2	12	1001,0	18	997,6	24	1000,0





Časovno tendenco lahko grobo ocenimo iz grafa:



Slika 2.3 Grafična ponazoritev izmerjenih vrednosti

Korelacijski koeficient (analitični kriterij) med izmerjenimi vrednostmi in časom znaša le $r = 0,18$ → **podatki so 'neodvisni' od časa.**





Za uvrstitev podatkov v posamezni razred velja načelo polodprtega intervala: $R_{k,sp} \leq R_i < R_{k,zg}$

Tabela 2.2 Frekvenčna tabela

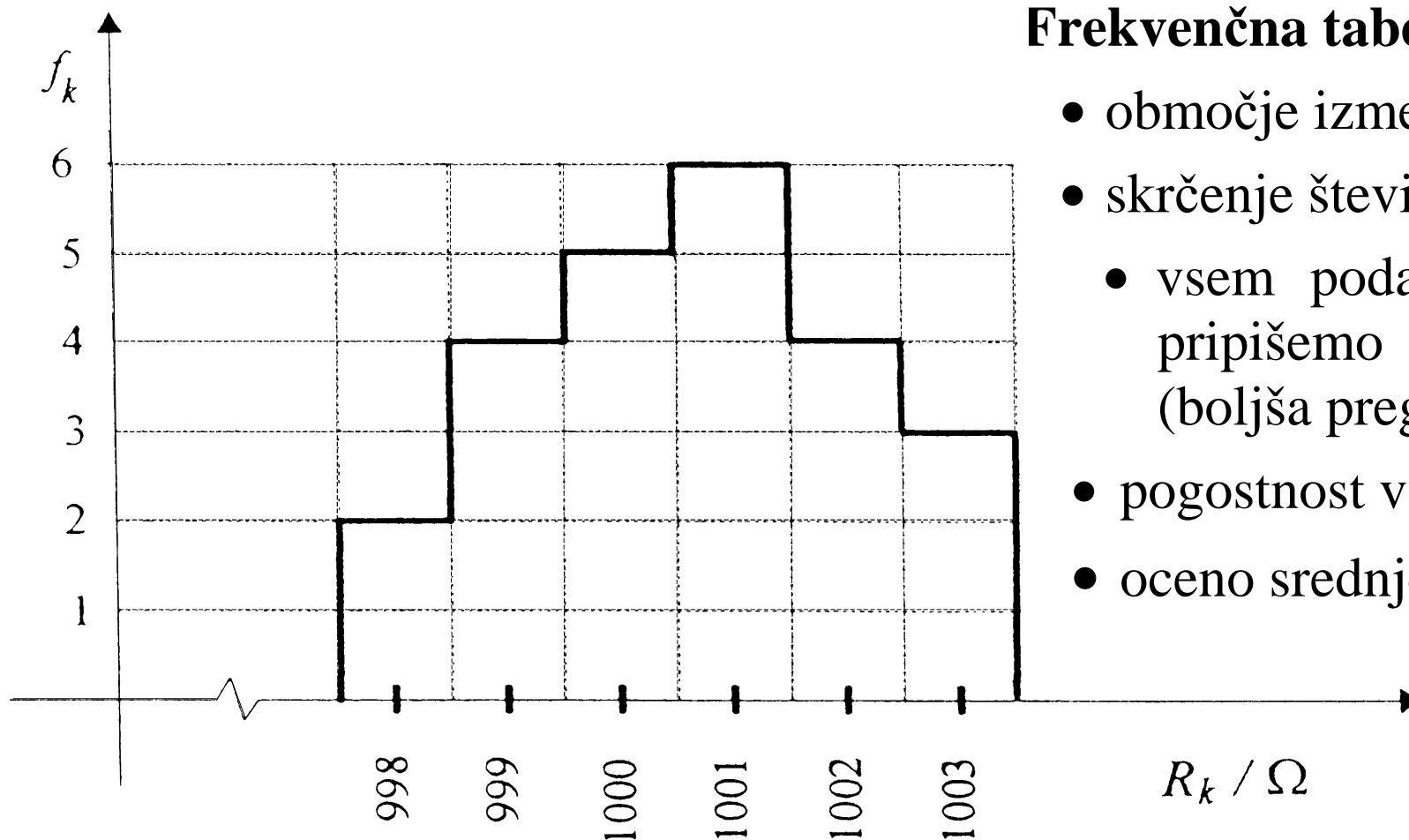
številka razreda k	sredina razreda R_k / Ω	meji razreda		frekvenca f_k		relativna frekvenca f'_k
		spodnja $R_{k,sp} / \Omega$	zgornja $R_{k,zg} / \Omega$			
1	998	997,5	998,5	II	2	0,083
2	999	998,5	999,5	III	4	0,167
3	1000	999,5	1000,5	<u>III</u>	5	0,208
4	1001	1000,5	1001,5	<u>III</u> I	6	0,250
5	1002	1001,5	1002,5	III	4	0,167
6	1003	1002,5	1003,5	III	3	0,125





2.2.3.1 Frekvenca

Frekvenca je število podatkov v posameznem razredu



Frekvenčna tabela pokaže:

- območje izmerjenih vrednosti,
- skrčenje števila podatkov,
 - vsem podatkom v razredu pripišemo srednjo vrednost (boljša preglednost),
- pogostnost v območju,
- oceno srednje vrednosti...

Slika 2.4 Histogram izmerjenih vrednosti upornosti

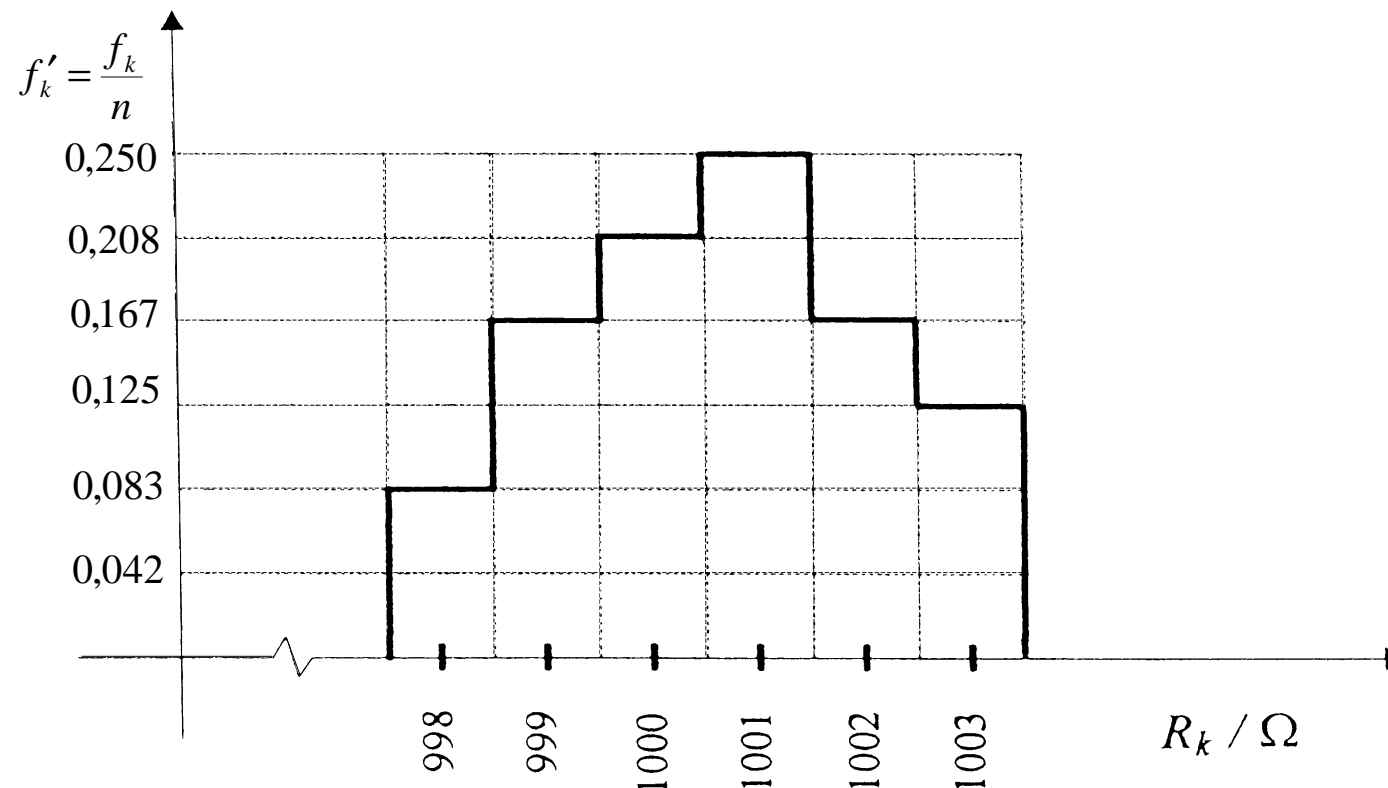




2.2.3.2 Relativna frekvenca

- relativno število podatkov v intervalu **glede na število**

vseh rezultatov: $f'_k = \frac{f_k}{n}$



Slika 2.5 Histogram z relativnimi frekvencami





Relativna frekvenca (oz. frekvenca) je lahko **enaka tudi ploščini stolpca** $f'_k/\Delta x$ (oz. $f_k/\Delta x$) Δx - širina razreda

- **ploščina** histograma je **enaka 1** – je normirana

Kadar primerjamo podatke merjenj z **različnim številom merjenj** je uporabnejša **relativna frekvenca!**

Če je **število meritev veliko** pod **enakimi pogoji** postajajo histogrami med seboj podobni - zelo **dober približek** histogramu **neskončne populacije** (normalni ali gaussni).





2.2.3.3 *Gaussova ali normalna porazdelitev*

Pri zelo **velikem številu meritev** ($n \Rightarrow \infty$) in manjšanju širine razreda ($\Delta x \Rightarrow 0$) dobi **histogram zvezni značaj**.

- merjena veličina lahko zavzame **katerikoli** vrednost,
- **verjetnost**, da zavzame neko določeno vrednost med neskončno možnostmi, **gre proti 0**.

Namesto verjetnosti vpeljemo **gostoto vejetnosti**:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_i < x < x_i + \Delta x)}{\Delta x} - \text{gostota relativne frekvence}$$

- **števec** je enak **verjetnosti**, da merjena veličina **leži v intervalu Δx** - ustreza **relativni frekvenci**.

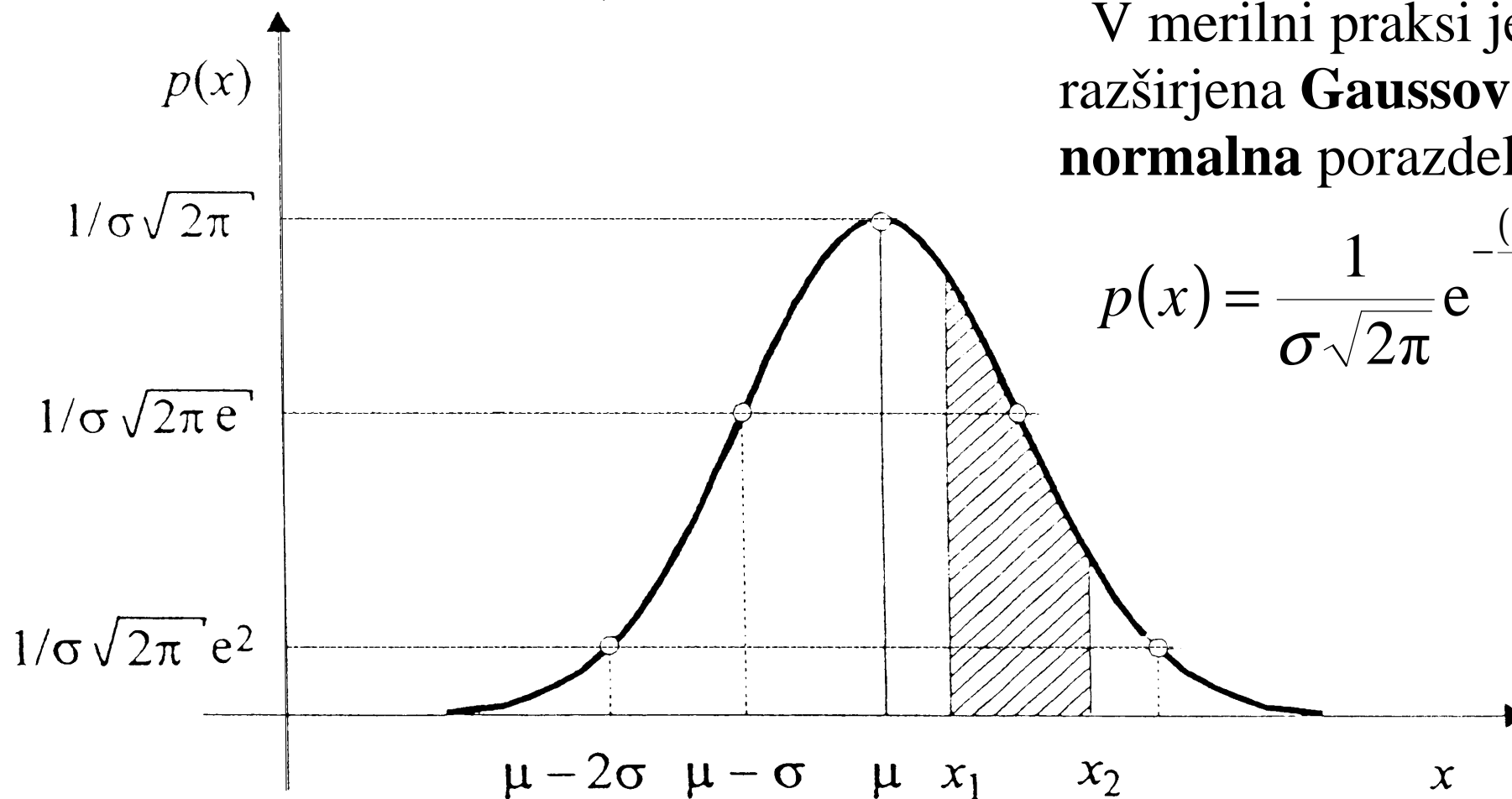




Gostota verjetnosti je pogosto kopaste oblike.

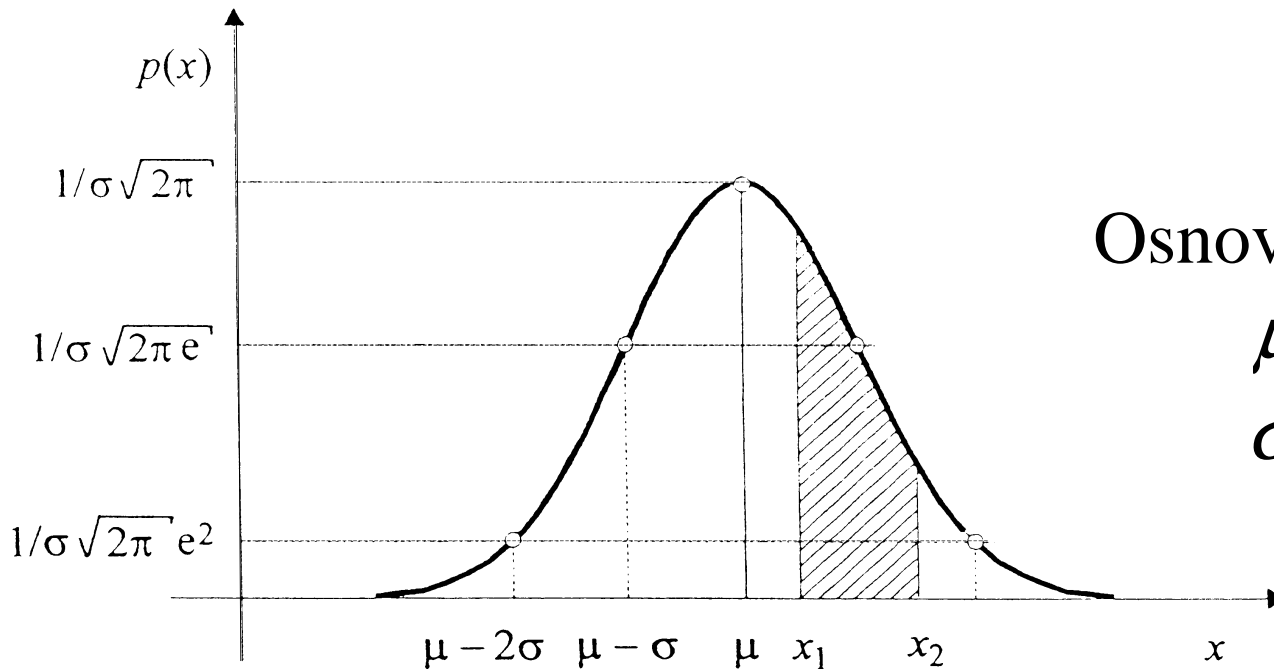
V merilni praksi je najbolj razširjena **Gaussova** ali **normalna** porazdelitev:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Slika 2.6 Gostota verjetnosti pri Gaussovi ali normalni porazdelitvi





Osnovna parametra populacije:
 μ - aritmetična sredina
 σ - standardna deviacija

Verjetnost, da se vrednost nahaja med x_1 in x_2 :

$$P_{12} = P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

Verjetnost, da se vrednost nahaja med $-\infty$ in $+\infty$:

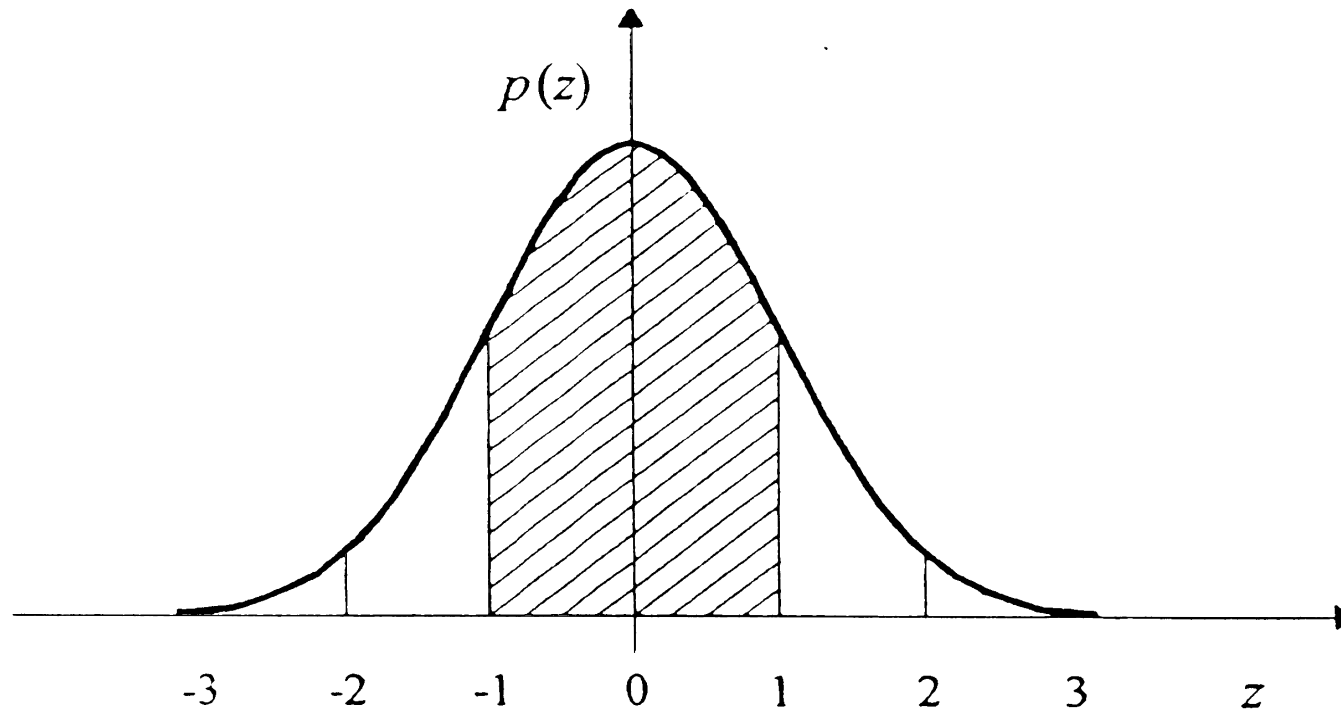
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (100\%)$$





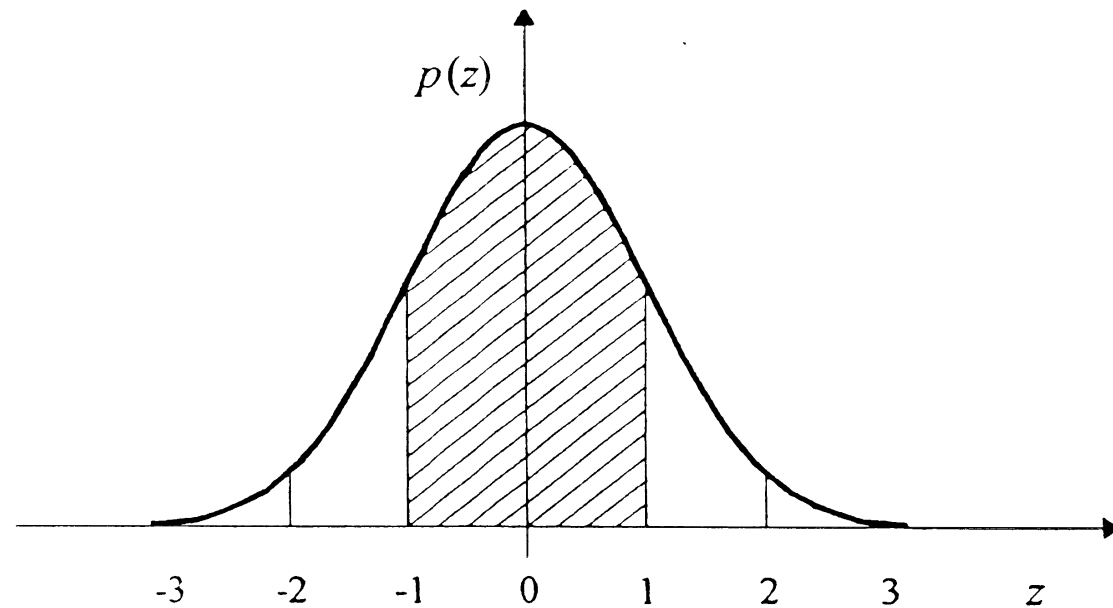
Če **normiramo** spremenljivko x z osnovnima parametroma μ in σ , dobimo **standardizirano normalno porazdelitev**:

$$z = (x - \mu) / \sigma \quad \Rightarrow \quad p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$



Slika 2.7 Standardizirana normalna porazdelitev





Osnovna parametra:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_1^n (x - \mu) / \sigma = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{n} \sum_1^n (x - \mu) \right) = 0$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (z - \bar{z})^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n z^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (x - \mu)^2 / \sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_1^n (x - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Verjetnost, da leži spremenljivka med $z_1 = -1$ in $z_2 = +1$:

$$P_{12} = 0,683 \quad (P_{12} = 68,3\%)$$

- 683 izmerkov od tisoč leži med $x_1 = \mu - \sigma$ in $x_2 = \mu + \sigma$





Tabela 2.3 Verjetnosti pri standardizirani normalni porazdelitvi

spodnja meja z_1	zgornja meja z_2	verjetnost, da se x nahaja v mejah	verjetnost, da se x nahaja izven meja
-0,675	+0,675	0,5	0,5
-1	+1	0,6826	0,3174
-1,96	+1,96	0,95	0,05
-2	+2	0,9543	0,0457
-2,58	+2,58	0,99	0,01
-3	+3	0,9973	0,0027
-3,9	+3,9	0,9999	0,0001





Zgled:

- Imamo oceno celotne populacije: $\mu = 220$, $\sigma = 3$;
- Kolikšna je verjetnost, da pogrešek pri merjenju ne bo večji od ± 2 ? ($220 \pm 2 = 218 \div 222$)

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{218 - 220}{3} \approx -0,67$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{222 - 220}{3} \approx +0,67 \quad \Rightarrow \quad P_{12} = 50\%$$



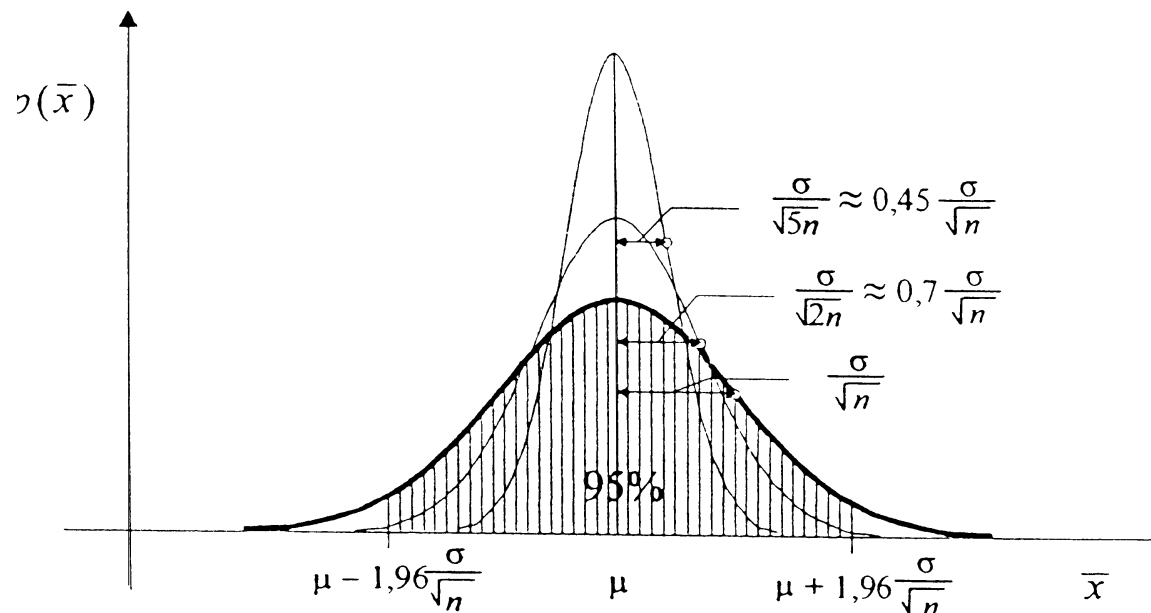


2.2.3.4 Standardni odklon aritmetične sredine in interval zaupanja

Če naredimo več (r) serij meritev z isto merilno opremo pod enakimi pogoji,

- je razpršenost **aritmetičnih sredin** $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ manjša od razpršenosti posameznih meritev.

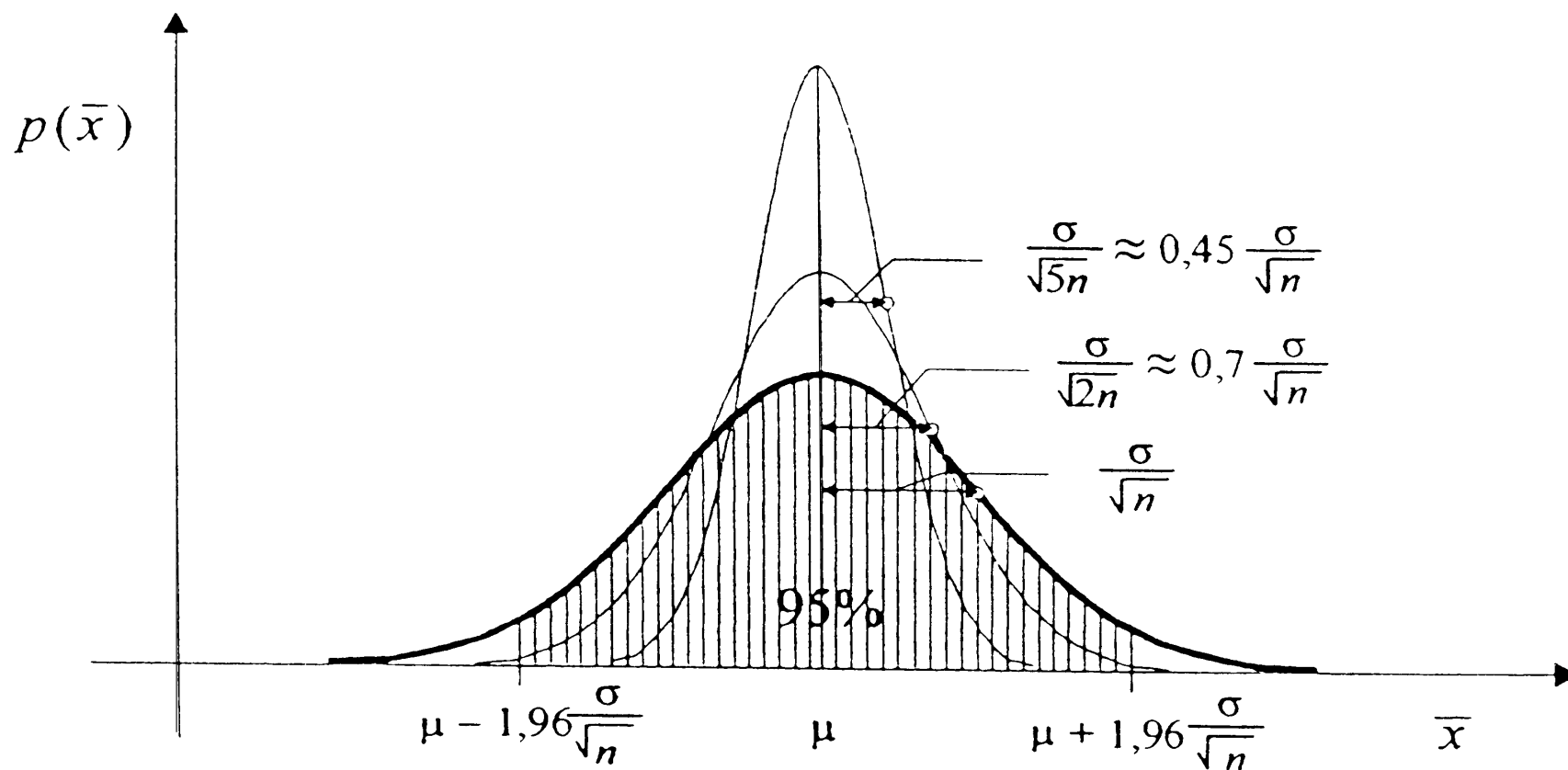
- Porazdelitev je **normalna!**





Standardni odklon aritmetične sredine: $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- odvisen od velikosti vzorca n



Slika 2.8 Gostota verjetnosti za aritmetične sredine za tri velikosti vzorcev





Tudi to porazdelitev lahko **standardiziramo** z:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma(\bar{x})} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Integral $P_{12} = \int_{z_1}^{z_2} p(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ **ni elementaren,**

- podan je **tabelarično.**

Iz obeh enačb lahko določimo interval, kjer se nahaja aritmetična sredina – **interval zaupanja:**

$$\mu = \bar{x} \pm z\sigma(\bar{x}) = \bar{x} \pm z\sigma/\sqrt{n}$$

- **spodnja meja:** $\mu = \bar{x} - z\sigma/\sqrt{n}$
- **zgornja meja:** $\mu = \bar{x} + z\sigma/\sqrt{n}$





Verjetnost za interval se imenuje stopnja ali raven zaupanja

- **Primer:** stopnja zaupanja je 95%
 - spodnja meja: $\mu = \bar{x} - 1,96 \sigma / \sqrt{n}$
 - zgornja meja: $\mu = \bar{x} + 1,96 \sigma / \sqrt{n}$

V praksi standardni odklon populacije σ nadomestimo z **eksperimentalnim standardnim odklonom** $s(x)$ in posledično tudi **eksperimentalnim standardnim odklon aritmetične sredine:**

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} \quad - \quad \text{tudi standardni pogrešek}$$





2.2.3.5 Studentova ali t -porazdelitev

Pri končnem številu meritev uporabljamo **Studentovo** ali **t -porazdelitev** (po Gossetu)

- simetrična in zvončaste oblike,
- z večanjem števila izmerkov **prehaja v normalno** porazdelitev
 - interval zaupanja: $\mu = \bar{x} \pm t s(\bar{x}) = \bar{x} \pm t s(x)/\sqrt{n}$
 - spodnja meja: $\mu = \bar{x} - t s(x)/\sqrt{n}$
 - zgornja meja: $\mu = \bar{x} + t s(x)/\sqrt{n}$
- t je parameter (podobno kot z pri Gaussni porazd.)
- odvisen od **stopnje zaupanja** p in **števila** izmerkov n (oz. števila **prostostnih stopenj** $\nu = n - 1!$)





Tabela 2.4 Vrednosti $t_p(\nu)$ za Studentovo porazdelitev za raven zaupanja p in ν prostostnih stopenj

število prostostnih stopenj ν	vrednosti za $t_p(\nu)$		število prostostnih stopenj ν	vrednosti za $t_p(\nu)$	
	$p = 95\%$	$p = 99\%$		$p = 95\%$	$p = 99\%$
1	12,71	63,66	12	2,18	3,05
2	4,3	9,92	14	2,14	2,98
3	3,18	5,84	16	2,12	2,92
4	2,78	4,60	18	2,10	2,88
5	2,57	4,03	20	2,09	2,85
6	2,45	3,71	30	2,04	2,75
7	2,36	3,50	40	2,02	2,70
8	2,31	3,36	50	2,01	2,68
9	2,26	3,25	100	1,98	2,63
10	2,23	3,17	∞	1,96	2,58





Zgled:

Kolikšen je interval zaupanja za $p = 95\%$ stopnjo zaupanja?

$$x_i : 273, 268, 275, 281, 286$$

- aritmetična sredina je:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j} = \frac{1}{5} (273 + 268 + 275 + 281 + 286) = 276,6$$

- eksperimentalni standardni odklon je:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(273 - 276,6)^2 + (268 - 276,6)^2 + \dots + (286 - 276,6)^2}{5-1}} = 7,02$$





- parameter Studentove porazdelitve je za:

$$\nu = n - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$p = 95\% \quad \Rightarrow \quad t_p(\nu) = t_{0,95}(4) = 2,78$$

- interval zaupanja:

$$\mu = \bar{x} \pm t s(x) / \sqrt{n} = 276,6 \pm 2,78 \cdot 7,02 / \sqrt{5} = 276,6 \pm 8,8$$

$$\text{ali} \quad 267,8 \leq \mu \leq 285,4$$





2.3 Pogreški merilnih instrumentov in njihove mejne vrednosti

Rezultat merjenja je območje vrednosti (ne ena sama vrednost!).

Prispevki k nedoločenosti merjenja pri **eni sami meritvi** imajo bolj **sistematično naravo**:

- **lastni pogrešek** merilnega instrumenta,
- **spremembo kazanja**, če nimamo referenčnih pogojev,
- **ločljivost**,
- odstopanje etalonov od nazivnih vrednosti,
- ne dovolj točen matematični model...
 - ti prispevki so dani z **mejnimi vrednostmi**.





2.3.1 Meja (lastnega) pogreška

Pogrešek instrumenta **ne sme preseči določene vrednosti** v mejah merilnega območja in **pod referenčnimi pogoji**.

Lastni ali temeljni pogrešek je posledica **notranjih lastnosti** instrumenta.

- Je **sistematični** pogrešek, ki ga povzročajo:
 - **staranje** vgrajenih preduporov, souporov in elektronskih sestavnih delov,
 - **preostala napetost**,
 - nezadostna temperaturna kompenzacija,
 - nenatančna graduacija skale,
 - trenje v ležajih,
 - necentrična namestitvev, itn.





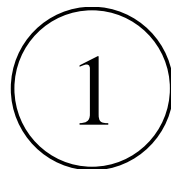
Če je instrument brezhiben **ne sme preseči** določene vrednosti – **meje pogreška**, ki je podana z **razredom točnosti** r in dogovorjeno **referenčno vrednostjo** x_r .

$$M_x = \pm \frac{r}{100} x_r$$

Referenčna vrednost x_r je lahko:

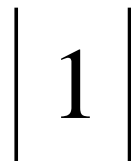
- a - **merilni doseg** x_D ,
- b – **vsakokratna izmerjena vrednost** x_i ,
- c - **merilni razpon** x_R ,
- d – **dolžina skale** l_D (se opušča).

1

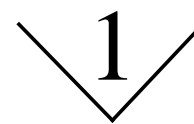


a:

b:



c:



d:





a) Največkrat je referenčna vrednost **merilni doseg** (praviloma zgornja meja merilnega območja): $M_x = \pm \frac{r}{100} x_D$ - konstanta

b) Meja pogreška **z izmerjeno vrednostjo** kot referenčno vrednostjo **linearno narašča**: $M_x = \pm \frac{r}{100} x_i$

c) Pri **merilnem razponu** – razlika zgornje in spodnje meje merilnega območja – imamo: $M_x = \pm \frac{r}{100} x_R$

d) Pri starejših instrumentih se uporablja tudi **dolžina skale**, kjer nastopa **občutljivost**: $M_x = \pm \frac{r}{100} \frac{l_D}{S}$





Absolutna meja pogreška: M_x

Relativna meja pogreška: $m_x = \frac{M_x}{x_i}$

- Če je referenčna vrednost **merilni doseg**, se **relativna meja spreminja**:

$$m_x = \pm \frac{r}{100} \frac{x_D}{x_i}$$

- Če je referenčna vrednost **vsakokratna izmerjena vrednost**, se **relativna meja ne spreminja**:

$$m_x = \frac{M_x}{x_i} = \pm \frac{r}{100} \frac{x_i}{x_i} = \pm \frac{r}{100}$$





Zgled:

- voltmeter: $r = 0,5$; $U_D = 100 \text{ V}$; $U_{i1} = 15,5 \text{ V}$;
 $U_{i2} = 92,4 \text{ V}$
- absolutna meja pogreška:

$$M_U = \pm \frac{r}{100} U_D = \pm \frac{0,5}{100} 100 \text{ V} = \pm 0,50 \text{ V}$$

- relativna meja pogreška:

$$m_{U_1} = \pm \frac{r}{100} \frac{U_D}{U_{i1}} = \pm \frac{0,5}{100} \cdot \frac{100 \text{ V}}{15,5 \text{ V}} = \pm 3,2 \cdot 10^{-2} = \pm 3,2 \%$$

$$m_{U_2} = \pm \frac{M_U}{U_{i2}} = \pm \frac{0,5 \text{ V}}{92,4 \text{ V}} = \pm 5,4 \cdot 10^{-3} = \pm 0,54 \%$$





Pri **digitalnih** merilnih instrumentih je **meja** pogreška sestavljena **iz dveh delov** (iz dosega in izmerjene vrednosti):

$$M_x = \pm(a x_i + b x_D) \quad m_x = \pm \left(a + b \frac{x_D}{x_i} \right)$$

Primer:

- voltmeter: $U_D = 2 \text{ V}$; $U_i = 1,2040 \text{ V}$;
 $M_U = \pm(0,05\% U_i + 0,02\% U_D)$

$$M_U = \pm \left(\frac{0,05}{100} 1,2040 \text{ V} + \frac{0,02}{100} 2 \text{ V} \right) = \pm(0,6 \text{ mV} + 0,4 \text{ mV}) = \pm 1,0 \text{ mV}$$

$$m_U = \frac{M_U}{U_i} = \frac{\pm 1,0 \text{ mV}}{1,2040 \text{ V}} = \pm 8,4 \cdot 10^{-4} = \pm 0,084\%$$





Včasih je delež z dosegom izražen v digitih (en **digit** – mesto **z** najmanjšo vrednostjo).

Primer: $M_U = \pm(0,5\% U_i + 2 \text{ dig}); \quad U_i = 1,347 \text{ V}$
 $1 \text{ dig} = 0,001 \text{ V}$

$$M_U = \pm \left(\frac{0,5}{100} 1,347 \text{ V} + 2 \cdot 0,001 \text{ V} \right) = \pm 8,8 \text{ mV}$$

$$m_U = \frac{M_U}{U_i} = \frac{\pm 8,8 \text{ mV}}{1,347 \text{ V}} = \pm 6,5 \cdot 10^{-3} = \pm 0,65\%$$

Meja pogreška je lahko izražena še z več deli:

$$M_U = \pm(0,05\% U_i + 0,03\% U_D + 2 \text{ dig} + 10 \mu\text{V})$$





2.3.2 Meja spremembe kazanja

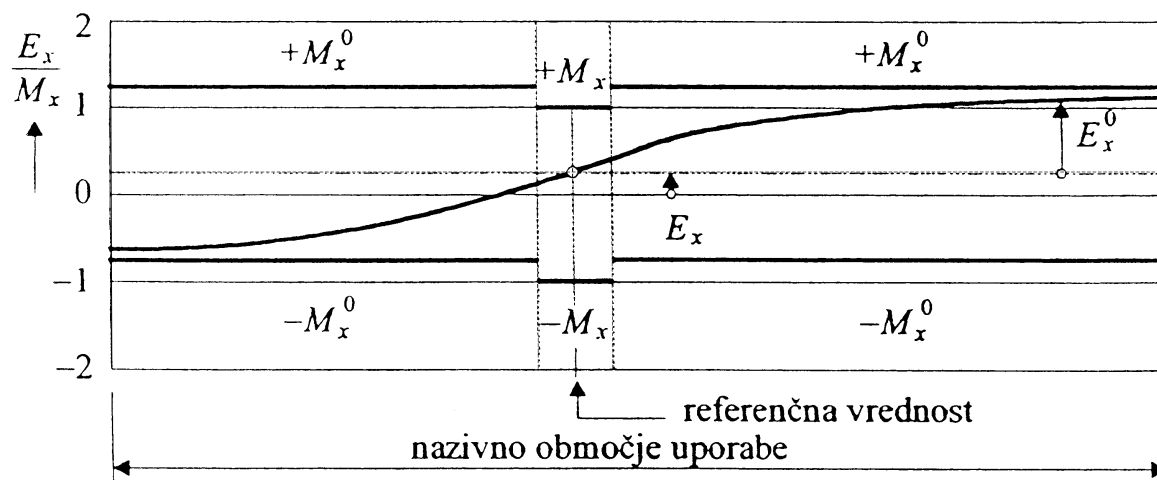
Kadar ena vplivna veličina ni v referenčnih pogojih (ostale vplivne veličine pa so) sprememba kazanja E_x^0 ne sme preseči meje spremembe kazanja M_x^0 :

$$M_x^0 = a \% M_x \quad - \quad \text{delež meje lastnega pogreška} \quad (a = 100)$$

Meja spremembe kazanja je določena na dva načina:

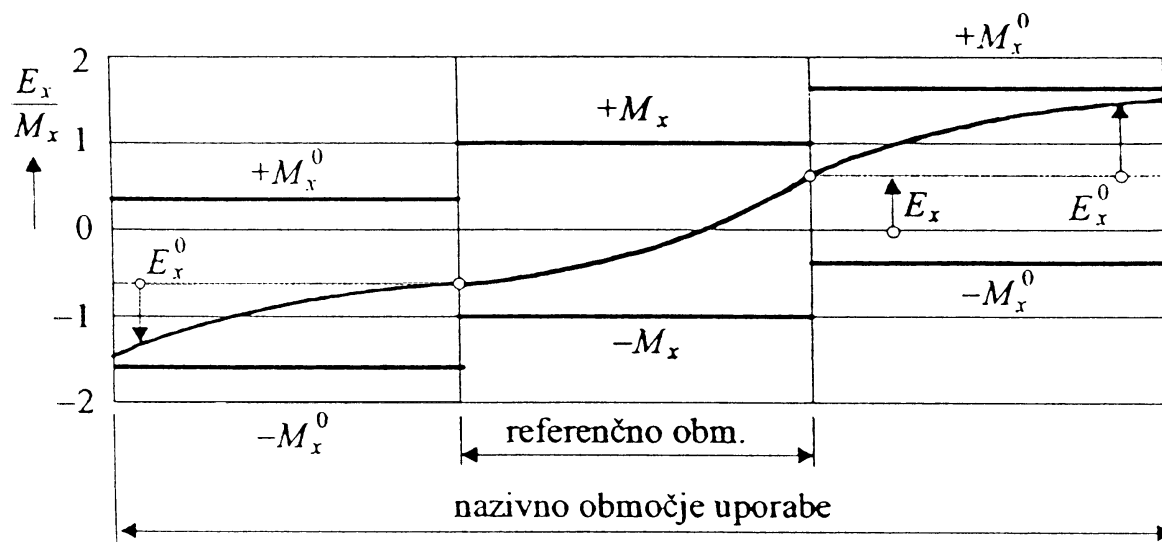
- z referenčno vrednostjo,
- z referenčnim območjem.





os, od katere se računa sprememba kazanja E_x^0

← Z referenčno vrednostjo



os, od katere se računa sprememba kazanja E_x^0

← Z referenčnim območjem

Slika 2.9 Meja pogreška in meja spremembe kazanja ($a = 100$)





Meja spremembe kazanja je praviloma **odvisna od oddaljenosti** od referenčnih pogojev.

