



1. UVOD

Zakaj meriti?

- Zato, da dobimo **objektiven** in **ponovljiv** podatek o:
 - **velikosti**, množini, jakosti fizikalnih veličin:
 - dolžina, čas, napetost, tok, moč itn.
- Izmerjena vrednost naj bo zadosti **blizu resnične – prave vrednosti**

Pri **merjenju primerjamo neznano veličino** z objektivnim merilom (**mero**).

- Pri **ocenjevanju** pa s podatkom v spominu (izkušnje).





Čemu meriti?

- **Zakonov narave ni moč odkriti brez** sredstev za detekcijo in **merjenje** fizikaknih veličin.
- **Znanstvene teorije** niso sprejemljive brez zadržka, dokler niso **potrjene z meritvami**.
- **Avtomatizacije** proizvodnih in drugih procesv si **ni** moč zamisliti **brez merjenj**.
- **S pomočjo merjenj** se more človek dokopati do znanja in spoznanja ter se dvigniti na raven, kjer **lahko postavlja vprašanja**.
- Izmenjava dobrin (**trgovina**) lahko poteka šele **po poenotenju mer**.





Kako meriti?

- Grobe **delne rezultate meritev** ponavadi dobimo z merilno opremo oz. **merilno instrumentacijo** – govorim o **posrednem merjenju**.

Upoštevati je potrebno:

- razpoložljivo opremo,
- zahtevano točnost,
- znanje izvajalcev meritev,
- potreben čas,
- vrsto merjene veličine,
- pogoje merenj,
- ali je merjena veličina stalna ali se s časom spreminja itn.

Inženir ima več dela z meritvami še preden priključi instrument





1.1 Temeljni pojmi merilne tehnike

1.1.1 Osnovna shema merjenja

Merjenje je postopek, pri katerem **primerjamo neznano vrednost** neke fizikalne veličine **z znano količino** istovrstne veličine (**enoto**) – **neposredno merjenje**.

$$I = 6 \text{ A}$$

I - efektivna **vrednost** električnega toka,
• i - trenutna vrednost, $\hat{i}$ - temenska vrednost
 $\bar{I}$ - srednja vrednost itn.

6 - **številsko vrednost**,

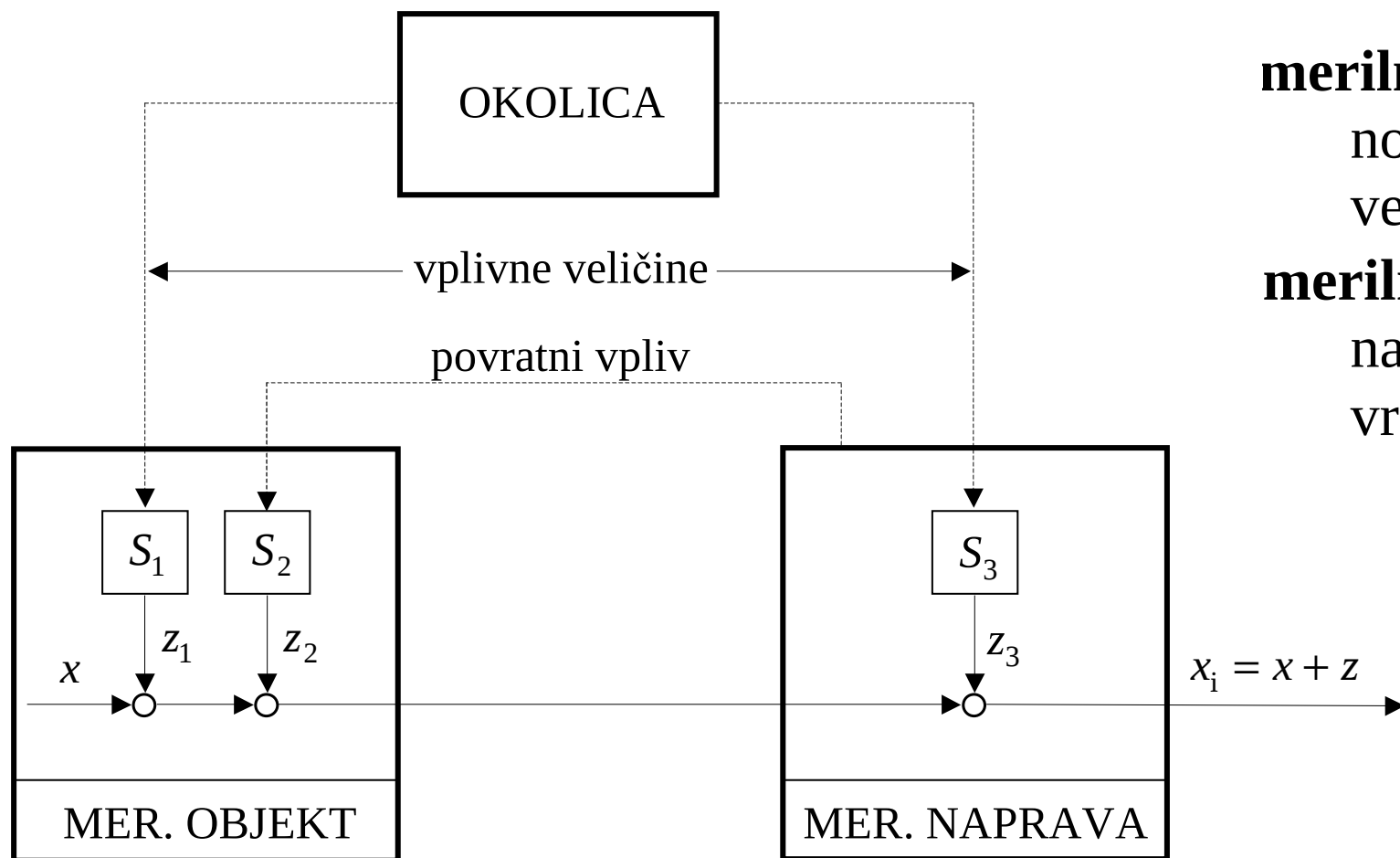
A(amper) - **enota** za električni tok.

Izmerjena vrednost je eden od **parametrov** neke fiz. veličine.





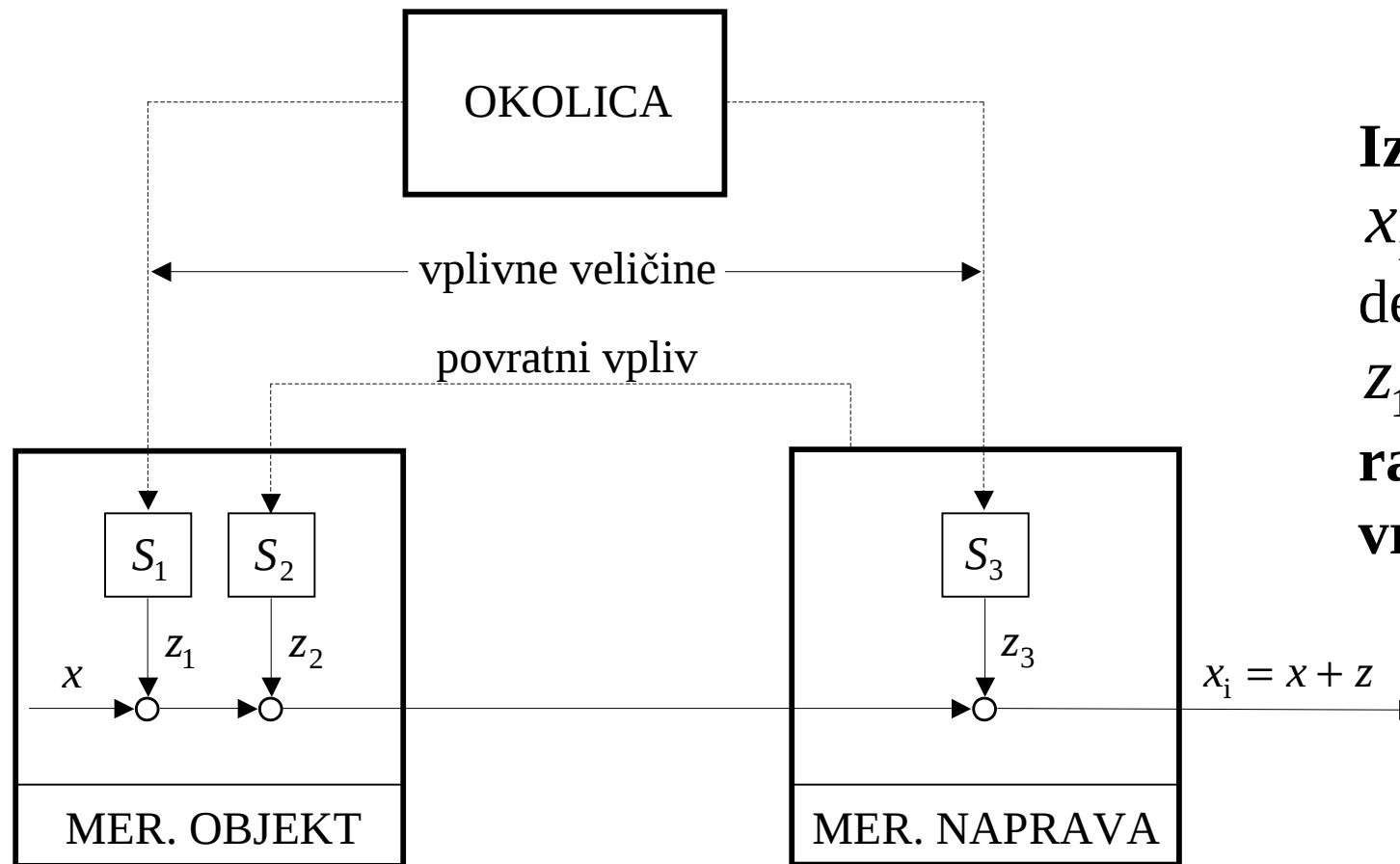
Izmerjena vrednost se razlikuje od dogovorjene prave vrednosti.



merilni objekt –
nosilec merjene
veličine,
merilna naprava –
nam daje izmerjeno
vrednost.

Slika 1.1 Osnovna shema merjenja





Izmerjena vrednost
 x_i se za vsoto treh
delnih motenj
 $z_1 + z_2 + z_3$
razlikuje od prave
vrednosti.

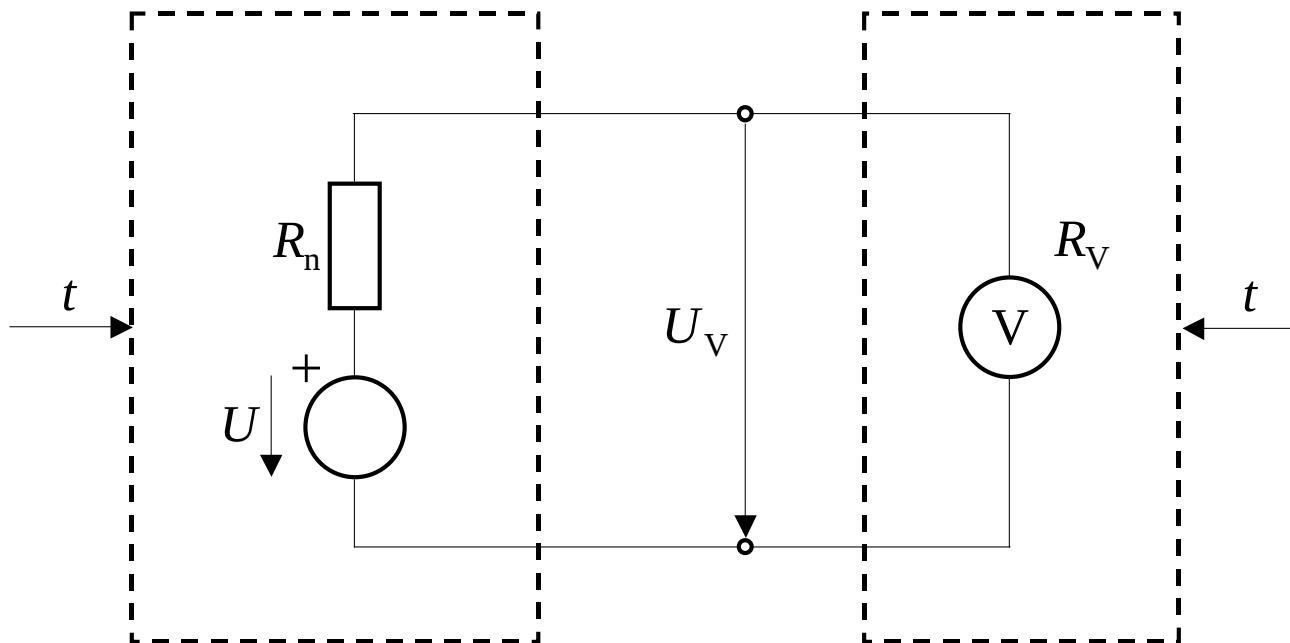
Slika 1.1 Osnovna shema merjenja

- S_1 - **občutljivost merilnega objekta** na vplivne veličine,
- S_2 - **povratni vpliv** na priključitev merilne naprave,
- S_3 - **občutljivost merilne naprave** na vplivne veličine.





Primer:



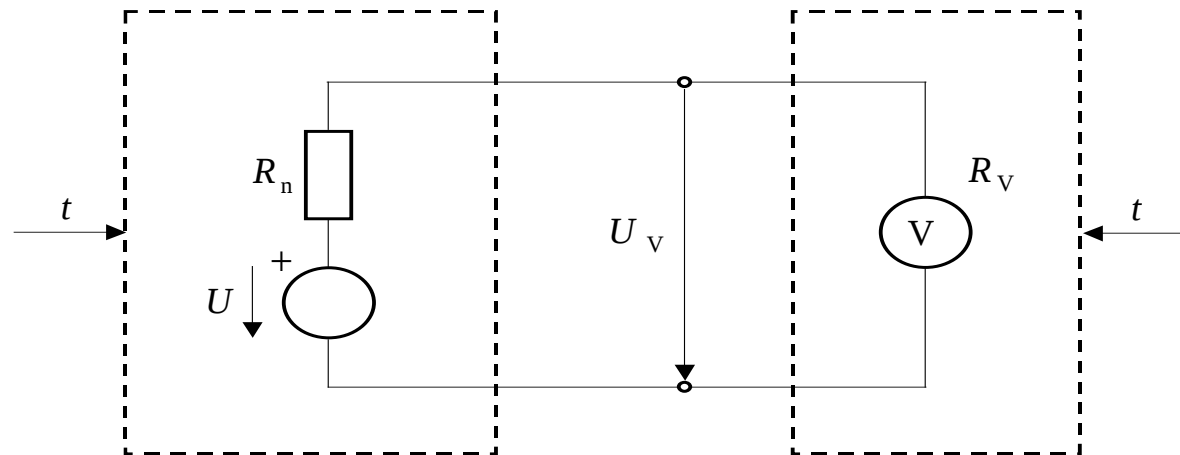
- Lastna napetost U galvanskega člena se s temperaturo t spremeni (S_1, z_1)
- Ko priključimo voltmetr, steče tok, ki povzroči padec napetosti na notranji upornosti R_n (S_2, z_2),
- Voltmetru s povišanjem temperature naraste upornost R_V (S_3, z_3).

Slika 1.2 Merjenje napetosti in pogrešek zaradi priključitve voltmetra

Razliko med izmerjeno vrednostjo in pravo vrednostjo imenujemo **merilni pogrešek**.

- Zelo zahtevna analiza vplivov na merilni rezultat!!





Kolikšen je pogrešek
zaradi priključitve?

- izmerjena vrednost: $U_i = U_V = U \frac{R_V}{R_V + R_n}$
- 'prava' vrednost: $U = U_i \frac{R_V + R_n}{R_V} = U_i + U_i \frac{R_n}{R_V}$
- pogrešek (absolutna vrednost): $U_i - U = -U_i \frac{R_n}{R_V}$
- relativna vrednost: $\frac{U_i - U}{U} = \frac{-U_i R_n / R_V}{U_i (R_V + R_n) / R_V} = -\frac{1}{1 + R_V / R_n}$





Vseh učinkov vplivnih veličin se ne da ugotoviti.

- Vedno ostane pogrešek, katerega **predznak je nedoločen.**

Za izmerjeno vrednost zapišemo **merilni rezultat** (iz **enega odčitka** z instrumenta, ali iz **aritmetične sredine** izmerjenih vrednosti, ali **posredno** iz neposredno merjenih veličin, ...)

- Popolni **merilni rezultat** ni ena sama vrednost, temveč **območje vrednosti!!**

ali drugače:

- odstopanje navzgor oz. navzdol od izmerjene vrednosti imenujemo **merilna negotovost.**





Primer:

- izmerjena vrednost: $R = 123,4\Omega$
- **popolni merilni rezultat v absolutni obliki:**

$$R = 123,4\Omega \pm 0,5\Omega$$

- popolni merilni rezultat v **relativni obliki:**

$$R = 123,4(1 \pm 4 \cdot 10^{-3})\Omega$$

- **okoliščine**, v katerih je potekalo merjenje:
 - podatki o temperaturi, vlagi, številu izmerjenih vrednosti, ..





1.1.2 Merilne metode

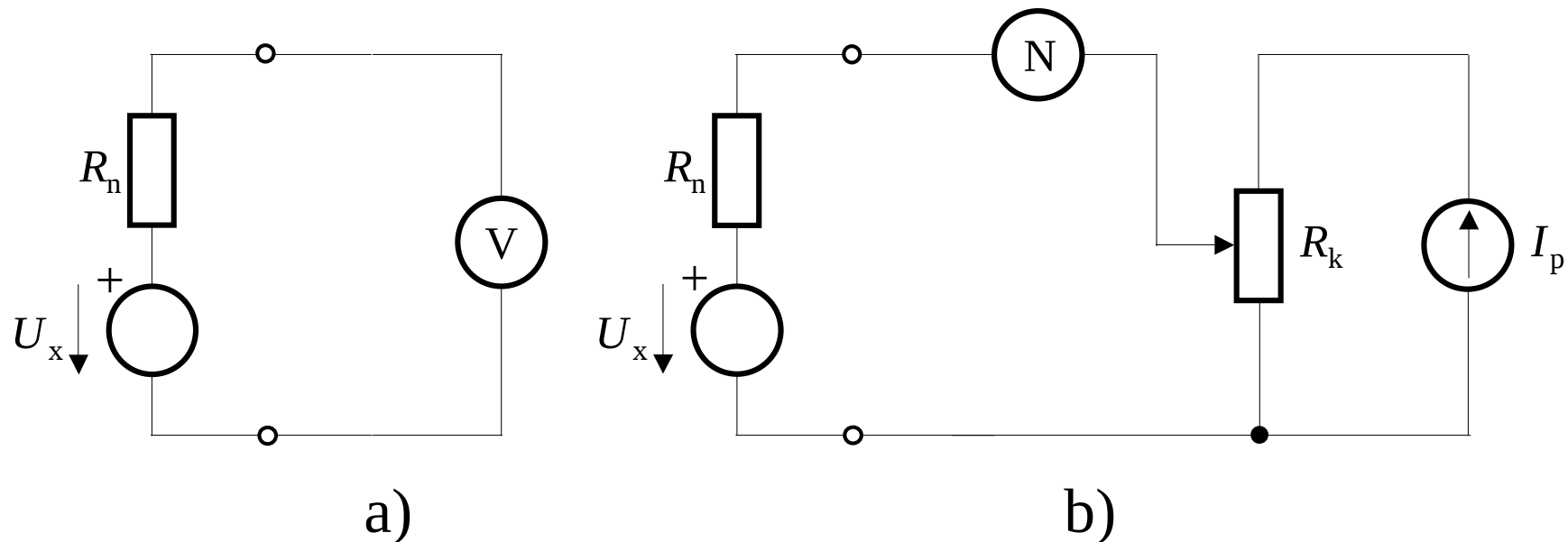
Poznamo dve bistveno različni metodi:

- **odklonsko**, pri kateri je odklon (ali kazanje) instrumenta osnova za določitev vrednosti merjene veličine;
- **ničelno**, ko instrument kaže nič oziroma nima odklona in določimo vrednost merjene veličine na podlagi drugih, znanih pogojev merilnega vezja

Obe metodi lahko nadalje delimo še na:

- **navadne,**
- **primerjalne,**
- **zamenjalne,**
- **diferenčne,**
- **in posebne.**