Primer:

- voltmeter ima od 0°C do 20°C in od 30°C do 50°C
temperaturni koeficient : $\pm (0,03\% U_i + 0,05\% U_D) / ^\circ\text{C}$

$$U_i = 123,4 \text{ V}; U_D = 200 \text{ V} \quad \text{pri temperaturi: } t = 5^\circ\text{C}$$

- meja spremembe kazanja:

$$M_U^0 = \pm \left(\frac{0,03}{100} 123,4 \text{ V} + \frac{0,05}{100} 200 \text{ V} \right) (5^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) / ^\circ\text{C} = \pm 2,06 \text{ V}$$

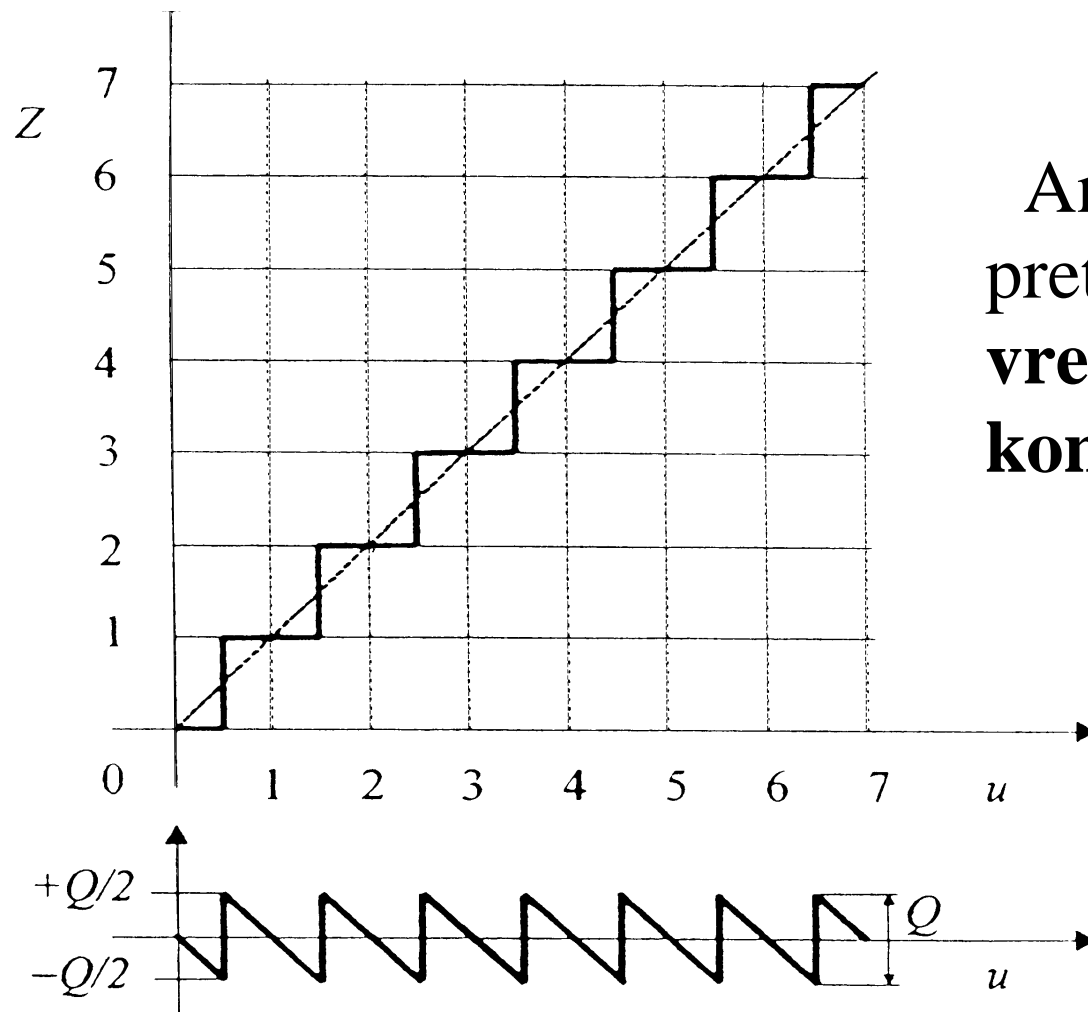
V referenčnih pogojih (npr.: od 20°C do 30°C) nas zanima **meja pogreška** M_x , **zunaj** pa tudi **meja spremembe kazanja**.

$$M_x^0 = a\% M_x$$





2.3.3 Mejni kvantizacijski pogrešek digitalnih instrumentov



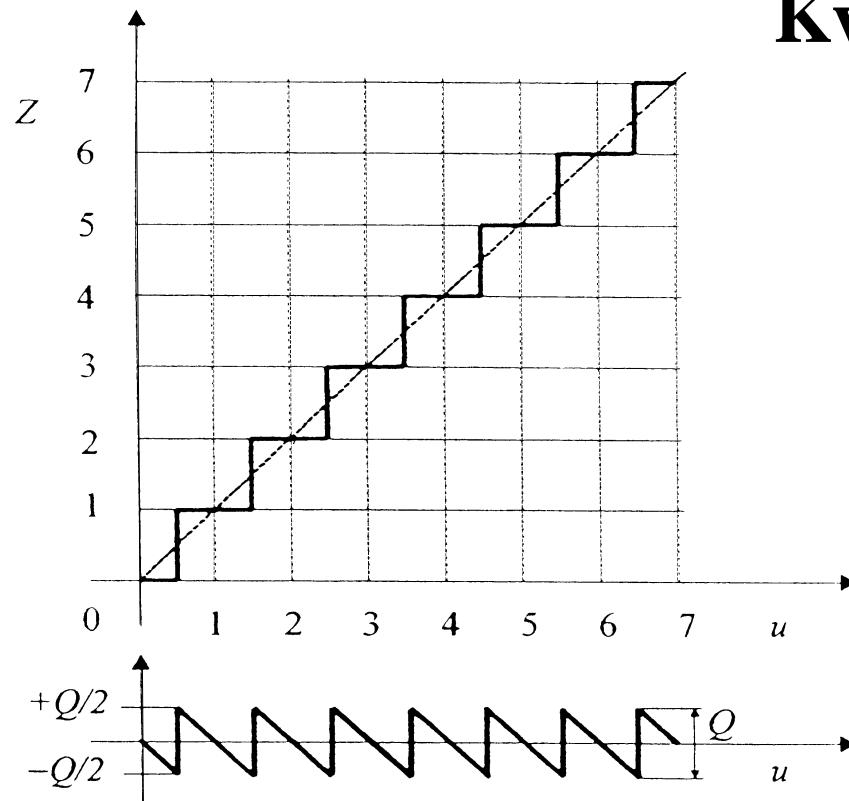
Analogno-digitalni pretvornik pretvori **neskončno število vrednosti** zveznega signala v **končno število** diskretnih.

Slika 2.10 Kvantizacijska karakteristika in kvantizacijski pogrešek





Kvantizacijska karakteristika:



- korak Q je ločljivost digitalnega merilnega instrumenta.
- pogrešek kvantizacije je v mejah $-Q/2$ in $+Q/2$,
- mejni kvantizacijski pogrešek: $\pm Q/2$

Primer: - voltmeter: $U_D = 2 \text{ V}$; $4 \frac{1}{2}$ - mestni prikazovalnik
 $U_i = 1,2040 \text{ V}$;

\Rightarrow ločljivost $100 \mu\text{V}$;

mejni kvantizacijski pogrešek $\pm 50 \mu\text{V}$





2.3.4 *Mejni pogrešek odčitavanja analognih instrumentov*

Pri analognih instrumentih **moramo sami** določiti številsko vrednost (**kvantizirati**).

- izhodna veličina instrumenta je dolžina l (položaj kazalca,
- **človeško oko loči** spremembe ene kotne **minute**,
 - pri razdalji 25 cm ustreza to $\Delta l \approx 0,07$ mm,

- ločljivost analognega instrumenta (+človek):

$$\Delta G = \Delta l / S \quad S = \Delta l / \Delta G - \text{občutljivost}$$

- pogrešek odčitavanja je **porazdeljen z enako verjetnostjo** od $-\Delta G/2$ do $+\Delta G/2$,
 - **mejni pogrešek odčitavanja je $\pm \Delta G/2$**





Primer: Če moremo odčitati vrednosti:

...52,6 mA, 52,7 mA, 52,8 mA, 52,9 mA, ...

⇒ - ločljivost je: 0,1 mA

- mejni pogrešek odčitavanja: $\pm 0,05$ mA

Odčitajmo vedno vsa mesta, ki jih omogoča skala instrumenta

in:

- **ne podajajmo številske vrednost bolj natančno, kot je ločljivost instrumenta – ni možno dokazati!**





2.4 Merilna negotovost

Merilna negotovost je **parameter**, ki **pripada merilnemu rezultatu**.

- Označuje **razpršenost** vrednosti, ki jih je mogoče **z določeno verjetnostjo** pripisati merjeni veličini.
 - Navaja **kakovost** merilnega rezultata: **manjša** kot je, **bolj kakovosten** je merilni rezultat.
- Če izhaja **iz niza neodvisnih opazovanj** (posledično iz **gostote verjetnosti**), govorimo **negotovosti tipa A** - u_A ;
- Če **ne izhaja iz niza** neodvisnih opazovanj (npr.: izhaja iz **domnevne gostote verjetnosti** pri eni meritvi), govorimo o **negotovosti tipa B** - u_B





Skupna negotovost je enaka geometrijski vsoti:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Ker je negotovost določena s **standardnim odklonom**, jo imenujemo tudi **standardna negotovost**.

Če želimo imeti **večjo verjetnost** (večjo stopnjo zaupanja), da leži resnična vrednost v **območju**, ki ga določa negotovost, uporabljamo **razširjeno negotovost** U .





2.4.1 Standardna negotovost tipa A - u_A

Če imamo niz izmerkov x_1, x_2, \dots, x_n , izmerjenih pod 'enakimi' pogoji, je:

- **aritmetična sredina** $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j}$
 - je najbolj verjetna vrednost ali **najboljša ocena** aritmetične sredine μ **celotne populacije**.

- **eksperimentalni standardni odklon** $s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n-1}}$
 - je **najboljša ocena standardnega odklona populacije** σ





- **eksperimentalni standardni odklon aritmetične sredine**

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

- je najbolj verjetna vrednost $\sigma(\bar{x})$ populacije

Ker imamo **ponovljena neodvisna opazovanja**, je **standardna negotovost tipa A** - eksperimentalni standardni odklon aritmetične sredine:

$$u_A(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = s(\bar{x})$$





Če nam je znan **združenji** eksperimentalni standardni odklon

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2(x) + (n_2 - 1)s_2^2(x) + \dots + (n_r - 1)s_r^2(x)}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_r - 1)}}$$

je **standardno negotovost** bolje oceniti z:

$$u_A(x) = \frac{s_p(x)}{\sqrt{n}}$$

Vedno je potrebno v rezultatu navesti **število meritev** oz.

število prostostnih stopenj: $v = \sum_{i=1}^r (n_i - 1) = \sum_{i=1}^r v_i$





2.4.2 Standardna negotovost tipa B - u_B

Kadar merilni rezultat **ne izhaja iz ponovljenih meritev**, se standardna negotovost izračuna na osnovi domneve (znanstveno in z izkušnjami) – **predpostavljene porazdelitve**:

- enakomerna,
- Gaussova,
- trikotna,
- Studentova, itn.
- trapezna,

Pri **eni meritvi** se standardna **negotovost tipa B** izračuna na osnovi:

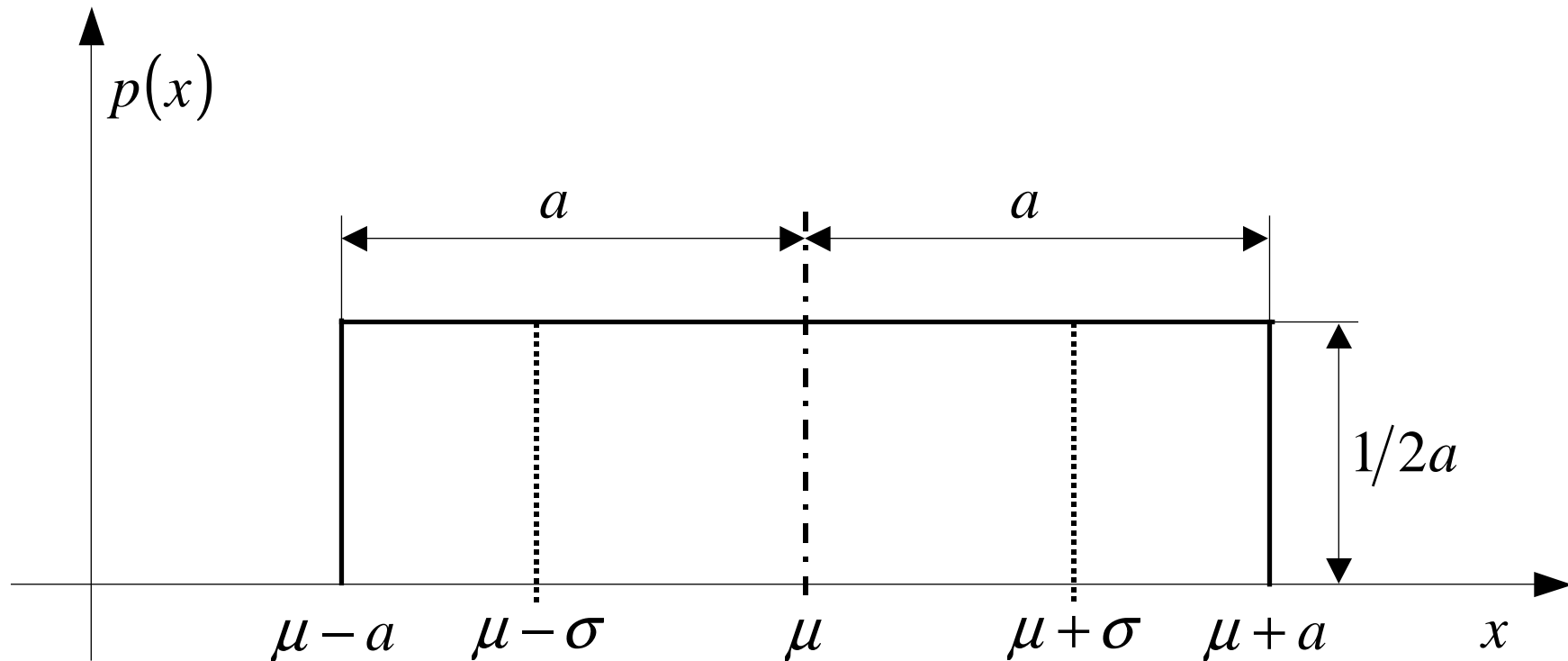
- **specifikacij** merilne opreme,
- podatkih o **umerjanju** meril,
- **toleranc** uporabljenih merilnih sredstev itn.





2.4.3 Enakomerna (pravokotna) porazdelitev

- Vse vrednosti veličine med spodnjo in zgornjo mejo so enako verjetne:

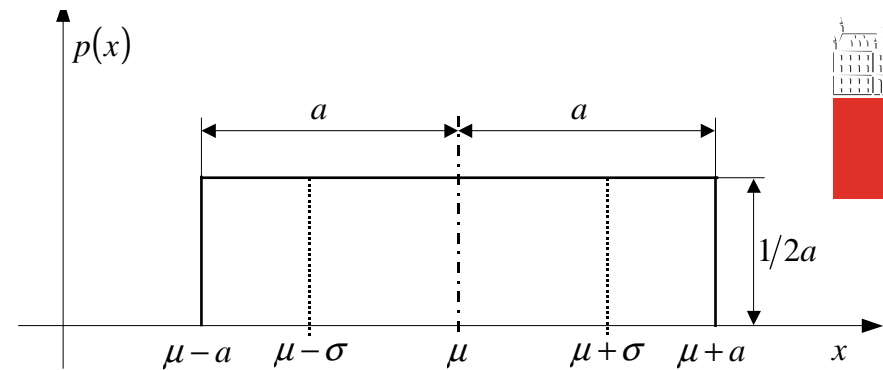


Slika 2.11 Enakomerna (pravokotna) porazdelitev (**gostota verjetnosti** je v mejah **enakomerna** $p(x) = 1/2a$)





- **aritmetična sredina**
(prvi vztrajnostni moment):



$$\int_{\mu-a}^{\mu+a} p(x) x dx = \frac{1}{2a} \frac{x^2}{2} \Big|_{\mu-a}^{\mu+a} = \frac{1}{2a} \frac{(\mu+a)^2 - (\mu-a)^2}{2} = \mu$$

- **varianca** (drugi vztrajnostni moment):

$$\int_{\mu-a}^{\mu+a} p(x) (x - \mu)^2 dx = \frac{1}{2a} \frac{(x - \mu)^3}{3} \Big|_{\mu-a}^{\mu+a} = \frac{1}{2a} \frac{(+a)^3 - (-a)^3}{3} = \frac{a^2}{3}$$

- **standardna negotovost** (tudi standardni odklon) pri enakomerni porazdelitvi:

$$u(x) = \sigma = \frac{a}{\sqrt{3}} \approx 0,58a$$

med $\mu - \sigma$ in $\mu + \sigma$ ca. 58% ($1/\sqrt{3}$) vseh vrednosti





Primer enakomerne porazdelitve je, kadar je podana **mejna vrednost lastnega pogreška** $a = M$.

Zgled:

- Digitalni voltmeter: $M_U = \pm(0,05\%U_i + 3\text{dig})$
 - po določenem času kaže $U_i = 56,183 \text{ V}$:

- mejna vrednost pogreška:

$$M_U = \pm(5 \cdot 10^{-4} \cdot 56,183 \text{ V} + 3 \cdot 0,001 \text{ V}) = \pm 31 \text{ mV}$$

- standardna negotovost:

$$u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = \frac{31 \text{ mV}}{\sqrt{3}} = 18 \text{ mV}$$

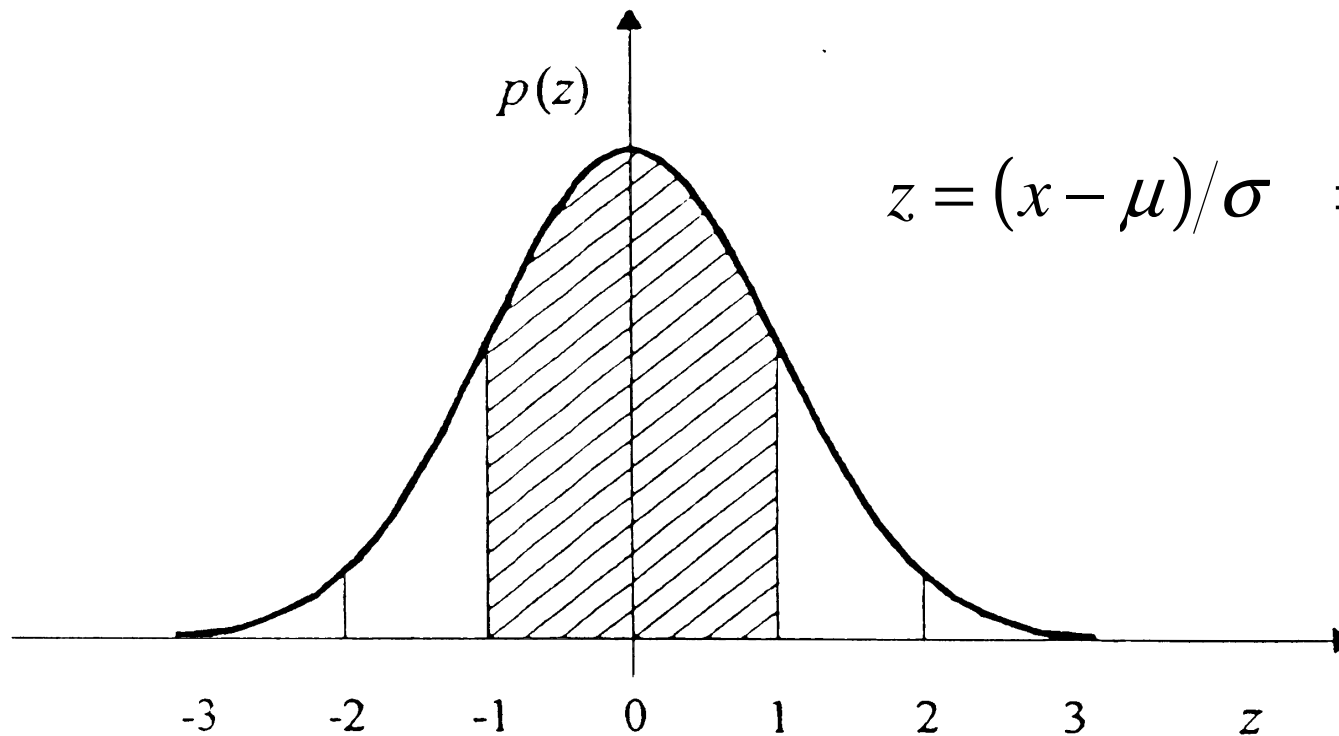
- popolni merilni rezultat:

$$U = 56,183 \text{ V}, \quad u(U) = 18 \text{ mV}, \quad n = 1 \text{ (ena meritev)}$$





2.4.4 Gaussova ali normalna porazdelitev



$$z = (x - \mu) / \sigma \Rightarrow p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

- interval zaupanja: $\mu - z\sigma/\sqrt{n} \dots \mu + z\sigma/\sqrt{n}$
- standardna negotovost: $u(x) = \sigma/\sqrt{n}$
- $z = ?$ dobimo ga iz stopnje zaupanja p (tabela)





Zgled:

- **Uporovni etalon:**

- nazivna vrednost: 10Ω
- iz certifikata za upornost: $10,000742\Omega \pm 129\mu\Omega$,
- $U_R = 129\mu\Omega$ - **razširjena negotovost**
- stopnja zaupanja $p = 99\% \Rightarrow z = 2,58$
- **standardna negotovost:**

$$u(R) = \frac{z \sigma / \sqrt{n}}{z} = \frac{129\mu\Omega}{2,58} = 50\mu\Omega$$





2.4.5 Studentova ali *t*-porazdelitev

- interval zaupanja: $\mu - t s(x)/\sqrt{n} \quad \dots \quad \mu + t s(x)/\sqrt{n}$
- **standardna negotovost:** $u(x) = s(x)/\sqrt{n}$
- parameter $t = ?$
 - dobimo ga iz stopnje zaupanja p in števila meritev (tabela)

Zgled: Upor za uporovni delilnik:

- 8-krat ponovljena meritev in 95% stopnji zaupanja:
 $\Rightarrow t = 2,36$
- pri 95% stopnji zaupanja je rezultat: $1492\Omega \pm 12\Omega$
- standardna negotovost: $u(R) = \frac{t s(x)/\sqrt{n}}{t} = \frac{12\Omega}{2,36} = 5\Omega$

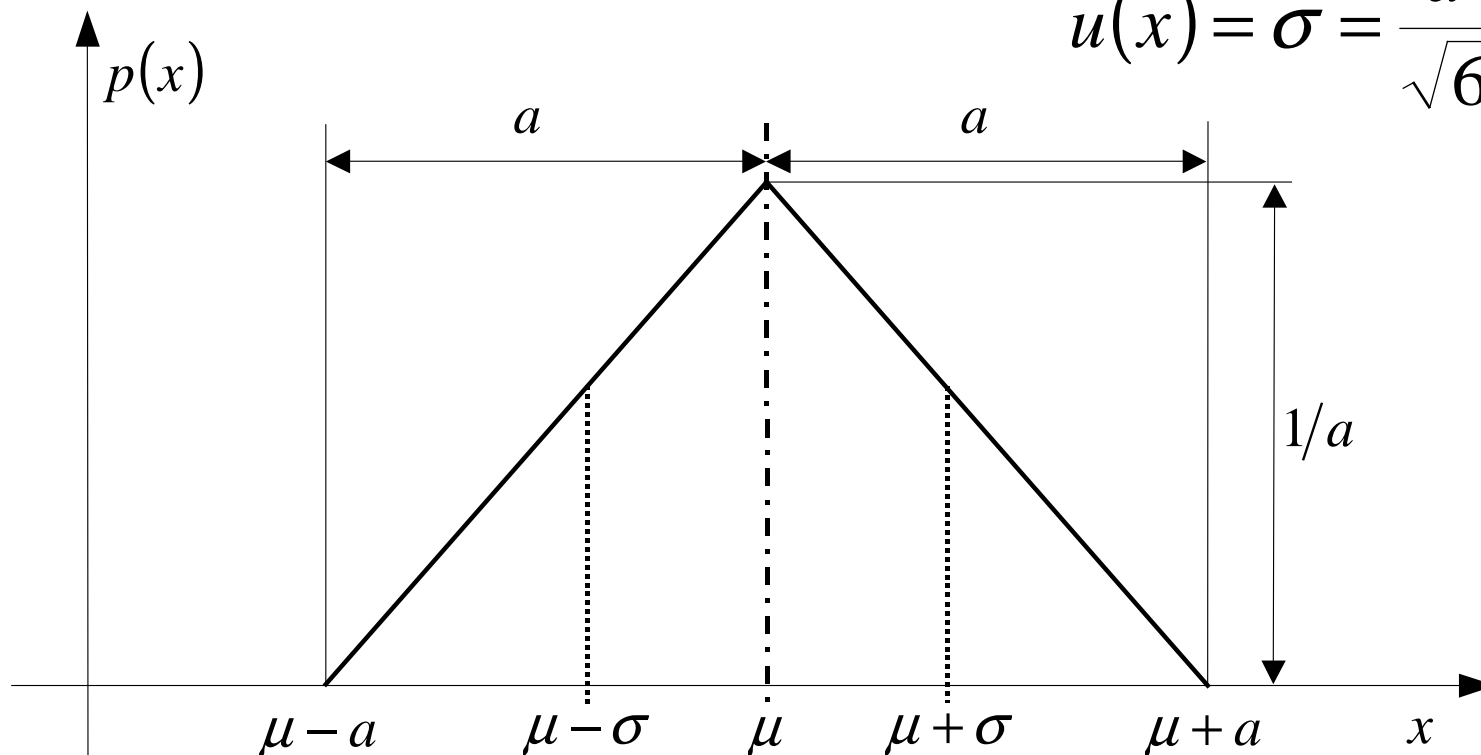




2.4.6 Trikotna porazdelitev

- aritmetična sredina: μ
- standardna negotovost:

$$u(x) = \sigma = \frac{a}{\sqrt{6}} \approx 0,41a$$



Slika 2.12 Trikotna porazdelitev

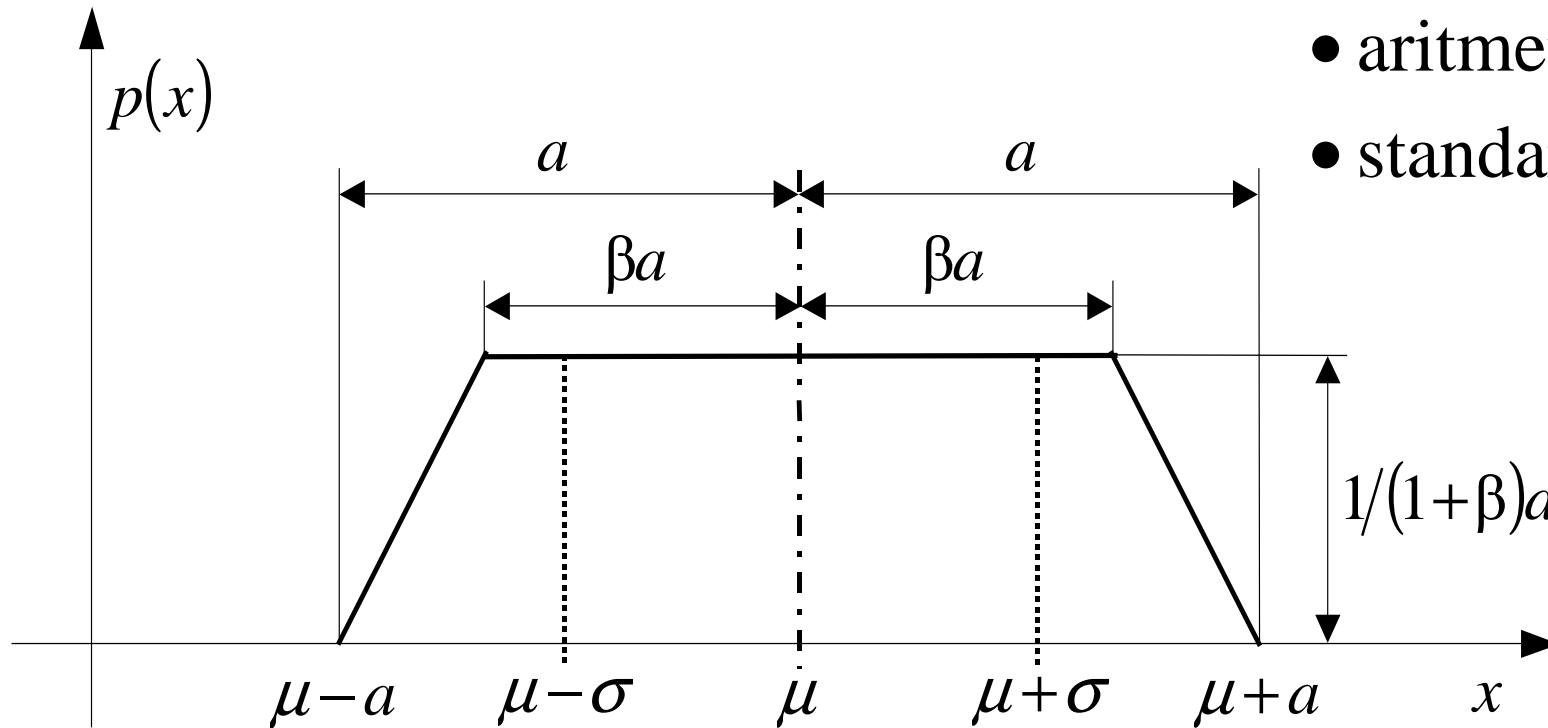
- Med $\mu - \sigma$ in $\mu + \sigma$ ca. 65% vseh vrednosti - že blizu normalne porazdelitve (68%).





2.4.7 Trapezna porazdelitev

Trapezna porazdelitev je konvolucija dveh enakomernih porazdelitev z mejama $\pm(1+\beta)a/2$ in $\pm(1-\beta)a/2$



- aritmetična sredina: μ
- standardna negotovost

$$u(x) = \frac{a\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{6}}$$

Slika 2.13 Trapezna porazdelitev

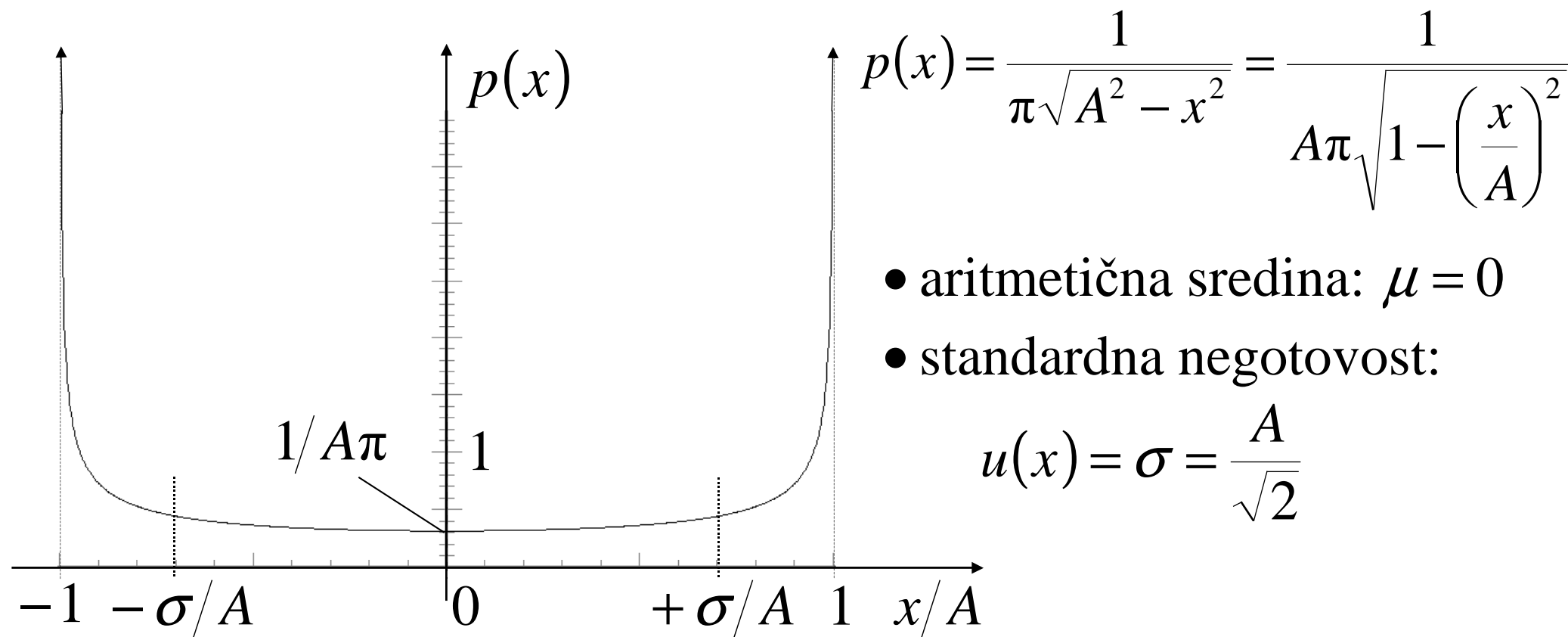
$\beta = 0 \rightarrow$ trikotna porazdelitev, $\beta = 1 \rightarrow$ enakomerna porazdelitev





2.4.8 U porazdelitev

U obliko dobimo pri porazdelitvi amplitudnih vrednosti sinusnega signala $x = A \sin(\omega t)$ v eni periodi in je oblike:



Slika 2.14 U porazdelitev ($A = 1$)





2.4.9 Standardna negotovost izhodne veličine - $u_c(y)$

Izhodna (merjena) veličina je funkcija N vhodnih veličin:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

- Za oceno **celotne standardne negotovosti** $u_c(y)$ (combined standard uncertainty) potrebujemo dober matematični model;
- Izmerjena vrednost y je le ocena izhodne veličine Y na podlagi ocen vhodnih veličin in funkcijske povezave:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

- korekcija sistematičnih pogreškov,
- pri **eni** meritvi je x_1 kar ocena X_1 ,
- pri **ponavljanju** pa je \bar{x} ocena veličine X_1 .





Vhodne veličine so lahko:

- medsebojno **neodvisne** (pogosto);
- ali medsebojno **odvisne**.

Vhodne veličine so medsebojno neodvisne

Po razvoju enačbe $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ v Taylorjevo vrsto in upoštevanju le členov prvega reda, dobimo **celotno negotovost**:

$$u_c(y) = \sqrt{[c_1 u(x_1)]^2 + [c_2 u(x_2)]^2 + \dots + [c_N u(x_N)]^2}$$

ali
$$u_c(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y) + \dots + u_N^2(y)}$$

- pri čemer so: $u_1(y) = |c_1|u(x_1), \dots, u_N(y) = |c_N|u(x_N)$

deleži zaradi negotovosti vhodnih veličin;

- $c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, c_N = \frac{\partial y}{\partial x_N}$ - koeficienti občutljivosti





Zgled-1: $y = x_1 + x_2$

- Koeficienta občutljivosti: $c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 1$, $c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1$;
- Celotna standardna negotovost: $u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$

Zgled-2: $y = \frac{x_1}{x_2}$

- Koeficienta občutljivosti: $c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}$, $c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2}$;
- Prispevka k celotni standardni negotovosti:

$$u_1(y) = |c_1|u(x_1) = \left| \frac{1}{x_2} \right| u(x_1), \quad u_2(y) = |c_2|u(x_2) = \left| -\frac{x_1}{x_2^2} \right| u(x_2)$$





- Celotna standardna negotovost:

$$u_c(y) = \sqrt{\left(\frac{1}{x_2} u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2^2} u(x_2)\right)^2}$$

- Relativna oblika celotne standardne negotovosti:

$$\frac{u_c(y)}{y} = w_c(y) = \sqrt{w^2(x_1) + w^2(x_2)}$$





Vhodne veličine so medsebojno odvisne - korelirane

Odvisnost se nanaša na **naključne** spremenljivke.

Merilo za medsebojno odvisnost dveh naključnih spremenljivk je (ocenjena) kovarianca.

- Pri n neodvisnih parih sočasnih izmerkov vhodnih veličin x_1 in x_2 je **kovarianca**:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_{1,i} - \bar{x}_1)(x_{2,i} - \bar{x}_2)$$

- relativna medsebojna odvisnost je podana s **koeficientom korelacije** r :

$$r = \frac{u(x_1, x_2)}{u(x_1)u(x_2)}$$





Celotna standardna negotovost je:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$

$r(x_i, x_j)$ - koeficient korelacije med -1 in $+1$

Zgled-1: $y = x_1 - x_2$

- Koeficienta občutljivosti: $c_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 1$, $c_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = -1$;
- Celotna standardna negotovost:

$$u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) + 2(1)(-1)r(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)}$$





$$u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) + 2(1)(-1)r(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)}$$

- če $r(x_1, x_2) = +1$: $u_c(y) = u(x_1) - u(x_2)$
- če $r(x_1, x_2) = -1$: $u_c(y) = u(x_1) + u(x_2)$
- če $r(x_1, x_2) = 0$: $u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$





2.4.10 Razširjena negotovost - U

Če želimo podati interval z večjo stopnjo zaupanja ($p = 95\%$ ali $p = 99\%$) uporabljamo **razširjeno negotovost**:

$$U = k u_c(y)$$

- s **faktorjem razširitve k** pomnožena (celotna) standardna negotovost,
- popolni merilni rezultat je sedaj: $Y = y \pm U$





Povezava med faktorjem razširitve k in stopnjo zaupanja p **ni enoznačna**.

- Odvisna od **porazdelitve** izhodne veličine.

Kot **prvi približek** se uporablja kar **normalna porazdelitev** ($k = z$).

Pri **manjšem številu** meritev je bolje uporabiti **t -porazdelitev**, ki ima ν_{eff} **efektivnih stopenj prostosti**:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/\nu_i} \quad (\text{zaokrožimo navzdol}) \rightarrow t \text{ dobimo iz tabele}$$

- velja $\nu_{\text{eff}} \leq \sum_{i=1}^N \nu_i$





Kadar želimo poudariti stopnjo zaupanja p , napišemo:

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(v_{\text{eff}}) u_c(y)$$

- U_{95} pomeni razširjeno negotovost s stopnjo zaupanja 95%

Zgled:

- U smo merili 10-krat: $\bar{U} = 120,51 \text{ V}$ in $s(U) = 0,79 \text{ V}$,
- R smo merili 5-krat: $\bar{R} = 15,643 \text{ k}\Omega$ in $s(R) = 0,084 \text{ k}\Omega$,
- $u_c(P) = ?$, $U_c(P) = ?$ pri $p = 99\%$!





- moč na upor: $P = \frac{U^2}{R} = \frac{(120,51\text{V})^2}{15,643\text{k}\Omega} = 928,381\text{mW}$

- celotna standardna negotovost:

$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)}$$

- prispevka k celotni negotovosti:

$$u_1(P) = |c_1|u(U) = \frac{2U}{R} \frac{s(U)}{\sqrt{n_1}} = \frac{2 \cdot 120,51\text{V}}{15,643\text{k}\Omega} \frac{0,79\text{V}}{\sqrt{10}} = 3,85\text{mW}$$

$$u_2(P) = |c_2|u(R) = \frac{U^2}{R^2} \frac{s(R)}{\sqrt{n_2}} = \frac{(120,51\text{V})^2}{(15,643\text{k}\Omega)^2} \frac{0,084\text{k}\Omega}{\sqrt{5}} = 2,23\text{mW}$$

- celotna standardna negotovost:

$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)} = \sqrt{(3,85\text{mW})^2 + (2,23\text{mW})^2} = 4,45\text{mW}$$





$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)} = \sqrt{(3,85 \text{ mW})^2 + (2,23 \text{ mW})^2} = 4,45 \text{ mW}$$

- število efektivnih stopenj prostosti:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N u_i^4(y)/v_i} = \frac{(4,45 \text{ mW})^4}{(3,85 \text{ mW})^4/9 + (2,23 \text{ mW})^4/4} = 12,8$$

$$v_{\text{eff}} = 12,8 \rightarrow 12 \rightarrow t_p(v) = t_{99}(12) = 3,05$$

- razširjena negotovost:

$$U_{99} = k_{99} u_c(P) = t_{99}(12) u_c(P) = 3,05 \cdot 4,45 \text{ mW} = 13,6 \text{ mW}$$





- popolni merilni rezultat s **standardno** negotov.:

$$P = 928,4 \text{ mW}, \quad u_c(P) = 4,5 \text{ mW}, \quad \nu_{\text{eff}} = 12$$

- sama celotna standardna negotovost še ne omogoča sklepanja o stopnji zaupanja!

- popolni merilni rezultat z **razširjeno negotovostjo**:

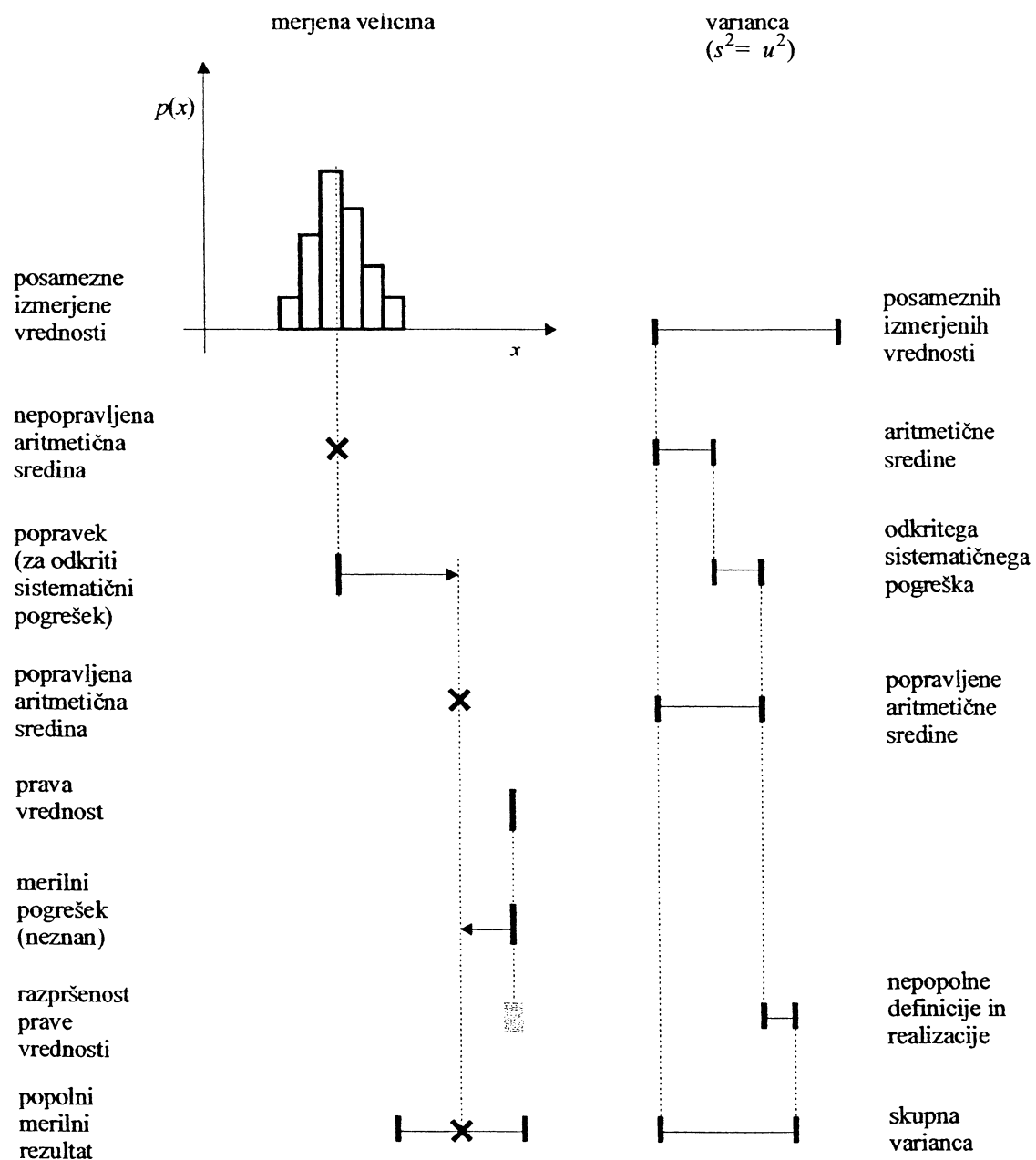
$$P = 928 \text{ mW} \pm 14 \text{ mW}, \quad k = 3,05, \quad \nu_{\text{eff}} = 12, \quad p = 99\%$$

ali

$$P = 928(1 \pm 1,5 \cdot 10^{-2}) \text{ mW},$$

$$k = 3,05, \quad \nu_{\text{eff}} = 12, \quad p = 99\%$$





Slika 2.15 Prikaz odnosov med izmerjenimi vrednostmi, pogreški in negotovostmi





2.5 Zaokrožanje številskih vrednosti

Popolni merilni rezultat navajamo v obliki intervala:

- **z izmerjeno vrednostjo in merilno negotovostjo.**

Pri navajanju popolnega merilnega rezultata **moramo zaokrožiti:**

- **najprej** negotovost,
- **in nato** izmerjeno vrednost.





Negotovost podajamo z **največ dvema veljavnima ciframa**.

- Zaokrožamo jo **navzgor**, pri zaokrožanju pa upoštevamo samo prvo cifro, ki jo že opustimo.

$$u = 12,1\underline{4} \Rightarrow u = 13 \qquad u = 45\underline{6},7 \Rightarrow u = 4,6 \cdot 10^2$$

$$u = 0,012\underline{0}3 \Rightarrow u = 0,012 \qquad u = 4,5\underline{0}6 \Rightarrow u = 4,5$$

Uporabi ene same veljavne cifre pri merilni negotovosti **se izogibamo**, zato da ni vpliv zaokrožitve prevelik.

- Primer zaokrožitve na eno cifro $u = 0,031$ na $u_z = 0,04$:
 - učinek je enak, kot bi dodali negotovost u_d !:

$$\sqrt{u^2 + u_d^2} = u_z \Rightarrow u_d = \sqrt{u_z^2 - u^2} = \sqrt{0,04^2 - 0,031^2} = 0,025$$

Pri **vmesnih računih** merilne negotovosti obdržimo še **eno ali dve dodatni cifri**.