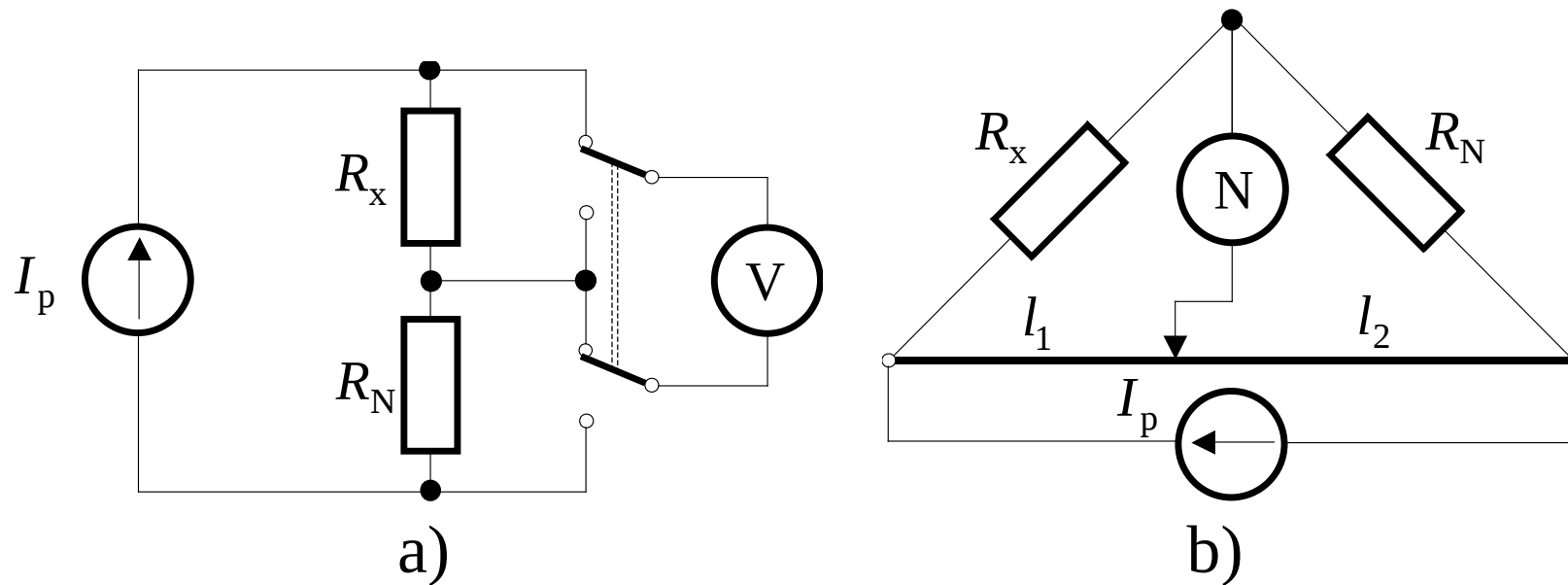




Slika 1.3 **Navadna** odklonska in ničelna metoda

- odklonska metoda je hitrejša od ničelne;
- ničelna metoda je bolj točna;
- pri ničelni metodi je večja poraba instrumentarija;
- pri ničelni metodi mora biti ničelni indikator zelo občutljiv
- tokovi in napetosti morajo biti stabilni.





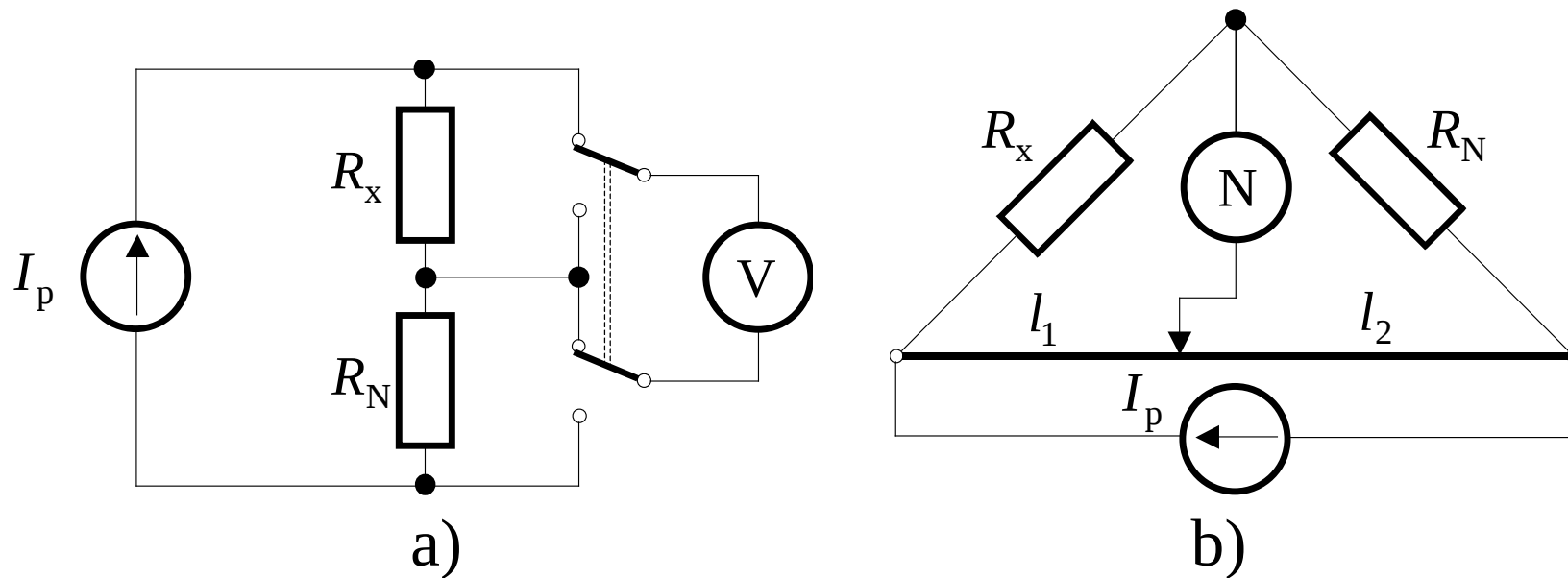
Slika 1.4 **Primerjalna** odklonska in ničelna merilna metoda

Primerjalna odklonska metoda:

- med seboj primerjamo napetost na neznanem uporu z napetostjo na znanem (tok mora biti **konstanten!**):

$$R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} \Leftrightarrow I_p = \text{konst.} = \frac{U_x}{R_x} = \frac{U_N}{R_N}$$



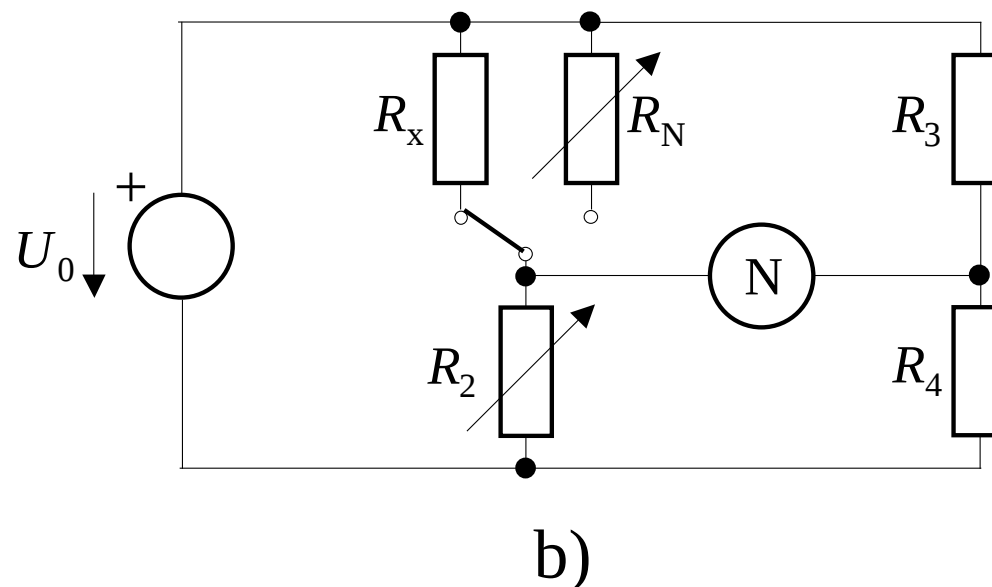
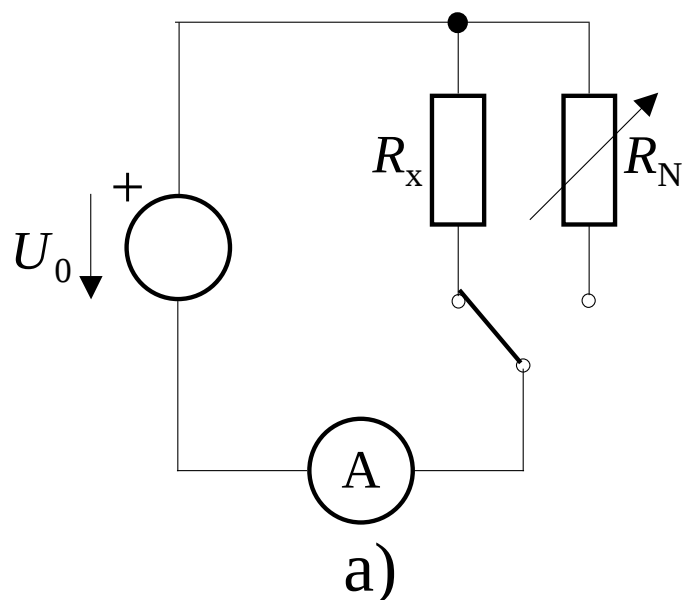


Slika 1.4 **Primerjalna** odklonska in ničelna merilna metoda

Primerjalna ničelna metoda:

- mostiček moramo s premikanjem drsnika po uporovni žici najprej uravnovesiti (tok ni nujno, da je stalen!):
$$R_x = R_N \frac{l_1}{l_2}$$





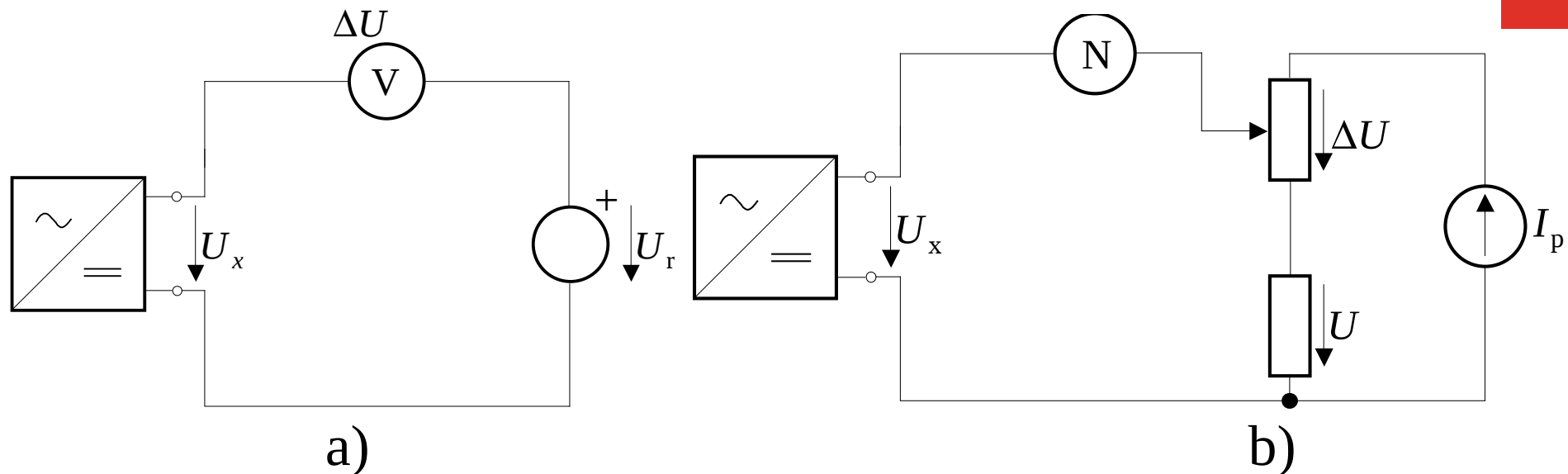
Slika 1.5 Zamenjalna odklonska in ničelna metoda

Zamenjalna (substitucijska) metoda:

- vrednost iskane veličine ugotovimo tako, da **vzpostavimo** v merilnem vezju **dvakrat enake pogoje**:
 - **prvič** je vključen **neznani** upor (merjenec);
 - **drugič** je vključen **znani** in **spremenljivi** upor -referenca

Točnost ampermetra ni pomembna.





Slika 1.6 Diferenčna odklonska in ničelna metoda

Diferenčna metoda:

- kadar nas zanima **spremeba** fizikalne veličine:
 - razlike med neznano vrednostjo in referenčno vrednostjo **ni potrebno meriti zelo točno**, kadar je **razlika majhna!**

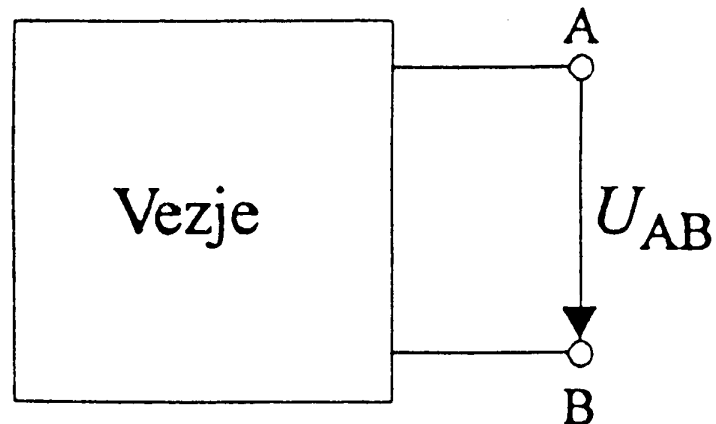


1.1.2.1 Odklonska metoda in primeri vključitve merilnih instrumentov

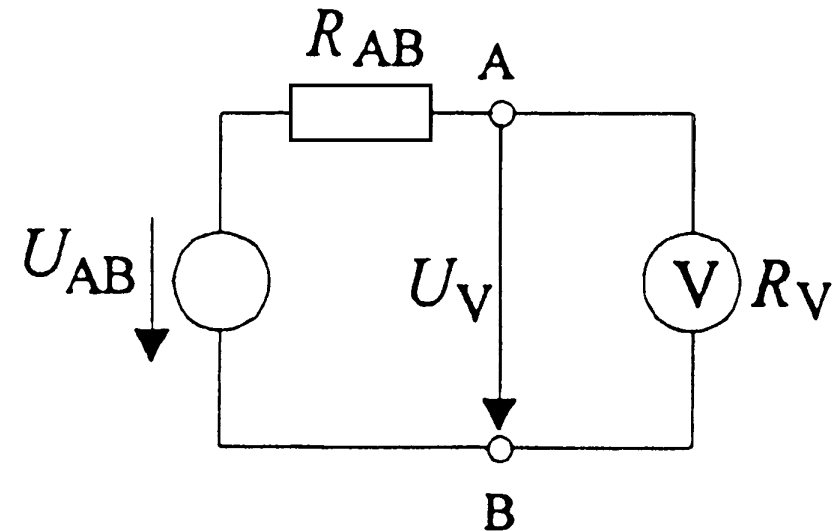


Vključitev merilnih instrumentov ima za posledico spremembo razmer.

Priključitev voltmetra



a)



b)

Slika 1.7 Vpliv priključitve voltmetra

Napetost med sponkama A, B
po priključitvi voltmetra:

$$U_V = U_{AB} \frac{R_V}{R_V + R_{AB}}$$





- Relativna sprememba napetosti:

$$\frac{\Delta U}{U_{AB}} = \frac{U_V - U_{AB}}{U_{AB}} = -\frac{1}{1 + R_V / R_{AB}}$$

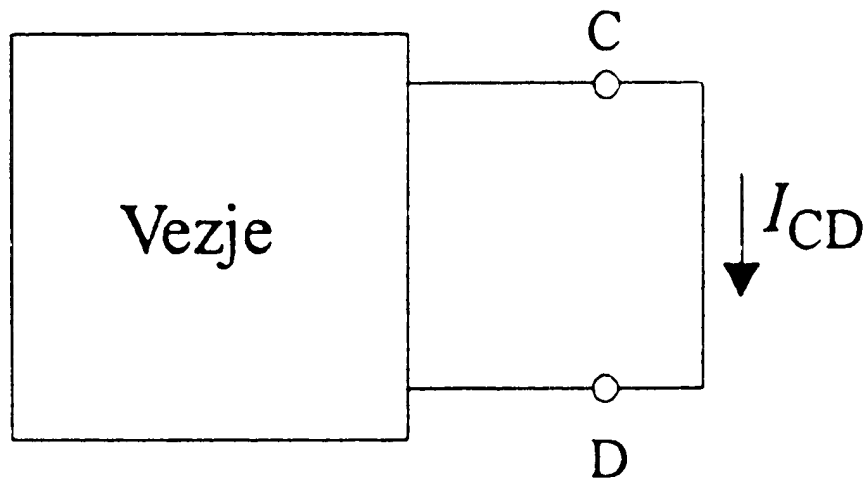
- **napetost je manjša,**
- odvisna od razmerja $\frac{R_V}{R_{AB}}$
- Če učinek priključitve (končne vrednosti upornosti) zanemarimo, naredimo **sistematični pogrešek** merilne

metode:

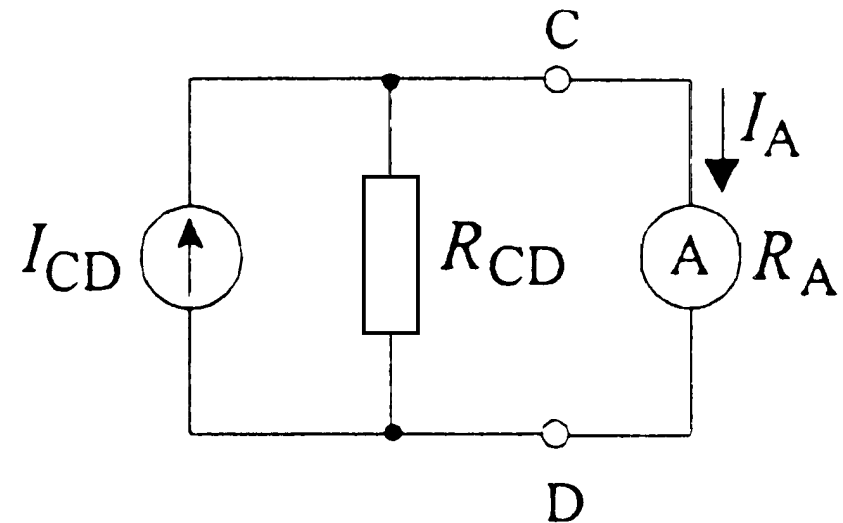
$$e = -\frac{1}{1 + R_V / R_{AB}}$$



Vključitev ampermetra



a)



b)

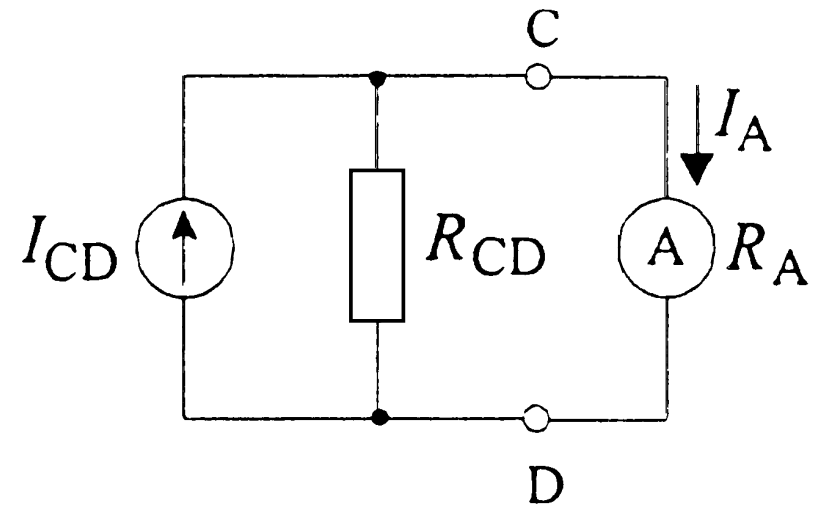
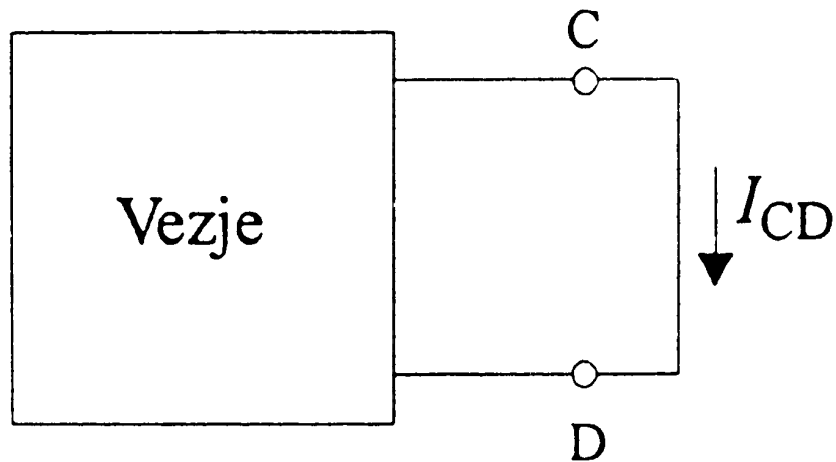
Slika 1.8 Vpliv vključitve ampermetra

Tok med sponkama C, D **po vključitvi ampermetra** (pred tem je bila kratka vez):

$$I_A = I_{CD} \frac{R_{CD}}{R_{CD} + R_A}$$

Relativna sprememba toka:
$$\frac{\Delta I}{I_{CD}} = \frac{I_A - I_{CD}}{I_{CD}} = -\frac{1}{1 + R_{CD}/R_A}$$





$$\frac{\Delta I}{I_{CD}} = \frac{I_A - I_{CD}}{I_{CD}} = -\frac{1}{1 + R_{CD}/R_A}$$