Izmerjeno vrednost zaokrožimo na **decimalnem** mestu, ki **ga določa (zaokrožena) negotovost**.

- Če je desno od mesta zaokrožitve ena od cifer 0 do 4, zaokrožimo navzdol:

$$X = 12,543\underline{4}...$$

$$u = 0,012 \quad \Rightarrow \quad X = 12,543$$

- Če je desno od mesta zaokrožitve ena od cifer 5 do 9, zaokrožimo navzgor:

$$X = 12,543\underline{5}...$$

$$u = 0,012 \quad \Rightarrow \quad X = 12,544$$

Tudi za izmerjene vrednosti velja, da **uporabljamo več cifer**, kot jih **bomo rabili pri navajanju končnega rezultata**.





3. Merski sistemi

To je celota, ki jo sestavljajo:

- **sistemi veličin,**
- **sistemi merskih enot in etalonov.**

Poznamo merske sisteme:

- mehanike (CentimeterGramSekunda; MKS),
- elektromagnetike (1901 G. Giorgi predlaga:
 - MeterKilogramSekundaAmper),
- optike (MKS Kandela),
- toplote (MKS Kelvin) itn.
- Mednarodni sistem enot (**S**ysteme **I**nternational d'Unites)





3.1 Veličine in njihova medsebojna povezanost

Veličine so **merljive lastnosti** pojavov, procesov in stanj.

Primer:

dolžina palice

višina sobe

dolžina elektromagnetnega sevanja

↑ ↑

merljive lastnosti objekti

Veličino lahko opredelimo po **kvaliteti** in **kvantiteti**.

- zgoraj omenjene spadajo v isto vrsto – dolžino
- po kvaliteti: palica ima maso, gostoto, temperaturo, ...





Neko **področje fizike** pozna **osnovne veličine** in **ostale izpeljane veličine**.

- Primer za **geometrijo**:
 - **osnovna veličina: dolžina,**
 - **ostale izpeljane veličine:**
 - ploščina: $A = a \cdot b$
 - prostornina: $V = a \cdot b \cdot c$
 - obseg: $O = 2(a + b)$

Vsaka na novo definirana veličina poveča število enačb za eno.

- Na področju **geometrije** je **število enačb za eno manjše** kot je **število vseh veličin**.





Področje **kinematike** doda novo osnovno veličino: **čas**

$v = \frac{l}{t}$ - **izmed dveh** novih veličin (hitrost in čas) je bil izbran čas. Hitrost je izpeljana veličina!

V **mehaniki** je vpeljana **tretja osnovna veličina**: po dogovoru **masa**:

$$F = ma$$

- Sila, vztrajnostni moment, gostota, tlak,.. so izpeljane veličine

V **elektromagnetiki** se doda **električni tok**, kot četrta osnovna veličina.

$$F = lIB$$





Vseh osnovnih veličin **za celotno fiziko**, ki se po dogovoru štejejo za neodvisne je **sedem**. K osnovnim štirim še:

- termodinamična temperatura,
- svetilnost,
- množina snovi.

Veličine lahko delimo še na:

- **intenzivne** (posamezni deli **niso** različni od celote),
- **ekstenzivne** (posamezni deli **so** različni od celote).





3.1.1 Temeljna enačba metrologije

$$G = \{G\} [G]$$

veličina = številka vrednost(mersko število) enota

G – veličina

$\{G\}$ - številka vrednost

$[G]$ - enota za veličino G

- za enoto lahko izberemo različne konkretne vrednosti:

$$l = 1,524 \text{ m} = 1524 \text{ mm} = 60 \text{ in} = 5 \text{ ft} = \dots$$

- zmnožek je vedno enak ne glede na izbrano enoto – vrednost veličine je **invariantna, neodvisna od enote!**





Med številsko vrednostjo enoto **ne vstavljamo znaka** za množenje:

- primeri napačnih zapisov:

$$l = 1,524.m, l = 1,524 \times m, l = 1,524[m], l = 1,524(m)$$





3.1.2 Veličinska in številska enačba

Veličinske enačbe

- črkovni simboli predstavljajo veličine
 - primer Ohmov zakon:

$$U = IR \quad U, I, R - \text{veličine}$$

- v enačbah lahko nastopajo **matematično fizikalni faktorji**
 - primer ploščine krogle:

$$A = 4\pi r^2 \quad A, r - \text{veličini}; \quad 4\pi - \text{mat. fiz. faktor}$$

- Primerne so za **analizo problemov** – govorijo o **povezanosti veličin**.





Primer:

Če želimo ugotoviti velikost padca napetosti na uporu, vstavimo namesto znaka za veličino zmnožek:

$$I = 25 \text{ mA}$$

$$R = 100 \Omega \quad \Rightarrow$$

$$U = IR = 25 \text{ mA} \cdot 100 \Omega = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ A} \cdot 100 \Omega = 2,5 \text{ V}$$





3.1.3 Številске enačbe

- črkovni **simboli** predstavljajo **številске vrednosti**.
- številске vrednosti so **odvisne od enot!**

Izhodiščna veličinska enačba:

$$G = f A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma}$$

- G, A, B, C - veličine,
- α, β, γ - celoštevilčni eksponenti,
- f - matematično fizikalni faktor.

preuredimo: $\{G\}[G] = f \{A\}^{\alpha} [A]^{\alpha} \{B\}^{\beta} [B]^{\beta} \{C\}^{\gamma} [C]^{\gamma}$

in: $\{G\} = f \{A\}^{\alpha} \{B\}^{\beta} \{C\}^{\gamma} \frac{[A]^{\alpha} [B]^{\beta} [C]^{\gamma}}{[G]}$





ulomek $\frac{[A]^\alpha [B]^\beta [C]^\gamma}{[G]}$ **odvisen od izbranih enot!**

- če je ulomek **1**, je **številka ena** enaka **veličinski**.

Primer ($[U] = \text{V}$, $[I] = \text{mA}$, $[R] = \Omega$):

$$U = IR \Rightarrow \{U\}[U] = \{I\}[I]\{R\}[R], \quad \{U\} = \{I\}\{R\} \frac{[I][R]}{[U]}$$

$$\frac{[I][R]}{[U]} = \frac{\text{mA}\Omega}{\text{V}} = 10^{-3}$$

$$\{U\} = 10^{-3} \{I\}\{R\} \quad \{U\} = 10^{-3} \cdot 25 \cdot 100 = 2,5$$

Ponavadi se zaviti oklepaji izpustijo ($U = 10^{-3} IR$). **Vedno je potrebno pojasnilo o uporabljenih enotah!**

Napačna uporaba: $U = 10^{-3} IR = 10^{-3} \cdot 25 \text{ mA} \cdot 100 \Omega = 0,0025 \text{ V}$





3.1.4 Prikrojene veličinske enačbe

Veličine in izbrane enote v obliki ulomkov:

$$U = IR \quad \Rightarrow \quad U \frac{\text{V}}{\text{V}} = I \frac{\text{mA}}{\text{mA}} R \frac{\Omega}{\Omega}$$

$$U/\text{V} = I/\text{mA} \cdot R/\Omega \frac{\text{mA} \cdot \Omega}{\text{V}}$$

končna oblika: $U/\text{V} = 10^{-3} I/\text{mA} \cdot R/\Omega$

U/V , I/mA , R/Ω - eksplicitno izražene številske vrednosti

$$U/\text{V} = 10^{-3} 25 \text{ mA}/\text{mA} \cdot 100 \Omega/\Omega = 2,5 \quad \Rightarrow \quad U = 2,5 \text{ V}$$





3.2 Mednarodni sistem enot (SI)

Osnovne veličine imajo **osnovne enote**,
izpeljane veličine pa **izpeljane enote**,

Če so veličinske enačbe nekega sistema enake številskim enačbam imamo **koherenten sistem enot**.

- Uveljavil se je **Mednarodni sistem enot (1971)**.
- Poznamo še:
 - US Customary System,
 - UK System,
 - enota dolžine **yard**, USgalona \neq UKgalona
 - enota mase **pound**. $3,78\textit{l} \neq 4,55\textit{l}$





3.2.1 Osnovne in izpeljane enote SI

Tabela 3.1 Osnovne veličine in enote

	osnovne veličine		osnovne enote SI	
	ime	znak	ime	znak
1.	dolžina	l, L	meter	m
2.	masa	m	kilogram	kg
3.	čas	t	sekunda	s
4.	električni tok	I	amper	A
5.	termodinamična temperatura	T	kelvin	K
6.	svetilnost	$I, (I_v)$	kandela	cd
7.	množina (snovi)	n	mol	mol





Definicije osnovnih enot SI:

1. Dolžina:

Meter je dolžina poti, ki jo v vakuumu napravi svetloba v $1/299\,792\,458$ sekunde (1983).

2. Masa:

Kilogram je masa mednarodnega etalona kilograma (1901).

3. Čas:

Sekunda je trajanje $9\,192\,631\,770$ period sevanja, ki ustreza prehodu med dvema hiperfinima nivojema osnovnega stanja atoma cezija 133 (1967).





4. Električni tok:

Amper je nespremenljiv električni tok, ki pri prehodu skozi dva premočrtna, vzporedna, neskončno dolga vodnika zanemarljivega krožnega prereza, postavljena v vakuumu v medsebojni razdalji 1 metra, povzroča med njima silo $2 \cdot 10^{-7}$ newtna na meter dolžine (1948).

5. Termodinamična temperatura:

Kelvin je termodinamična temperatura, ki je $1/273,16$ del termodinamične temperature trojne točke vode (1967).





6. Svetilnost:

Candela je svetilnost vira v določeni smeri, ki oddaja monokromatsko sevanje frekvence $540 \cdot 10^{12}$ hertzov, katerega energijska jakost v tej smeri je $1/683$ watta na steradian (1979).

7. Množina (snovi):

Mol je množina (snovi) sistema, ki vsebuje toliko osnovnih delcev, kolikor je atomov v 0,012 kilograma ogljika 12 (1971).

- Pri molu je potrebno navesti osnovne delce: atomi, molekule, ioni, elektroni,





Vse ostale enote SI imenujemo **izpeljane enote**.

- Dobimo jih iz definicij za ustrezne izpeljane veličine s pomočjo enačb.
- Primer:

- veličinska enačba: $Y = f X_1^\alpha X_2^\beta X_3^\gamma$

- enotska enačba: $[Y] = f [X]_1^\alpha [X]_2^\beta [X]_3^\gamma$

- primer za hitrost:

$$l = vt \Rightarrow [l] = [v][t] \Rightarrow [v] = \frac{[l]}{[t]}$$

izpeljana enota za hitrost: $[v] = \frac{[l]}{[t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m/s}$





Nekater izpeljane enote imajo svoja imena:

- hertz ($\text{Hz} = \text{s}^{-1}$),
- newton ($\text{N} = \text{mkg s}^{-2}$),
- pascal ($\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2 = \text{m}^{-1}\text{kg s}^{-2}$),
- joule ($\text{J} = \text{Nm} = \text{Ws} = \text{m}^2\text{kg s}^{-2}$),
- watt ($\text{W} = \text{J}/\text{s} = \text{m}^2\text{kg s}^{-3}$),
- coulomb ($\text{C} = \text{As}$),
- volt ($\text{V} = \text{W}/\text{A} = \text{m}^2\text{kg s}^{-3}\text{A}^{-1}$),
- radian, steradian, ...

Lahko jih **izrazimo** z osnovnimi ali **drugimi izpeljanimi** enotami:

- ohm ($\Omega = \text{V}/\text{A}$), tesla ($\text{T} = \text{Vs}/\text{m}^2$), farad ($\text{F} = \text{As}/\text{V}$), ..





Decimalne enote

- S predponami SI zvečane (zmanjšane) enote imenujemo **decimalne merske enote**
 - Primeri: $\text{nV} = 10^{-9} \text{ V}$, $\mu\text{V} = 10^{-6} \text{ V}$, $\text{mV} = 10^{-3} \text{ V}$,
 $\text{kV} = 10^3 \text{ V}$, $\text{MV} = 10^6 \text{ V}$

Predpone SI smemo postaviti pred vse enote SI, razen pred **kilogram**, kjer jih moramo **združiti z gramom**:

$$10^{-9} \text{ kg} = 10^{-6} \text{ g} = \mu\text{g}, \quad 1 \text{ mg} = 10^{-3} \text{ g}, \quad 1 \text{ dag} = 10 \text{ g}$$





Tabela 3.2 Predpone SI

ime	znak	vrednost	ime	znak	vrednost
jokto	y	10^{-24}	deka	da	10^1
zepto	z	10^{-21}	hekto	h	10^2
ato	a	10^{-18}	kilo	k	10^3
femto	f	10^{-15}	mega	M	10^6
piko	p	10^{-12}	giga	G	10^9
nano	n	10^{-9}	tera	T	10^{12}
mikro	μ	10^{-6}	peta	P	10^{15}
mili	m	10^{-3}	eksa	E	10^{18}
centi	c	10^{-2}	zeta	Z	10^{21}
deci	d	10^{-1}	jota	Y	10^{24}

Nekatere decimalne enote imajo svoja imena:





- liter: $1\text{l} = 1\text{dm}^3 = 10^{-3}\text{ m}^3$,
- tona: $1\text{t} = 1\text{Mg} = 10^3\text{ kg}$,
- bar: $1\text{bar} = 10^5\text{ Pa}$:
 - dodamo jim lahko predpone SI (dl, hl, mbar, ...)

Decimalne enote **niso koherentne!** –

- previdnost pri uporabi. Pri računanju jih zamenjamo s številskimi vrednostmi!

Predpona in enota se pišeta skupaj.

Eksponent se nanaša na predpono in enoto:

$$\text{cm}^2 = (\text{cm})^2 = (10^{-2}\text{ m})^2 = 10^{-4}\text{ m}^2$$

Številska vrednost naj bo med 1 in 1000:





nepregledno	pregledno
0,00123 V	1,23 mV
0,0123 A	12,3 mA
$0,123 \cdot 10^{-3} \text{ H}$	123 μH
12300 Ω	12,3 k Ω
$1,23 \cdot 10^8 \text{ W}$	123 MW

Dodatne enote:

- enote časa **večje od sekunde** so: minuta (min), ura (h), dan (d),
- za **ravninski kot**: (kotna) stopinja ($^{\circ}$), minuta ($'$), sekunda ($''$).
- za energijo (eV), ...





Sestavljene dodatne enote:

- za električno delovno energijo: $1\text{kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,6\text{MJ}$
- enote za **logaritemska razmerja**:
 - bel: $B = \lg \frac{P}{P_0}$,
 - napetost v decibelih: $U(\text{dB}) = 10 \lg \frac{P}{P_0} = 20 \lg \frac{U}{U_0}$
 - referenčni nivo $U_0 = 1\text{V}$: $\text{dBV} = 20 \lg \frac{U}{1\text{V}}$





3.3 Etaloni

Definicija enote je največkrat šele natančno formulirana naloga, **kako** enoto **realizirati**.

3.3.1 Primarni etaloni

Naprava, s katero **realiziramo** osnovno ali izpeljano enoto je **primarni etalon**.

- Ima največjo meroslovno kakovost.
- Ne sklicuje se na noben drug etalon.





Osnovna enota elektromagnetike: **amper**

- Reprodukcijska je izvedena z Ayrtonovo-Jonesovo **tokovno tehtnico** (1963).
 - aritmetična sredina 40 meritev je bila 1,018601A,
 - merilna negotovost: nekaj 10^{-6}
- Amper se zaradi **problemov** (izmere tokovne tehtnice, necentričnost tuljav in njihov položaj, zemeljski pospešek, temperatura, ...) **redko realizira** (le v vrhunskih metroloških laboratorijih).
- Amper se hrani večinoma **posredno preko razmerja napetost in upornosti**.
 - zahtevana velika časovna stabilnost.





Prva izpeljana enota elektromagnetika je **volt**

- Definicija:
 - Je potencialna razlika med dvema točkama na homogenem žičnem vodniku, v katerem je stalen tok enega ampera, porabljena moč zaradi toka pa en watt.
- **Težave so še večje** kot pri amperu (diferencialni kalorimeter),
 - negotovost: ca. 10^{-5}

Z vsako nadaljno izpeljano enoto se **negotovost večja**.

- Obstajajo pa **izjeme**: enota za induktivnost **henry** in kapacitivnost **farad**, ker je realizacija bistveno **odvisna** le **od geometrije**.





Henry in farad

- **Relativna permeabilnost in relativno dielektričnost** sta v praznem prostoru enaki 1.
- **Magnetna konstanta** je absolutno točna (posledica definicije ampera): $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Vs/Am}$
 - **Amper** je tok, ki pri prehodu skozi dva vodnika v vakuumu v medsebojni razdalji 1 metra, povzroča med njima silo $2 \cdot 10^{-7}$ newtna na meter dolžine.

$$F = lIB = l\mu_0 \frac{I^2}{2\pi d} \Rightarrow$$

$$\mu_0 = \frac{F}{l} \frac{2\pi d}{I^2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}} \frac{2\pi \cdot 1\text{m}}{(1\text{A})^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$





- **Električna konstanta ε_0** je preko **svetlobne hitrosti** v vakuumu $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$ absolutno točno določena z enačbo:

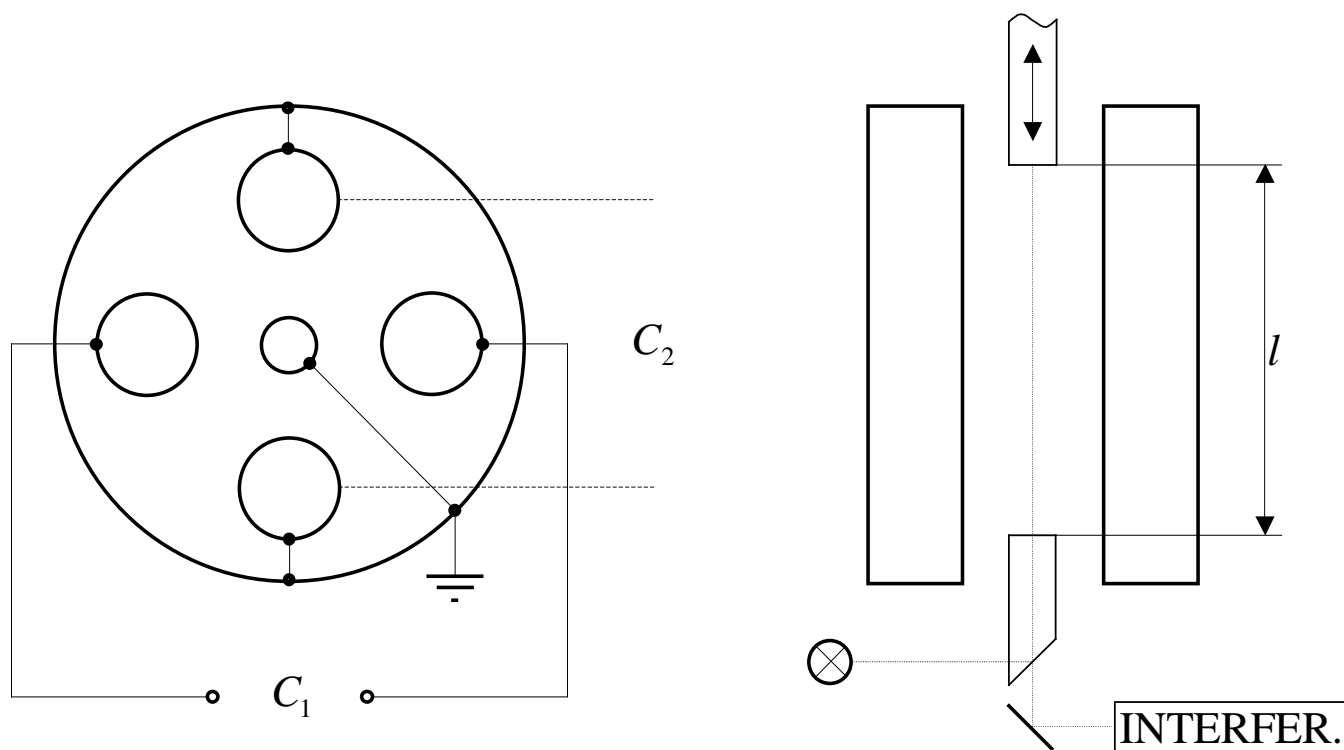
$$c^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$$

- Negotovost pri realizaciji **Henrya**: ca. 10^{-6} ,
- Negotovost pri realizaciji **Farada**: ca. 10^{-7} ,





Farad realiziran s Thompson-Lampard križnim kondenz.



V kovinskem ohišju sta **dva para** nasproti ležečih elektrod (C_1 , C_2).

V sredini sta nameščeni kovinski cevi, od katerih se ena premika,

- Odvisno od razdalje l se spreminjata C_1 in C_2 .

Slika 3.1 Thompson-Lampardov križni kondenzator

Avtorja sta dokazala, da je aritmetična sredina enaka

križni kapacitivnosti:
$$C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) = \frac{\epsilon_0 \ln 2}{\pi} l$$





S pomočjo **mostičev z induktivnimi deliniki** se da **prenesti** realizirano vrednost (med 0,1 pF in 1 pF) na kondenzatorje **večjih vrednosti**.

Tudi **ohm** se da realizirati preko induktivnosti in kapacitivnost bolj točno, kot preko definicije:

- En **ohm** je električna upornost vodnika, v katerem ni lastne napetosti in v katerem povzroča stalna potencialna razlika enega volta med koncema tok enega ampera.





Volt se da realizirati načelno celo bolj točno kot amper.

- Enoto napetosti se da realizirati na podlagi merjenja sile, kapacitivnosti in razdalje (**napetostna tetnica**), ker je sila med ploščama kondenzatorja:

$$F = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial d}$$

- negotovost: ca. 10^{-6}

Da ima realizacija ampera večjo negotovost je krivda v definiciji, da je vrednost za magnetno konstanto μ_0 absolutno točna.

Ker je **realizacija** osnovnih in izpeljanih enot tako **zahtevna**, se za **prenos** in **ohranjanje** enot uporabljajo **zelo stabilna** merilna sredstva – **sekundarni etaloni**.





3.3.2 Sekundarni etaloni

Umerimo jih s pomočjo primarnih etalonov.

- Njihova **negotovost je večja.**
- Na področju **elektromagnetike** sta pomebna sekundarni etalon **napetosti in upornosti!**





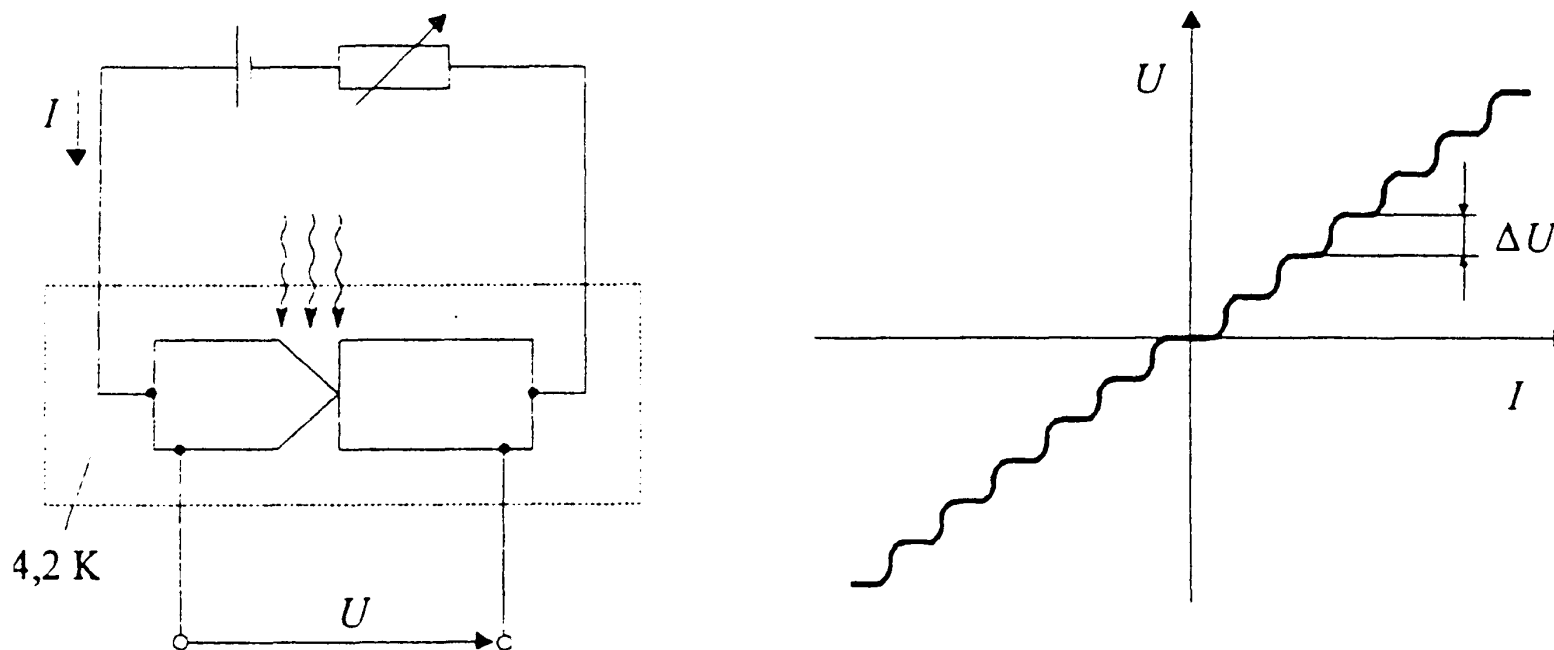
3.3.2.1 Sekundarni etaloni napetosti:

- **Westonov normalni člen,**
 - zasičena raztopina kadmijevega sulfata,
 - $U = 1,01865 \text{ V}$ pri 20° C ,
 - časovna **stalnost** : 10^{-7} na leto,
 - **povprečna vrednost** v grupo vključenih členov (10-30), je napetost sekundarnega etalona.
- **Polprevodniške diode,**
 - temperaturni koeficient $10^{-6}/\text{K}$,
 - relativno **velika** izhodna **napetost** (10 V),
 - velika dopustna **obremenitev** (10 mA),
 - časovna **stabilnost**: 10^{-6} na leto,
 - v grupi je do šest etalonov.



- **Josephsonov člen**

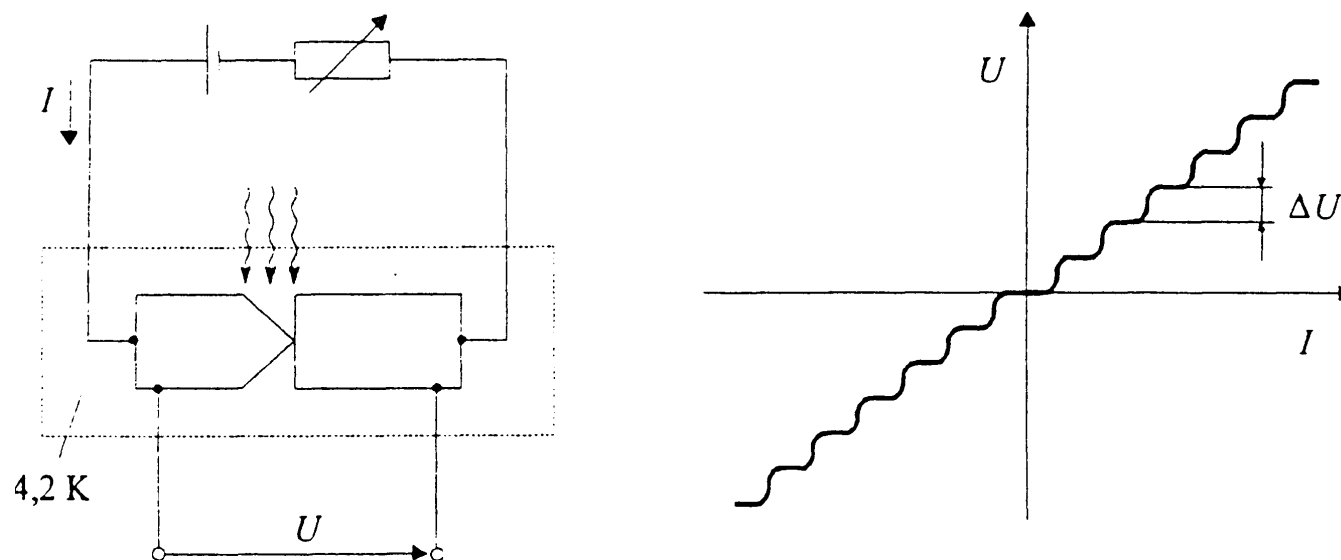
- **prevladujoč** za vzdrževanje etalona napetosti.



Slika 3.2 Josephsonov člen in njegova karakteristika

Sestavljen iz dveh šibko **sklopljenih superprevodnikov**.

Če mesto dotika (točkast) **obsevamo z mikrovalovi**, dobimo **stopničasto UI** karakteristiko.



Višina stopnic je enaka in odvisna od Plankove konstante h , osnovnega naboja e in frekvence f elektromagnetnega sevanja

$$\Delta U = \frac{h}{2e} f$$

Celotna napetost je odvisna od števila stopnic (štetje):

$$U = n \frac{h}{2e} f = n \frac{f}{K_j}$$





$$U = n \frac{h}{2e} f = n \frac{f}{K_j}$$

Josephsonova konstanta:

$$K_j = 2e/h$$

- odvisna je od negotovosti pri realizaciji ampera
- naravna konstanta,
 - neodvisna od časa, kraja in materialnih lastnosti,
- po dogovoru ji je pripisana vrednost (1990):

$$K_{j-90} = 483\,597,9 \text{ GHz/V}$$





Stalnost **Josephsonovega vira** je 10^{-10} na leto.

- **vzdrževanje** etalona napetosti je **zelo zanesljivo**.

Višina ene stopnice UI karakteristike pri frekvenci 70GHz:

$$\Delta U = \frac{70 \text{ GHz}}{483\,597,9 \text{ GHz/V}} = 1,447484 \cdot 10^{-4} \text{ V} \approx 145 \mu\text{V}$$

- pri $n = 20$ stopnicah že dobimo napetost $U \approx 3 \text{ mV}$,
- v serijo vezanih ca. 20000 Josephsonovih členov predstavlja napetost 10 V.





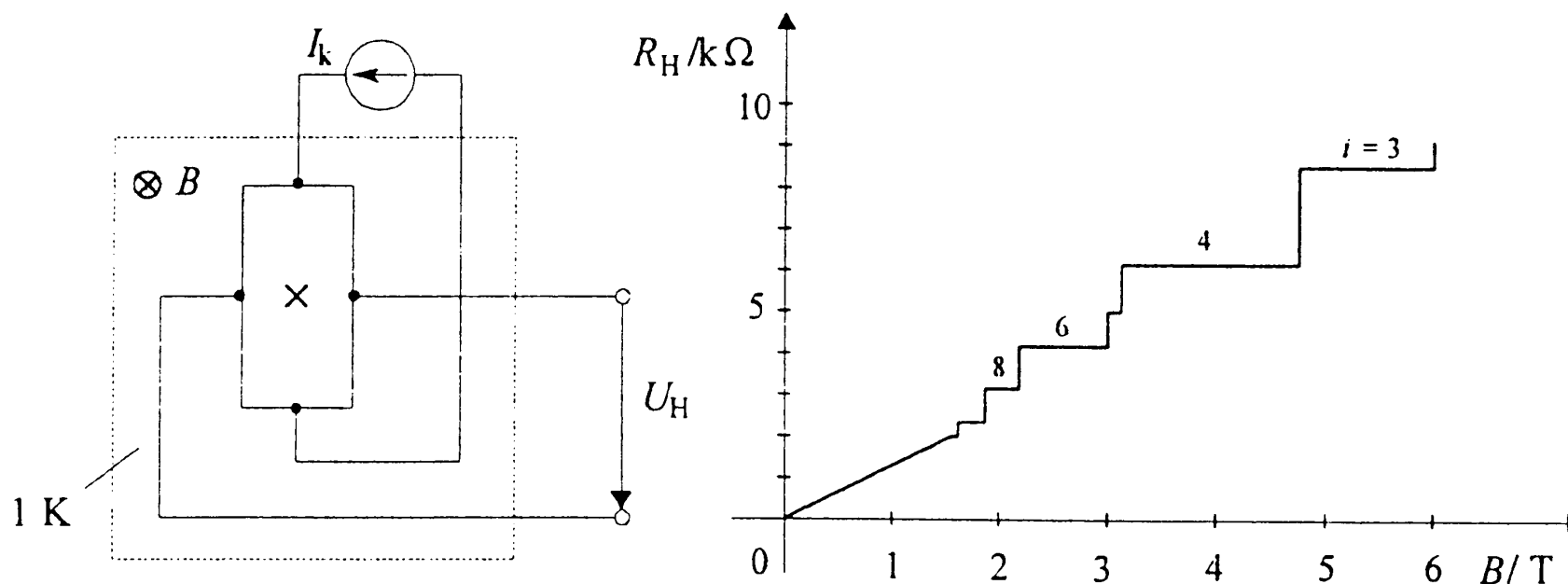
3.3.2.2 Sekundarni etalon upornosti

Tvori **grupa uporov** z upornostjo enega ohma.

- naviti z žico iz zlitine Cu-Mn-Ni (manganin, omal),
- temperaturni koeficient pod $10^{-5}/\text{K}$,
- po umetnem staranju ima grupa stalnost ca. 10^{-7} na leto.

Za vzdrževanje enote upornosti se da izkoristiti kvantiziran Hallov upor (von Klitzingov efekt).





Slika 3.3 Kvantiziran Hallov upor in njegova karakteristika

Napetost klasične Hallove sonde je:

$$U_H = \frac{1}{ned} I_k B$$

n – koncentracija nosilcev elektrine,

e – osnovni naboj,

d – debelina sonde,

I_k - krmilni tok,

B - magnetna indukcija.





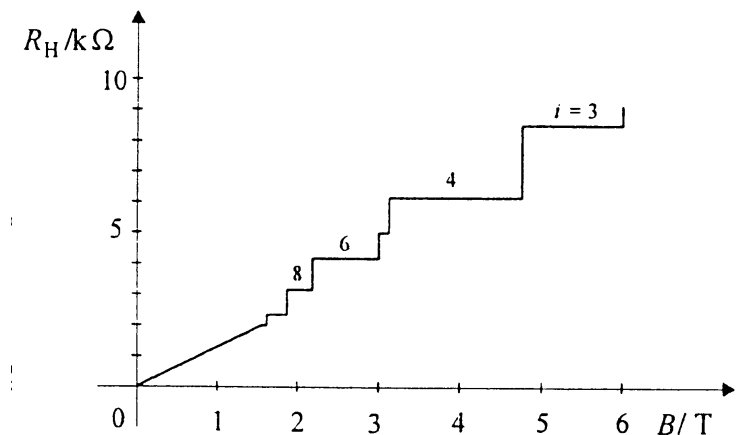
Razmerje Hallove napetosti in krmilnega toka je **Halova upornost**:

$$R_H = \frac{U_H}{I_k} = \frac{1}{ned} B$$

Če dosežemo:

- nosilci elektrine se gibljejo le v ravnini,
- $B > 2T$,
- termodinamična temperatura pod 1K;

karakteristika postane stopničasta:





Vrednost upornosti je celoštevilčni mnogokratnik **von Klitzingove konstante** $R_k = h/e^2$:

$$R_{H,i} = \frac{1}{i} \frac{h}{e^2} = \frac{R_k}{i} ; \quad i = 1, 2, \dots$$

Ker nastopata v izrazu dve naravni konstanti, je tako reproducirana enota upornosti neodvisna od časa in kraja.

- **von Klitzingove konstante** se ne da absolutno točno določiti,
 - odvisna od realizacije ampera.
 - po dogovoru (1990): $R_{k-90} = 25\,812,807\,\Omega$

Za kvantiziran Hallov upor velja, da imamo časovno zelo stabilno upornost!





3.3.3 Delovni etaloni

Za neposredno delo se uporabljajo delovni etaloni.

- Še večja negotovost kot pri sekundarnih etaloni.
- Različne vrednosti.
- Za prenos vrednosti se uporabljajo kompenzatorji in mostiči.

3.3.4 Metrološka piramida

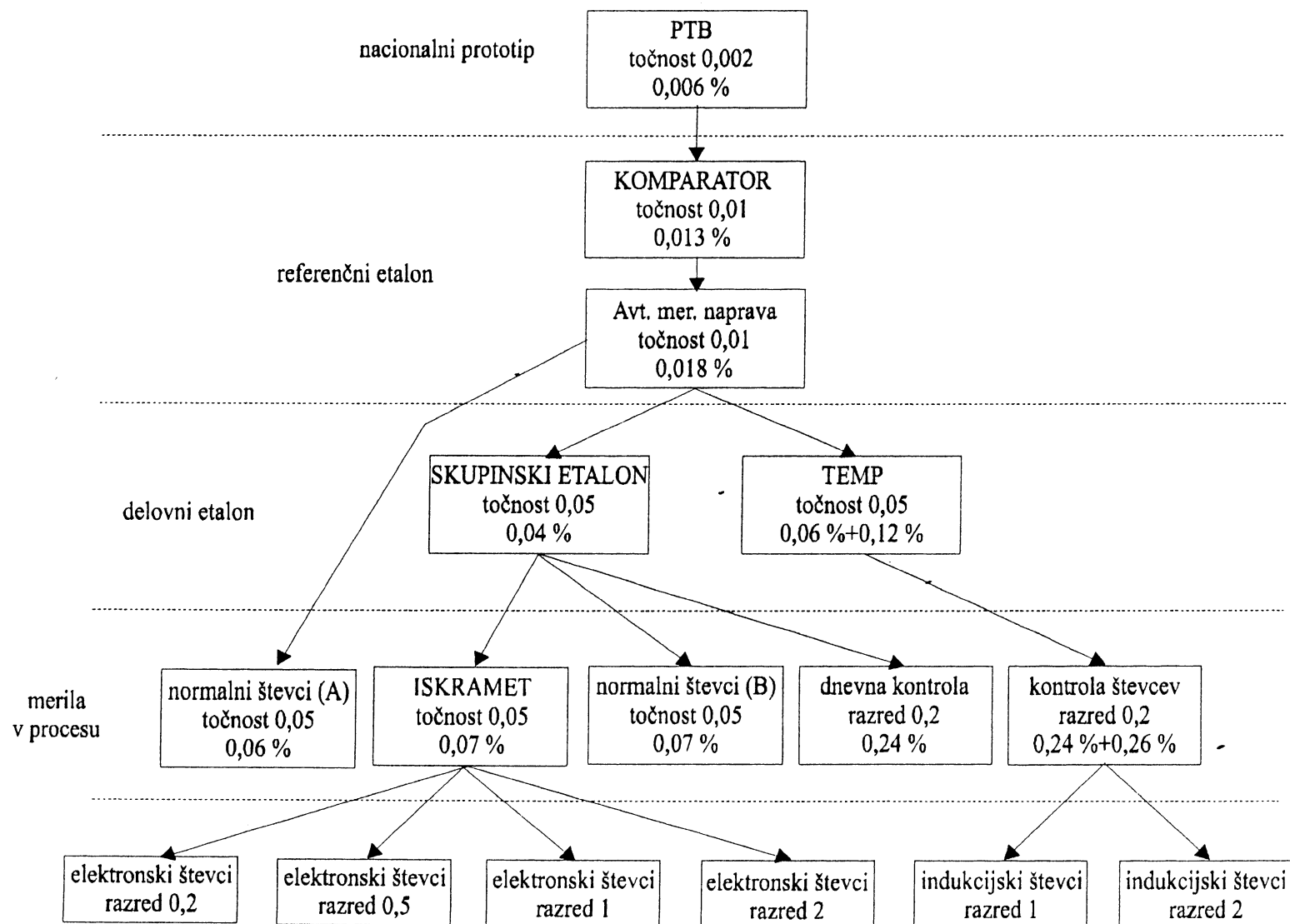
Ta ima določeno enoto na vrhu (**primarni etalon**);

- pod njim **sekundarne etalone**;
 - pod njim pa **delovne etalone**.

Enota, ki jo vzdržuje etalon nižjega reda, izhaja **iz enote**, ki jo vzdržuje **etalon višjega reda**.

Vsako merilo je **posredno umerjeno** s primarnim etalom!





Slika 3.4 Metrološka piramida sledljivosti (Iskraemeco)





Vsak korak v hierarhičnem postopku mora biti dokumentiran.

- **razviden ‘rodovnik’** merilnega rezultata - negotovost,
- govorimo o **sledljivosti**.

Veda, ki znanstve proučuje področje združljivosti merilnih rezultatov na mednarodnem področju se imenuje **Zakonska metrologija**.

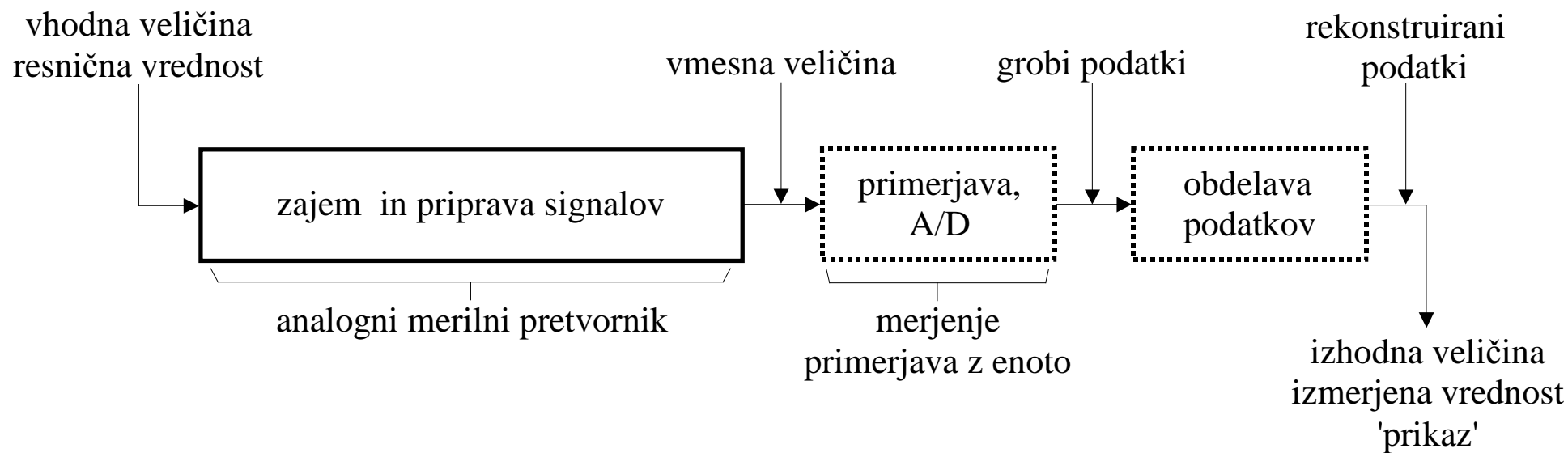
Pri nas je najvišji organ, ki je odgovoren za to področje:

Urad za standardizacijo in meroslovje





4. Analogni merilni pretvorniki in priprava signalov



Slika 4.1 Analogni merilni pretvorniki v merilnem sistemu





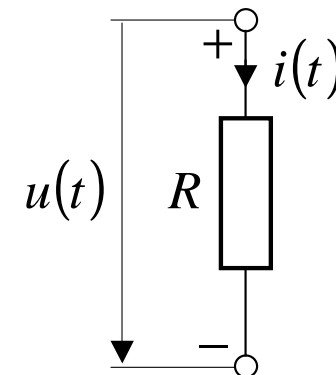
4.1 Prireditev z zmanjšanjem (atenuacijo) velikosti signalov

Za prireditev signalov uporabljamo pasivne in aktivne električne elemente:

- linearni pasivni člen (npr.: R , L , C),
- nelinearni pasivni člen (npr.: dioda),
- linearni aktivni člen (npr.: napetostni ojačevalnik),
- nelinearni aktivni člen (npr.: tranzistor) itd.

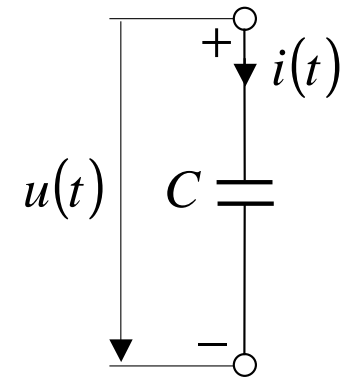
Pri zmanjšanju signalov pogosto uporabljamo linearne **pasivne** električne elemente, kot so:

- **Upor** z upornostjo R : $u(t) = R i(t)$
 - kompleksni zapis impedance: $\underline{Z}_R = R$

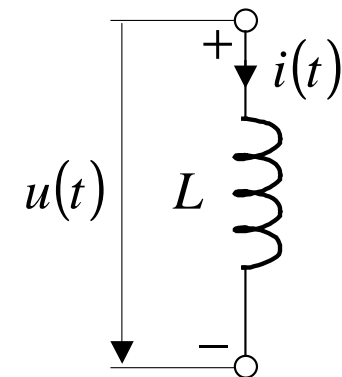




- **Kondenzator** s kapacitivnostjo C : $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$
 - kompleksni zapis impedance: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$

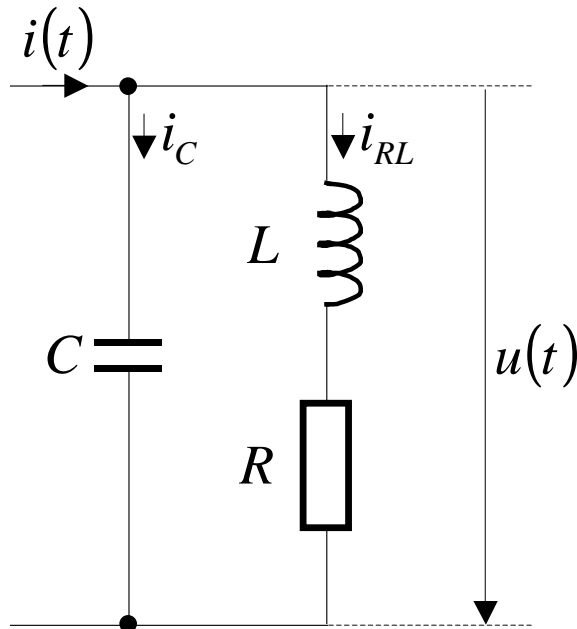


- **Tuljava** z induktivnostjo L : $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
 - kompleksni zapis impedance: $\underline{Z}_L = j\omega L$





4.1.1 Realni upor

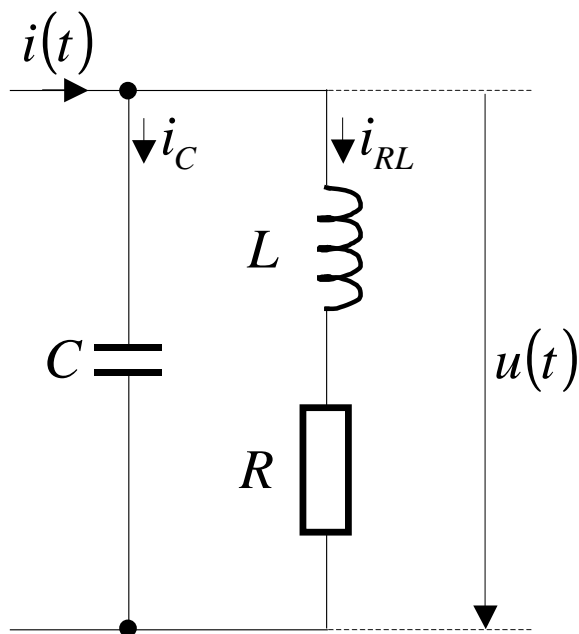


Vsak realni upor ima zaradi induktivnosti uporabljenega vodnika (npr. induktivnost žice navite na telo, itd.) še **induktivno komponento**, ki jo tipično ponazorimo z **zaporedno vezavo tuljavice** k upor, in tudi **kapacitivno komponento** zaradi stresane kapacitivnosti med obema koncema upora, ki jo ponazorimo z **vzporedno vezavo kondenzatorja**.

Impedanco danega vezja \underline{Z} sestavljata impedanca kapacitivne veje $\underline{Z}_C = 1/j\omega C$ in impedanca induktivne veje $\underline{Z}_{RL} = R + j\omega L$:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = \underline{Z}_C \parallel \underline{Z}_{RL} = \frac{\underline{Z}_C \cdot \underline{Z}_{RL}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{RL}} = \frac{1/j\omega C (R + j\omega L)}{R + j\omega L + 1/j\omega C}$$





Dano vezje analizirajmo še v časovnem prostoru. Velja:

$$u = R i_{RL} + L \frac{di_{RL}}{dt}, \quad i_C = C \frac{du}{dt};$$

Vsota tokov v vozliščni točki je enaka nič.

Ker je $i_{RL} = i - i_C$, zapišemo:

$$u = R i_{RL} + L \frac{di_{RL}}{dt} = R \left(i - C \frac{du}{dt} \right) + L \frac{d}{dt} \left(i - C \frac{du}{dt} \right)$$

Po odvajanju in preureditvi dobimo nehomogeno linearno diferencialno enačbo člena drugega reda:

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = Ri + L \frac{di}{dt}$$





$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0 - \text{homogeni del}$$

Če primerjamo karakteristični homogeni del enačbe z osnovno homogeno linearno diferencialno enačbo člena drugega reda

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{du}{dt} + u = 0$$

sta **stopnja dušenja** $\xi = \frac{RC\omega_0}{2} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ in **lastna kotna frekvenca** nedušenega nihanja člena drugega reda:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \bullet \text{ zelo visoka } (C_{\text{stresana}} \approx \times 10 \text{ pF}, L_{\text{vodnika}} \approx \times 10 \text{ nH}): \quad \omega_0 \approx 1 \text{ GHz}$$

Impedanco realnega upora sedaj zapišemo:

$$\underline{Z} = \frac{1/j\omega C (R + j\omega L)}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2/\omega_0^2 + j\omega RC}$$





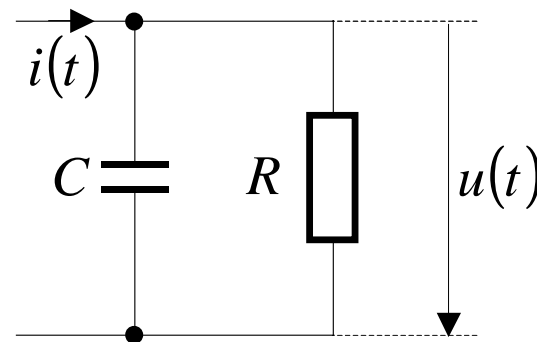
$$\underline{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 / \omega_0^2 + j\omega RC}$$

Kadar uporabljamo upor pri nižjih frekvencah $\omega^2 \ll \omega_0^2$, preide enačba impedance realnega upora v obliko: $\underline{Z} \doteq \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega RC}$

in je **značaj impedance** odvisen od vrednosti upornosti.

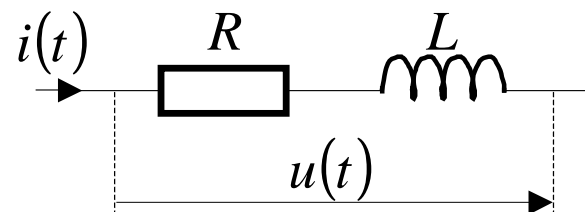
- pri **velikih vrednostih** upornostih ($R \gg \omega L$) dobimo **kapacitivni** značaj:

$$\underline{Z} \doteq \frac{R}{1 + j\omega RC}$$



- pri **majhnih vrednostih** upornostih ($R \ll 1/\omega C$) dobimo **induktivni** značaj:

$$\underline{Z} \doteq R + j\omega L$$





4.2 Zmanjšanje in prireditev napetostnih signalov

Za zmanjšanje in prireditev napetostnih signalov uporabljamo najbolj pogosto **napetostne delilnike** in **napetostne merilne transformatorje**.

Poznamo več vrst napetostnih delilnikov:

- uporovni delilnik,
- uporovno-kapacitivni delilnik,
- kapacitivni delilnik,
- induktivni delilnik,
- uporovni induktivno-kapacitivni delilnik, itd.





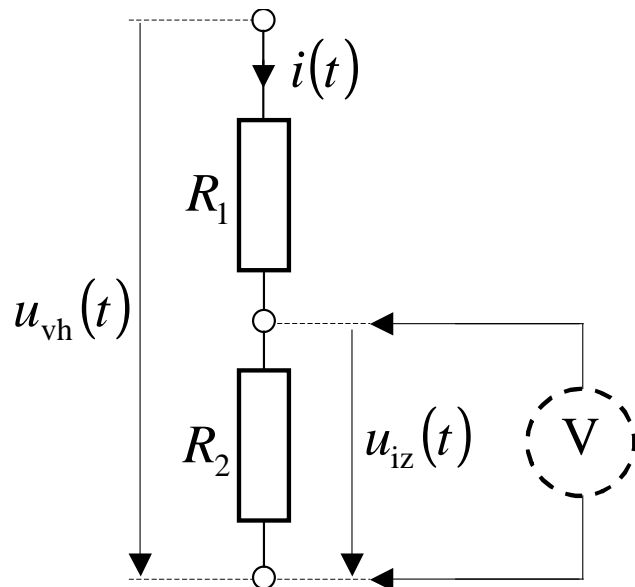
4.2.1 Napetostni delilniki

Napetostne delilnike v osnovi delimo na **uporovne**, **kapacitivne** in **induktivne**.

4.2.1.1 Uporovni napetostni delilnik

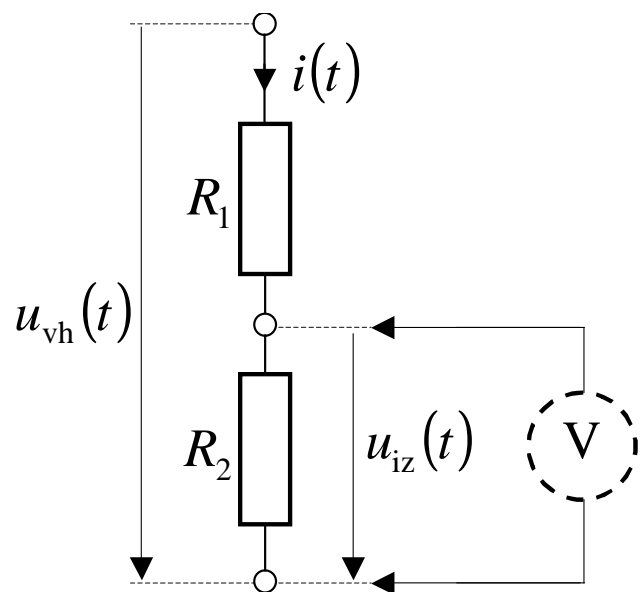
Izhodno in vhodno napetost povezuje enačba člena ničtega reda $u_{iz} = k \cdot u_{vh}$. Konstanto k določa **uporovni delilnik**:

$$k = \frac{u_{iz}}{u_{vh}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



- Uporovni delilniki nudijo široko frekvenčno območje (od enosmernih vrednosti do več sto kilohertzov).
- Sami zase ne omogočajo galvanske ločitve vhodne napetosti od izhodne.





$$k = \frac{u_{iz}}{u_{vh}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Standardna negotovost prenosnega faktorja k se izrazi z:

$$u(k) = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial R_1} u(R_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial R_2} u(R_2)\right)^2} = \frac{1}{(R_1 + R_2)^2} \sqrt{(R_2 u(R_1))^2 + (R_1 u(R_2))^2}$$

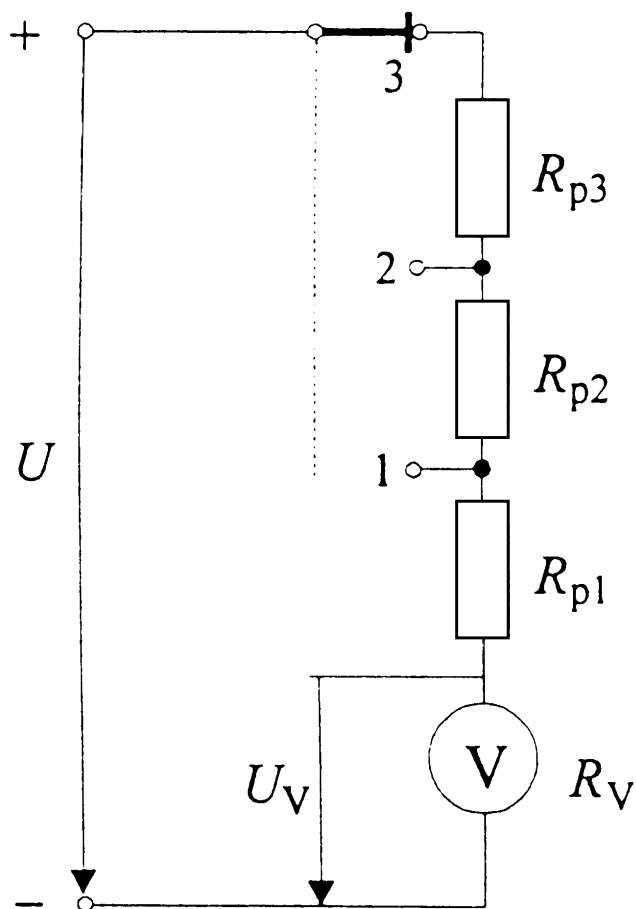
$$w(k) = \frac{u(k)}{k} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \sqrt{\left(\frac{u(R_1)}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{u(R_2)}{R_2}\right)^2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \sqrt{w^2(R_1) + w^2(R_2)}$$





Zaporedna razširitev merilnega območja voltmetra

Voltmetru razširimo merilno območje z zaporedno vezanim preduporom R_p (večkratni predupor).



Slika 4.9. Razširitev merilnega območja voltmetra

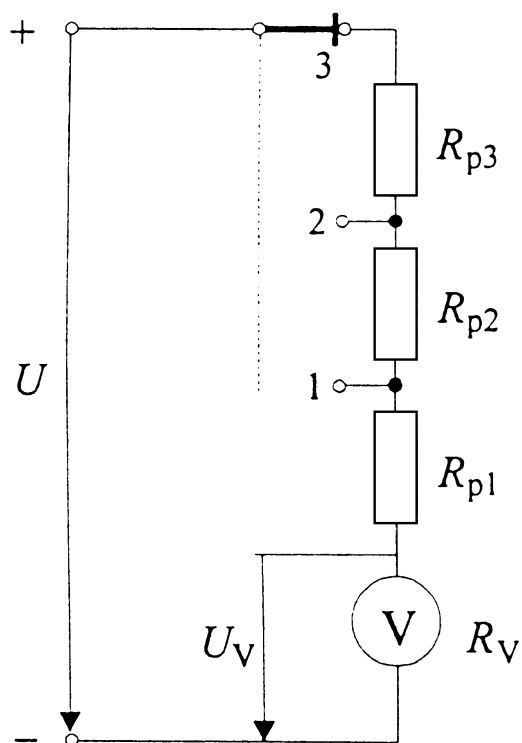
Merilni doseg (narisani položaj 3) je:

$$U_3 = \frac{U_V}{R_V} (R_{p1} + R_{p2} + R_{p3} + R_V)$$

$R_{V0} = \frac{R_V}{U_V}$ - karakteristična upornost voltmetra

- od $100\Omega/V$ do $100k\Omega/V$
- upornost, ki razširi merilno območje za en volt

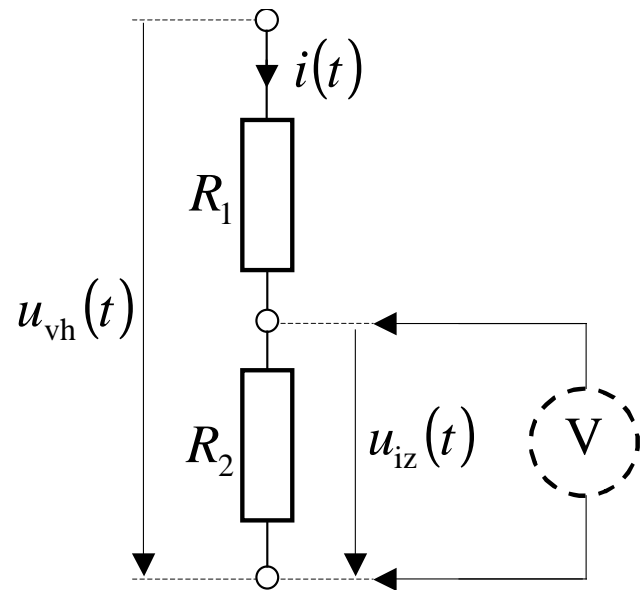




Primer: $R_{V0} = 10 \text{ k}\Omega/\text{V}$; $I_V = 1/(10 \text{ k}\Omega/\text{V}) = 100 \mu\text{A}$

- Če želimo razširiti območje za 100 V moramo imeti $R_p = 100 \text{ V} \cdot 10 \text{ k}\Omega/\text{V} = 1 \text{ M}\Omega$





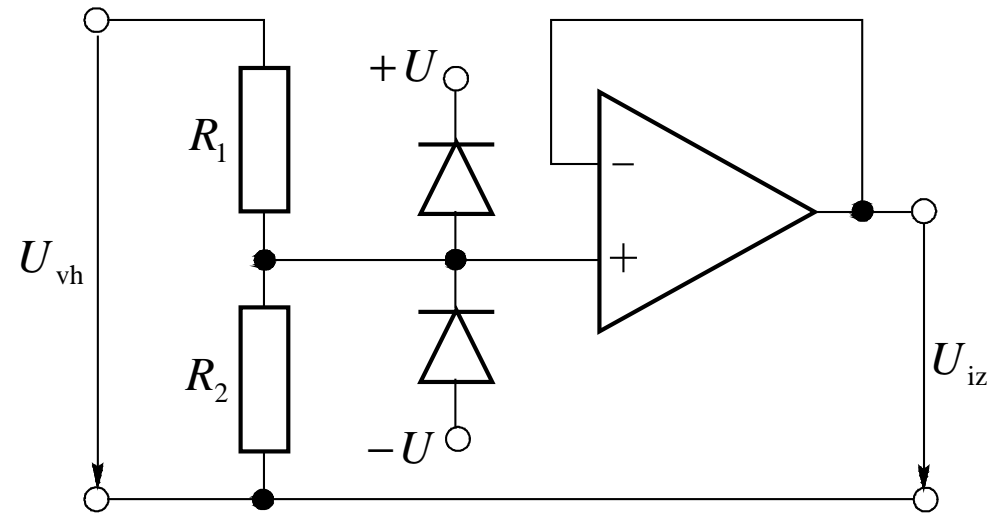
Skupna upornost $R_1 + R_2$ mora biti čim večja, kot kaže enačba dopustne moči, če želimo meriti veliko vhodno napetost.

$$R_1 + R_2 > U_{\text{vh}}^2 / P_{\text{max}}$$

- Večanje upornosti pa na drugi strani zmanjšuje dinamiko delilnika. Upori dobivajo kapacitivni značaj ($\tau \approx RC$).
- Za napetosti niskonapetostnega sekundarnega omrežja (230 V/ 400 V) so vrednosti upornosti delilnika okoli enega megaohma.

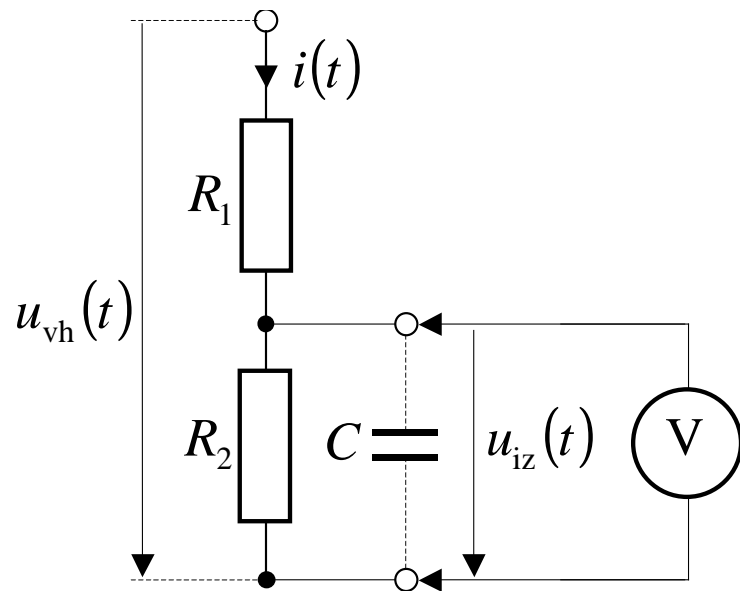


- Praktična realizacija napetostnega delilnika



Slika 4.11 Napetostni delilnik z diodno zaščito in impedančno ločitvijo

Za neobremenjenost izhoda delilnika lahko skrbi napetostni izravnalnik z visoko vhodno impedanco ($Z_{vh} \gg 1\text{M}\Omega \parallel 100\text{pF}$) in majhno preostalo napetostjo ($U_p \leq 100\mu\text{V}$), ki ima zaščiten vhod z diodama.



Pri dinamičnem obnašanju vezja pa ne moremo zanemariti vplive:

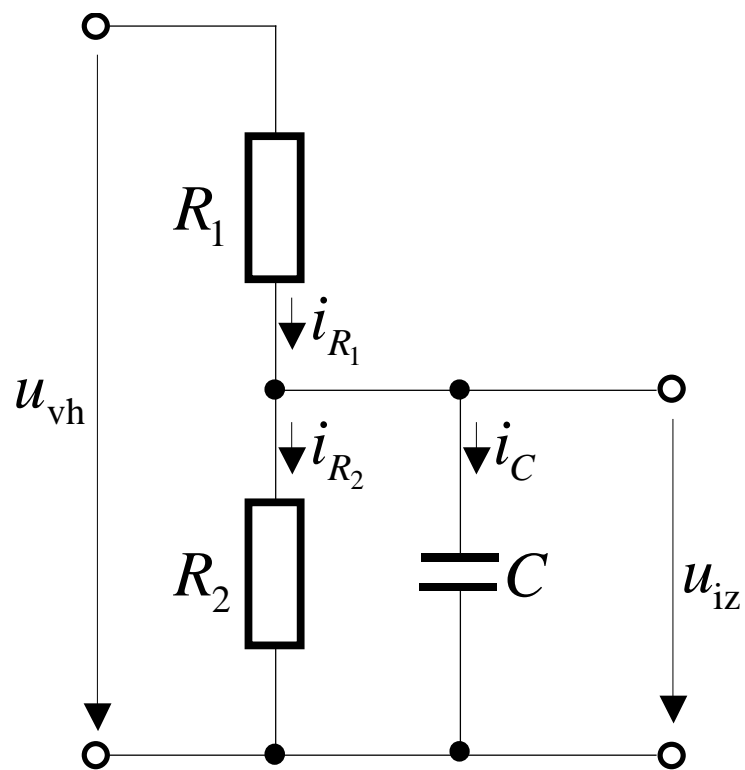
- stresane kapacitivnosti na uporu,
- kapacitivnosti vhodne stopnje voltmetra
- in priključnih kablov,

ki jih ponazorimo s kondenzatorjem C . Vpliv vhodne upornosti voltmetra lahko zanemarimo, ker je dovolj visoka (tipično $10\text{M}\Omega$) proti uporu R_2 .





S temi predpostavkami je za analizo pred nami naslednji merilni člen.



Velja:

$$i_{R_1} = \frac{u_{vh} - u_{iz}}{R_1}, \quad i_{R_2} = \frac{u_{iz}}{R_2}, \quad i_C = C \frac{du_{iz}}{dt}$$

Vsota tokov v vozliščni točki med uporoma je enaka nič ($i_{R_1} - i_{R_2} - i_C = 0$), zato zapišemo:

$$\frac{u_{vh} - u_{iz}}{R_1} - \frac{u_{iz}}{R_2} - C \frac{du_{iz}}{dt} = 0$$

Po preureditvi dobimo:

$$\frac{du_{iz}}{dt} + \frac{u_{iz}}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{u_{vh}}{CR_1} \rightarrow \frac{du_{iz}}{dt} + \frac{u_{iz}}{C} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{u_{vh}}{CR_1}$$

$$\bullet \frac{du_{iz}}{dt} + \frac{1}{\tau} u_{iz} = \frac{k}{\tau} u_{vh}$$





$$\frac{du_{iz}}{dt} + \frac{1}{\tau} u_{iz} = \frac{k}{\tau} u_{vh}$$

V izrazu je τ časovna konstanta vezja, ki jo sestavljata delilno razmerje $k = R_2 / (R_1 + R_2)$ in časovna konstanta $\tau_1 = R_1 C$:

$$\tau = \frac{R_2}{R_1 + R_2} R_1 C = k R_1 C = k \tau_1$$

a) Odziv napetostnega delilnika na skočno spremembo vhodne napetosti $u_{vh} = U_0$

Napetostni delilnik aproksimiramo s členom 1. reda.

Rešitev diferencialne enačbe člena 1. reda $\frac{du_{iz}}{dt} + \frac{1}{\tau} u_{iz} = \frac{k}{\tau} u_{vh}$

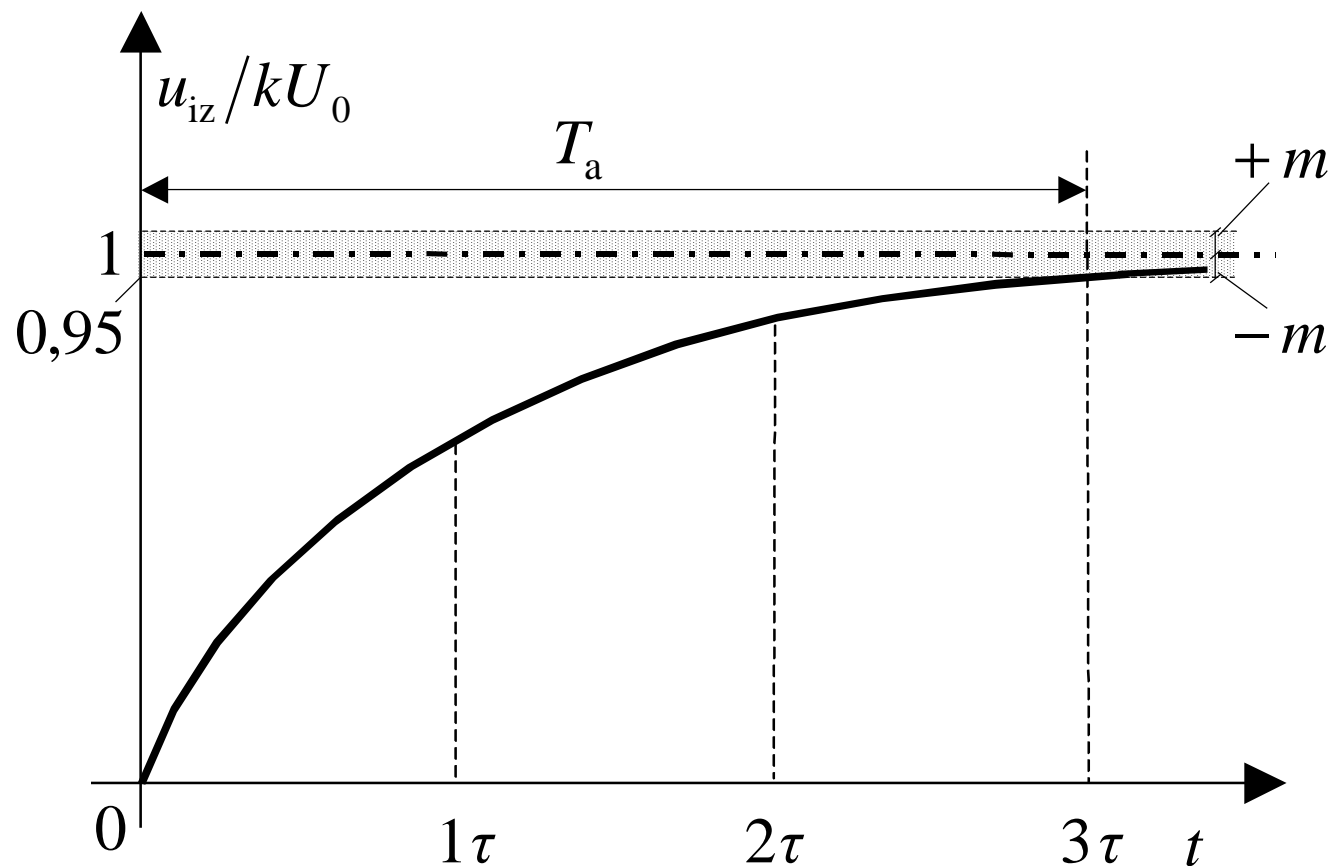
nam da:

$$u_{iz} = k U_0 (1 - e^{-t/\tau})$$





Potek izhodne napetosti prikazuje naslednja slika:



m	T_a / τ
0,1	2,30
0,05	3,00
0,01	4,61
0,005	5,30
0,001	6,91

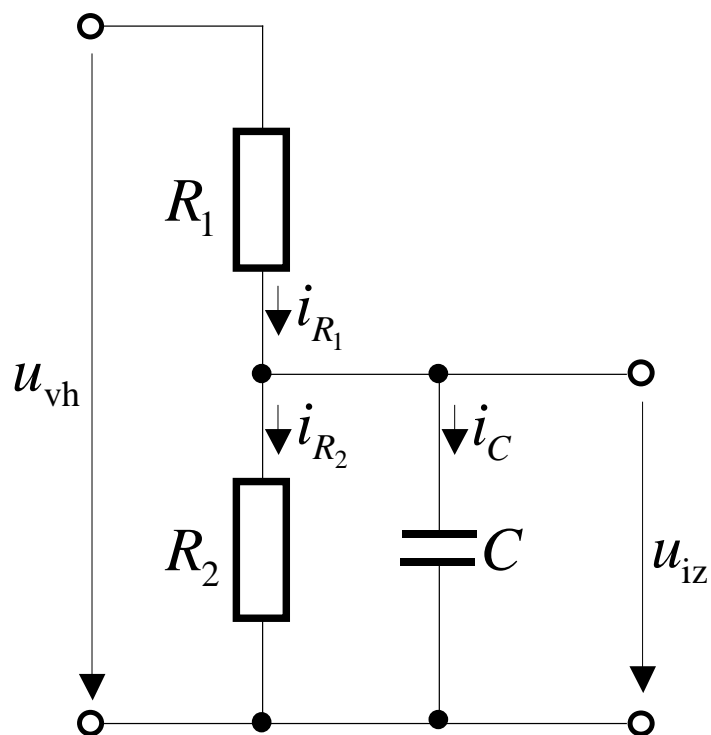
Pri željeni mejni vrednosti m , je odzivni čas enak:

$$\frac{u_{iz}}{kU_0} = 1 - m = \left(1 - e^{-T_a/\tau}\right) \Rightarrow T_a = \tau \ln(1/m)$$





b) Odziv napetostnega delilnika na sinusno obliko vhodne napetosti



Odnos med izhodno in vhodno napetostjo napetostnega delilnika določata upor R_1 in impedanca \underline{Z}_2 vzporedne vezave upora R_2 in kondenzatorja C :

$$\underline{Z}_2 = R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$$

Pri sinusni vzbujalni napetosti zapišemo za napetostni delilnik:

$$\underline{U}_{iz} = \underline{U}_{vh} \frac{\underline{Z}_2}{R_1 + \underline{Z}_2} = \underline{U}_{vh} \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}} = \underline{U}_{vh} \frac{R_2}{(R_1 + R_2) + j\omega R_1 R_2 C} = \underline{U}_{vh} \frac{k}{1 + j\omega \tau}$$





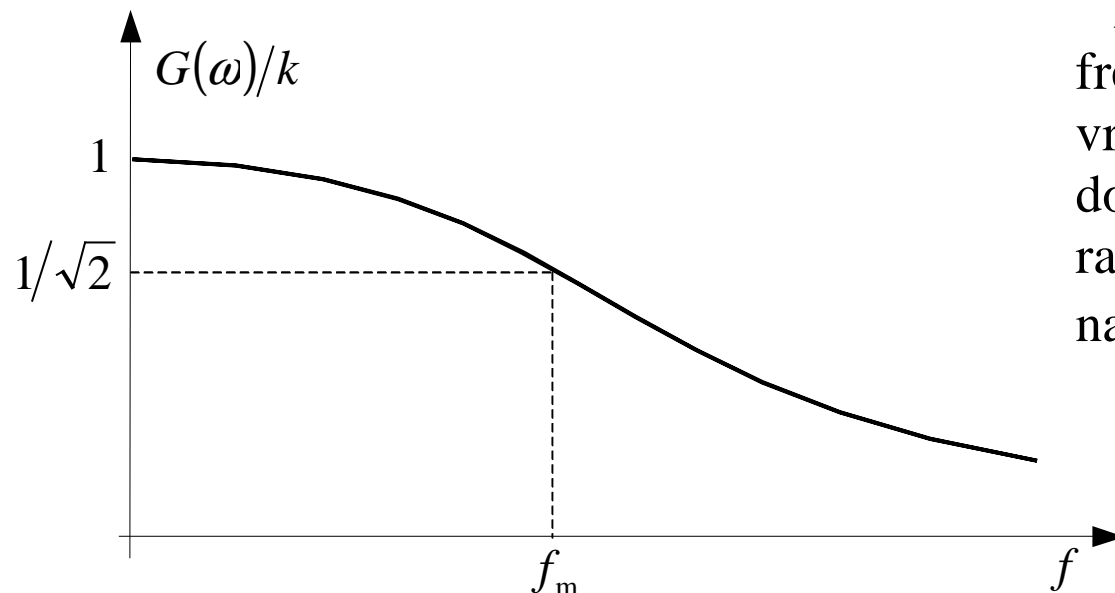
Razmerje izhodne in vhodne napetosti imenujemo frekvenčno karakteristiko $G(j\omega)$ in je v našem primeru:

$$G(j\omega) = \frac{\underline{U}_{iz}}{\underline{U}_{vh}} = \frac{U_{iz}(j\omega)}{U_{vh}(j\omega)} = \frac{k}{1 + j\omega\tau} = k \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Njena absolutna vrednost je enaka:

$$|G(j\omega)| = G(\omega) = k \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} = \frac{\hat{u}_2(\omega)}{\hat{u}_1(\omega)}$$

in se imenuje amplitudna karakteristika, prikazuje pa jo naslednja slika:



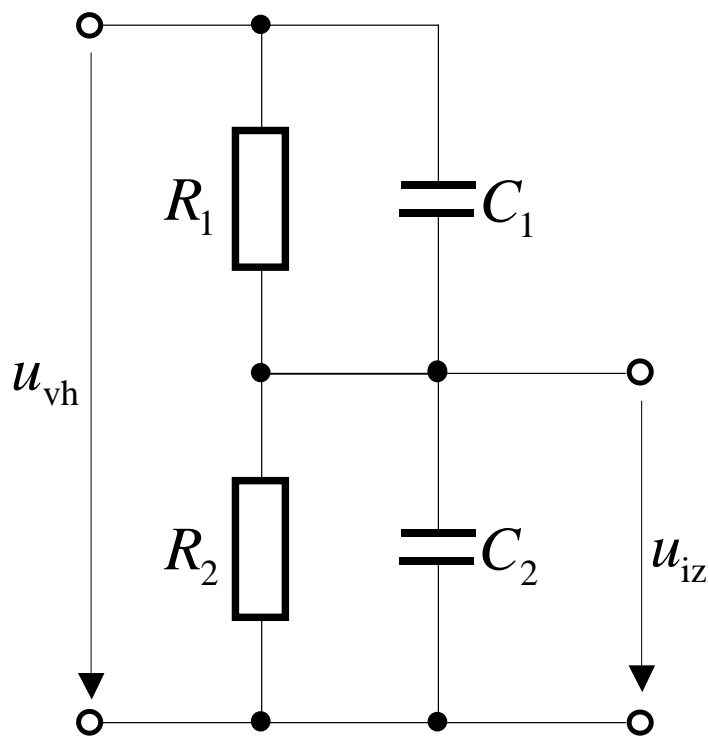
Frekvenčna meja je po dogovoru tista frekvenca, pri kateri pade absolutna vrednost frekvenčne karakteristike na določeno vrednost glede na statične razmere. Zelo razširjen kriterij je padec na $1/\sqrt{2}$. $f_m = 1/(2\pi\tau)$





4.2.1.2 Uporovno-kapacitivni delilnik

Kadar moramo upoštevati tudi kapacitivnost, paralelno k uporam R_1 , dobimo **uporovno-kapacitivni** delilnik:



$$\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1/\underline{Z}_2} = \frac{1}{1 + \underline{Y}_2/\underline{Y}_1} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$$

izražen z admitancama:

$$\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1 = 1/R_1 + j\omega C_1,$$

$$\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2 = 1/R_2 + j\omega C_2$$

Delilnik je frekvenčno odvisen:

$$\frac{\underline{U}_{iz}}{\underline{U}_{vh}} = \frac{(1/R_1 + j\omega C_1)}{(1/R_1 + j\omega C_1) + (1/R_2 + j\omega C_2)} = \frac{(1 + j\omega R_1 C_1)/R_1}{(1 + j\omega R_1 C_1)/R_1 + (1 + j\omega R_2 C_2)/R_2}$$





$$\frac{\underline{U}_{iz}}{\underline{U}_{vh}} = \frac{(1/R_1 + j\omega C_1)}{(1/R_1 + j\omega C_1) + (1/R_2 + j\omega C_2)} = \frac{(1 + j\omega R_1 C_1)/R_1}{(1 + j\omega R_1 C_1)/R_1 + (1 + j\omega R_2 C_2)/R_2}$$

Če izberemo $R_1 C_1 = R_2 C_2$, ga naredimo frekvenčno neodvisnega

$$\frac{\underline{U}_{iz}}{\underline{U}_{vh}} = \frac{(1 + j\omega R_1 C_1)/R_1}{(1 + j\omega R_1 C_1)/R_1 + (1 + j\omega R_2 C_2)/R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

- napetostno razmerje neodvisno od f .

Primer:

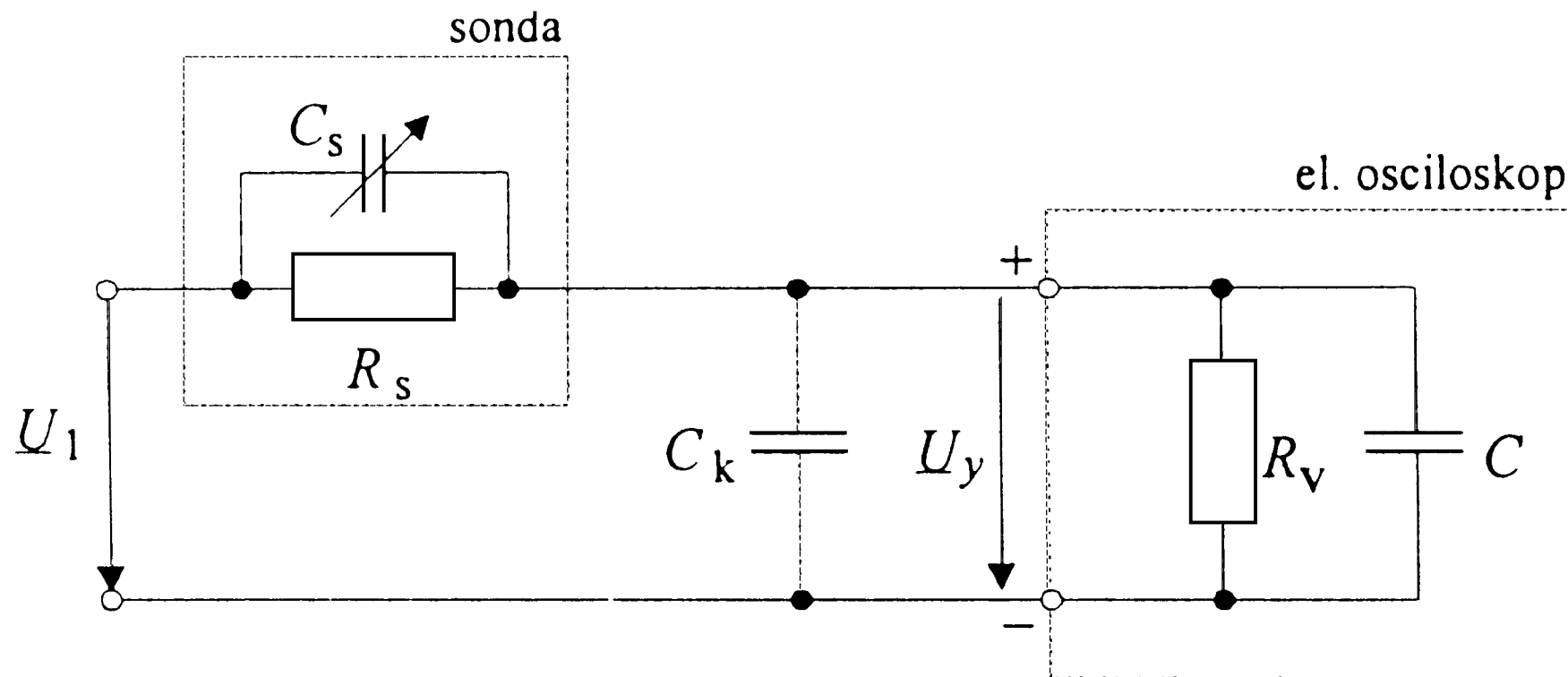
- Osciloskop z napetostno sondo





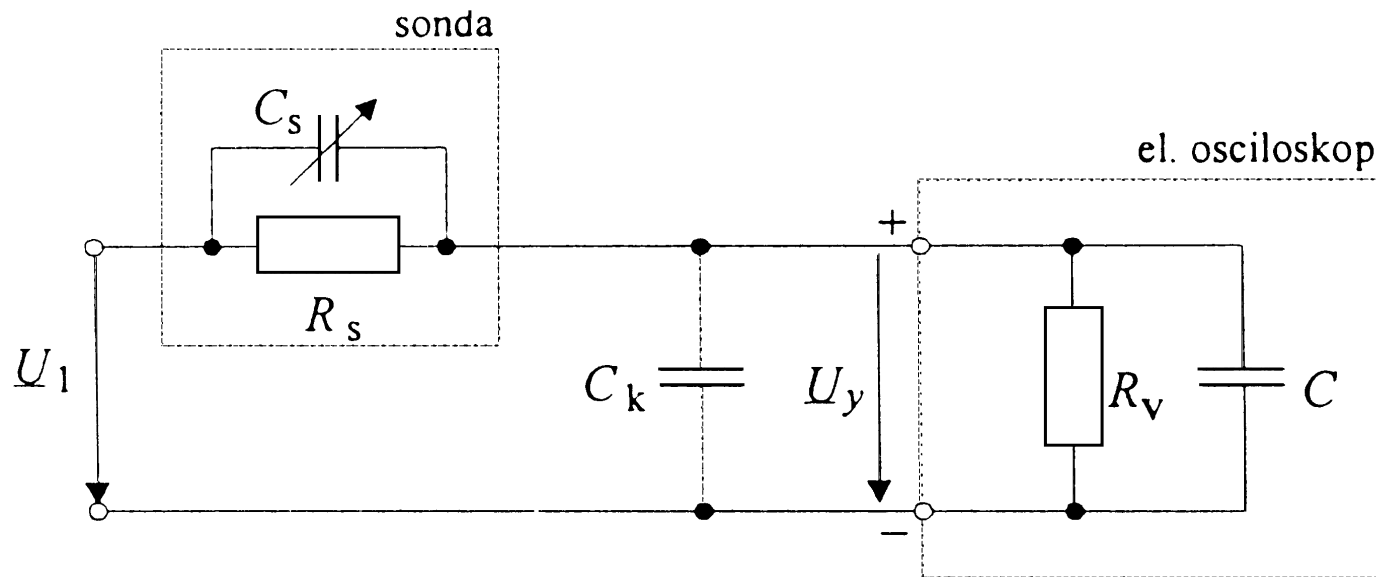
Osciloskop z napetostno sondo

Delilnik sestavljajo elementi **sonde**, **koaksialen kabel** in sam vhod EO (**BNC vhod**).



Slika 4.16 Nadomestno vezje osciloskopa z napetostno sondo





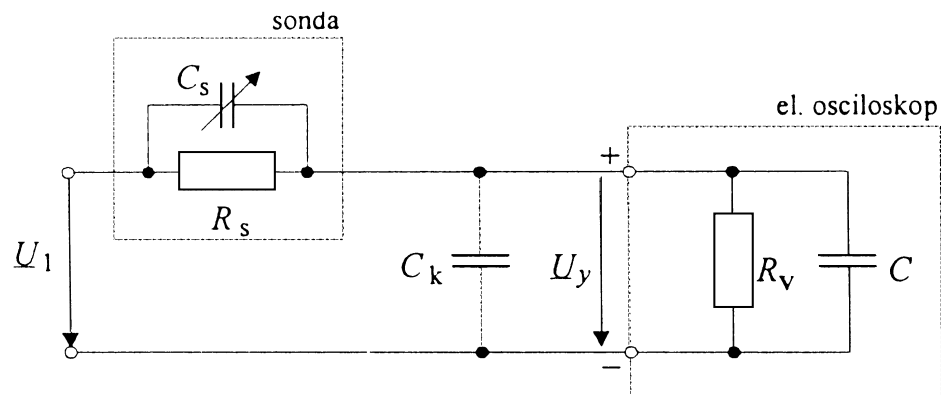
Vhodno impedanco osciloskopa sestavljata:

- **vzporedna upornost:** $R_v \approx 1\text{M}\Omega$,
- **kapacitivnost:** $C(30\text{pF} \div 50\text{pF})$.

Koaksialni kabel ima svojo impedanco, katere bistveni del je **kapacitivnost** C_k podana na dolžino (ca. 50pF/m).

- je frekvenčno odvisna. $C_v = C + C_k$





Frekvenčno odvisnost kompenziramo s **frekvenčno kompenzirano napetostno sondo**.

- ne pači signal, manj obremenjuje vir, signal pa slabi.