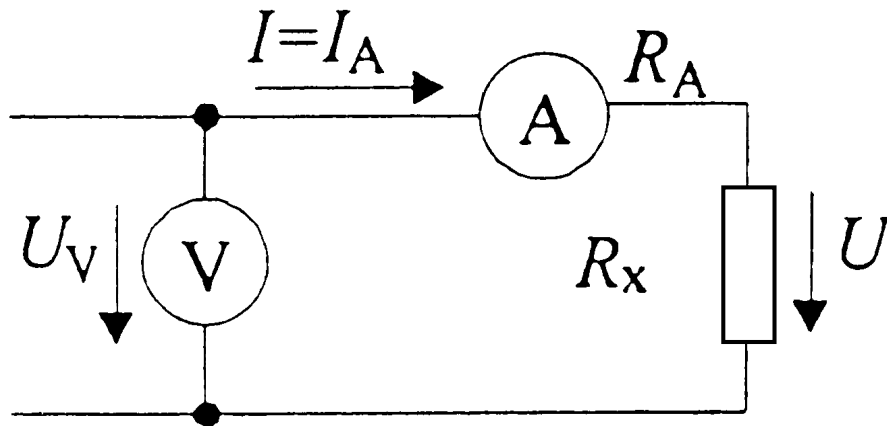
- tok je manjši,
- odvisna od razmerja $\frac{R_{CD}}{R_A}$

Če učinek priključitve (končne vrednosti upornosti) zanemarimo, naredimo **sistematični pogrešek**:

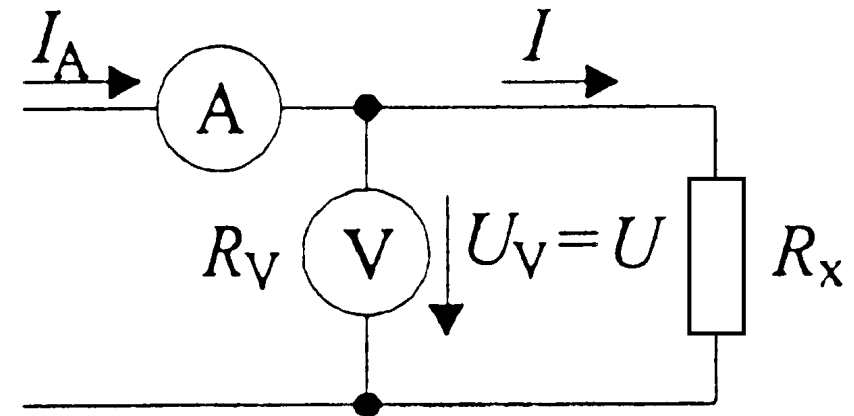
$$e = -\frac{1}{1 + R_{CD}/R_A}$$



1.1.2.2 Odklonska U - I metoda merjenja upornosti



a)



b)

Slika 1.9 U - I metoda merjenja upornosti

Varianta a:

- tok je pravilen: $I_A = I$,
- napetost je prevelika: $U_V = U + IR_A$

Razmerje je **večje** kot R_x :
$$\frac{U_V}{I_A} = \frac{U + IR_A}{I} = R_x + R_A$$





$$\frac{U_V}{I_A} = \frac{U + IR_A}{I} = R_x + R_A$$

- če upoštevamo samo U_V in I_A , je **sistematični pogrešek**:

$$R_i = \frac{U_V}{I_A} \Rightarrow e = \frac{U_V/I_A - R_x}{R_x} = \frac{R_A}{R_x}$$

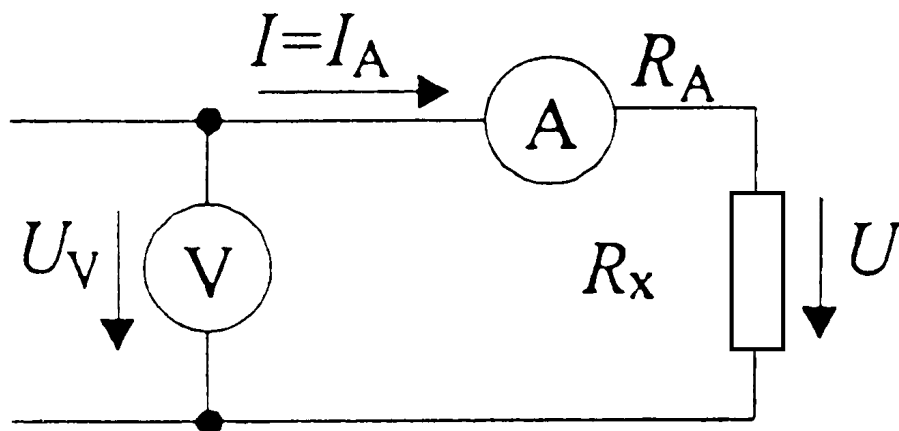
Ta metoda se uporablja **za merjenje velikih upornosti**,

- pogrešek (R_A) je zanemarljiv.

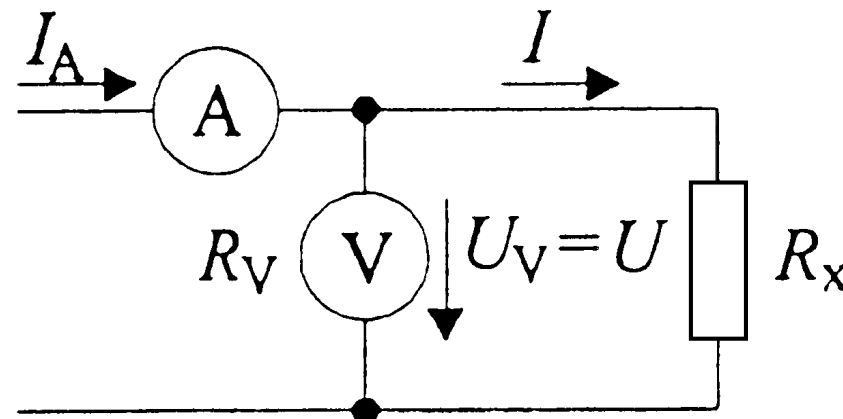
Pri **zelo velikih upornostih** moramo upoštevati **dopustno obremenitev** $I^2 R_x$.

Merilni pogrešek je odvisen od pogreška pri merjenju napetosti in toka.





a)



b)

Slika 1.9 U - I metoda merjenja upornosti

Varianta b:

- napetost je pravilna: $U_V = U$,
- tok je prevelik: $I_A = I + U_V / R_V$,

Razmerje je **manjše** kot R_x :
$$\frac{U_V}{I_A} = \frac{R_x R_V}{R_x + R_V}$$





$$\frac{U_V}{I_A} = \frac{R_x R_V}{R_x + R_V}$$

- če upoštevamo samo U_V in I_A , je **sistematični pogrešek**:

$$R_i = \frac{U_V}{I_A} \Rightarrow e = \frac{U_V/I_A - R_x}{R_x} = -\frac{R_x}{R_x + R_V} \approx -\frac{R_x}{R_V}$$

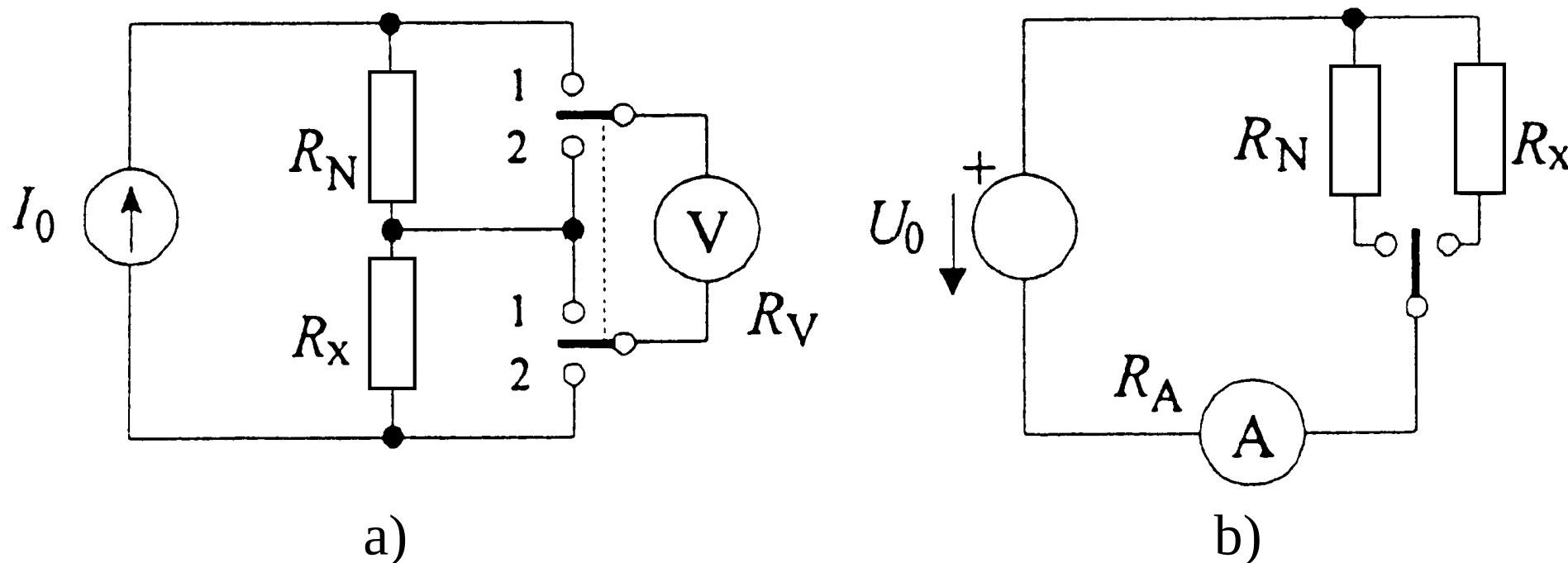
Ta metoda se uporablja **za merjenje majhnih upornosti**,

- Upornost R_V je praviloma dosti večja od R_x .
- Pri **zelo majhnih upornostih** moramo upoštevati **dopustno obremenitev** U^2/R_x .

Merilni pogrešek je odvisen od pogreška pri merjenju napetosti in toka.



1.1.2.3 Primerjalna metoda merjenja upornosti



Slika 1.10 Napetostna in tokovna primerjalna metoda

Napetostna primerjalna metoda (a)

- Položaj 1-1: $U_N = I_0 \frac{R_N R_V}{R_N + R_V}$,
- Položaj 2-2: $U_x = I_0 \frac{R_x R_V}{R_x + R_V}$.