Napetostni delilnik:

$$\frac{U_y}{U_1} = \frac{Z_V}{Z_V + Z_s} = \frac{1}{1 + Z_s/Z_V} = \frac{1}{1 + Y_V/Y_s} = \frac{Y_s}{Y_s + Y_V} \quad \text{z elementi:}$$

$$\frac{U_y}{U_1} = \frac{(1/R_s + j\omega C_s)}{(1/R_s + j\omega C_s) + (1/R_v + j\omega C_v)} = \frac{(1 + j\omega R_s C_s)/R_s}{(1 + j\omega R_s C_s)/R_s + (1 + j\omega R_v C_v)/R_v}$$

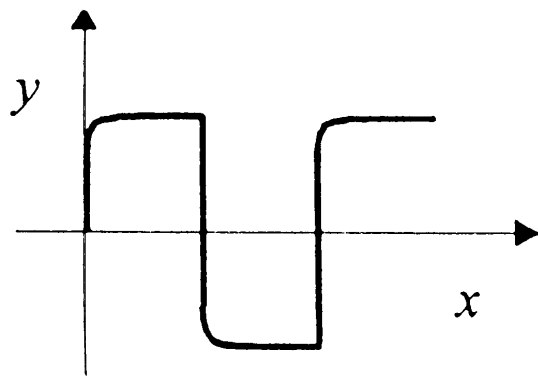
- s C_s nastavimo $R_s C_s = R_v C_v$ in **kompenziramo** sondo:

$$\frac{U_y}{U_1} = \frac{R_v}{R_v + R_s} = \frac{C_s}{C_s + C_v} \quad \text{- napetostno razmerje neodvisno od } f$$

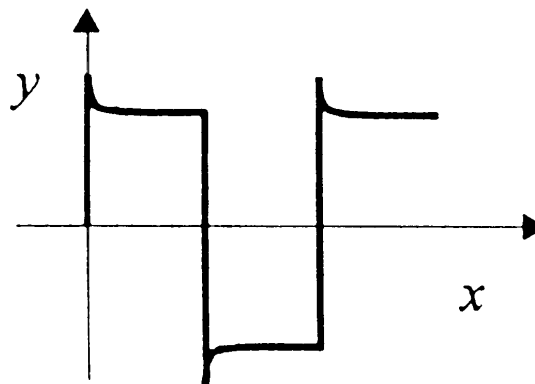




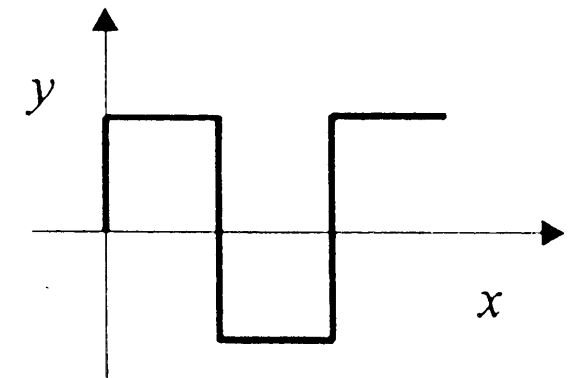
- sondo kompenziramo s pomočjo **pravokotnega signala** (priključek na osciloskopu):
 - **podkompenzirana (a):** $R_s C_s < R_v C_v$
 - **nadkompenzirana (b):** $R_s C_s > R_v C_v$,
 - **pravilno kompenzirana (c):** $R_s C_s = R_v C_v$,



a)



b)



c)

Slika 4.17 Slika na zaslonu EO za različne stopnje kompenzacije sonde





Impedanca osciloskopa je še vedno **odvisna** od **frekvence**:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_s + \underline{Z}_v = \frac{1}{\underline{Y}_s} + \frac{1}{\underline{Y}_v} = \frac{1}{1/R_s + j\omega C_s} + \frac{1}{1/R_v + j\omega C_v} = \frac{R_s + R_v}{1 + j\omega R_v C_v}$$

- če je sonda 1:10, je \underline{Z} deskrat večja kot \underline{Z}_v brez sonde.

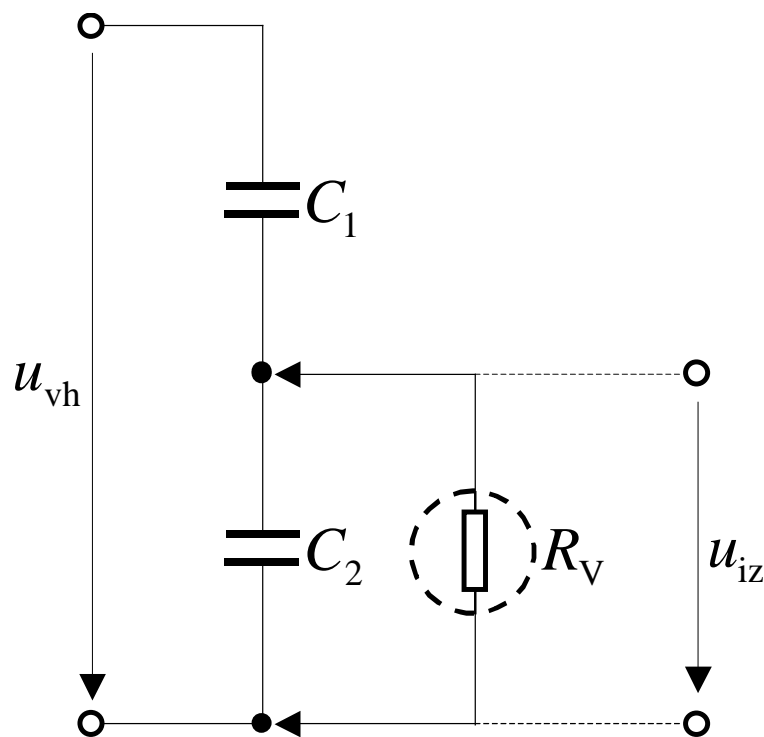
$$\underline{Z} = \frac{R_s + R_v}{R_v} \frac{R_v}{1 + j\omega R_v C_v} = \frac{R_s + R_v}{R_v} \frac{1}{1/R_v + j\omega C_v} = 10 \underline{Z}_v$$





4.2.1.3 Kapacitivni napetostni delilnik

Napetostno območje lahko razširimo tudi s kapacitivnim delilnikom. **Kapacitivni delilniki** se običajno uporabljajo za merjenje napetosti višjih od 150 kV. Sestavljeni so iz zaporedno vezanih kondenzatorjev C_1 in C_2 ($C_1 \ll C_2$).

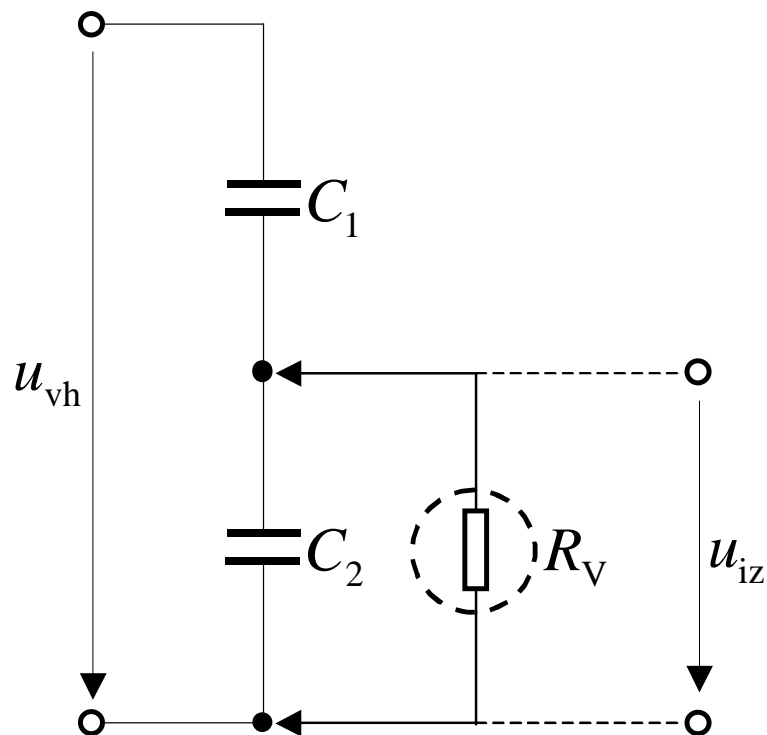


Odnos med izhodno in vhodno napetostjo kapacitivnega delilnika določata impedanca $\underline{Z}_1 = 1/j\omega C_1$ in impedanca \underline{Z}_2 vzporedne vezave kondenzatorja C_2 in upornosti voltmetra R_V :

$$\underline{Z}_2 = R_V \parallel \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{R_V}{1 + j\omega R_V C_2}$$

Slika 4.18 Kapacitivni delilnik





Pri sinusni vzbujaalni napetosti zapišemo za kapacitivni delilnik:

$$\underline{U}_{iz} = \underline{U}_{vh} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \underline{U}_{vh} \frac{\frac{R_v}{1 + j\omega R_v C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R_v}{1 + j\omega R_v C_2}}$$

Problem te vezave je upornost voltmetra, saj močno vpliva na izmerjeno napetost. Če bi bila upornost voltmetra neskončna, bi bila napetost odvisna samo od kondenzatorjev.

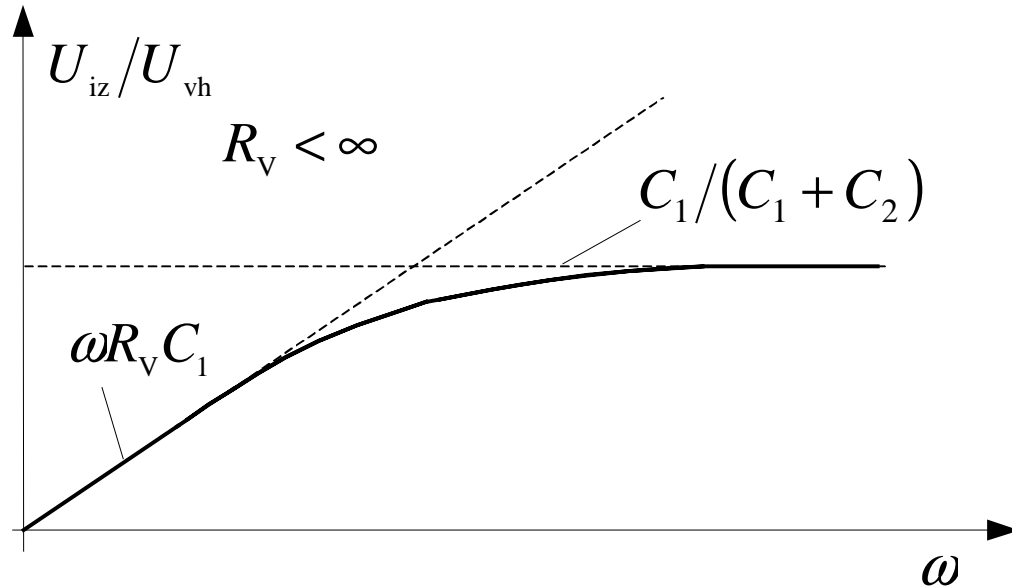
$$R_v = \infty \Rightarrow \frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$





Ob končni upornosti voltmetra temu ni tako.

$$U_{iz} = \frac{j\omega \frac{C_1}{C_1 + C_2}}{j\omega + \frac{1}{R_V(C_1 + C_2)}} \cdot U_{vh} \approx \begin{cases} j\omega R_V C_1 U_{vh} & \Leftarrow R_V \ll \frac{1}{j\omega(C_1 + C_2)} \\ \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_{vh} & \Leftarrow R_V \gg \frac{1}{j\omega(C_1 + C_2)} \end{cases}$$



Napetost na delilniku se razdeli
v razmerju:

$$\frac{U_{iz}}{U_{vh}} = \frac{\omega R_V C_1}{\sqrt{1 + (\omega R_V)^2 (C_1 + C_2)^2}}$$





Poglejmo si razmere na primeru. Denimo, da je

$$U_{\text{vh}} = 100 \text{ kV}, U_{\text{iz}} = 100 \text{ V}, C_1 = 1 \text{ nF}, C_2 = 999 \text{ nF}$$

- Ob navedenih podatkih je impedanca delilnika Z_{iz} (notranja impedanca delilnika na izhodu):

$$Z_{\text{iz}} = \frac{1}{\omega (C_1 + C_2)} \approx 3,2 \text{ k}\Omega \quad (f = 50 \text{ Hz})$$

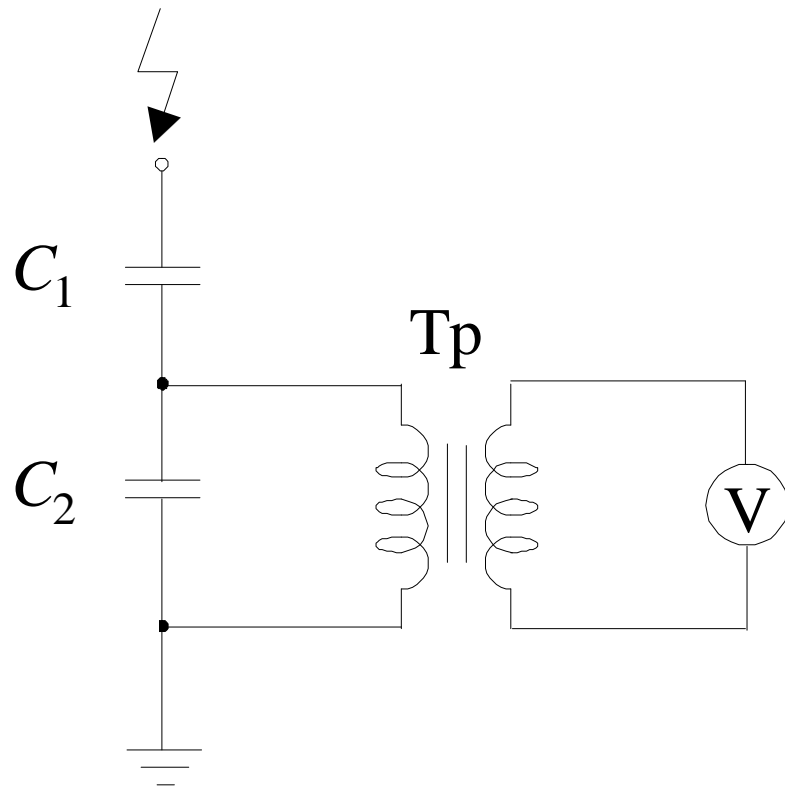
- Nazivna obremenitev napetostnega delilnika z nazivno močjo $S_n = 10 \text{ VA}$ je

$$Z_n = \frac{U_{\text{iz}}^2}{S_n} = \frac{100^2 \text{ V}^2}{10 \text{ VA}} = 1 \text{ k}\Omega = R_v$$

- Vidimo, da je nazivna obremenitev (upornost voltmetra) celo manjša od impedance delilnika, kar vnaša nesprejemljiv sistematični pogrešek zaradi vključitve instrumentarija. Med obema je sicer 90° zamik, kar nekoliko ublaži razmere.



Vpliva prenizke obremenitve se lahko znebimo tako, da delilno razmerje kapacitivnega delilnika zmanjšamo in uporabimo dodatni merilni transformator.



Slika 4.20 Kapacitivni delilnik s transformatorjem

Naj bo nazivna prestava tega transformatorja $k_{T_p} = 10 \text{ kV} / 100 \text{ V} = 100$. Zato mora biti delilno razmerje kapacitivnega delilnika zmanjšano na 10.

$$U_{\text{vh}} = 100 \text{ kV}, U_{\text{iz}} = 10 \text{ kV},$$

$$C_1 = 1 \text{ nF}, C'_2 = 9 \text{ nF} \Rightarrow Z_{\text{iz}} \approx 0,32 \text{ M}\Omega$$

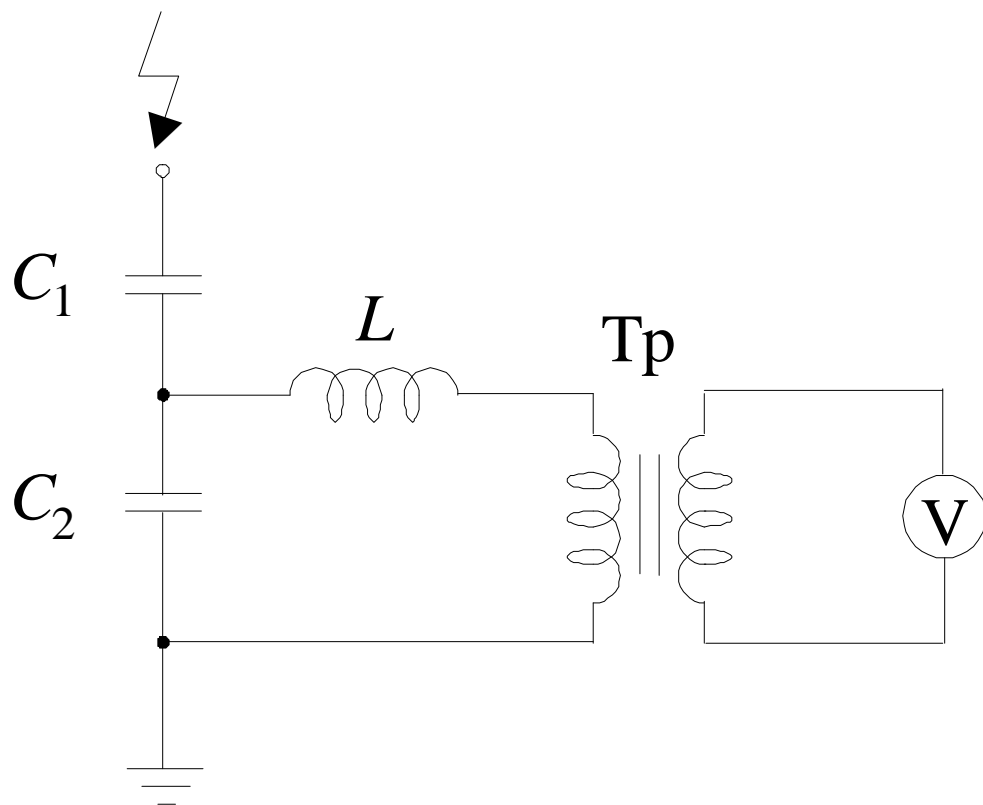
Upornost voltmetra na primarni strani transformatorja, ki jo čuti kapacitivni delilnik, pa je: $(10 \text{ kV} / 100 \text{ V})^2 1 \text{ k}\Omega = 10 \text{ M}\Omega$

Na ta način je postala upornost instrumentarija ($10 \text{ M}\Omega$) večja, kot je impedanca kapacitivnega delilnika Z_{iz} ($0,32 \text{ M}\Omega$), kar sistematični pogrešek zmanjša.





Opisani sistematični pogrešek zaradi vključitve instrumentarija pa lahko še bolj zmanjšamo, če uporabimo dodatno kompenzacijsko tuljavo, ki hkrati izniči tudi fazne premike (ni kotnih pogreškov).



Ker ima impedanca delilnika $Z_{iz} \approx 0,32 \text{ M}\Omega$ negativno imaginarno komponento, jo s primerno dimenzionirano tuljavico (pozitivna imaginarna komponenta) lahko učinkovito izničimo.

$$\omega L = 1/(\omega (C_1 + C_2))$$

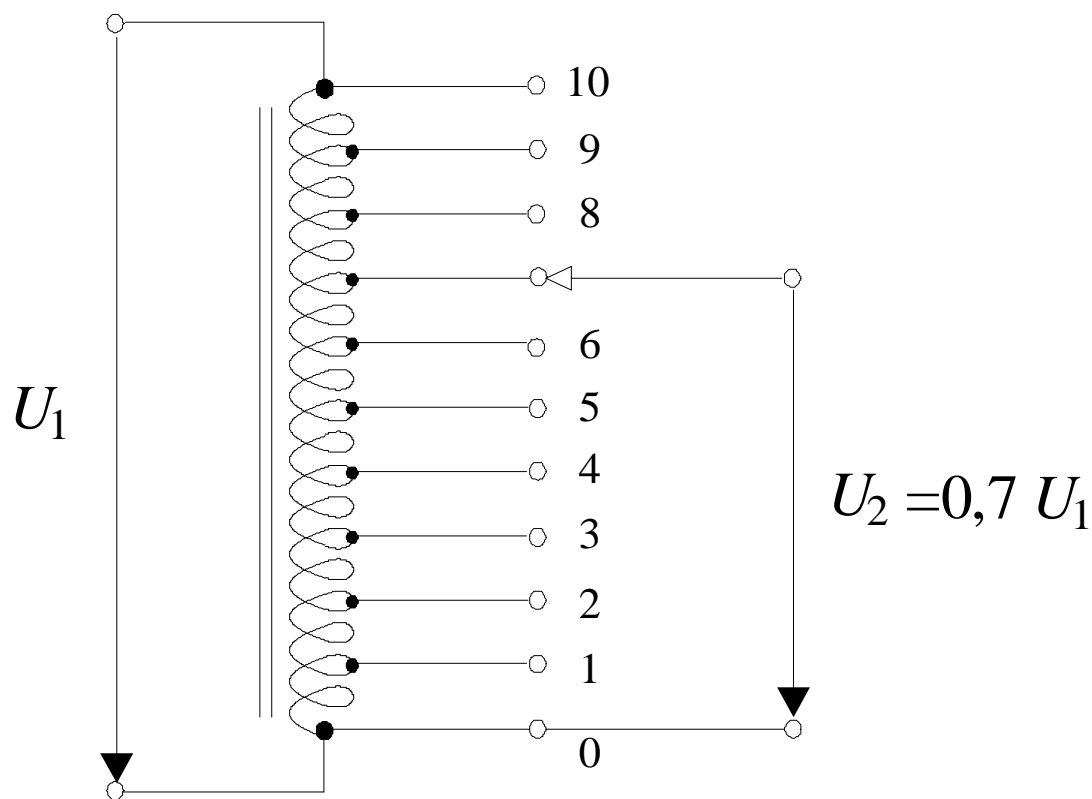
Slika 4.21 Kapacitivni delilnik s transformatorjem in tuljavo





4.2.1.4 Induktivni napetostni delilnik

Induktivni delilniki so napetostniki - napetostni transformatorji, ki s svojimi odcepi omogočajo zelo natančne porazdelitve pritisnjene napetosti.



Slika 4.22 Člen induktivnega delilnika

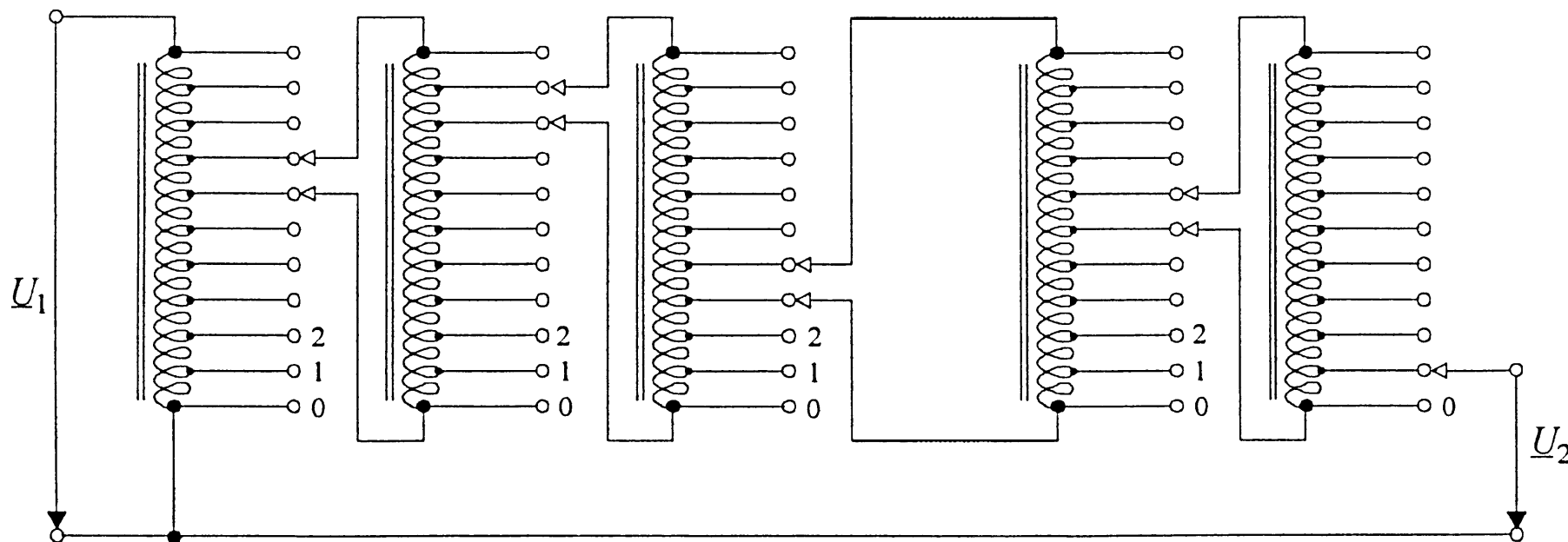
Visoko točnost dosežemo s prepletanjem vodnikov enakih presekov, ki so naviti okoli jedra odlične magnetne vodljivosti. Vodniki so nato vezani zaporedno.

Takšna vezava omogoča, da teče po vsakem delu praktično enak magnetni pretok, zaradi česar se v vseh delih inducira enaka napetost.





Več takšnih členov lahko vežemo v kaskado (verigo), tako da dobimo celo 8-stopenjske kaskade z zelo točno napetostno prestavo. Dosežemo lahko napetostne pogreške manjše od 10^{-7} .



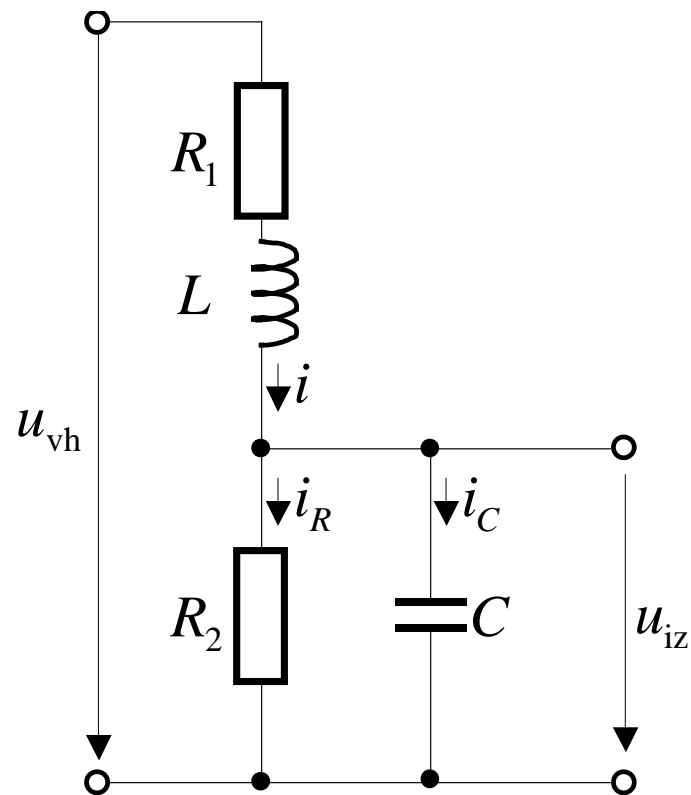
Slika 4.23 Večstopenjski induktivni delilnik $\underline{U}_2 = 0,683xxx51\underline{U}_1$

- bremenitev predhodne deкаде je minimalna, ker je magnetilni tok majhen,
- izhodna impedanca je majhna, ker je žica velikega preseka.





4.2.1.5 Uporovni induktivno-kapacitivni napetostni delilnik



Kadar zmanjšamo napetostni signal le delno ($<1\%$), je upor R_1 precej manjši kot upor R_2 in imamo namesto upora R_1 serijsko nadomestno vezavo z induktivnostjo (velja za majhne vrednosti upornosti) in poleg upora R_2 še paralelno nadomestno vezavo kapacitivnosti (velja za velike vrednosti upornosti).

Dano vezje analizirajmo v časovnem prostoru. Velja:

$$u_{vh} = R_1 i + L \frac{di}{dt} + u_{iz} \quad \text{in} \quad i = i_R + i_C = \frac{u_{iz}}{R_2} + C \frac{du_{iz}}{dt}$$





$$u_{\text{vh}} = R_1 i + L \frac{di}{dt} + u_{\text{iz}} \quad \leftarrow \quad i = i_R + i_C = \frac{u_{\text{iz}}}{R_2} + C \frac{du_{\text{iz}}}{dt}$$

Po vstavitvi toka iz druge enačbe v prvo, odvajanju in preureditvi dobimo linearno **diferencialno enačbo drugega reda**:

$$u_{\text{vh}} = \frac{R_1}{R_2} u_{\text{iz}} + R_1 C \frac{du_{\text{iz}}}{dt} + \frac{L}{R_2} \frac{du_{\text{iz}}}{dt} + LC \frac{d^2 u_{\text{iz}}}{dt^2} + u_{\text{iz}}$$

$$LC \frac{d^2 u_{\text{iz}}}{dt^2} + \left(R_1 C + \frac{L}{R_2} \right) \frac{du_{\text{iz}}}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} u_{\text{iz}} = u_{\text{vh}}$$

Če primerjamo dobljeno enačbo z osnovno linearno diferencialno enačbo člena drugega reda

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x$$





so parametri obnašanja merilnega člena drugega reda naslednji:

- **prenosni faktor** ali delilno razmerje stacionarnega stanja:

$$k = \frac{u_{iz}}{u_{vh}} = \frac{1}{a_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- **lastna kotna frekvenca** nedušenega nihanja:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_2 LC}}$$

- **in stopnja dušenja:**

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} = \frac{R_1 C + L/R_2}{2\sqrt{LC \cdot (R_1 + R_2)}/R_2}$$

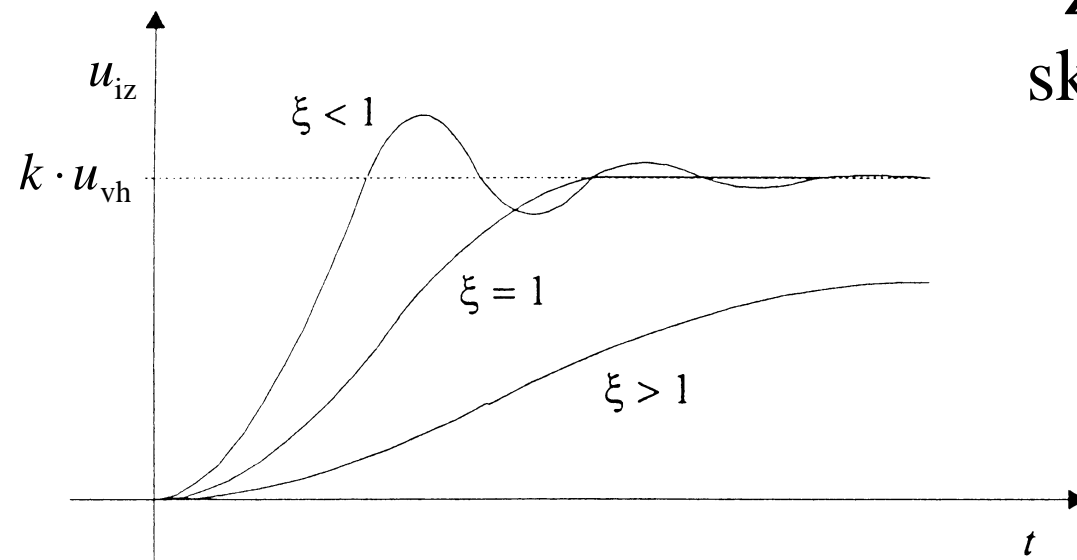




Če se vhodna veličina – napetost – **hipno spremeni**, izhodna napetost merilnega člena **ne more v trenutku** zavzeti nove vrednosti.

Tudi **ustaviti se ne more v trenutku** (niha okrog novega ravnovesnega položaja).

- Da lahko čim hitreje odčitamo novo vrednost, mora biti **nihanje dušeno**.



Značilne odzive razdelimo v tri skupine:

- podkritično dušenje $\xi < 1$,
- kritično dušenje $\xi = 1$,
- nadkritično dušenje $\xi > 1$.

Slika 4.25 Gibanje izhodne napetosti po prikjučitvi stalne napetosti na vходу

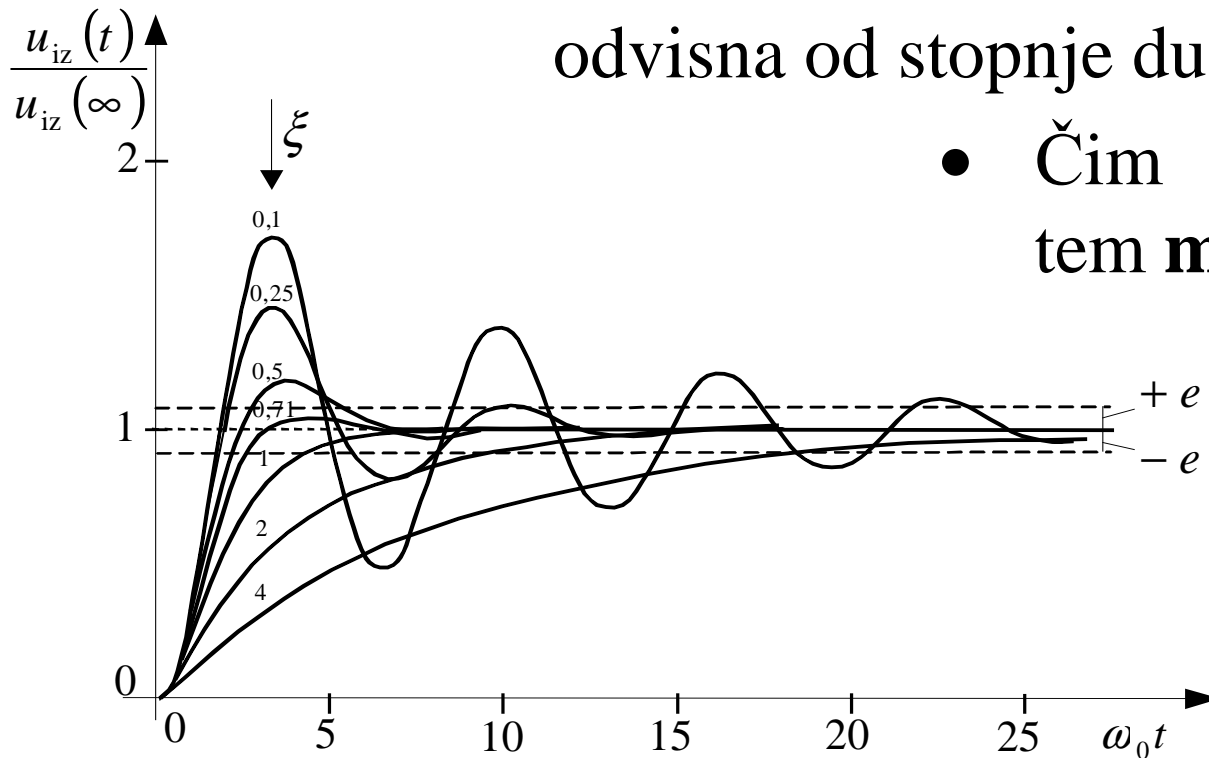




Če je stopnja dušenja $\xi < 1$, je rešitev enačbe dušeno nihanje:

$$\frac{u_{iz}}{u_{vh}} = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \omega_0 t + \arccos \xi\right)$$

- Za **podkritično dušenje** je **kotna frekvenca** ω_d odvisna od stopnje dušenja: $\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}$
 - Čim **večja** je stopnja dušenja, tem **manjša** je **kotna frekvenca**.



Slika 4.26: Primeri različnih vrst odzivov sistema drugega reda na stopničasti vhod



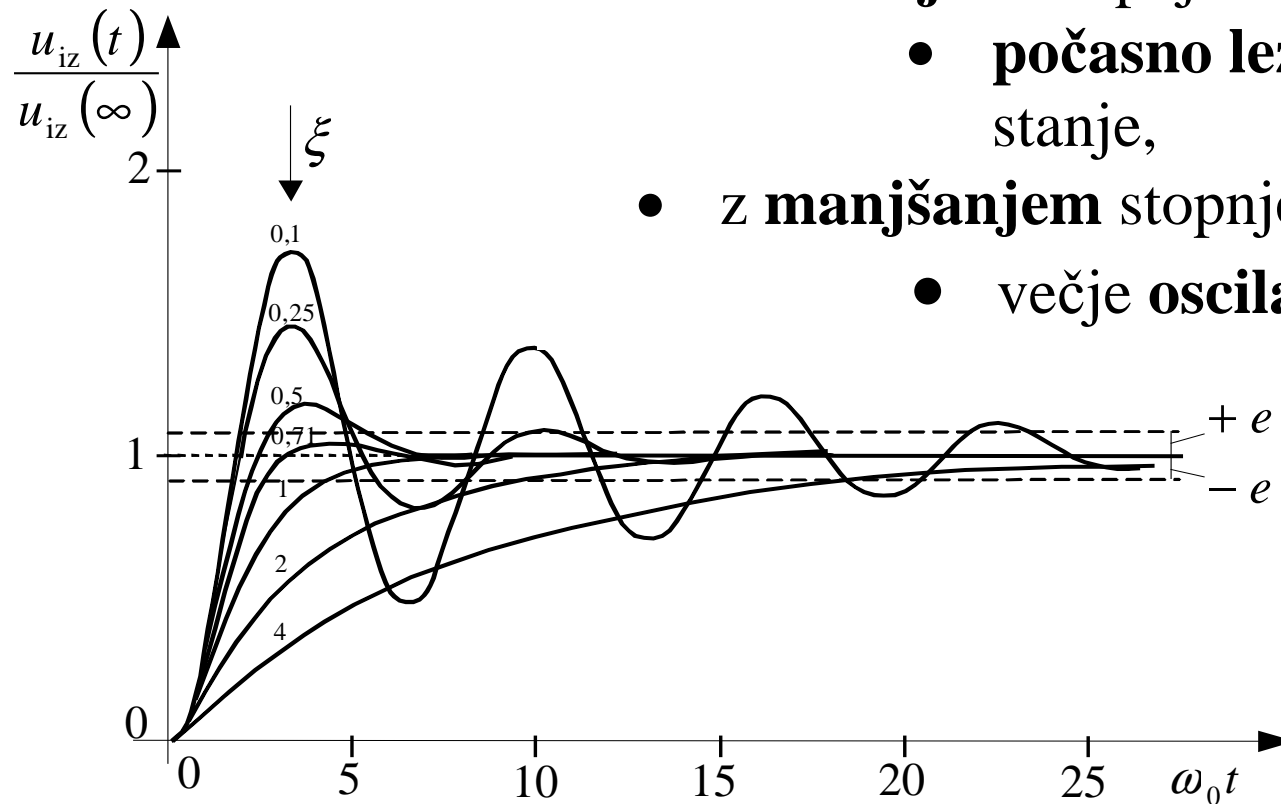


Dvižni čas je čas, ki je potreben, da signal izhoda preleti interval med 10% in 90% svoje končne vrednosti.

- Čim **večja** je **stopnja dušenja**, tem **daljši** je **dvižni čas**.

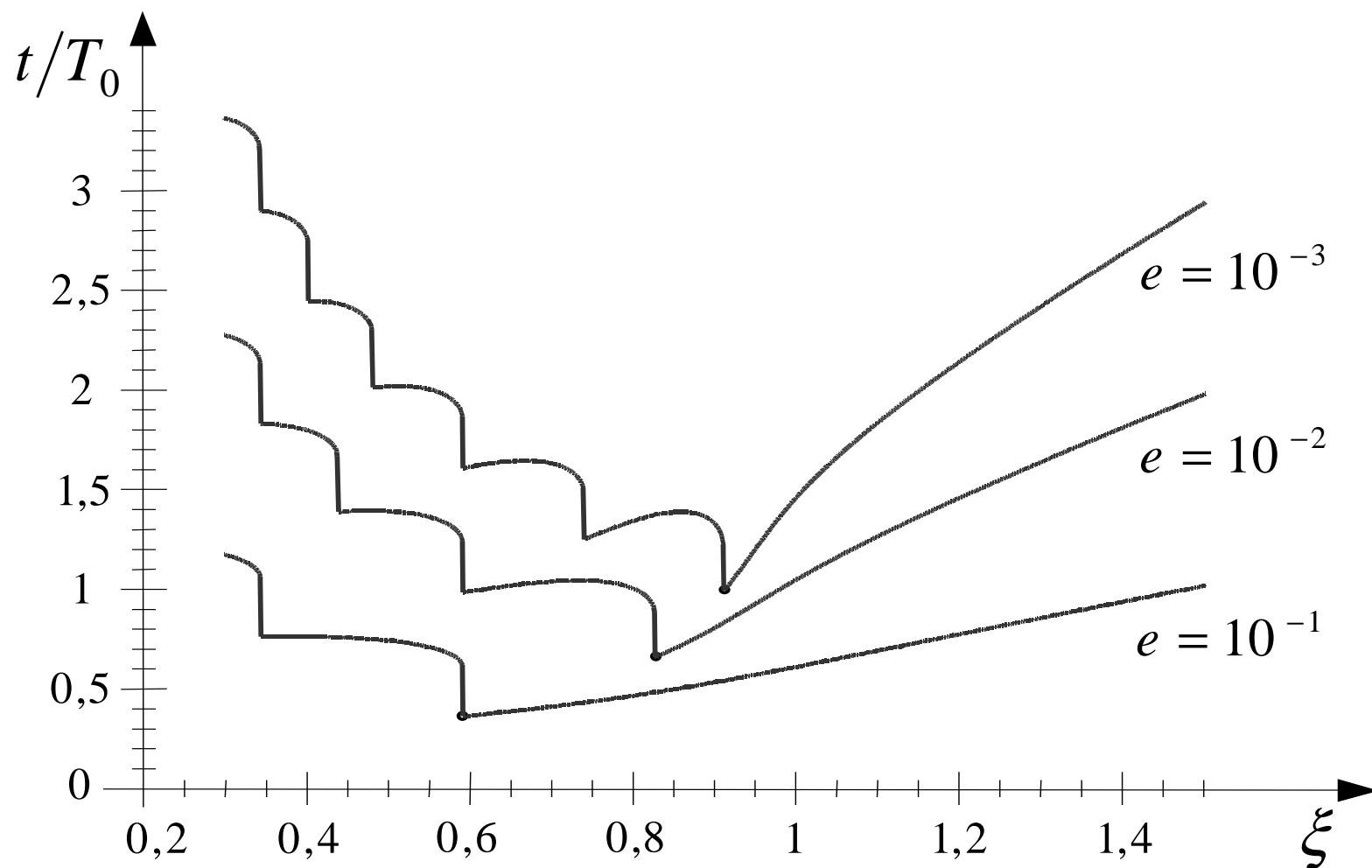
Odzivni čas merilnega člena znotraj odstopanja e od končnega odklona se:

- z **večanjem** stopnje dušenja **povečuje**
 - **počasno lezenje** v novo stacionarno stanje,
- z **manjšanjem** stopnje dušenja **tudi povečuje**,
 - večje **oscilacije**.



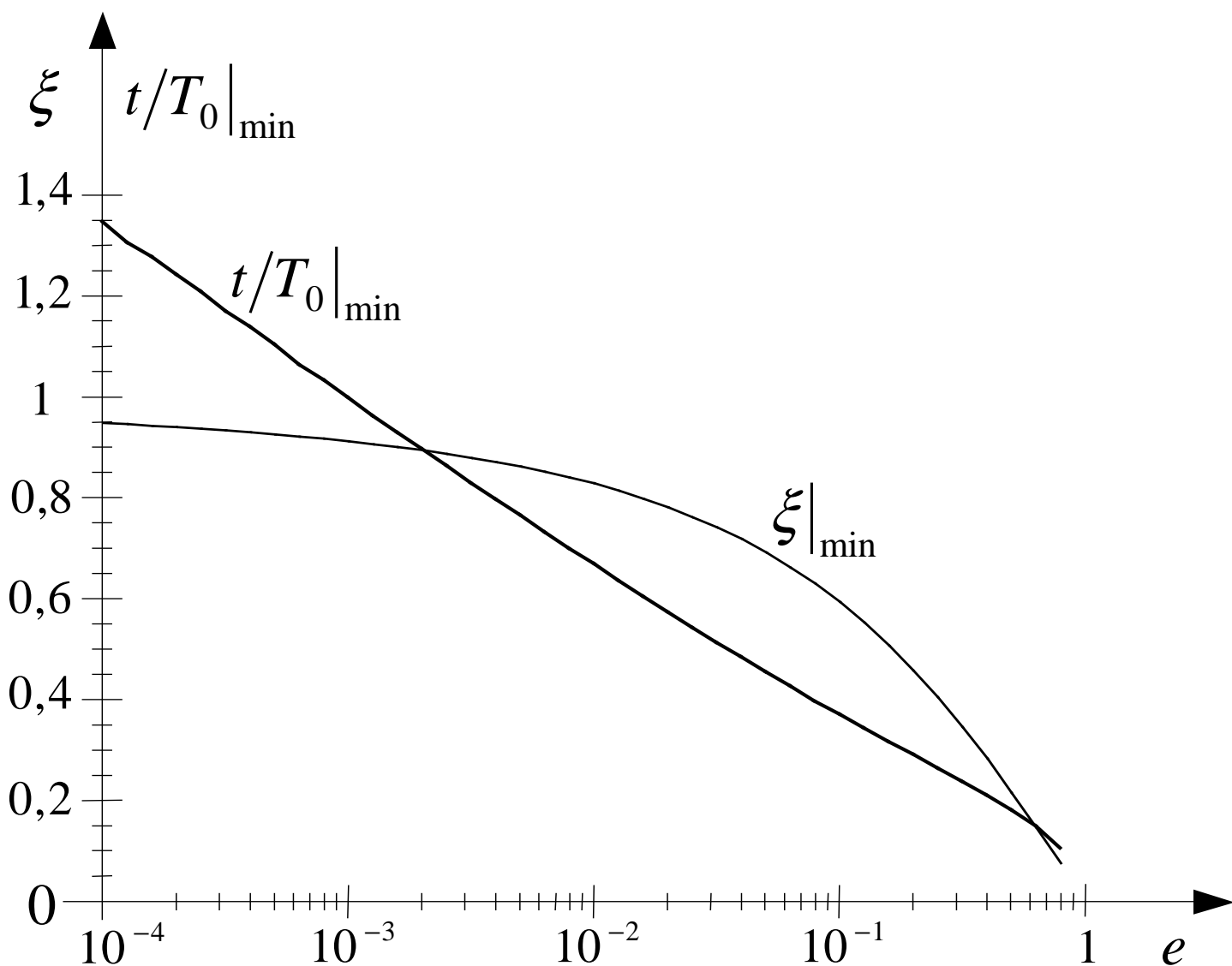
Kompromisna vrednost stopnje dušenja: $\xi = 0,8 \div 0,9$





Slika 4.27 Odzivni čas v odvisnosti od stopnje dušenja pri različnih vrednostih e ($T_0 = 2\pi/\omega_0$ - nihajni čas nedušenega nihanja)





Slika 4.28 Najkrajši odzivni čas in stopnja dušenja v odvisnosti od e





Odziv člana drugega reda na sinusno obliko

Če imamo na vходу **sinusna obliko** napetostnega signala, je takšne oblike **v ustaljenem stanju** tudi izhodna napetost:

$$u_{\text{vh}} = \hat{u}_{\text{vh}} e^{j\omega t} \Rightarrow u_{\text{iz}} = \hat{u}_{\text{iz}} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Kompleksna oblika enačbe spreminjanja je:

$$LC \frac{d^2 u_{\text{iz}}}{dt^2} + \left(R_1 C + \frac{L}{R_2} \right) \frac{du_{\text{iz}}}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} u_{\text{iz}} = u_{\text{vh}}$$

$$a_2 \frac{d^2 u_{\text{iz}}}{dt^2} + a_1 \frac{du_{\text{iz}}}{dt} + a_0 u_{\text{iz}} = u_{\text{vh}}$$

- kjer sta odvoda: $\frac{du_{\text{iz}}}{dt} = j\omega \hat{u}_{\text{iz}} e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega u_{\text{iz}}$

$$\frac{d^2 u_{\text{iz}}}{dt^2} = -\omega^2 u_{\text{iz}}$$





Relativna frekvenca: $\nu = \omega / \omega_0$

- razmerje frekvence ω vsiljene napetosti v primerjavi z lastno frekvenco nedušenega nihanja.

Povezava med vhomom in izhodom je:

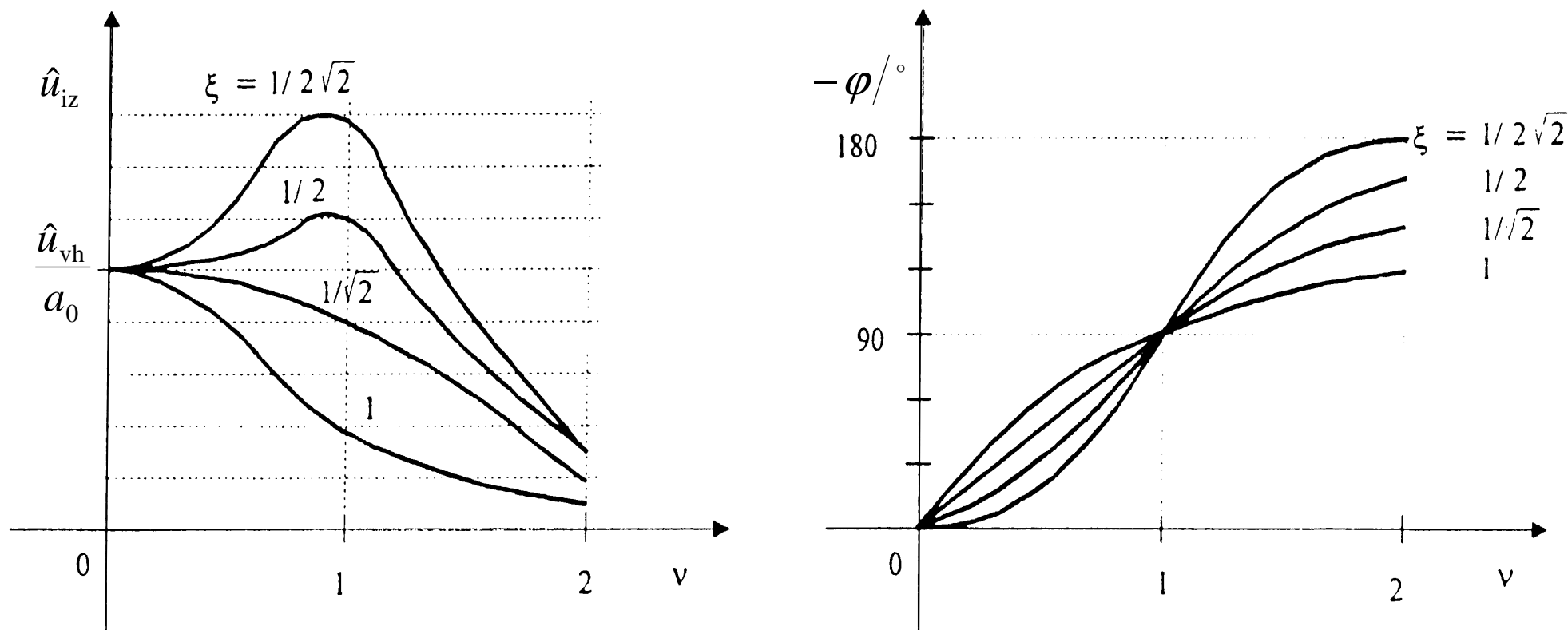
$$u_{iz} = \frac{u_{vh}}{a_0 - \omega^2 a_2 + j\omega a_1} \quad \text{OZ.} \quad u_{iz} = \frac{u_{vh}}{a_0} \cdot \frac{1}{(1 - \nu^2) + j2\nu\xi}$$

Zanimata nas temenska vrednost izhodnega signala
(amplitudna karakteristika):

$$\hat{u}_{iz} = \frac{\hat{u}_{vh}}{a_0} \frac{1}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + (2\nu\xi)^2}}$$

in fazni zamik **(fazna karakteristika):** $\varphi = -\arctg \frac{2\nu\xi}{1 - \nu^2}$





Slika 4.29 Amplitudni in fazni odziv merilnega člana drugega reda
 $\hat{u}_{iz} = \hat{u}_{vh} / a_0$ - odklon pri konstantni vhodni napetosti





Kadar je **lastna frekvenca majhna** se merilni člen drugega reda obnaša kot **nizkoprepustni filter**.

- Za **odklon** je bolj pomembna **povprečna vrednost**.

Primer: $\xi = 1$, $T_0 = 1\text{s}$, frekvenca vzbujanja je $f = 50\text{Hz}$
Kolikokrat manjši je odklon kot pri konstantnem vzbujanju $f = 0\text{Hz}$?

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2\pi/T}{2\pi/T_0} = T_0 f = 1\text{s} \cdot 50\text{Hz} = 50$$

$$\frac{a_0 \hat{u}_{iz}}{\hat{u}_{vh}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + (2\nu\xi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-50^2)^2 + (2 \cdot 50 \cdot 1)^2}} = 4 \cdot 10^{-4}$$

- Tako male relativne spremembe zaznamo le z instrumentom, ker **človeško oko** tega **ne opazi**.





4.2.2 Napetostni merilni transformator

Z njim **razširimo** (zožimo) **merilno območje** voltmetrov, vatmetrov itn.

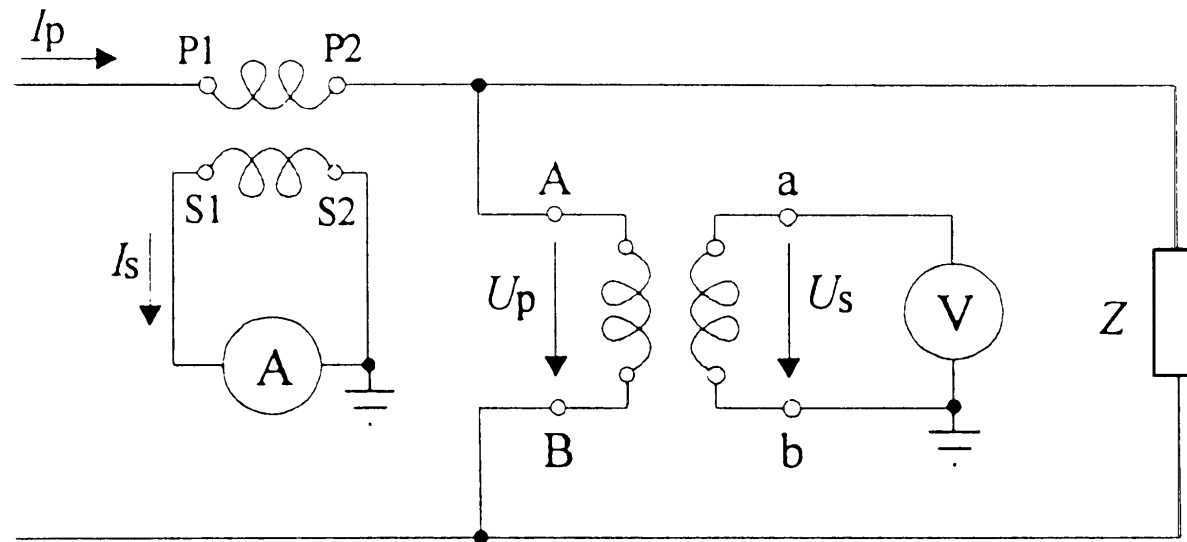
Sestavljen je iz:

- **feromagnetnega jedra,**
- **primarnega navitja,**
- **in galvansko ločenega sekundarnega navitja.**

Poznamo:

- **tokovni merilni transformator** (tokovnik),
- **napetostni merilni transformator** (napetostnik).





Slika 4.30 Priključek tokovnika in napetostnika

Poznati moramo **prestavo** transformatorja (K_i oz. K_u):

- $U_p = K_u U_s$ - za napetostnik
 - napetost primarnega navitja dobimo tako, da napetost sekundarnega navitja, ki jo merimo z voltmetrom, pomnožimo s prestavo!
- $I_p = K_i I_s$ - za tokovnik





Razmerje med primarno in sekundarno napetostjo – **prestava napetostnika** – je **odvisno od**:

- velikosti napetosti,
- bremena na sekundarni strani,
- frekvence, uporabljenega materiala...

Suče se okoli **nazivne vrednosti** prestave:

$K_{un} = U_{pn} / U_{sn}$ - razmerje primarne nazivne napetosti in sekundarne nazivne napetosti (podani)

- **odstopanje je odvisno od razreda** točnosti merilnega transformatorja.

Ker **uporabljamo** pri izračunih primarnih vrednosti **nazivne prestave namesto dejanskih**, nastane **prestavni pogrešek**:

$$e = \frac{K_n - K}{K} \text{ oz. napetostni prestavni pogrešek: } e_u = \frac{K_{un} U_s - U_p}{U_p}$$

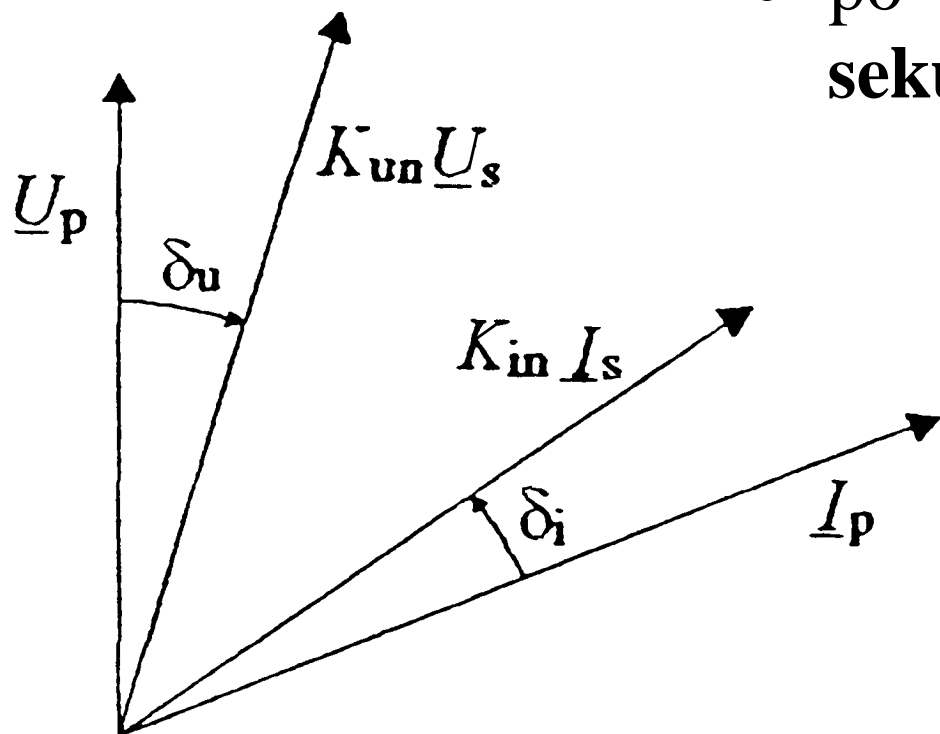




Pri posrednem merjenju moči, energije, ... moramo upoštevati tudi **kotni pogrešek**:

- **fazna razlika** med fazorjema primarnega in sekundarnega navitja.

- po dogovoru je **pozitiven**, če sekundar prehiteva primar.



e_u - pozitiven,
 δ_u - negativen,

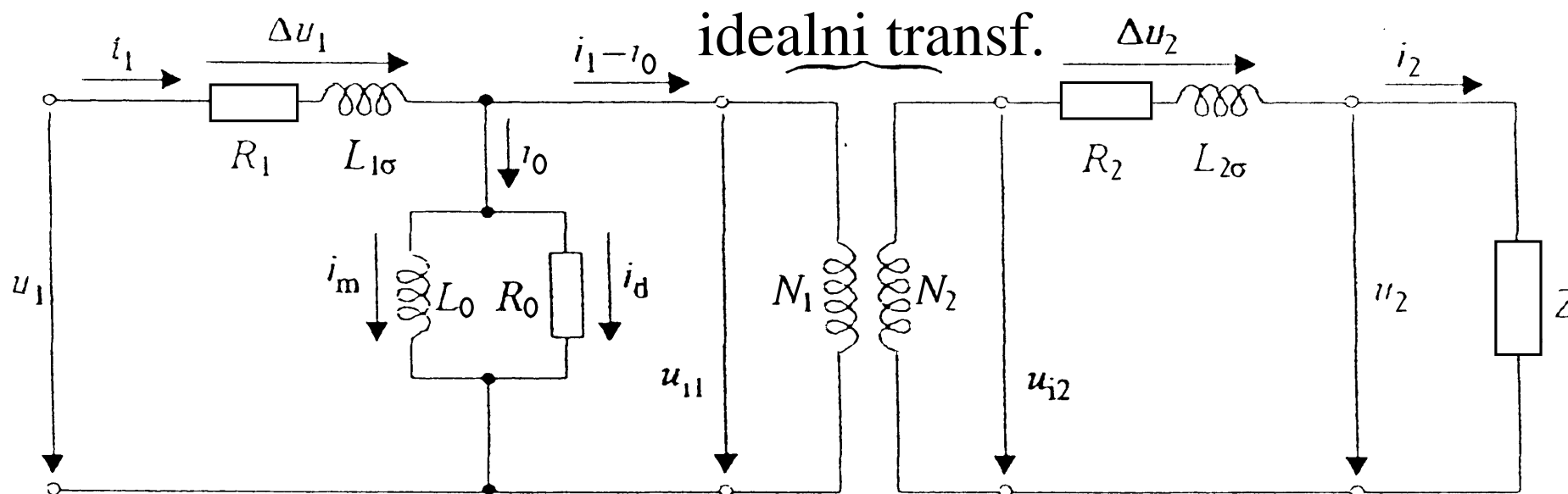
e_i - negativen,
 δ_i - pozitiven,

Slika 4.31 Pogreška tokovika in napetostnika





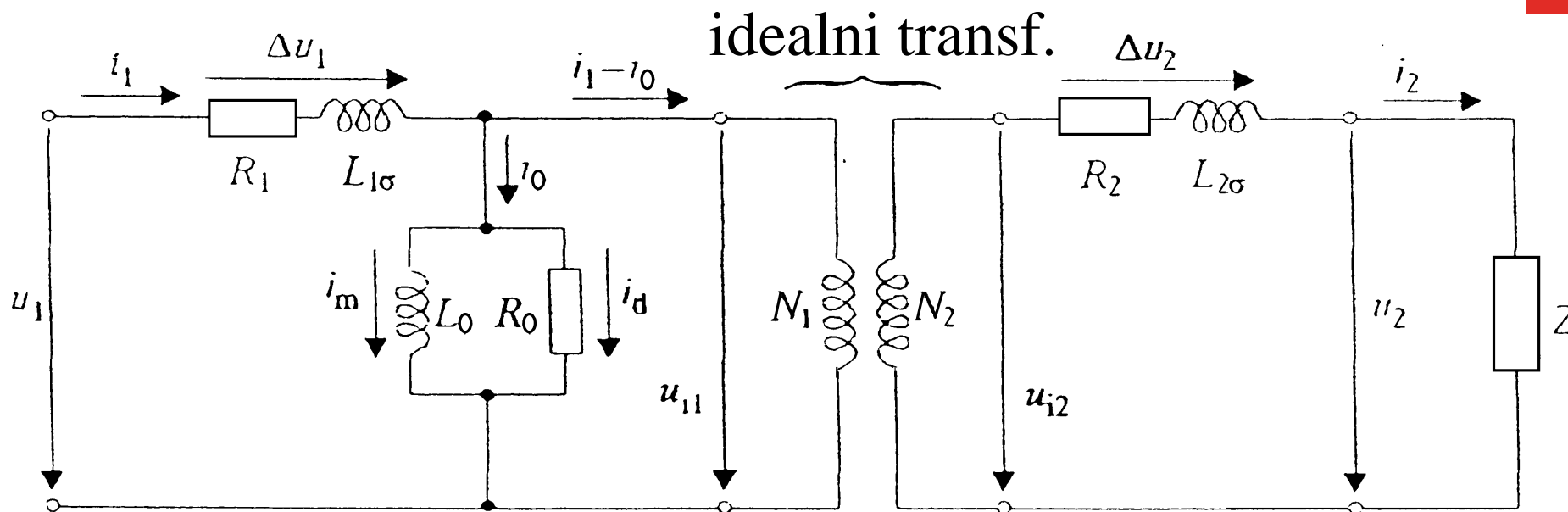
Nadomestno vezje merilnega transformatorja



Slika 4.32 Nadomestno vezje merilnega transformatorja

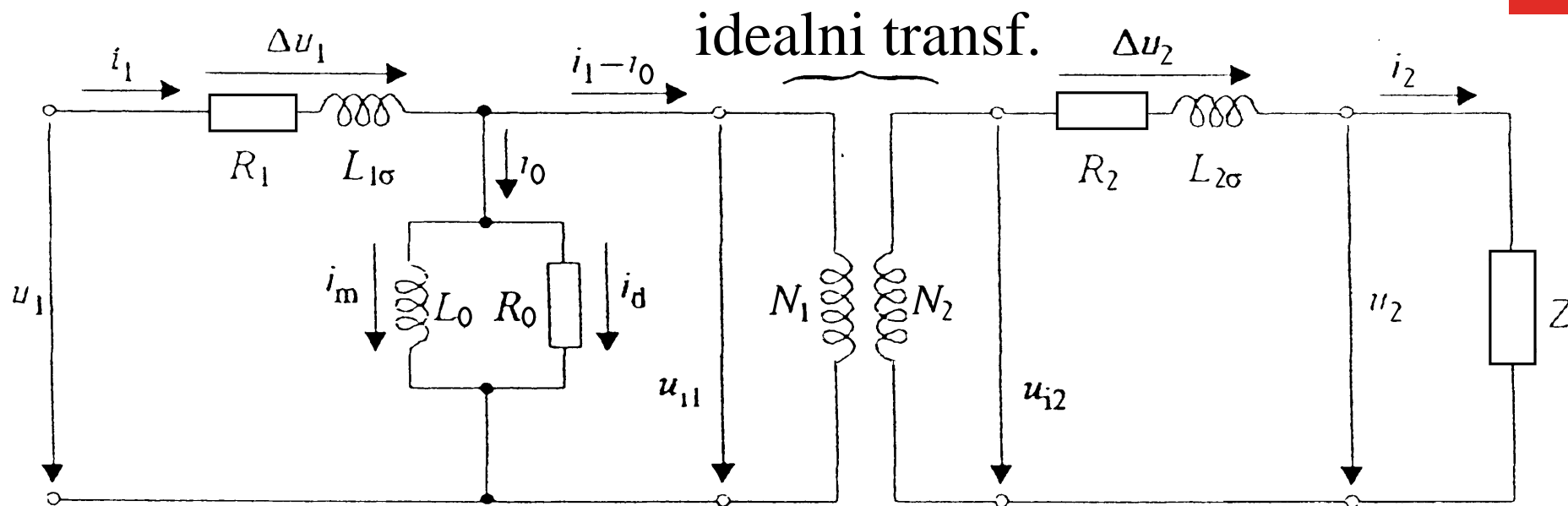
- R_1 - ohmska **upornost primarnega** navitja,
- $L_{1\sigma}$ - stresana **induktivnost primarnega** navitja,
- R_2 - ohmska **upornost sekundarnega** navitja,
- $L_{2\sigma}$ - stresana **induktivnost sekundarnega** navitja,





- L_0 - induktivnost jedra,
 - z magnetilnim tokom i_m vzbuja magnetni pretok v jedru
- R_0 - upornost jedra,
 - z i_d ponazarja izgube v jedru
- na sekundarju imamo priključeno impedanco Z





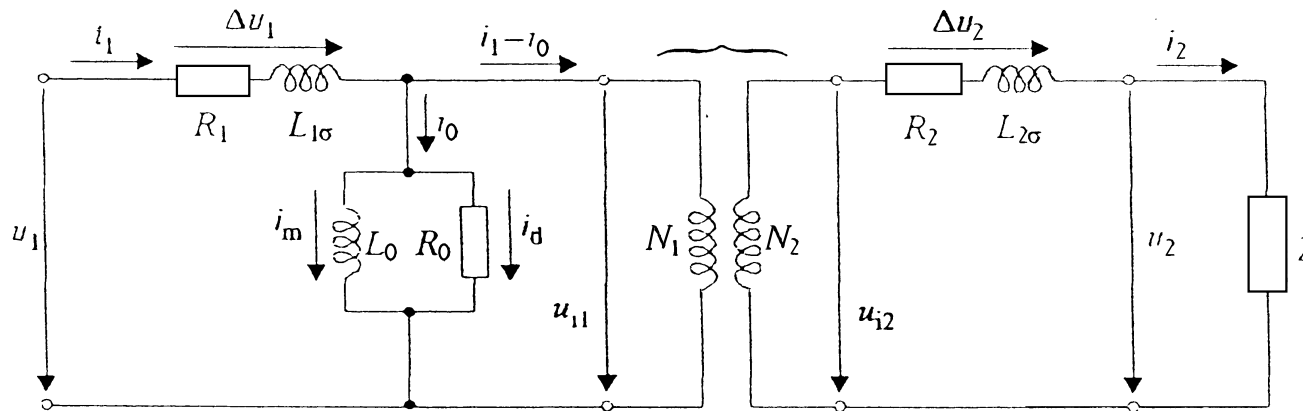
Slika 4.32 Nadomestno vezje merilnega transformatorja

Pri napetostniku imamo vsiljeno napetost (tok i_1 čim manjši).

Velja:

$$\frac{u_{i1}}{u_{i2}} = \frac{N_1 d\phi/dt}{N_2 d\phi/dt} = \frac{N_1}{N_2}$$





$$\frac{u_{i1}}{u_{i2}} = \frac{N_1 d\phi/dt}{N_2 d\phi/dt} = \frac{N_1}{N_2}$$

Upoštevati moramo še **padce napetosti** Δu_1 oz. Δu_2

- na **upornostih** navitij (R_1, R_2) in stresanih **induktivnostih** ($L_{\sigma 1}, L_{\sigma 2}$). $u_1 - u_{i1} - \Delta u_1 = 0$ $u_{i2} - u_2 - \Delta u_2 = 0$

$$u_2 + \Delta u_2 = u_{i2} = \frac{u_{i2}}{u_{i1}} u_{i1} = \frac{N_2}{N_1} (u_1 - \Delta u_1)$$

$$u_2 = u_1 \frac{N_2}{N_1} \left[1 - \left(\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2} \right) \right]$$

- **prestava** je odvisna tudi **od padcev napetosti** na navitjih.





Osnovni podatki napetostnih merilnih transformatorjev

Po mednarodnih priporočilih IEC 186-1987 so napetostniki razvrščeni v pet razredov točnosti:

0,1 – 0,2 – 0,5 – 1 – 3

- pogoji:
 - nazivna frekvenca,
 - napetost med 80% in 120% nazivne napetosti,
 - breme med 25% in 100% nazivnega bremena,
 - faktor moči 0,8 induktivnega značaja.

Tabela 4.1 Meje pogreškov napetostnikov

razred točnosti	0,1	0,2	0,5	1	3
meje napetostnega pogreška	$\pm 0,1\%$	$\pm 0,2\%$	$\pm 0,5\%$	$\pm 1,0\%$	$\pm 3,0\%$
meje kotnega pogreška	$\pm 5'$	$\pm 10'$	$\pm 20'$	$\pm 40'$	/





Priporočene **standardne vrednosti**:

- primarna nazivna napetost v skladu z nazivnimi vrednostmi omrežij,
- sekundarna nazivna napetost: 100 V, (200 V)
- **nazivna moč**: (10 – 25 – 50 – 100 – 200 – 500) VA.
 - To je **vrednost navidezne moči**, ki jo napetostnik daje v sekundarni tokokrog pri **nazivni sekundarni napetosti** in **nazivni obremenitvi**:

$$S_n = U_{sn}^2 Y_n$$





- **nazivno breme** je admitanca podana v siemensih:

$$Y_n = \frac{S_n}{U_{sn}^2} = \frac{50 \text{ VA}}{(100 \text{ V})^2} = 5 \text{ mS}$$

- ustreza impedanci 200Ω

- 25% nazivnega bremena:

$$Y_{25\%} = \frac{S_{25\%}}{U_{sn}^2} = \frac{12,5 \text{ VA}}{(100 \text{ V})^2} = 1,25 \text{ mS}$$

- ustreza impedanci 800Ω





4.3 Zmanjšanje in prireditev tokovnih signalov

Za zmanjšanje in prireditev tokovnih signalov uporabljamo najbolj pogosto pasivne merilne člene:

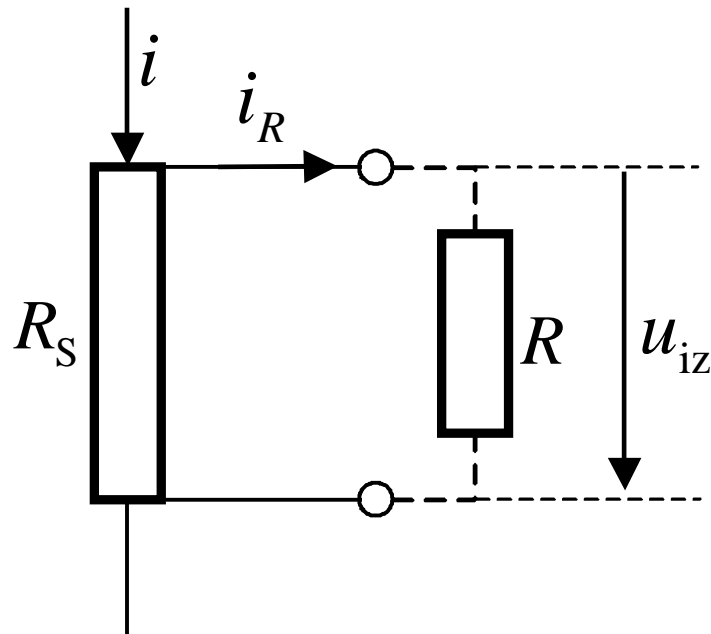
- **tokovne delilnike in**
- **tokovne merilne transformatorje.**





4.3.1 Tokovni delilnik s souporom

Osnovno shemo prilagoditve na tokovni vhod z notranjo upornostjo R predstavlja tokovni delilnik upora R in soupora R_S



$$i_R = i \frac{R_S}{R + R_S}$$

- kjer je $R_S \ll R$

- in padeč napetosti:

$$u_{iz} = i_R R = i \frac{R \cdot R_S}{R + R_S}$$

Slika 4.33 Tokovni delilnik s souporom





Standardna negotovost prenosnega faktorja k se izrazi z negotovostjo samega soupora:

$$k = \frac{u_{iz}}{i} = \frac{R \cdot R_S}{R + R_S} \quad \xrightarrow{R_S \ll R} \quad k = \frac{u_{iz}}{i} \approx R_S \quad \rightarrow \quad w_k \approx w_{R_S}$$

Tudi pri souporih si stojita nasproti dve zahtevi: upornost mora biti zaradi dopustne moči $R_S < P_{\max} / I^2$ čim manjša in izhodna napetost zaradi razmerja signal/šum čim večja. Z manjšanjem upornosti se večja tudi časovna konstanta ($\tau \approx L/R$).

Za tokove do 10A se uporabljajo soupori $0,1\Omega$, $0,01\Omega$ ($P_{\max} \approx 1\text{ W} \div 10\text{ W}$).

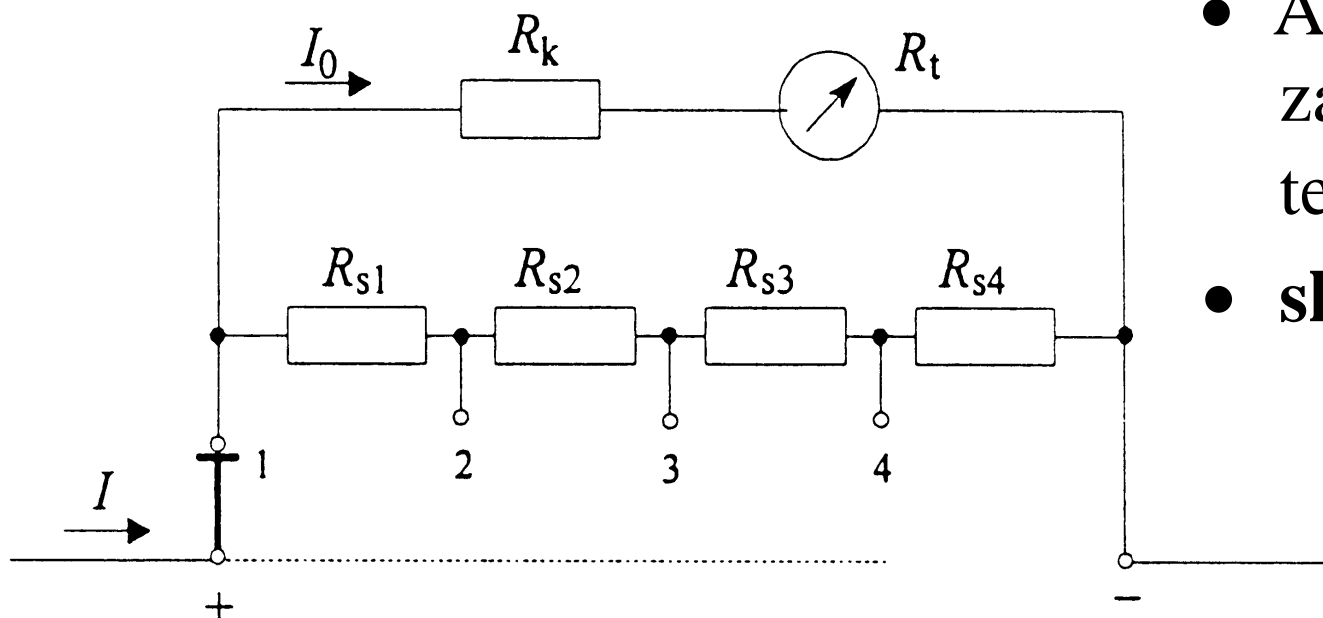




Razširitev merilnega območja ampermetra

Ampermetru razširimo merilno območje z vzporedno vezanimi souporom R_s .

- **Večkratni soupor** imenujemo **univerzalni** ali **Ayrtonov soupor**:



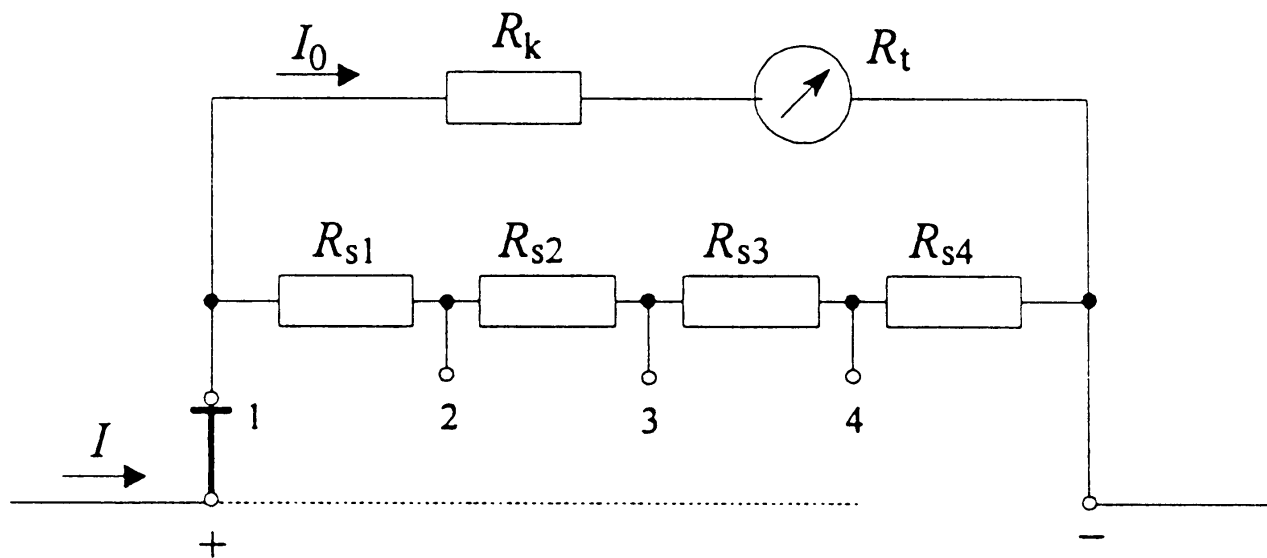
- Ampermetru lahko dodamo zaporedno upor R_k za temper. kompenzacijo.

- **skupna upornost :**

$$R_0 = R_k + R_t.$$

Slika 4.34 Razširitev merilnega območja ampermetra





Merilni doseg (narisani položaj 1) je:

$$I_1 = I_0 \frac{R_0 + R_{s1} + R_{s2} + R_{s3} + R_{s4}}{R_{s1} + R_{s2} + R_{s3} + R_{s4}}$$

I_0 - največji tok čez sam merilni instrument.

Karakteristični padec napetosti (U_{A_0} - napetost med + in – vhodom) je malo odvisen od merilnega območja:

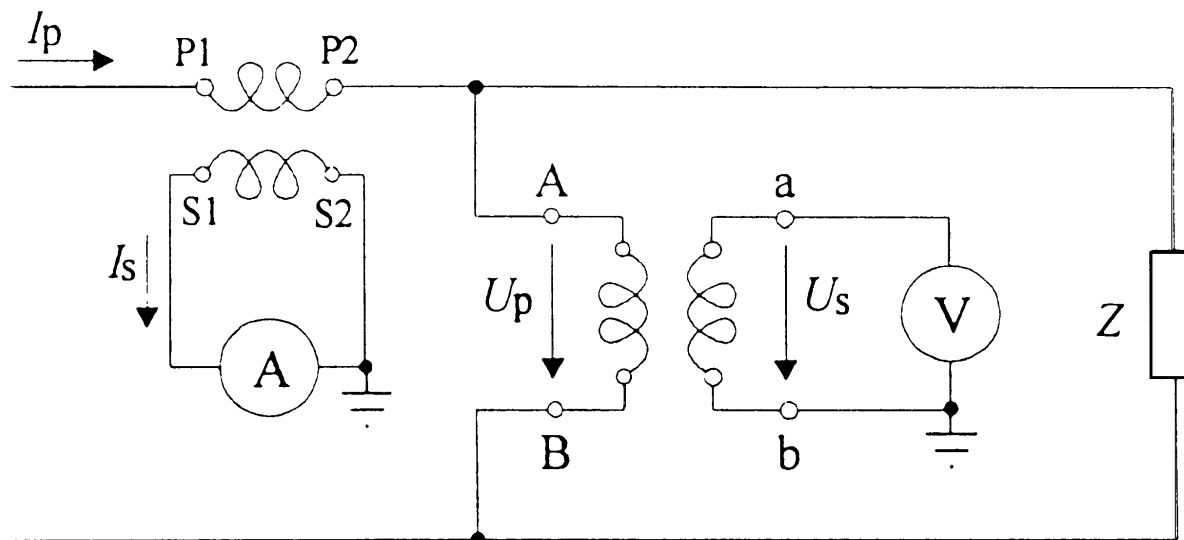
- od $I_0 R_0$ do $I_0 (R_0 + R_{s1} + R_{s2} + R_{s3}) \rightarrow U_{A_0} \doteq I_0 R_0$
- zadnji del ni bistveno večji: $R_{s1} + R_{s2} + R_{s3} \ll R_0$





4.3.2 Tokovni merilni transformator (tokovnik)

Z njimi **razširimo** (zožimo) **merilno območje** ampermetrov, vatmetrov itn.



Slika 4.30 Priključek tokovnika in napetostnika

Poznati moramo **prestavo** transformatorja: $I_p = K_i I_s$

- Tok primarnega navitja dobimo tako, da tok sekundarnega navitja, ki ga merimo z ampermetrom, pomnožimo s prestavo!





Razmerje med primarnim in sekundarnim tokom – **prestava tokovnika** – je **odvisna od**:

- velikosti toka,
- bremena na sekundarni strani,
- frekvence,
- uporabljenega materiala...

Suče se okoli **nazivne vrednosti** prestave:

$K_{in} = I_{pn} / I_{sn}$ - razmerje primarnega nazivnega toka in sekundarnega nazivnega toka (podana)

- **odstopanje je odvisno od razreda** točnosti merilnega transformatorja.
- za izračun I_p uporabimo **nazivno prestavo**: $I_p = K_{in} I_s$





Ker **uporabljamo** pri izračunih primarnih vrednosti **nazivne prestave** namesto **dejanskih**, nastane **prestavni pogrešek**:

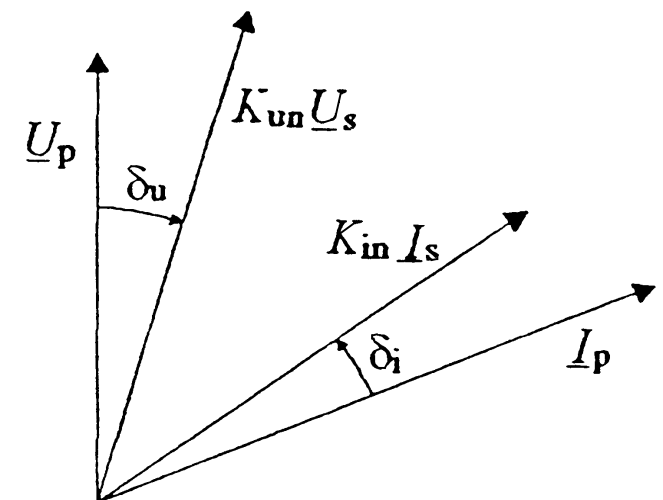
$$e = \frac{K_n - K}{K}$$

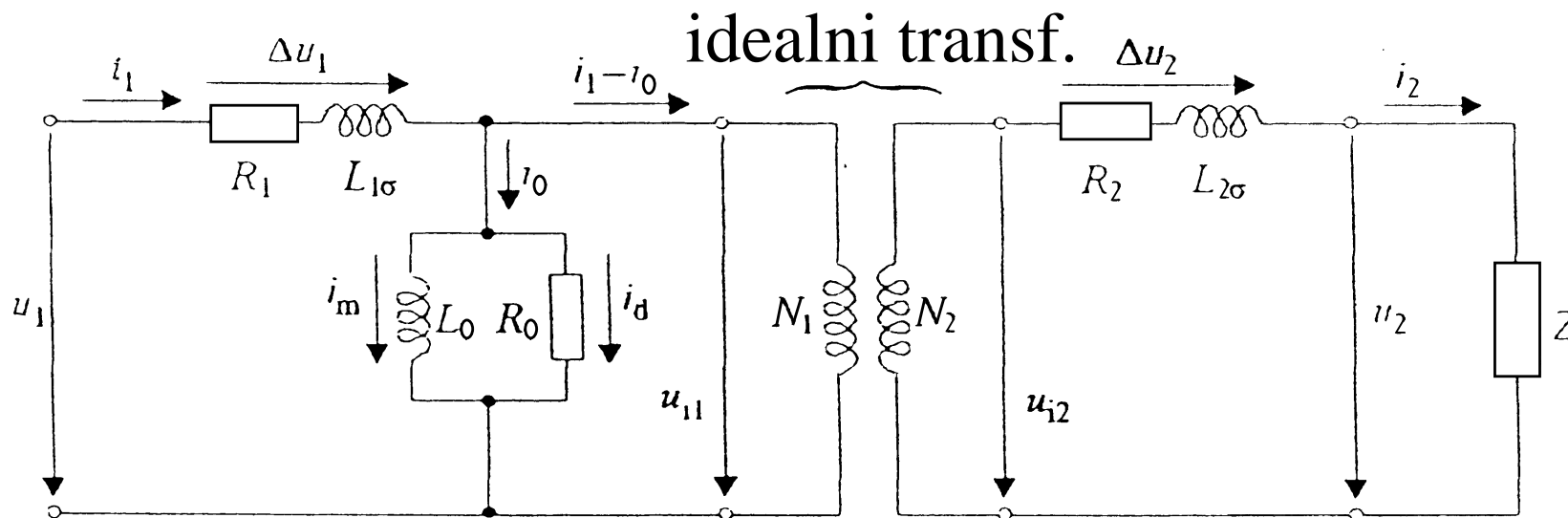
- tokovni prestavni pogrešek:

$$e_i = \frac{K_{in} I_s - I_p}{I_p}$$

Pri posrednem mmerjenju moči, energije, ... moramo upoštevati tudi **kotni pogrešek**:

- **fazna razlika** med fazorjema primarnega in sekundarnega navitja.
 - po dogovoru je **pozitiven**, če **sekundar prehiteva primar**.





Povečano breme povzroči tudi povečano magnetenje,

- višja magnetna indukcija $u_{i2} = -N_2 A dB/dt$ potegne za sabo večje magnetenje,
 - poveča se vzbujaalni tok i_0 ,
- malo se spremeni prestavno razmerje.

$$i_2 = i_1 \frac{N_1}{N_2} \left(1 - \frac{i_0}{i_1} \right)$$





Osnovni podatki tokovnih merilnih transformatorjev

Po mednarodnih priporočilih IEC 185-1987 so tokovniki razvrščeni v šest razredov:

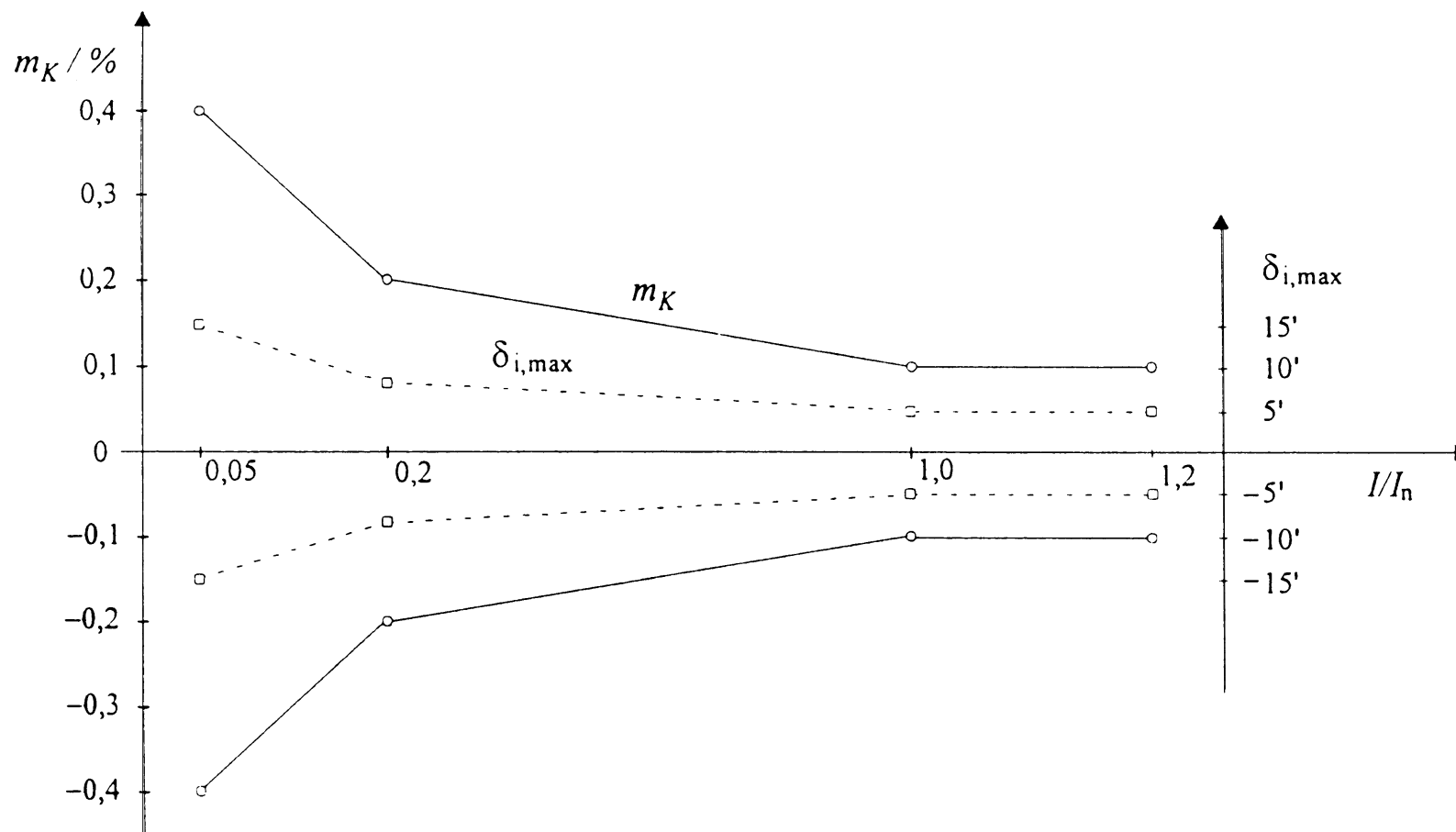
0,1 – 0,2 – 0,5 – 1 – 3 – 5

- **razred določa najvišji, še dopustni prestavni pogrešek.**

Tabela 4.2 Meje pogreškov tokovnikov

razred točnosti	meje prestavnega pogreška $\pm m_K$ v % pri tokovih				meje kotnega pogreška $\pm \delta_{i,max}$ v minutah pri tokovih			
	$0,05 I_n$	$0,2 I_n$	$1,0 I_n$	$1,2 I_n$	$0,05 I_n$	$0,2 I_n$	$1,0 I_n$	$1,2 I_n$
0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	15	8	5	5
0,2	0,75	0,35	0,2	0,2	30	15	10	10
0,5	1,5	0,75	0,5	0,5	90	45	30	30
1,0	3,0	1,5	1,0	1,0	180	90	60	60





Slika 4.35 Značilen potek mej prestavnega in kotnega pogreška (razred 0,1)

Razreda točnosti 0,2S in 0,5S tokovnikov za posebno rabo, ki merijo od 1% do 120% nazivnega toka.