Pri **konstantnem** I_0 : $R_x = R_N \frac{U_x}{U_N} \cdot \frac{1}{1 + (1 - U_x/U_N) R_N / R_V}$

Če uporabimo izraz $R_i = R_N \frac{U_x}{U_N}$, 'pridelamo' **sistematični pogrešek**:

$$e = \frac{R_i - R_x}{R_x} \quad \text{oz.} \quad e = \frac{R_N}{R_V} \left(1 - \frac{U_x}{U_N} \right)$$

$$\text{oz.} \quad e = \frac{R_N - R_x}{R_x + R_V} = \frac{R_N - R_x}{R_V}$$

- odločilno je razmerje razlike upornosti $R_N - R_x$ proti upornosti voltmetra R_V .
 - primerna za **merjenje majhnih upornosti**.



Merilni pogrešek napetostne primerjalne metode



Če izvedemo primerjavo **z istim voltmetrom**, lastni **pogrešek E ne vpliva na negotovost**, kadar sta upornosti (napetosti) blizu skupaj:

$$R_N \approx R_x \quad \Leftrightarrow \quad U_x / U_N - 1 \approx 0,01$$

Pogreška voltmetra E ne poznamo, vendar se v kvocientu njegov vpliv izloči:

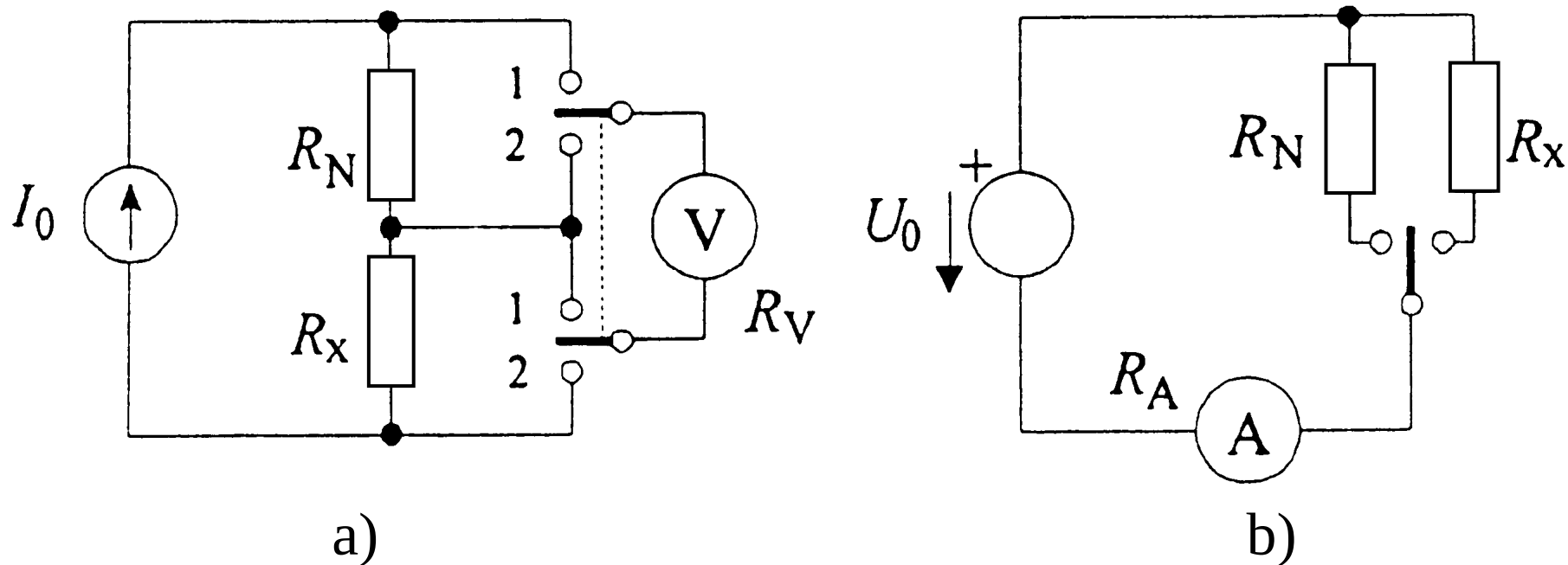
$$R_i = R_N \frac{U_x - E}{U_N - E} = R_N \frac{U_x}{U_N} \cdot \frac{1 - E/U_x}{1 - E/U_N} \approx R_N \frac{U_x}{U_N}$$

Primer: $U_x = 1,025 \text{ V}$ in $U_N = 1,018 \text{ V}$, $E = 0,015 \text{ V}$

$$\frac{U_x - E}{U_N - E} = \frac{1,025 \text{ V} - 0,015 \text{ V}}{1,018 \text{ V} - 0,015 \text{ V}} = 1,0070$$

$$\frac{U_x}{U_N} = \frac{1,025 \text{ V}}{1,018 \text{ V}} = 1,0069 \quad - \text{ samo za } 0,01\% \text{ manj!} \quad \Leftrightarrow \quad e = 1,5\%$$





Slika 1.10 Napetostna in tokovna primerjalna metoda

Tokovna primerjalna metoda (b)

- čez upor R_N teče tok:
$$I_N = \frac{U_0}{R_N + R_A}$$
- čez upor R_X teče tok:
$$I_X = \frac{U_0}{R_X + R_A}$$





Pri **konstantni napetosti** U_0 : $R_x = R_N \frac{I_N}{I_x} \left[1 + \frac{R_A}{R_N} \left(1 - \frac{I_x}{I_N} \right) \right]$

Če uporabimo izraz: $R_i = R_N \frac{I_N}{I_x}$,

- ‘pridelamo’ sistematični pogrešek:

$$e = \frac{G_x - G_N}{G_A + G_N} \approx \frac{G_x - G_N}{G_A}$$

Primerjanje je tem bolj točno, čim bliže sta si merjeni veličini!

Če je etalon R_N spremenljiv in vzpostavimo $I_x = I_N$, se metoda spremeni v **zamenjalno** (R_A nepomembna)!





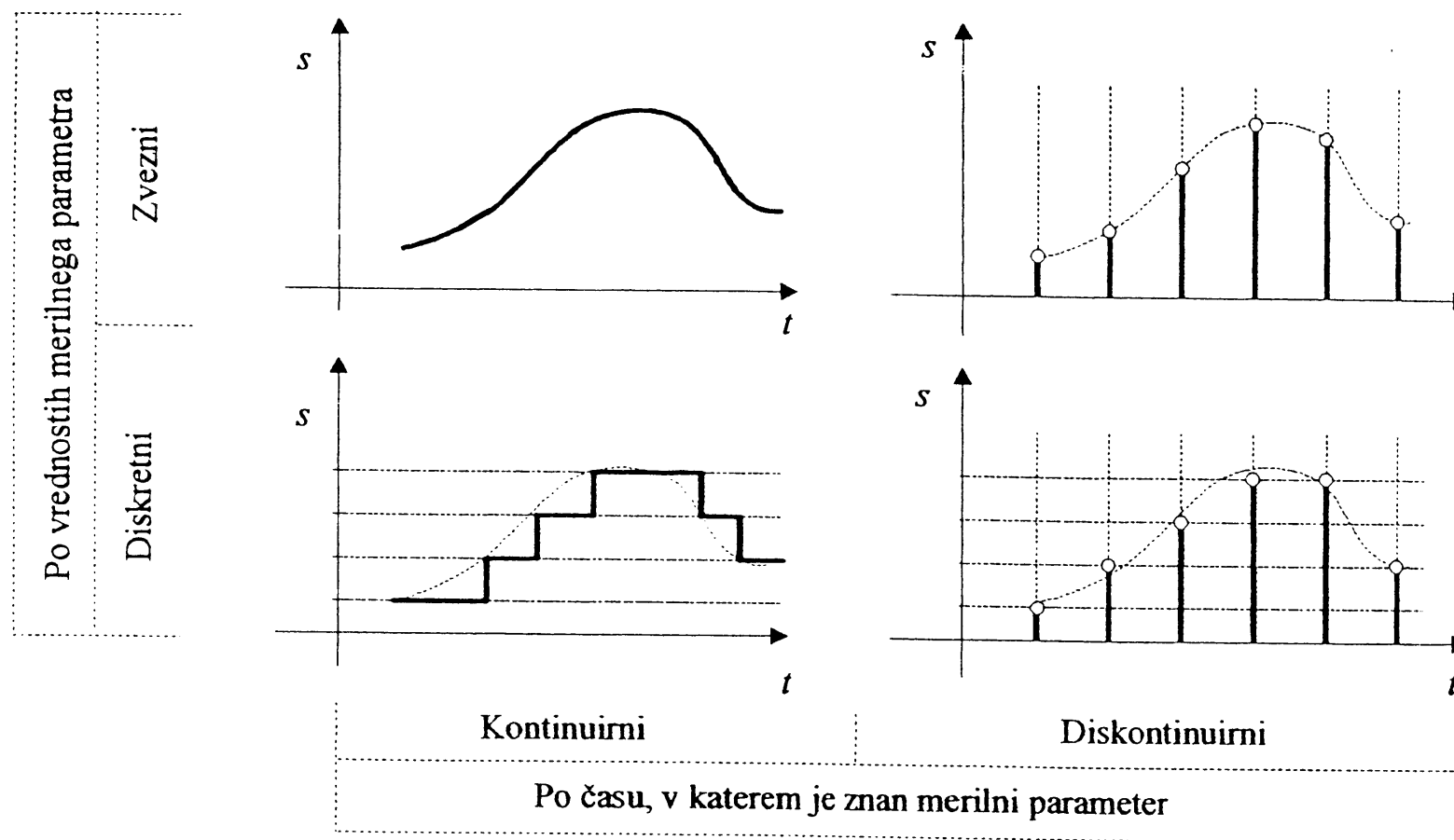
1.1.3 Merilni postopek

- Ločimo **analogni** in **digitalni** del merilnega postopka.
 - Če se fizikalne veličine **spreminjajo zvezno** – pri majhni spremembi časa se tudi veličina malo spremeni – imamo opravka z **analognim** postopkom.
 - Značilno za **predležje** pred Analogno-Digitalno pretvorbo.
 - Če prave vrednosti ne pripadajo **realnim številom** temveč naravnim (npr. štetje) in to v **diskretnih časovnih trenutkih** – imamo opravka z **digitalnim** postopkom.
 - Značilno za vsako **kvantizacijo** oziroma **določanje številske vrednosti**.



1.1.4 Merilni signal

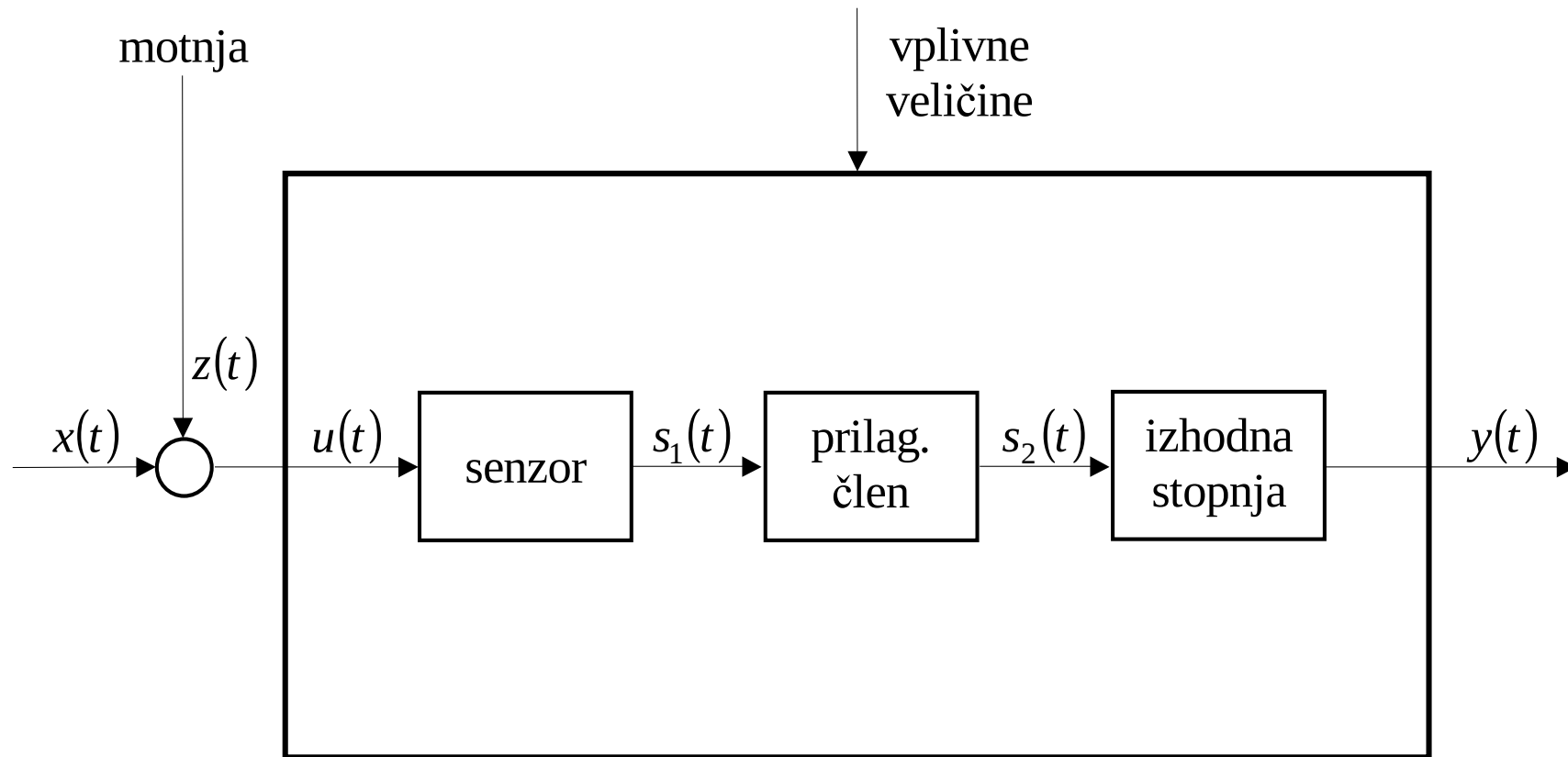
Nosilec informacije je **merilni signal** – časovni potek fizikalne veličine, ki odslikava merjeno veličino.



Slika 1.11 Štiri osnovne vrste merilnih signalov



1.1.5 Merilna naprava

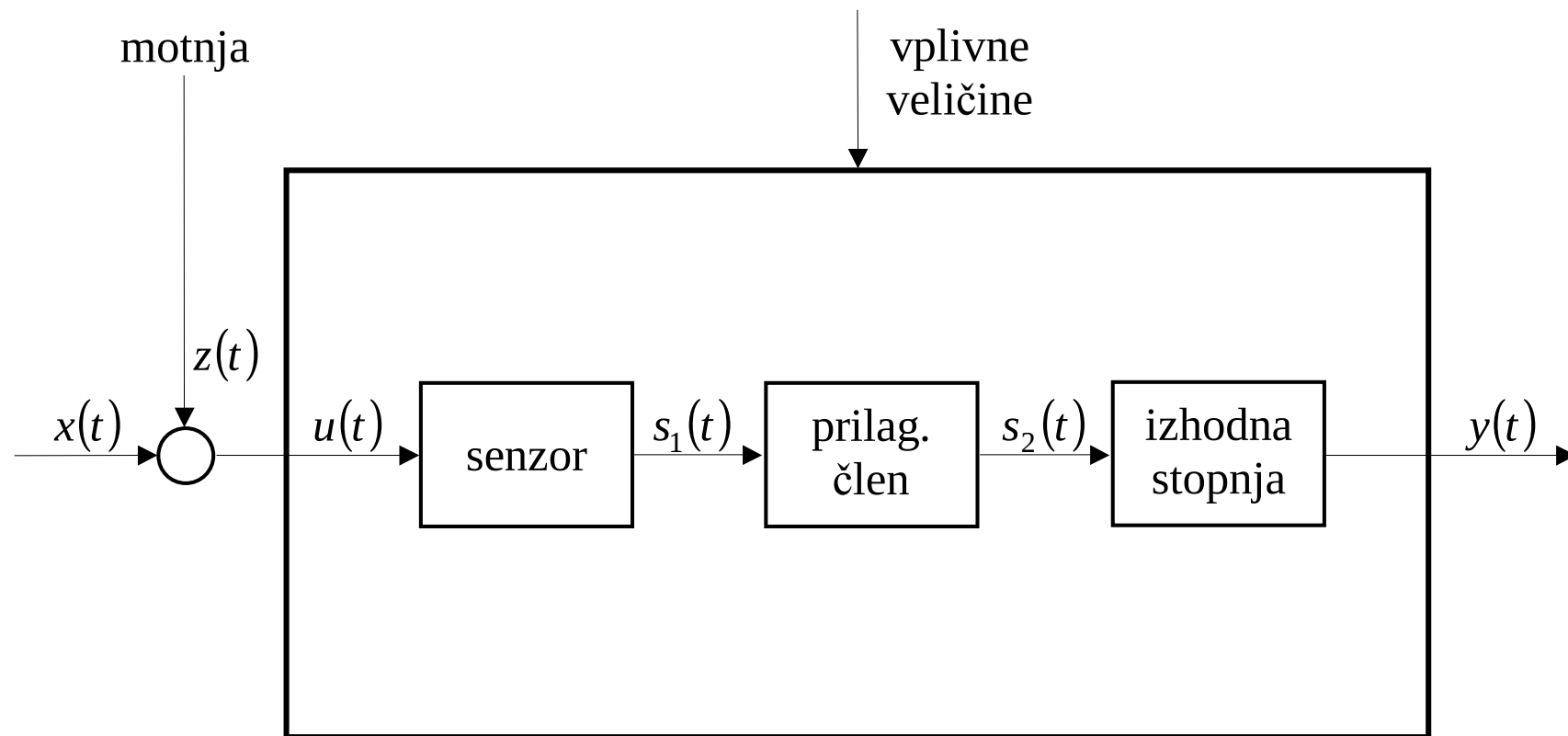


Slika 1.12 Blokovna shema **merilne naprave**

Trije poglavitni **merilni členi**:

- **Senzor** (zaznavalo), ki zaznava merjeno veličino,
- **Prilagoditveni** člen (ojačenje, slabljenje, preoblikovanje,...),
- **Izhodna** stopnja (informacija postane zaznavna našim čutilom, za prenos,.





Merilni signal:

- vhodna veličina,
- vmesne veličine,
- izhodna veličina.
- napetost,
- tok,
- upornost,
- kapacitivnost,
- električno polje, ...

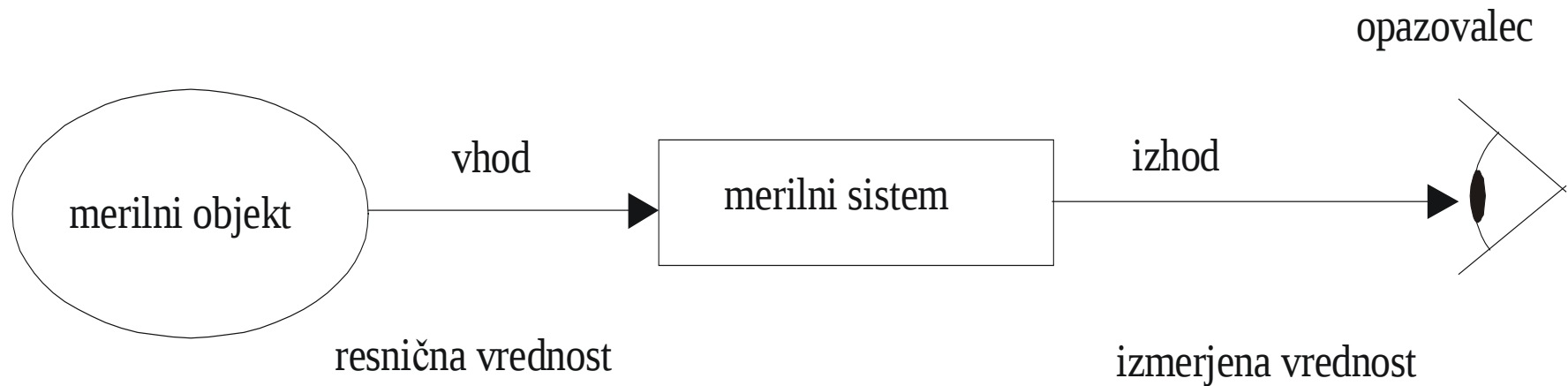
Informacijski parameter:

- frekvenca,
- amplituda,
- fazni kot,
- srednja vrednost, ..