Oba pogreška morata biti znotraj predpisanih mej, če je **breme od 25% do 100% nazivnega bremena** in pri nazivni frekvenci.

Priporočene **standardne vrednosti**:

- primarni nazivni tok: (10 – 15 – 20 – 30 – 50 – 75) A
- sekundarni nazivni tok: 1 A, 2 A in priporočeno 5 A,
- **nazivna moč**: (2,5 – 5 – 10 – 15 – 30) VA.
 - To je vrednost **navidezne moči**, ki jo tokovnik daje **pri nazivnem bremenu** in **nazivni vrednosti sekundarnega toka**:

$$S_n = I_{sn}^2 Z_n$$





- **nazivno breme** (primer): $Z_n = \frac{S_n}{I_{sn}^2} = \frac{5 \text{ VA}}{(5 \text{ A})^2} = 0,2 \Omega$
 - faktor moči 0,8

- 25% nazivnega bremena:

$$Z_{25\%} = \frac{S_{25\%}}{I_{sn}^2} = \frac{1,25 \text{ VA}}{(5 \text{ A})^2} = 0,05 \Omega$$

Pri uporabi moramo paziti, da **sekundarni sponki** ne ostaneta **nikdar odprti** \Rightarrow inducirala bi se **zelo velika napetost**, ki je lahko nevarna (tokovni vir!).





Delovna moč porabnika:

$$P_i = K_{\text{un}} K_{\text{in}} P_{\text{W},i}$$

- K_{un} , K_{in} - nazivni prestavi,
- $P_{\text{W},i}$ - kazanje vatmetra.
- Vsem trem veličinam **pripadajo negotovosti**.
- Manjkajo še prispevki **kotnih pogreškov**.

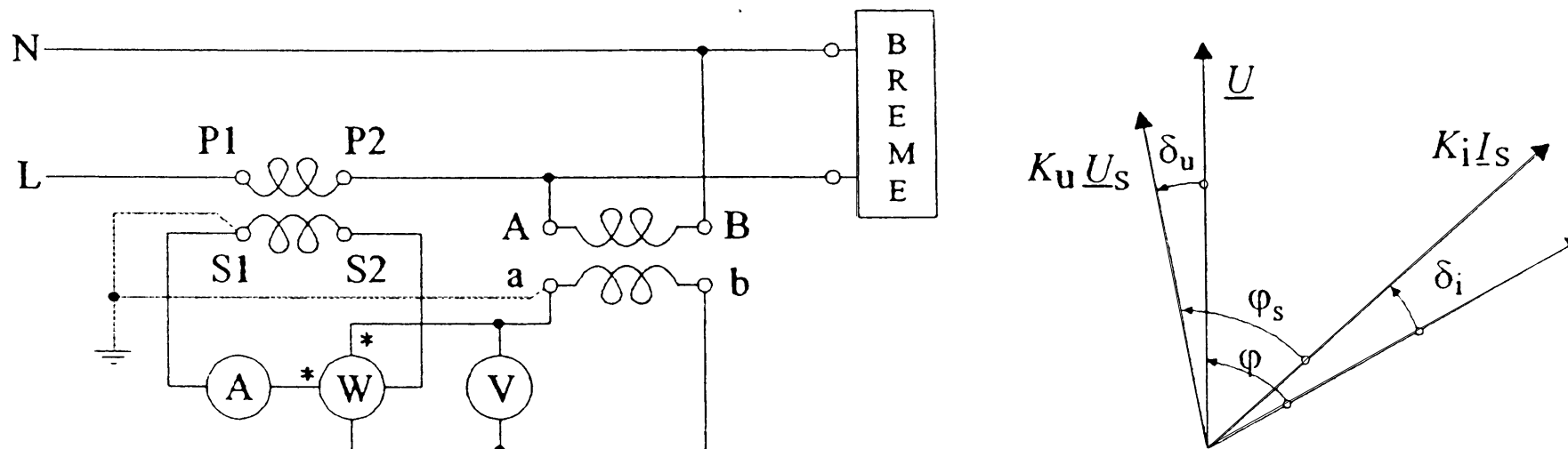
Točni vatmeter bi kazal:

$$P_{\text{W}} = U_s I_s \cos \varphi_s$$

Realni vatmeter (z lastnim pogreškom e_{W}) kaže:

$$P_{\text{W},i} = U_s I_s \cos \varphi_s \cdot (1 + e_{\text{W}})$$





Slika 4.36 Indirektno merjenje delovne moči

Prispevki merilnih transformatorjev:

- **Kotni pogreški.** Iz fazorskega diagrama:

$$\varphi_s + \delta_i = \varphi + \delta_u \quad \Rightarrow \quad \varphi_s = \varphi + \delta_u - \delta_i$$

- **Prestavni pogreški.** Nazivne prestave (približki) izrazimo z realnimi:

$$K_{un} = K_u (1 + e_u), \quad K_{in} = K_i (1 + e_i)$$





Celotna enačba s pogreški: $P_i = K_{un} K_{in} P_{W,i} \Rightarrow$

$$P_i = K_u (1 + e_u) K_i (1 + e_i) \cdot U_s I_s \cos[\varphi + (\delta_u - \delta_i)] \cdot (1 + e_w)$$

- če bi bili **vsi pogreški nič**:

$$P_i = K_u K_i \cdot U_s I_s \cos \varphi = (K_u U_s)(K_i I_s) \cos \varphi = UI \cos \varphi = P$$

- enačbo preoblikujemo:

$$P_i = (1 + e_u)(1 + e_i)(1 + e_w) \cdot UI [\cos \varphi \cos(\delta_u - \delta_i) - \sin \varphi \sin(\delta_u - \delta_i)]$$

- ker je $\cos(\delta_u - \delta_i) \approx 1$, $\sin(\delta_u - \delta_i) \approx (\delta_u - \delta_i)$:

$$P_i = (1 + e_u)(1 + e_i)(1 + e_w) \cdot UI [\cos \varphi - (\delta_u - \delta_i) \sin \varphi]$$





$$P_i = (1 + e_u)(1 + e_i)(1 + e_w) \cdot UI [\cos \varphi - (\delta_u - \delta_i) \sin \varphi]$$

- Če izpostavimo $\cos \varphi$, dobimo **izhodiščno enačbo** za račun standardne negotovosti:

$$P_i = P(1 + e_u)(1 + e_i)(1 + e_w) [1 - (\delta_u - \delta_i) \operatorname{tg} \varphi]$$

Če bi bili merilna transformatorja in vatmeter **umerjeni**, bi bila negotovost odvisna od **negotovosti umerjanja**.

Praviloma pa so instrumenti skladni s specifikacijami (pogreški so dani z mejami).





$$P_i = P(1 + e_u)(1 + e_i)(1 + e_w)[1 - (\delta_u - \delta_i)\text{tg}\varphi]$$

Račun prispevkov k celotni negotovosti (vrednosti pogreškov so majhne!):

$$u_1(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_u} \right| \cdot u(e_u) \approx P \cdot u(e_u) \quad , \quad u_2(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_i} \right| \cdot u(e_i) \approx P \cdot u(e_i)$$

$$u_3(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial e_w} \right| \cdot u(e_w) \approx P \cdot u(e_w)$$

$$u_4(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial \delta_u} \right| \cdot u(\delta_u) \approx P \text{tg}\varphi \cdot u(\delta_u) \quad , \quad u_5(P) = \left| \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} \right| \cdot u(\delta_i) \approx P \text{tg}\varphi \cdot u(\delta_i)$$

Celotna standardna negotovost:

$$u_C(P) = P \sqrt{u^2(e_u) + u^2(e_i) + u^2(e_w) + \text{tg}^2\varphi [u^2(\delta_u) + u^2(\delta_i)]}$$





Celotna standardna negotovost:

$$u_C(P) = P \sqrt{u^2(e_u) + u^2(e_i) + u^2(e_W) + \operatorname{tg}^2 \varphi [u^2(\delta_u) + u^2(\delta_i)]}$$

- če je breme ohmsko:

$$u_C(P) = P \sqrt{u^2(e_u) + u^2(e_i) + u^2(e_W)}$$

Zgled:

Koliko je (relativna) standardna negotovost

$$w_c(P) = u_c(P)/P = ?, \quad \text{če so:}$$

- transformatorji in vatmeter:
razred točnosti 0,2,
- $P_{W,i} = P_D,$
- $\alpha = 60^\circ$





- **prispevki prestavnih pogreškov in vatmetra:**

$$u(e_u) = \frac{m_{K,u}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{3}} = 1,15 \cdot 10^{-3} = u(e_i) = u(e_w)$$

- **kotni pogrešek v radianih:**

$$u(\delta_u) = \frac{\delta_{u,\max}}{\sqrt{3}} = \frac{10 \cdot \pi / (60 \cdot 180)}{\sqrt{3}} = 1,68 \cdot 10^{-3} = u(\delta_i)$$

Iskana negotovost:

$$w_C(P) = \sqrt{(1,15 \cdot 10^{-3})^2 + (1,15 \cdot 10^{-3})^2 + (1,15 \cdot 10^{-3})^2 + \operatorname{tg}^2 60^\circ [(1,68 \cdot 10^{-3})^2 + (1,68 \cdot 10^{-3})^2]}$$

$$w_C(P) = 4,6 \cdot 10^{-3}$$

- prispevek prestavni pogreškov : $2,0 \cdot 10^{-3}$
- prispevek kotnih pogreškov: $4,1 \cdot 10^{-3}$





Če bi bil fazni kot $\varphi = 37^\circ$ ($\cos \varphi = 0,8$),

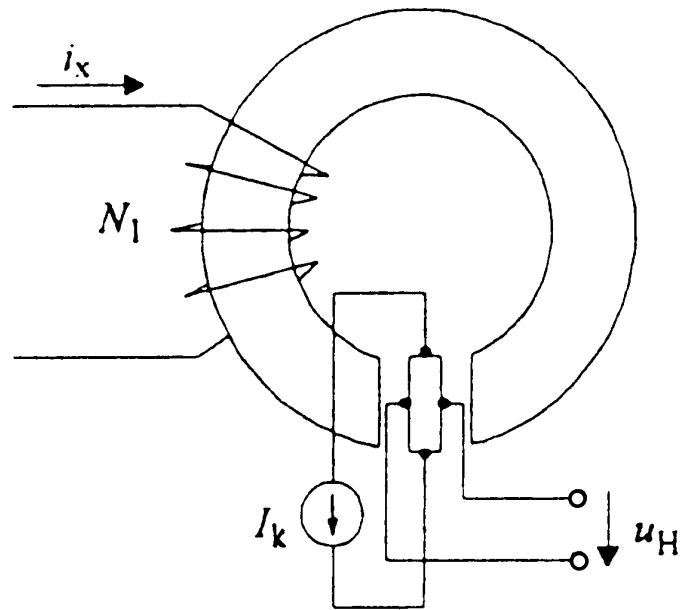
- bi bil prispevek kotnih pogreškov: $1,8 \cdot 10^{-3}$,
- in celotna standardna negotovost: $2,7 \cdot 10^{-3}$

Bliže kot smo kotu $\varphi = 90^\circ$, večji je relativni prispevek kotnih pogreškov in skupna negotovost!

$$w_C(P) \xrightarrow{\varphi \rightarrow 90^\circ} \infty$$



4.3.3 Posredno merjenje toka z uporabo magnetnega kroga.



- magnetni krog se zaključi preko **toroidnega feromagnetnega jedra**,
- jedro se vzbuja z merjenim tokom i_x preko N_1 ovojev

Slika 4.37 Merjenje toka prek magnetnega kroga s Hallovo sondo

- **v reži** se nahaja **Hallova sonda**:

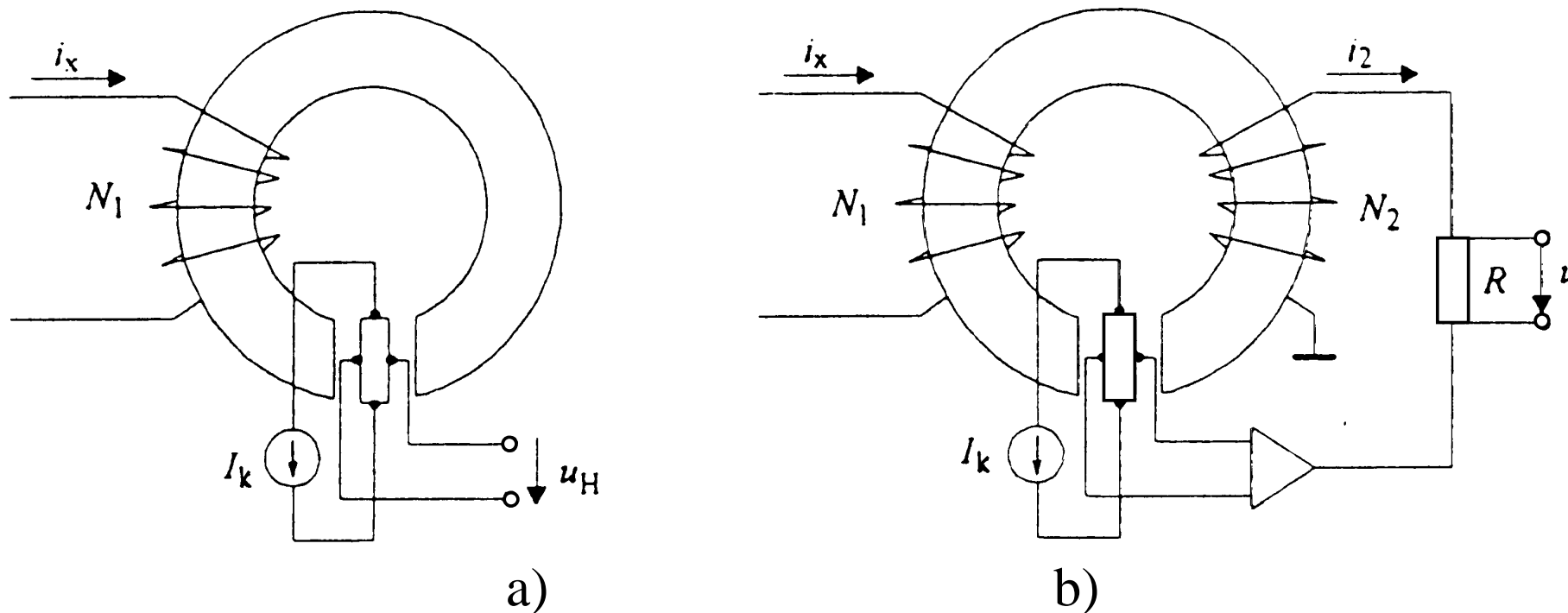
- skoraj linearna povezava:
$$u_H = \frac{1}{ned} I_k B \approx \text{konst.} \cdot i_x$$
- občutljivost sonde od nič do 10 MHz neodvisna od frekvence!
- slaba stran je v **temperaturni odvisnosti** in **nelinearnosti**.





Nelinearnost izboljšamo s **kompensacijskim** navitjem (b)

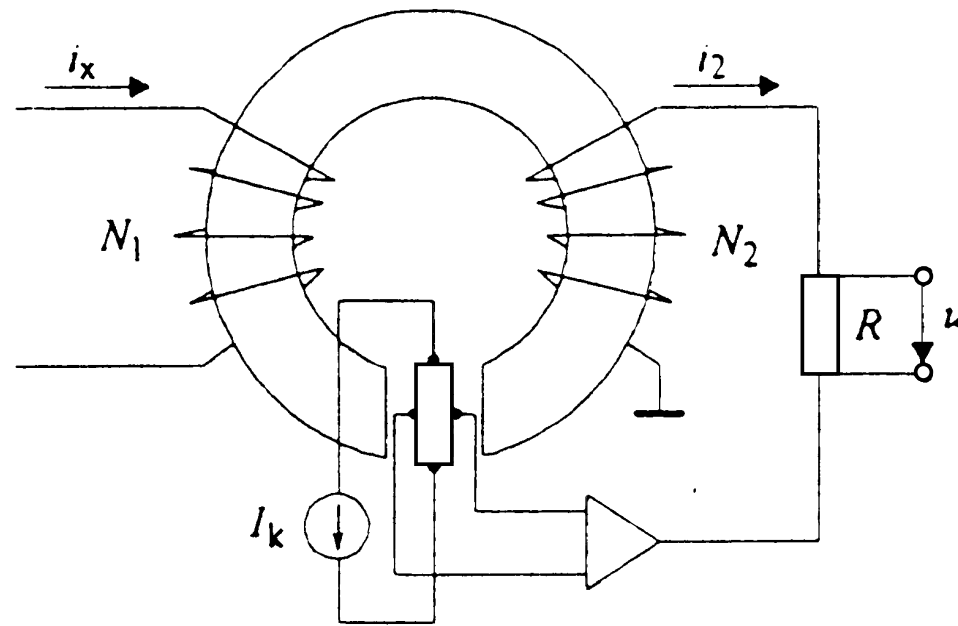
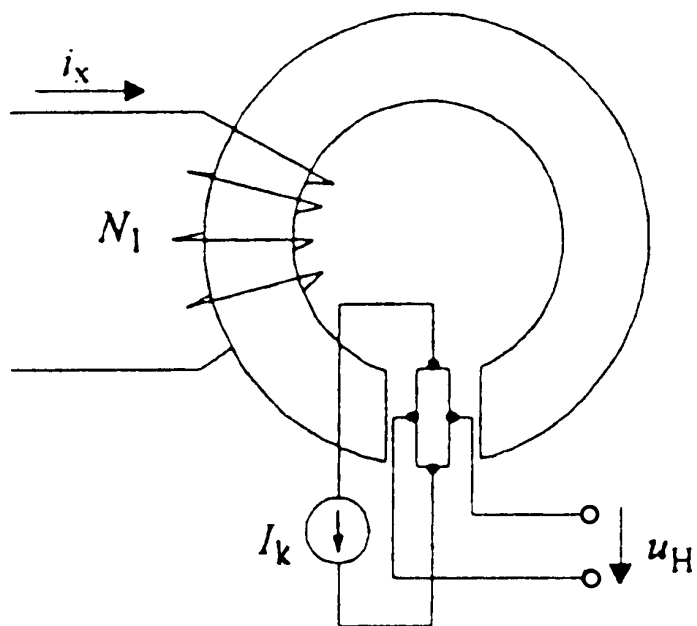
- ravnotežje vzpostavimo s tokom i_2 , ki ga preko ojačevalnika krmili napetost u_H



Slika 4.38 Merjenje toka prek magnetnega kroga s Hallovo sondo
Kadar je **magnetni pretok kompenziran**, imamo:

$$u_H = 0 \quad \Rightarrow \quad i_x N_1 = i_2 N_2 \quad \Rightarrow \quad i_x = \frac{N_2}{N_1 R} u$$





Na tem principu temeljijo **tokovne klešče**.

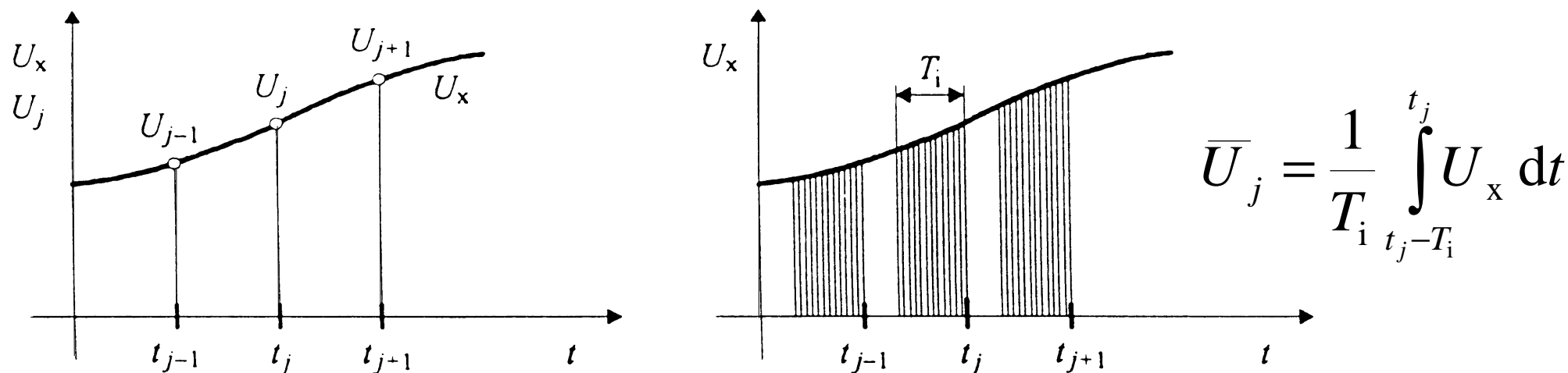
- tok merimo brez prekinitve vodnika,
 - pri montaži razklenemo jedro,
- **primar ima en sam ovoj.**





4.4 Prireditev signalov za instrumente z odzivom na povprečno vrednost

Instrumenti z nizko mejno frekvenco se odzovejo na signal tako, da ovrednotijo **povprečno vrednost** in delujejo kot nizko prepustno sito. Signale zajemajo na **integracijski način**.



Slika 4.39 Trenutni in integrirajoči način zajemanja

Da bi lahko z njimi merili parametre izmeničnega signala (efektivna vrenost, temenska vrednost, itd.) uporabimo **usmerniška vezja** za prireditev.



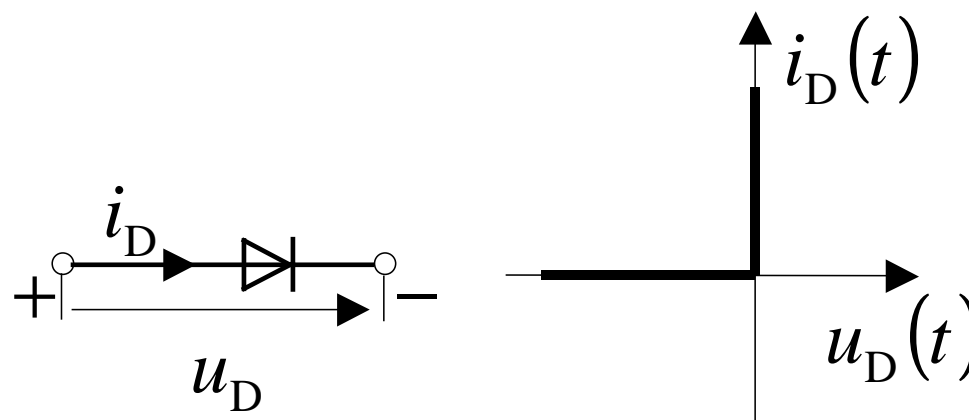


Najbolj tipični **pasivni nelinearni** element, ki se uporablja za usmerjanje signalov je **dioda**

- **Idealna dioda:**

$$i_D(t) = 0 \quad \text{za} \quad u_D(t) \leq 0$$

$$u_D(t) = 0 \quad \text{za} \quad i_D(t) \geq 0$$

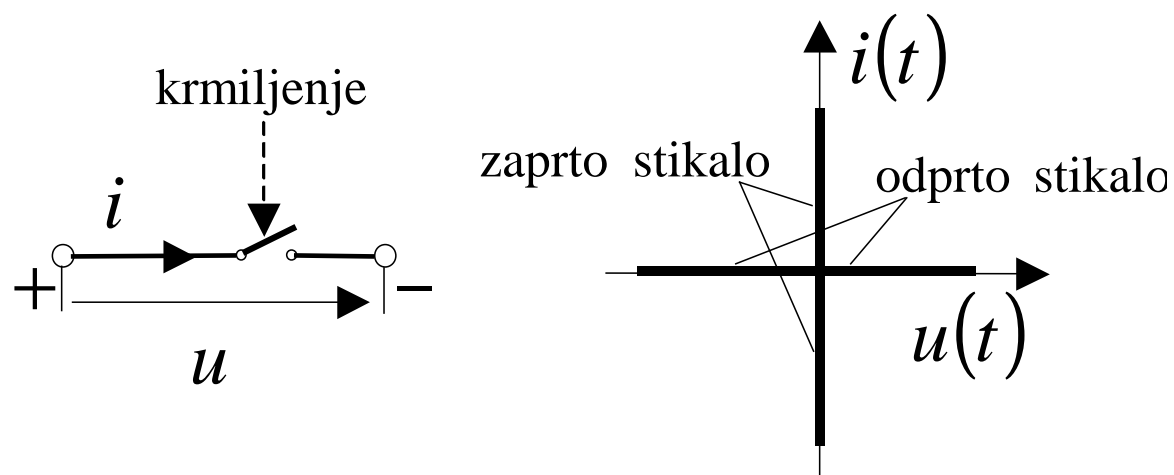


in tipični **časovno spremenljivi nelinearni** element je **stikalo**.

- **Idealno stikalo:**

$$i(t) = 0 \quad \text{- odprto stikalo}$$

$$u(t) = 0 \quad \text{- zaprto stikalo}$$





4.4.1 Instrument z odzivom na povprečno vrednost in polprevodniški usmerniki

Kadar imamo instrument z nizko mejno frekvenco, se odziva na **povprečno vrednost** signala.

- voltmeter z **integracijskim** analogno-digitalnim pretvornikom, instrument z **vrtljivo tuljavico**, itd.

Če želimo meriti z njim izmenični tok, moramo **tok** najprej **usmeriti**.

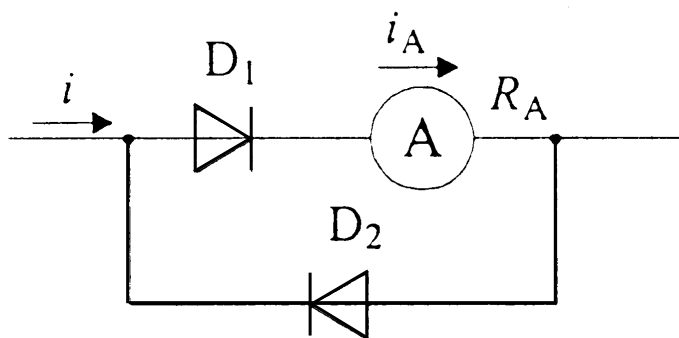
- s polprevodniškimi **diodami**. Razlikujemo
 - **polvalno** in
 - **polnovalno** usmerjanje.



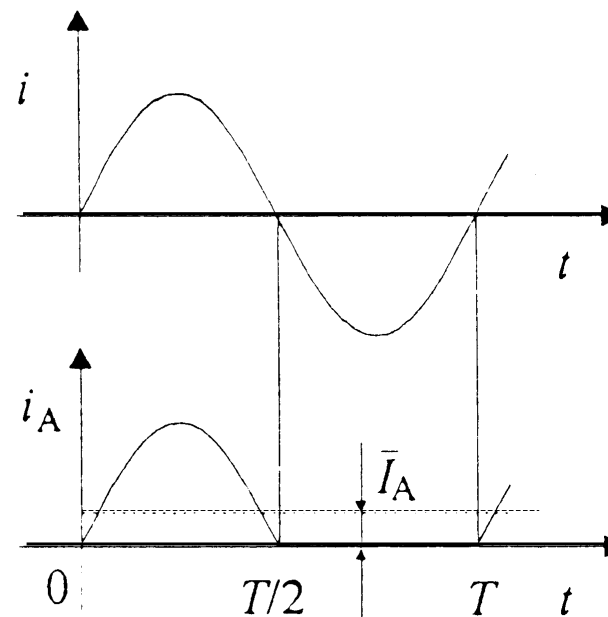


Polvalno usmerjanje:

$$\bar{I}_A = \frac{1}{T} \int_0^T i_A dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{i_m}{\omega T} \int_0^{\pi} \sin \omega t d\omega t = \frac{i_m}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} I$$



a)



b)

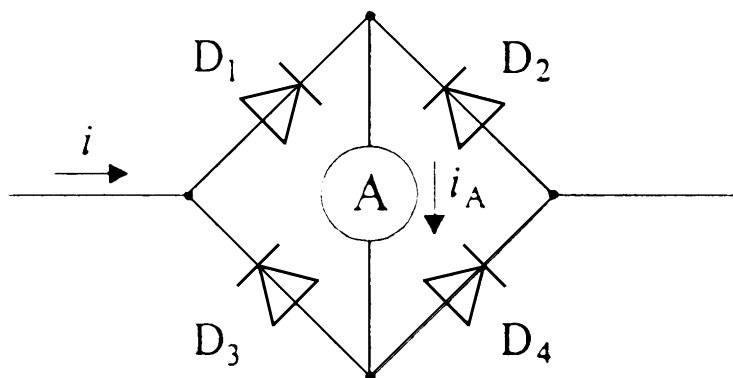
Slika 4.42 Polvalno usmerjanje



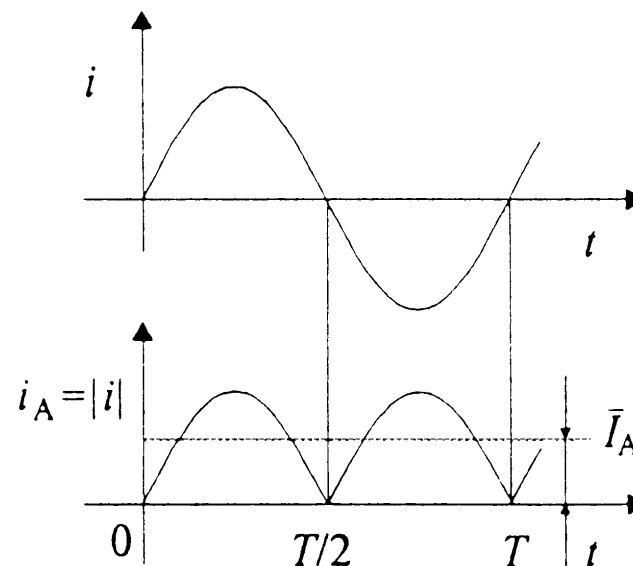


Polnovalno usmerjanje

- s pomočjo **Graetzove vezave**:



a)



b)

Slika 4.43 Polnovalno usmerjanje

Srednja vrednost toka instrumenta je enaka povprečku absolutne vrednosti toka.

- pri sinusni obliki 1,11-krat manjša od efektivne vrednosti:

$$I_r = 2\sqrt{2}/\pi \cdot I = 0.90 \cdot I$$





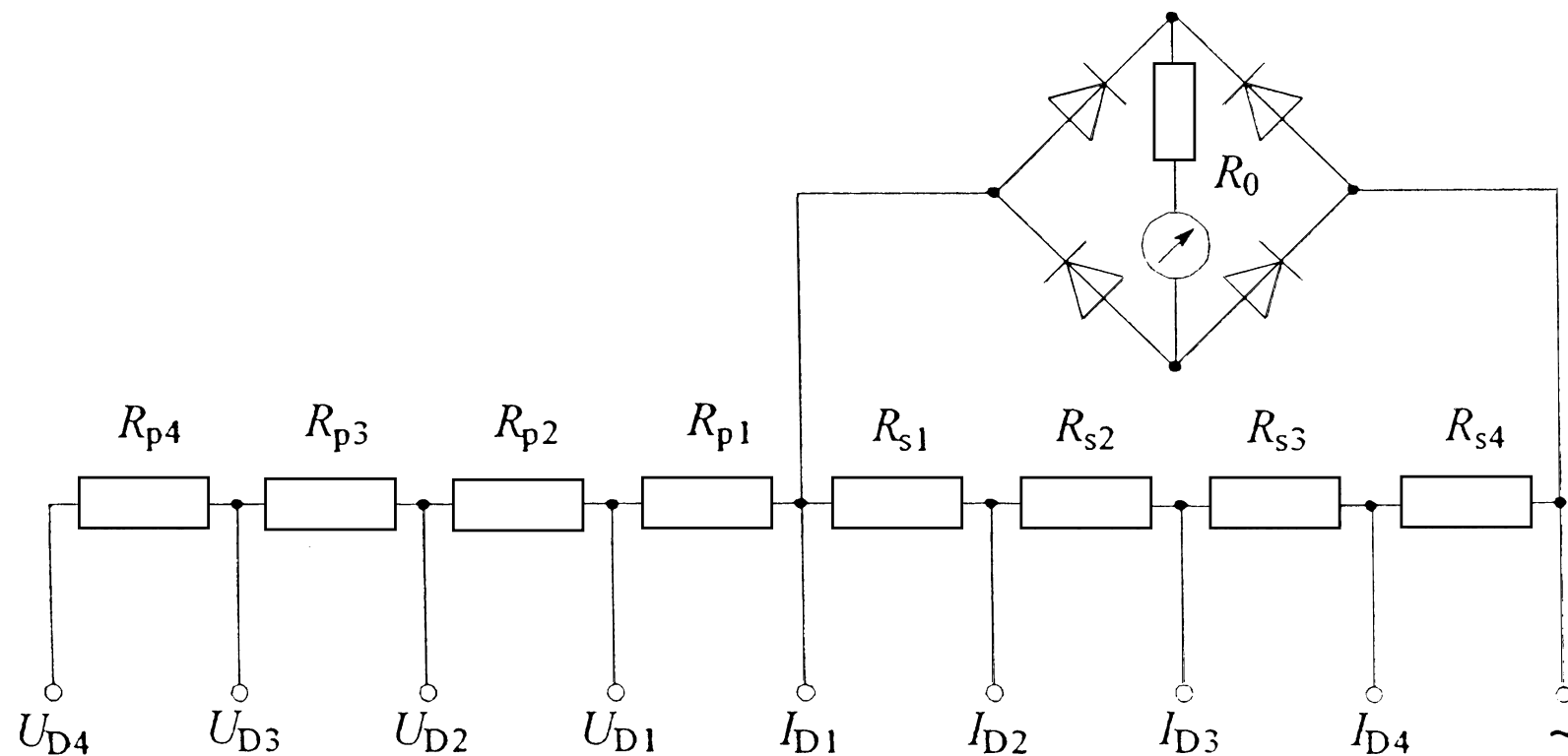
- da kaže instrument **pravilno pri sinusni obliki**, so **številске vrednosti skale instrumenta 1,11-krat večje**.
- Če **nimamo** signala **sinusne oblike**, je pogrešek enak:

$$e = \frac{I_r \cdot 1,11 - I}{I} = \frac{I_r \cdot F_0 - I_r \cdot F}{I_r \cdot F} = \frac{F_0 - F}{F}$$

- pravokotna oblika ($F = 1$ - med efektivno in usmerjeno vrednostjo ni razlike):

$$e = \frac{F_0 - F}{F} = \frac{1,11 - 1}{1} = 11\%$$



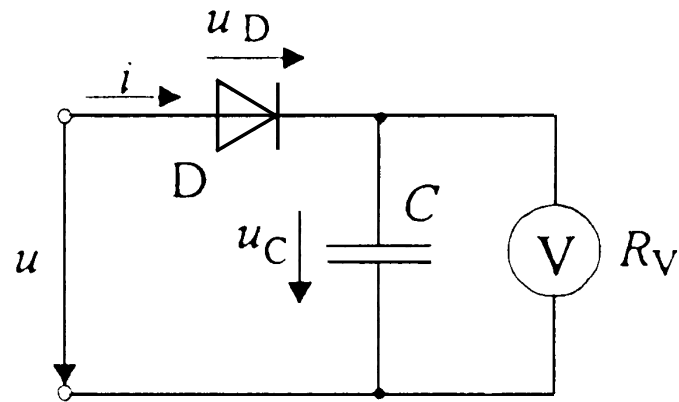


Slika 4.44 Univerzalni instrument s polprevodniškim usmernikom

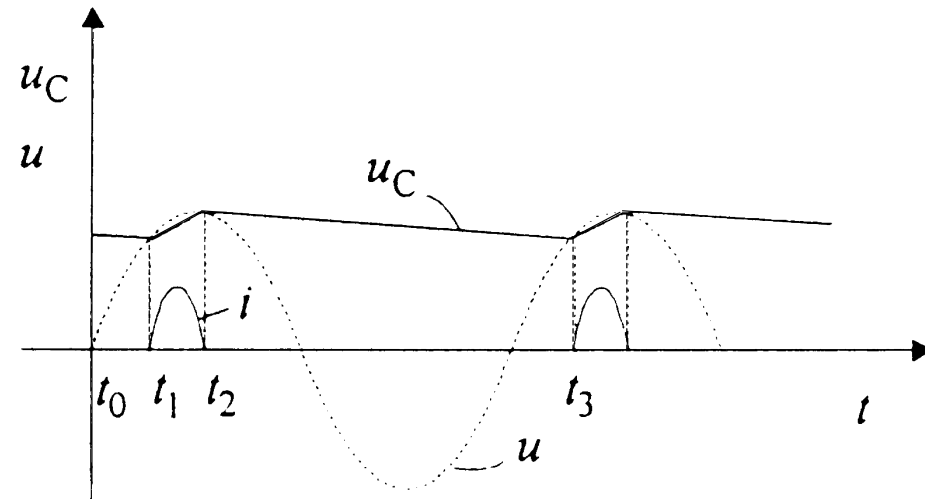




4.4.2 Odzivanje na temensko vrednost



a)

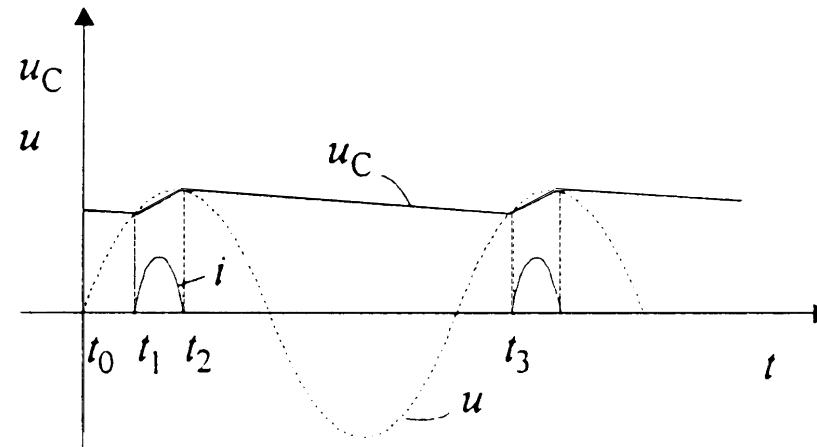
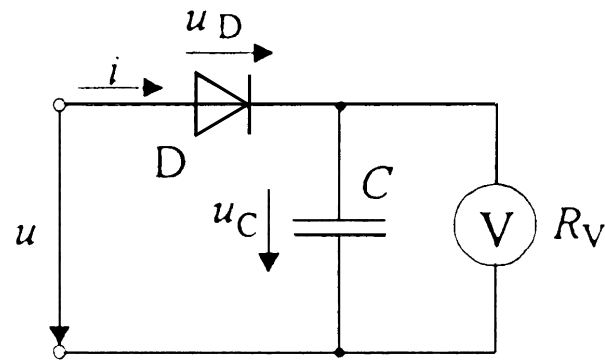


b)

Slika 4.45 Voltmeter, ki se odziva na temensko vrednost

- Če je merjena **napetost nižja** kot je napetost **na kondenzatorju** (intervali: $t_0 \div t_1$, $t_2 \div t_3$, ...), dioda **ne prevaja** \Rightarrow kondenzator se **počasi prazni** prek R_V .
- Ko je napetost višja (**dioda prevaja** v intervalu $t_1 \div t_2$), se kondenzator polni.





- Napetost u_C je v stacionarnem stanju za padeč napetosti na diodi u_D manjša, kot je vhodna napetost u .

Če je instrument **umerjen na efektivno vrednost pri sinusni obliki**, pri kateri je **temenski faktor** $C_0 = \hat{u}/U|_{\sin} = 1,41$, kaže pri drugačni obliki narobe:

$$e = \frac{\hat{u}/C_0 - U}{U} = \frac{\hat{u}/C_0 - \hat{u}/C}{\hat{u}/C} = \frac{C - C_0}{C_0}$$

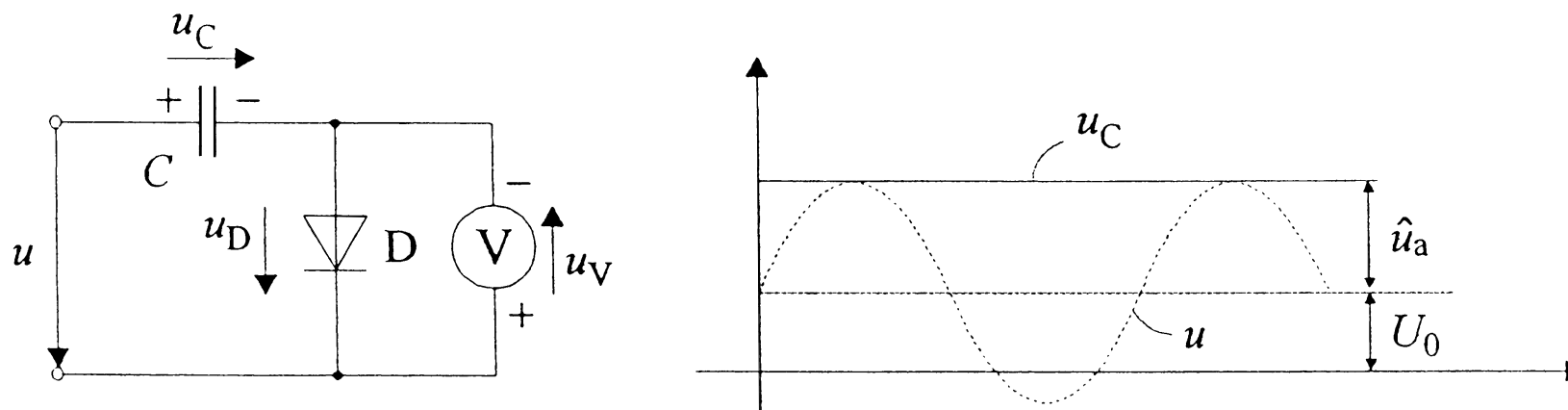
- pri pravokotni obliki ($C = 1$) kaže 29% premalo!





4.4.3 Merjenje pulzirajoče napetosti

Če želimo meriti samo **izmenično komponento**, priključimo instrument **vzporedno k diodi** in **zaporedno kondenzatorju**.

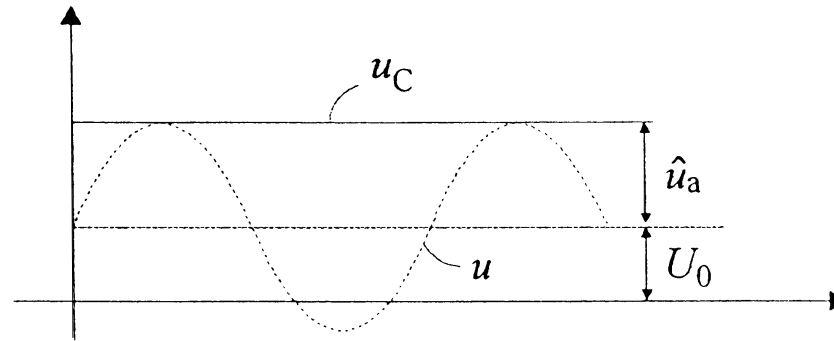
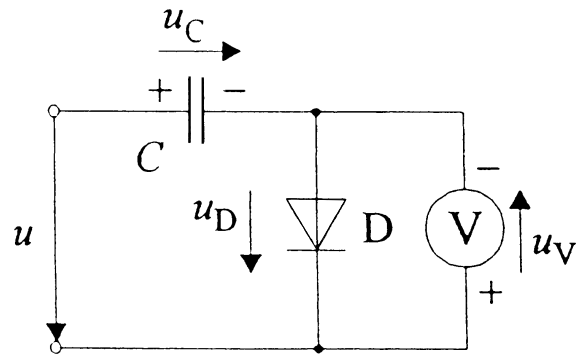


Slika 4.46 Merjenje izmenične komponente napetosti

Pulzirajoča napetost: $u = U_0 + u_a$

- U_0 - enosmerna komponenta,
- u_a - izmenična komponenta





Napetost **na kondenzatorju** u_C v ustaljenem stanju je enaka **temenski vrednosti**: $u_C = U_0 + \hat{u}_a$

Napetost **na diodi**: $u_D = u - u_C = (U_0 + u_a) - (U_0 + \hat{u}_a) = u_a - \hat{u}_a$

- neodvisna od enosmerne komponente,

Odklon voltmetra: $u_V = -u_D = \hat{u}_a - u_a$

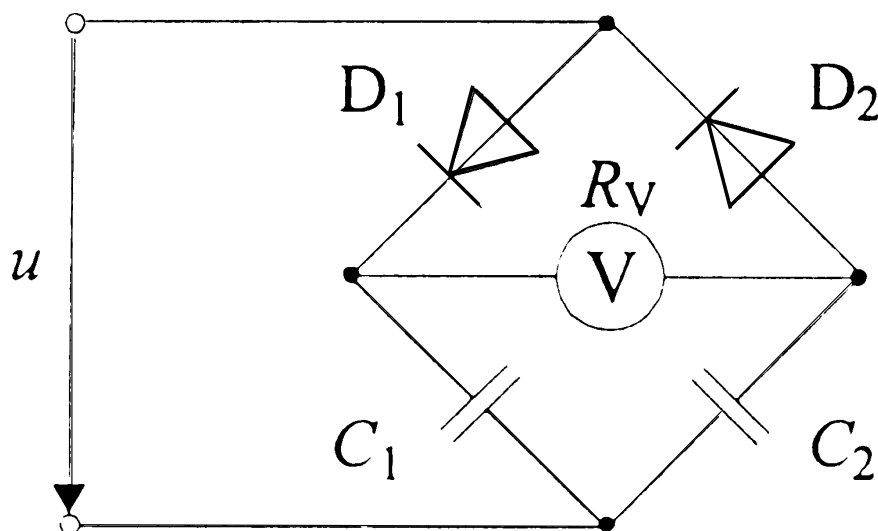
- **srednja vrednost** napetosti u_V je **enaka maksimalni vrednosti** izmenične komponente:

$$\bar{U}_V = \frac{1}{T} \int_0^T u_V dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\hat{u}_a - u_a) dt = \hat{u}_a$$





Večjo občutljivost dosežemo z Greinacherjevim mostičnim vezjem:



Slika 4.47 Greinacherjevo mostično vezje

Kondenzator C_1 se polni preko diode D_1 in kondenzator C_2 preko diode D_2 .

- Ker oba dosežeta **temensko vrednost** napetosti, je na voltmetru njena dvojna vrednost $2\hat{u}$ ($R_V \gg 1$).

Usmerniška vezja se dobro uporabljajo v območju **akustičnih frekvenc** (nekaj deset do sto kHz).

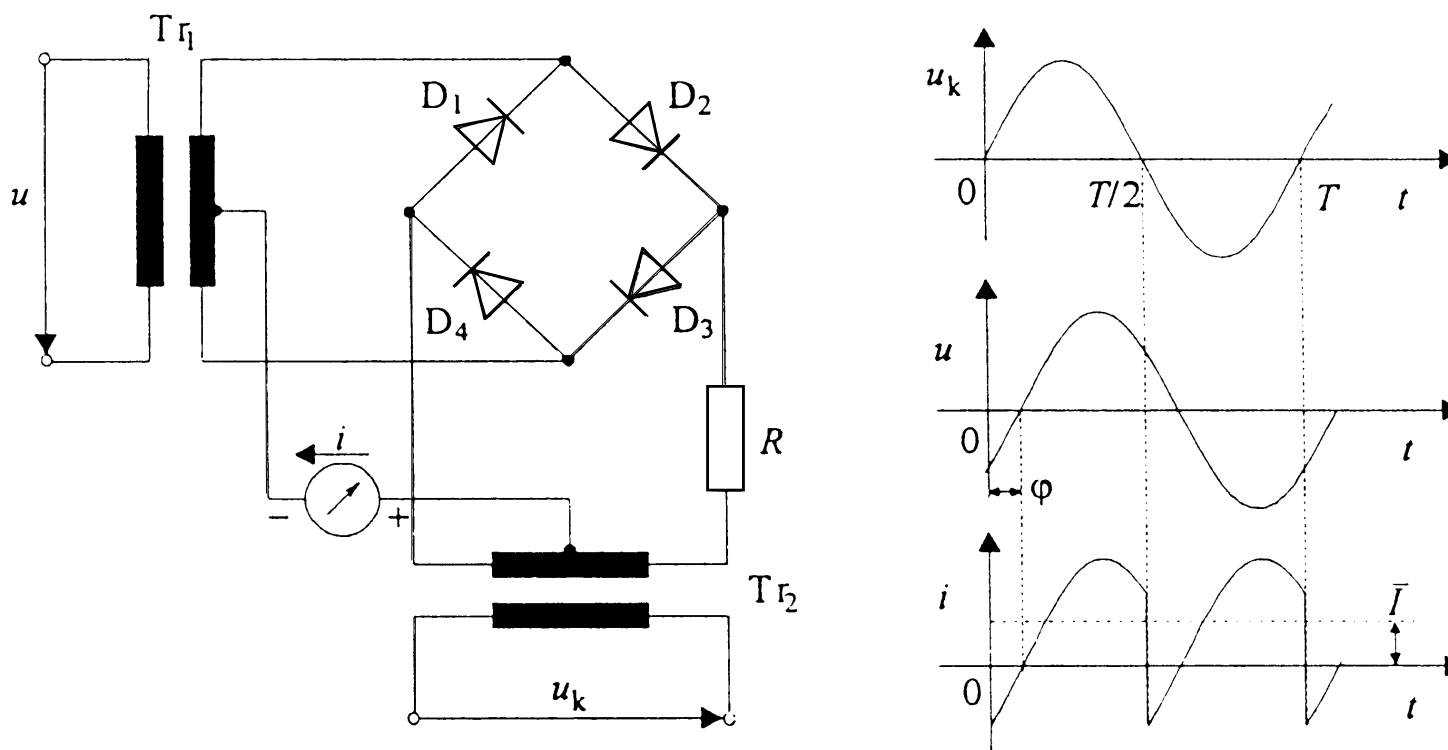
- pri višjih frekvencah pride do izraza kapacitivnost diod – uporaba boljših diod!



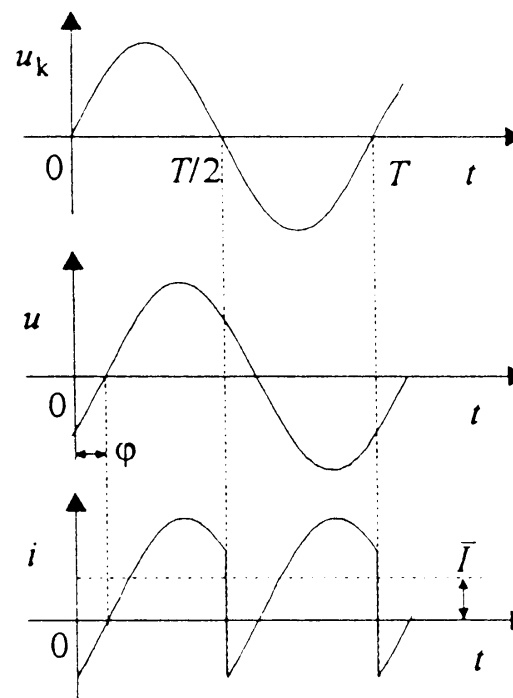
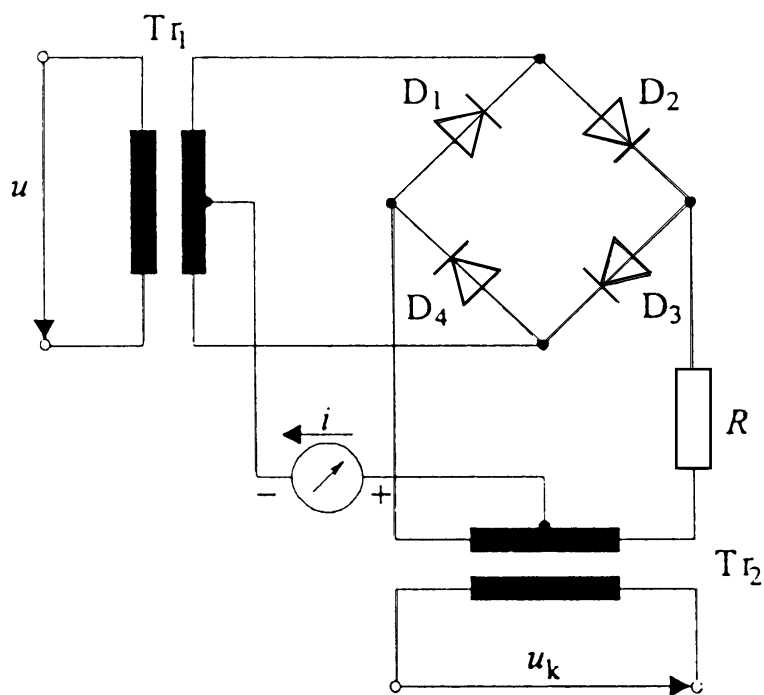
4.4.4 Tuje krmiljeni usmerniki

Prevajanje/zapiranje diode ni odvisno od merjene napetosti temveč od krmilne napetosti.

- krmilna napetost je mnogo večja od merjene napetosti!



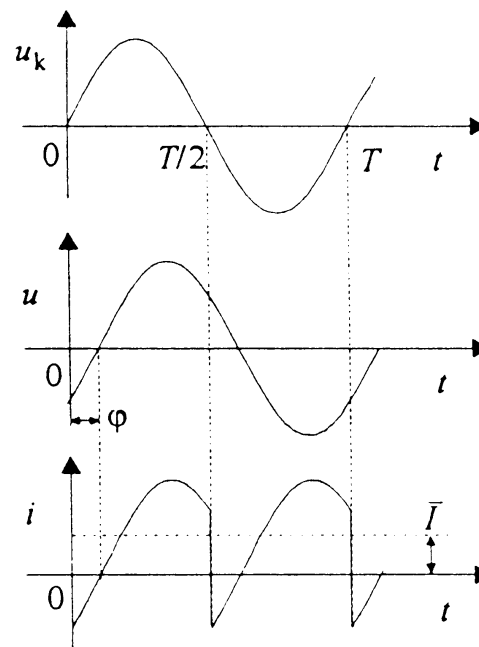
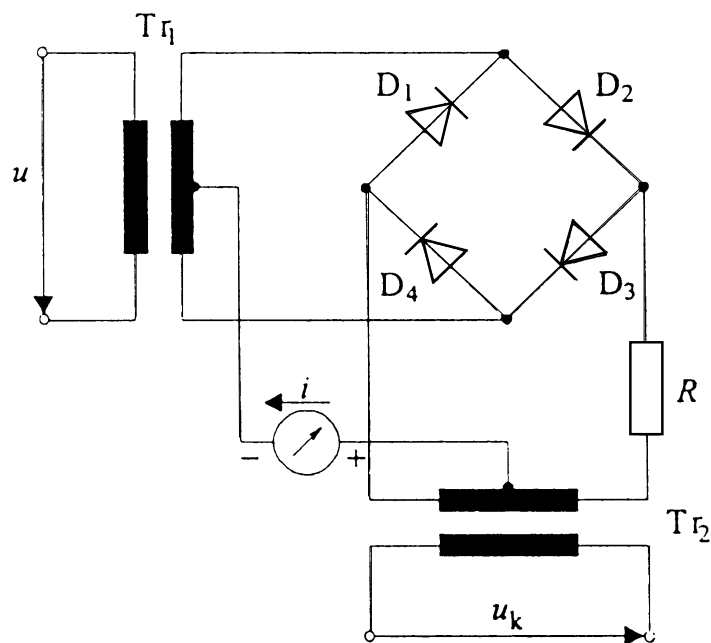
Slika 4.48 Tuje krmiljeni usmernik



Diode delujejo v stikalnem obratu:

- v intervalu $0 \div T/2$ prevajata diodi D_1 in D_2
 - tok se zaključi preko **D_1** ali **D_2** , upora R , **srednjega odcepa** transformatorja Tr_2 , **instrumenta** nazaj na **srednji odcep** transformatorja Tr_1 .





- v intervalu $T/2 \div T$ prevajata diodi D_3 in D_4
 - tok se zaključi preko **D_3** ali **D_4** , itd.
 - Na instrumentu se smer toka obrne!

Srednja vrednost toka je :

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{T} k \int_0^{T/2} u dt$$





$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T i \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i \, dt = \frac{2}{T} k \int_0^{T/2} u \, dt$$

Če je merjena napetost $u = \hat{u} \sin(\omega t - \varphi)$, imamo:

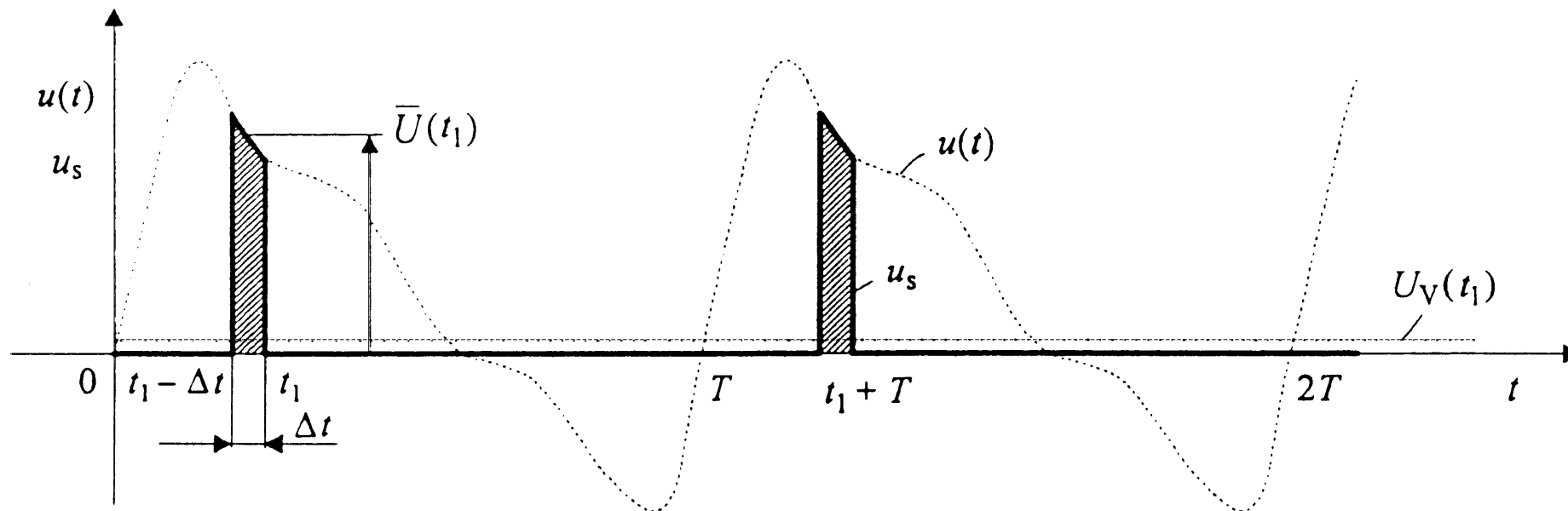
$$\bar{I} = \frac{2}{\omega T} k \hat{u} \int_0^{T/2} \sin(\omega t - \varphi) \, d\omega t = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} k U \cos \varphi$$

- Odklon je odvisen **od efektivne vrednosti** in od **faznega pložaja** glede na krmilno napetost.
 - Če lahko **kot nastavljam**, lahko **merimo** različne **komponente** napetosti (npr.: jalova, delovna,...)





4.4.5 Merjenje časovnega poteka periodični signalov preko povprečnih vrednosti odsekov



Slika 4.49 Princip merjenja trenutnih vrednosti periodične napetosti

Tekoča povprečna vrednost periodičnega odseka širine Δt :

$$\bar{U}(t_1) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1 - \Delta t}^{t_1} u \, dt$$

Votmeter kaže napetost:

$$U_V(t_1) = \frac{1}{T} \int_{t_1 - \Delta t}^{t_1} u \, dt$$

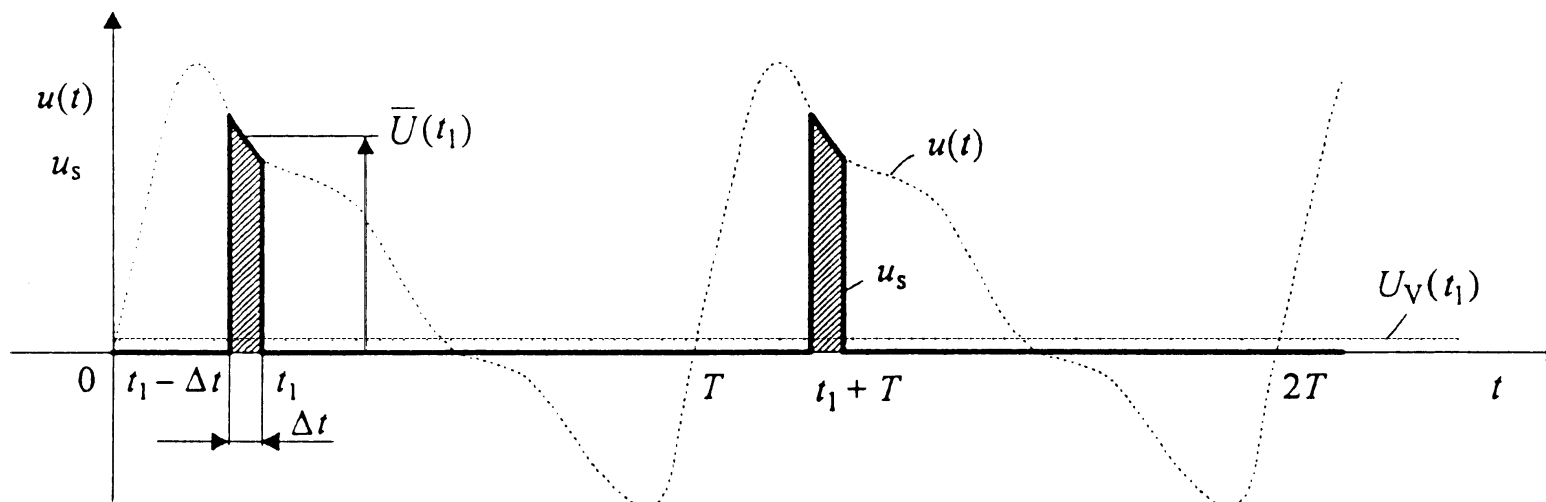




$$\bar{U}(t_1) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1 - \Delta t}^{t_1} u \, dt \quad U_V(t_1) = \frac{1}{T} \int_{t_1 - \Delta t}^{t_1} u \, dt$$

Napetosti $\bar{U}(t_1)$ in $U_V(t_1)$ sta v razmerju: $\bar{U}(t_1) = \frac{T}{\Delta t} U_V(t_1)$

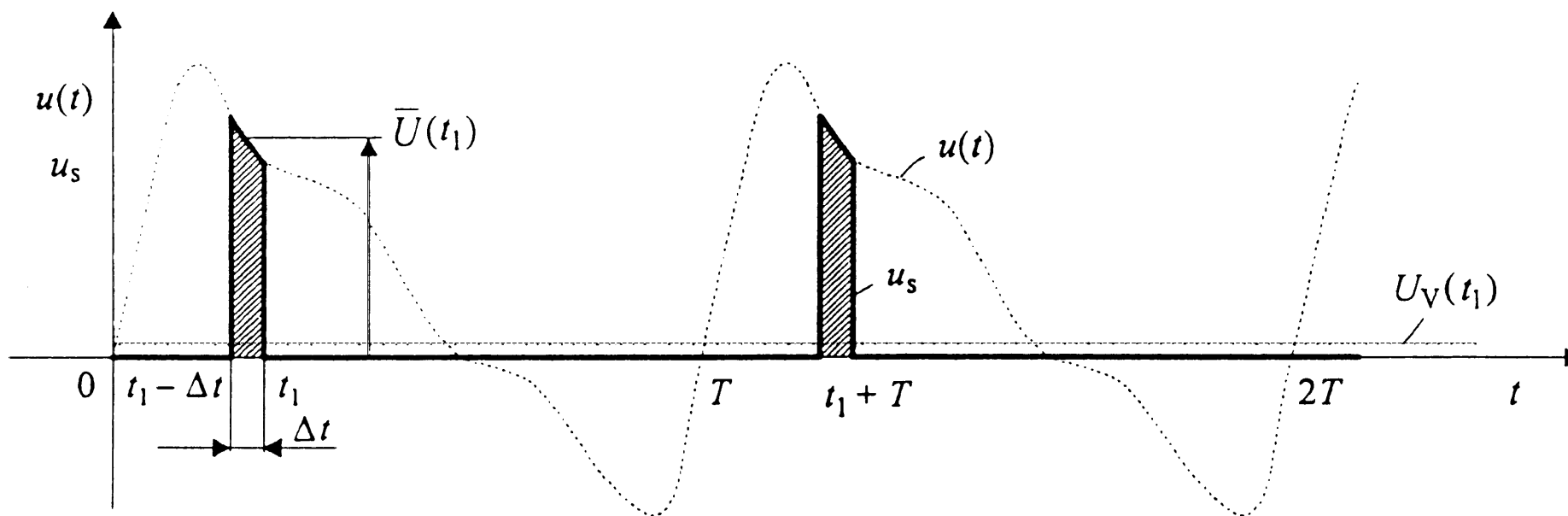
- če je odsek Δt dovolj ozek, je tekoča povprečna vrednost $\bar{U}(t_1)$ enaka trenutni vrednosti $u(t_1)$,
 - tudi povprečna vrednost voltmetra $U_V(t_1)$ je enaka trenutni.





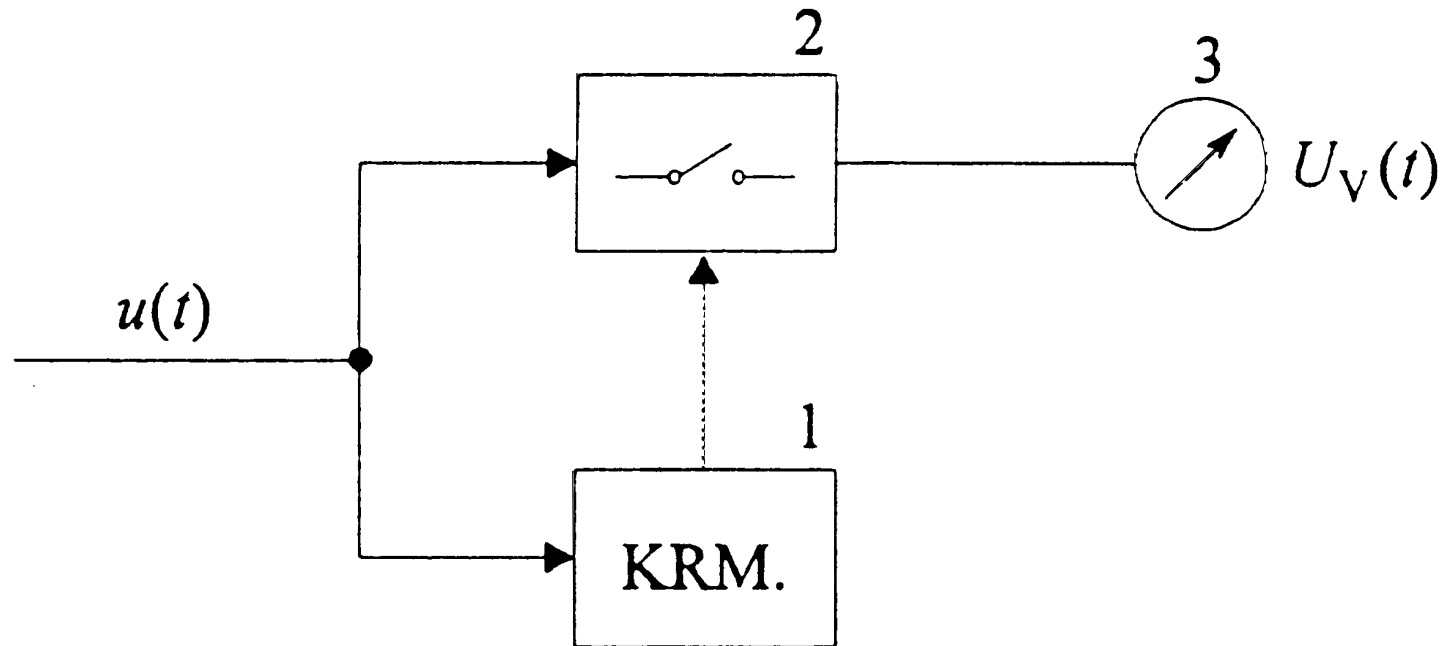
Z instrumentom, ki se **odziva na povprečno** vrednost, lahko **merimo trenutne** vrednosti.

- čas vklopa stikala premikamo po periodičnem signalu.
 - s **sinhronskim stikalom**,
 - skupaj z instrumentom tvori **vektormeter**



Slika 4.49 Princip merjenja trenutnih vrednosti periodične napetosti





Slika 4.50 Snemanje časovnega poteka periodične napetosti

- s krmilnim vezjem (1) določamo:
 - **čas odprtja** vrat $\Delta t = T_k$ (zelo ozek, da $\bar{U}(t) = u(t)$),
 - **relativni položaj** vklopa.





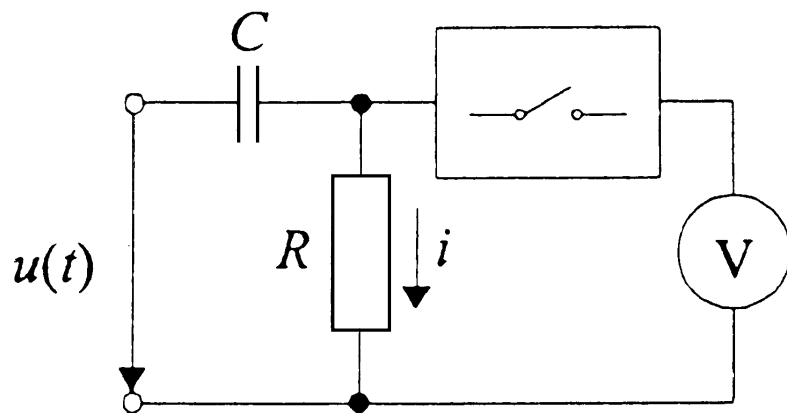
Z vektormetrom (stikalo s časom odprtja **polovico periode** in integracijski instrument) lahko merimo tudi, ko imamo **znan le odvod** merjene veličine.

- signal mora imeti **simetrijo III.** vrste: $x(t - T/2) = -x(t)$
- kontaktni čas T_k (**integracijski čas**) mora biti **enak polovici periode**:
$$\int_{t-T/2}^t \dot{x} dt = \int_{x(t-T/2)}^{x(t)} dx = 2x(t)$$
- trenutna vred.: $x(t) = \frac{1}{2} \int_{t-T/2}^t \dot{x} dt = \frac{T}{4} \frac{1}{T/2} \int_{t-T/2}^t \dot{x} dt = \frac{T}{4} \overline{\dot{X}}(t)$

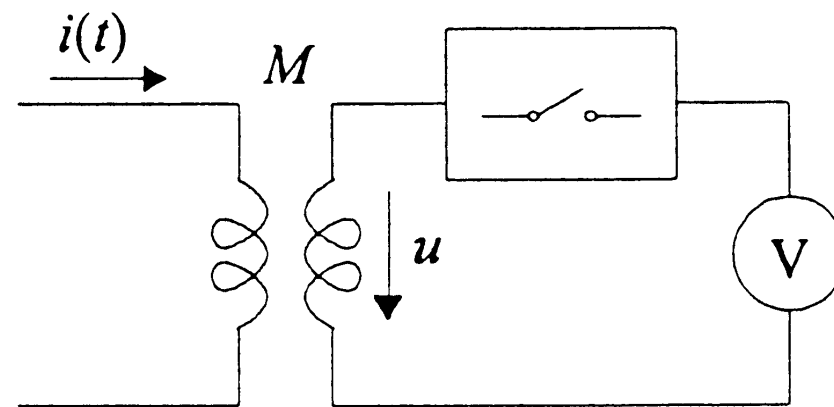




Če je dana sama veličina, jo najprej **diferenciramo**.



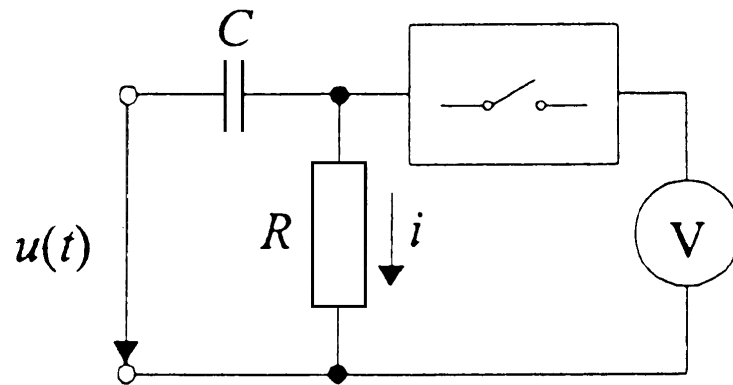
a)



b)

Slika 4.51 Merjenje trenutnih vrednosti napetosti in toka





Realizacija diferenciranja pri merjenju napetosti (a):

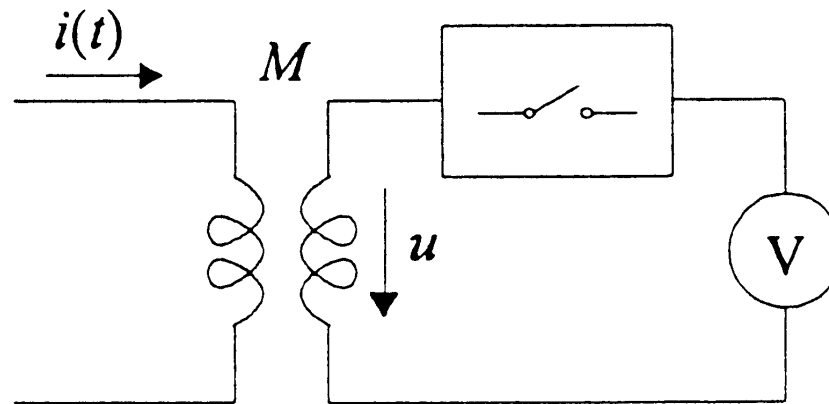
- **velika upornost** voltmetra $R_V \gg 1$,
- **majhna časovna konstanta** $RC \ll T$,
- tok čez upor je : $i = i_C = C \frac{du_C}{dt} \approx C \frac{du}{dt}$

Povprečna vrednost napetosti:

$$U_V(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^t iR dt = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^t \left(C \frac{du}{dt} \right) R dt = \frac{RC}{T} \int_{u(t-T/2)}^{u(t)} du$$

- zaradi **simetričnosti** $u(t - T/2) = -u(t)$: $u(t) = \frac{U_V(t)}{2f RC}$





Pri merjenju toka realiziramo **diferenciranje z medsebojno induktivnostjo** (b): $u = M \frac{di}{dt}$

Povprečna vrednost napetosti je enaka **trenutnemu toku**

$$U_V(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^t u dt = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^t \left(M \frac{di}{dt} \right) dt = \frac{M}{T} \int_{i(t-T/2)}^{i(t)} di, \quad i(t) = \frac{U_V(t)}{2f M}$$

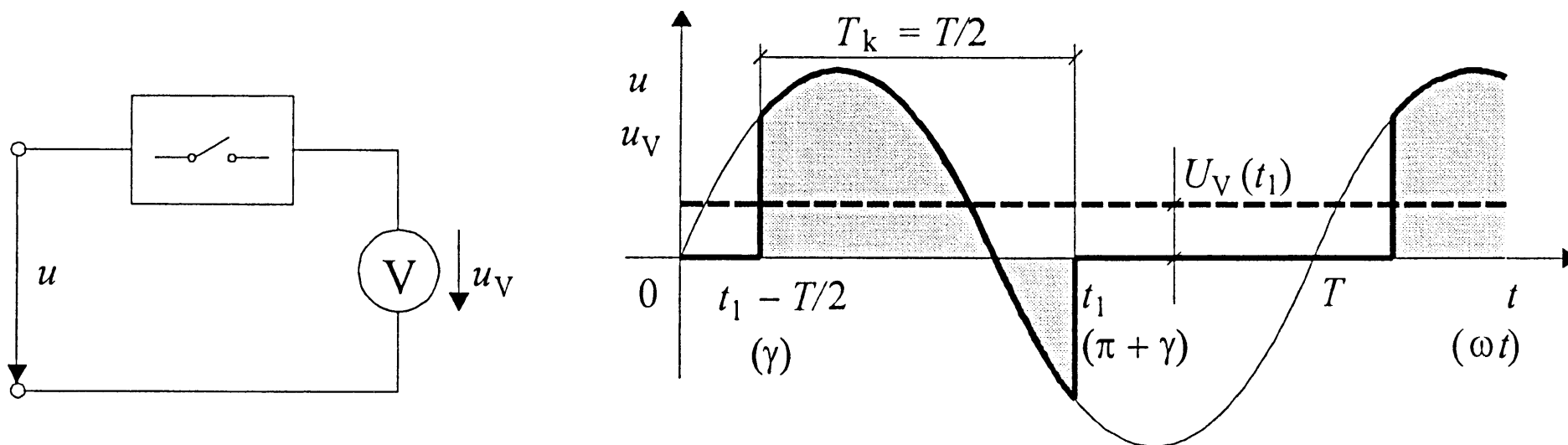




Z vektormetrom merimo:

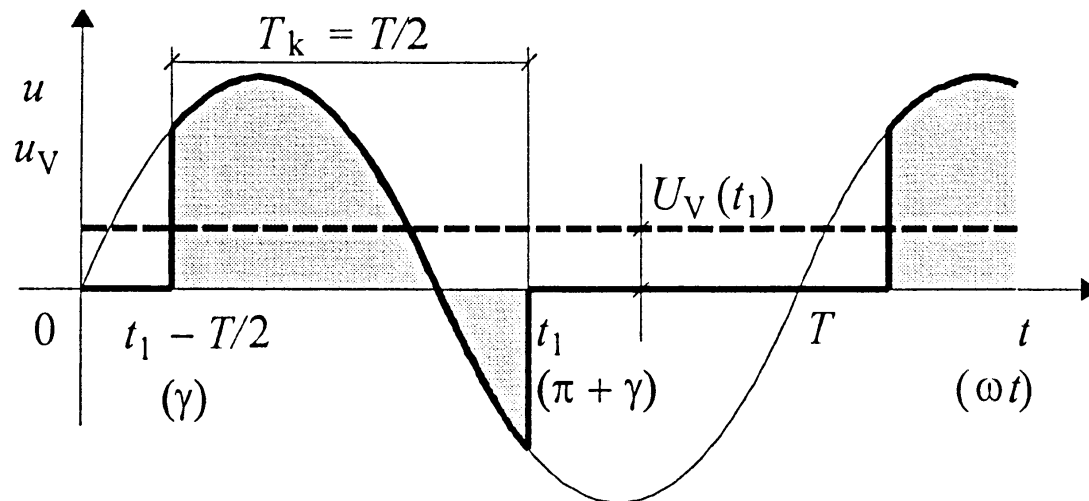
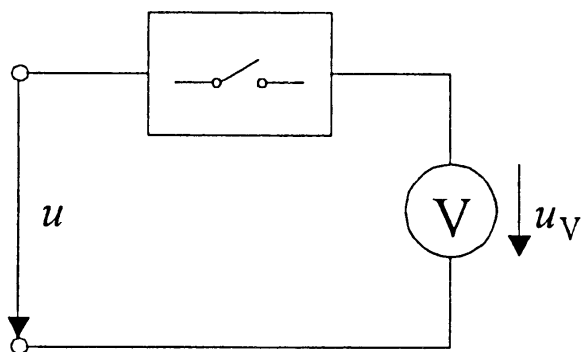
- **temensko** vrednost,
- **delovno** in **jalovo komponento** sinusne veličine,
- **fazno razliko** med veličinama,
- **osnovno** in **harmonske** komponente izmenične veličine,
- itn.

Kontaktni čas je $T_k = T/2$.



Slika 4.52 Merjenje sinusne napetosti z vektormetrom





Merjenje **delovne komponente** sinusne veličine:

$$U_V(t_1) = \frac{1}{T} \int_{t_1 - T/2}^{t_1} u_V dt = \frac{1}{T} \int_{t_1 - T/2}^{t_1} \hat{u} \sin \omega t dt = \frac{\hat{u}}{\omega T} \int_{\gamma}^{\gamma + \pi} \sin \omega t d\omega t$$

$$U_V(t_1) = \frac{\hat{u}}{\pi} \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U \cos \gamma$$

Merjenje **temenske** vrednosti \hat{u} :

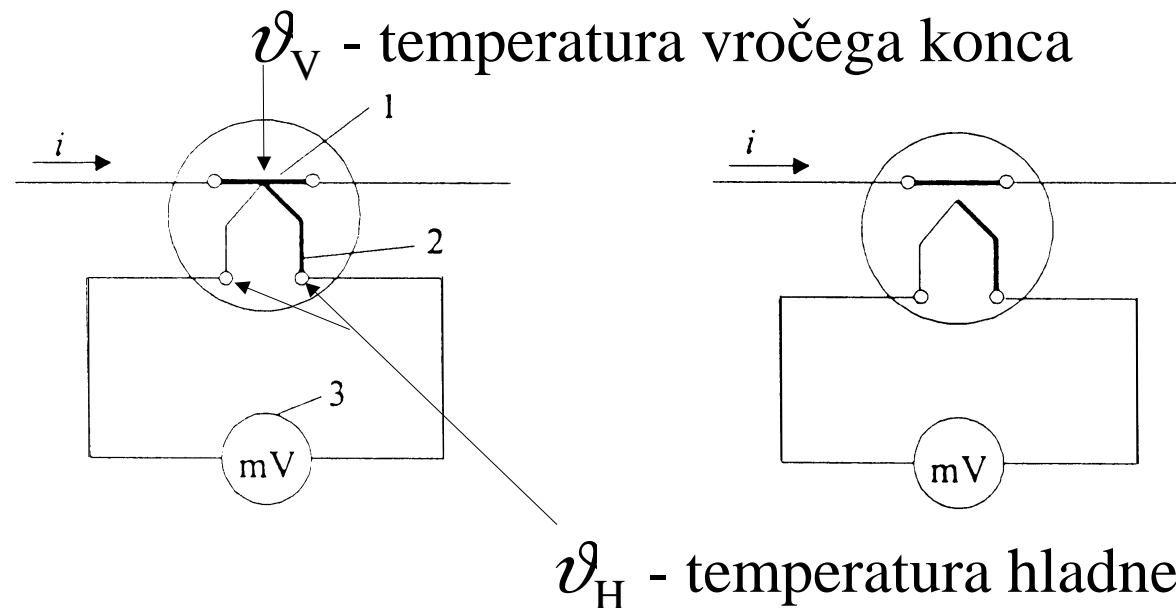
odklon voltmetra največji $U_{V,\max}$ pri $\gamma = 0$: $\hat{u} = \pi \cdot U_{V,\max}$





4.4.6 Instrument z odzivom na povprečno vrednost in termopretvornik

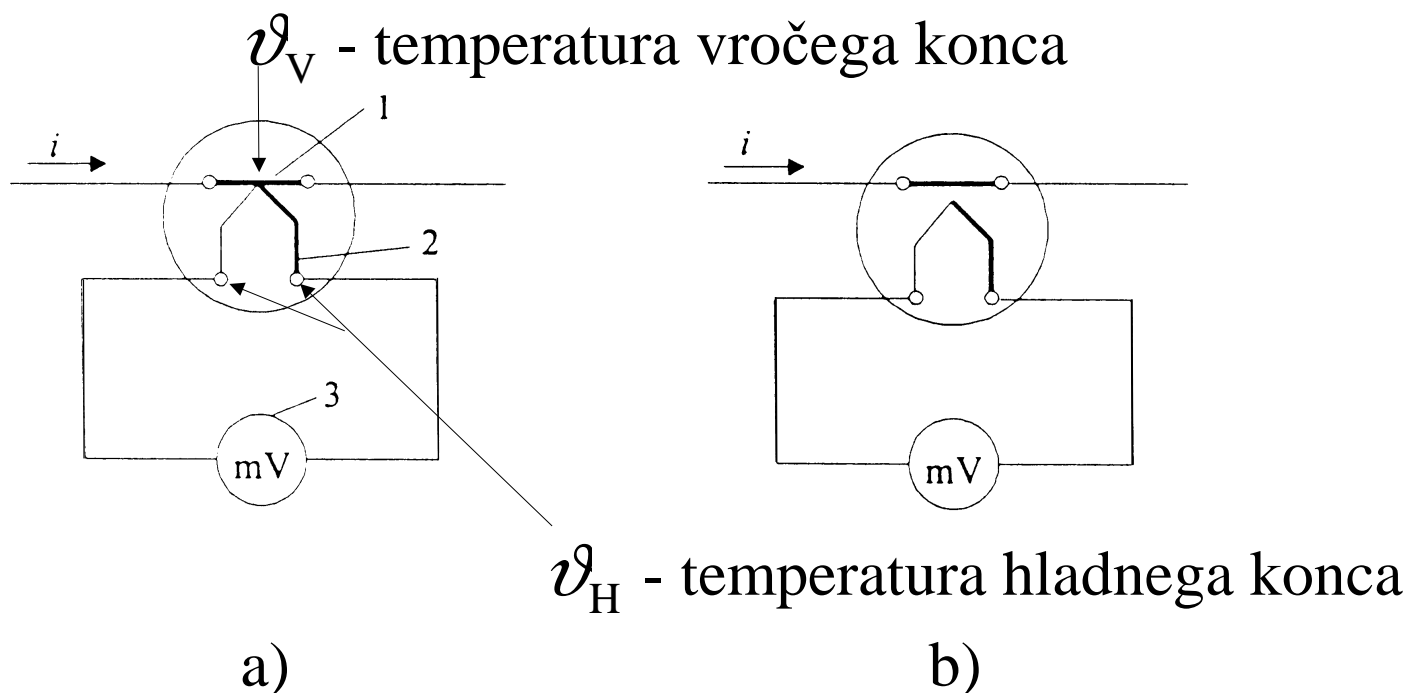
Kadar želimo meriti efektivno vrednost signala tudi **pri nesinusnem toku**, moramo instrumentu dodati **merilni člen – termopretvornik**.



Slika 4.53 Instrument z vrtljivo tuljavico in termopretvornikom

- izhodna veličina (enosmerna napetost/tok) je **sorazmerna efektivni vrednosti** merjene veličine.



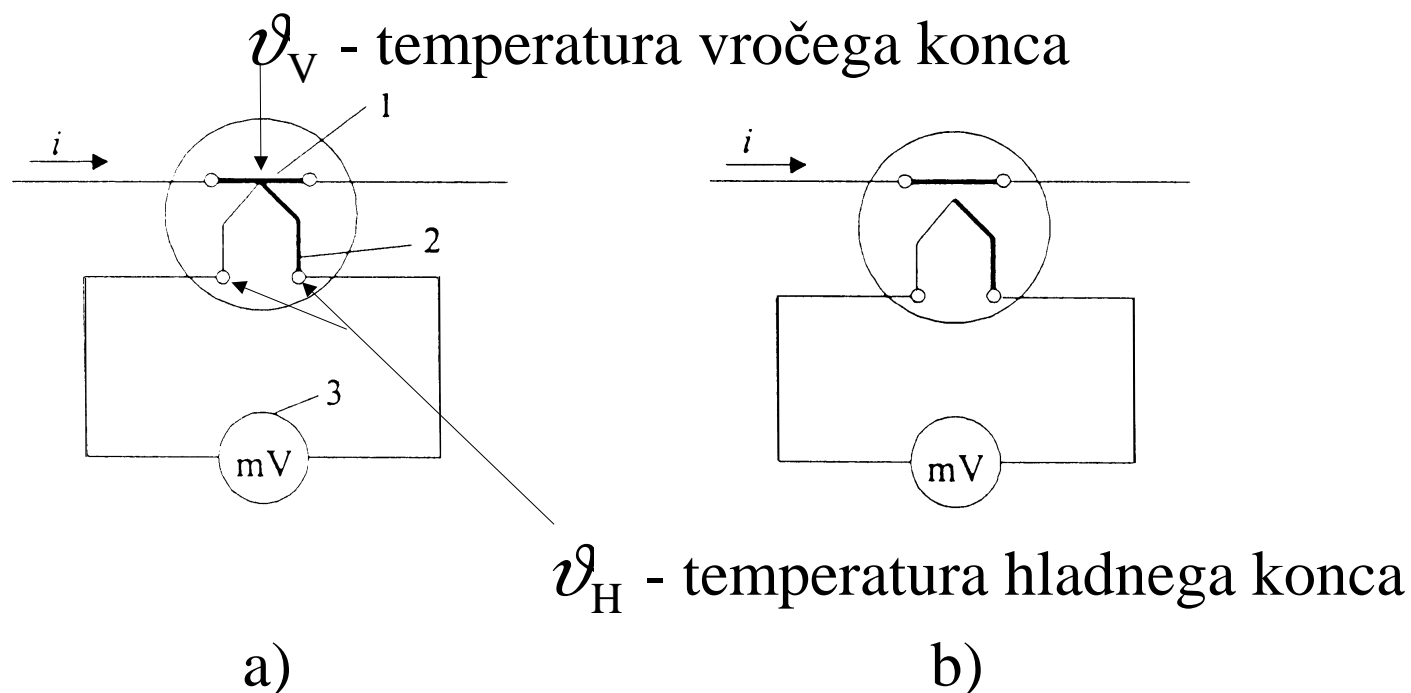


Slika 4.53 Instrument z odzivom na povprečno vrednost in termopretvornik

- **Grelna žica (1) in termoelement (2) sta v toplotnem stiku.** Napetost termoelementa:

$$U = k(\vartheta_V - \vartheta_H) = k \Delta \vartheta \quad k - \text{odvisen od materialov}$$





Slika 4.53 Instrument z odzivom na povprečno vrednost in termopretvornik

- če je tudi električni stik \Rightarrow neizoliran termopret.(a),
- če stika ni \Rightarrow izoliran termop.(b) – posredno ogrevan.





Za **ogrevanje** žice je potrebna moč:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (iR)i dt = R \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = RI^2$$

- V ustaljenem stanju sta zaradi toplotne vztrajnosti termopretvornika ϑ_V in ϑ_H **stalni**.
- Temperaturna razlika $\Delta\vartheta$ je **odvisna od moči** na grelni žici in dobimo: $U = aP = aRI^2 = bI^2$
 - **skala** takega instrumenta je **kvadratična** (odziva se na efektivno vrednost).

Termopretvornik je občutljiv na preobremenitev.

Z uporabo tankostenske cevke (zmanjša se **kožni pojav**) je zgornja frekvenčna meja okoli 1GHz.