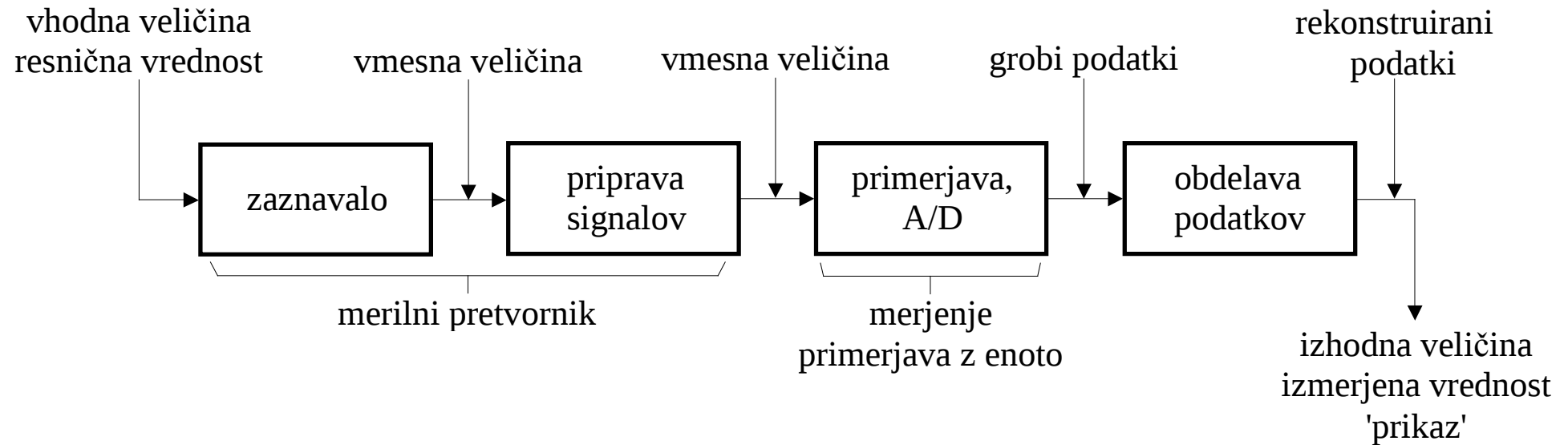


1.1.6 Merilni sistem



Slika 1.13 Vloga merilnega sistema pri merjenju (klasični pogled)

Fizikalno veličino merilnega objekta privedemo na vhod merilnega sistema, nakar ta izmeri veličino in na izhodu poda **izmerjeno vrednost**, ki se **razlikuje od resnične vrednosti**.

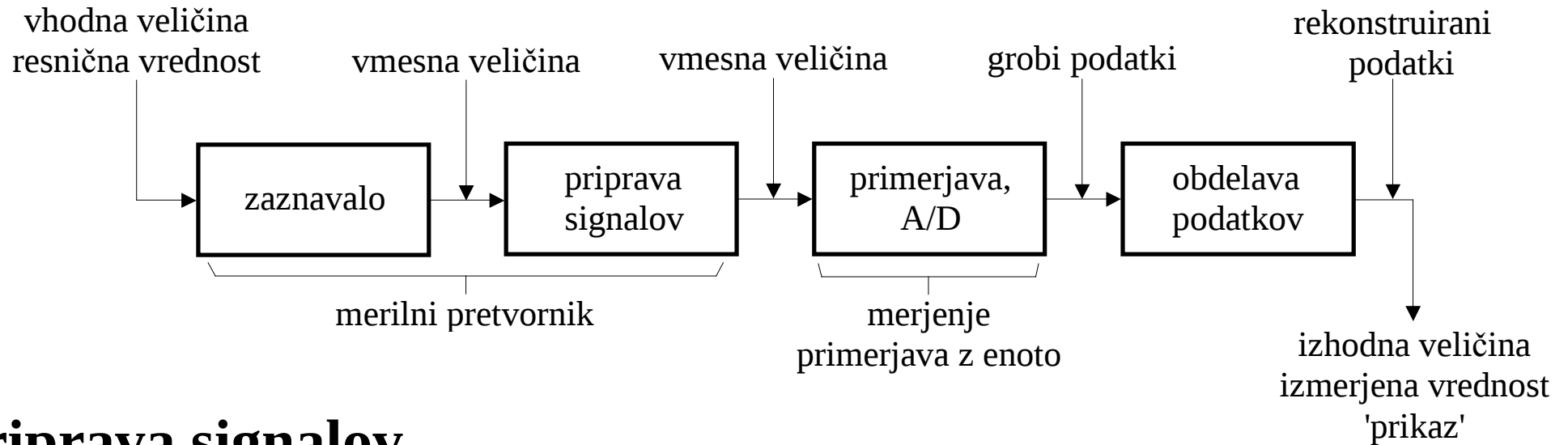


Slika 1.14 Zgradba merilnega sistema

Senzor

Vhodni signal vstopa v **merilni pretvornik**, ki je sestavljen iz **zaznavala** (tudi tipalo, čutilo ali **senzor**) in faze **priprave signalov** na obdelavo.



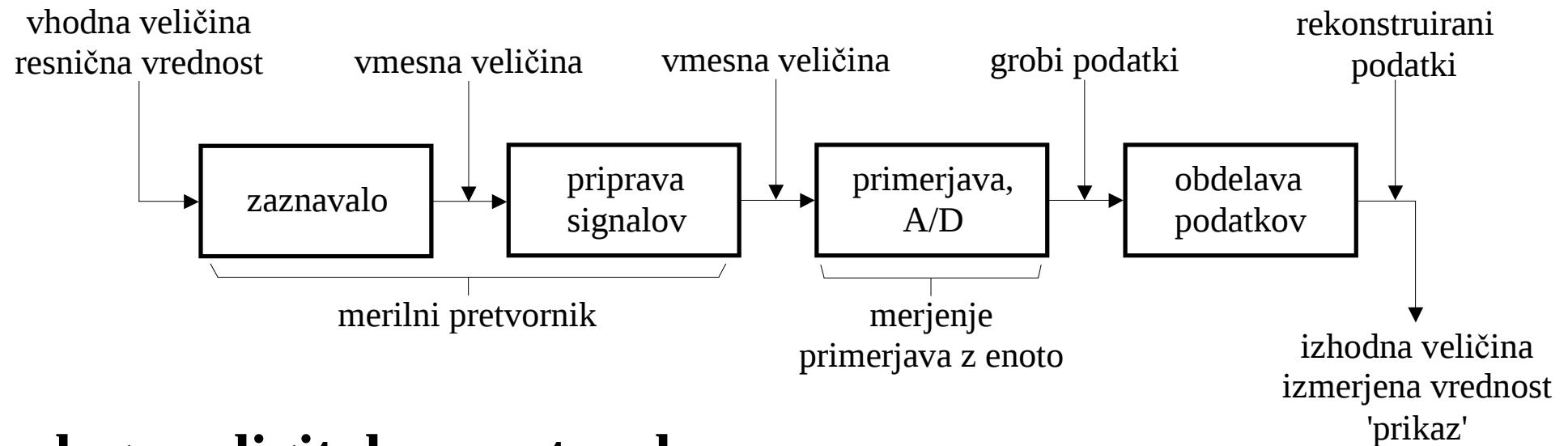


Priprava signalov

Vhodno veličino je potrebno pred primerjavo z enoto:

- **pretvoriti** v drugo obliko, ki jo bo lažje obdelati, na primer **napetost, tok**
O npr.: napetost termočlena je sorazmerna temperaturi.
- **ojačiti, preoblikovati, pretvoriti** v veličino, ki je uporabna za neposredno primerjanje.



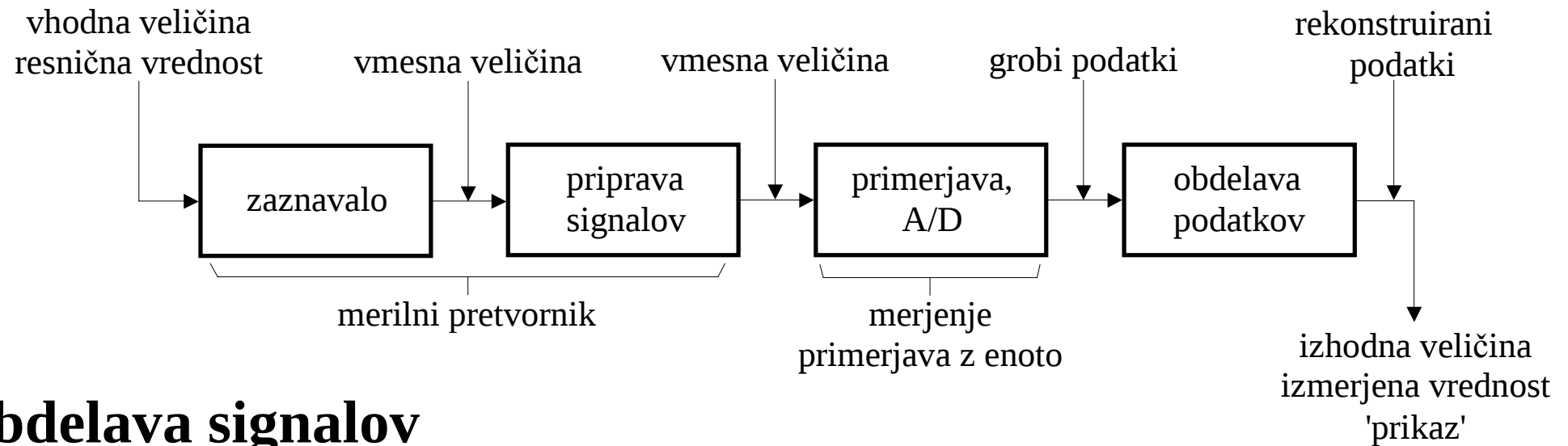


Analogno-digitalna pretvorba

Za merilnim pretvornikom je faza **primerjanja** merjene veličine **z enoto**:

- **merjenje v ožjem smislu!**
 - izhod so **grobi podatki**, iz katerih rekonstruiramo merjeno veličino.





Obdelava signalov

Za merilnim pretvornikom je faza **obdelave signalov**:

- opravi funkcijo **rekonstrukcije** in različne **matematične obdelave** (npr. računanje povprečne vrednosti, integriranje, odvajanje ipd.)
- **interpretacija** podatkov,
- **prikaz** podatkov,
- **prenos** podatkov.



1.1.7 Digitalni merilni postopek oz. *digitalizacija* merilnega signala

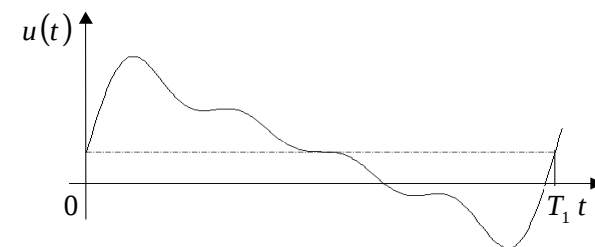


Digitalizacija predstavlja določanje vrednosti signala **v diskretnih časovnih točkah s končno ločljivostjo.**

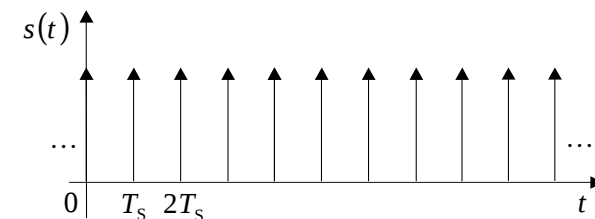
V grobem jo sestavljajo **tri operacije:**

a. **časovno vzorčenje** analognega signala,

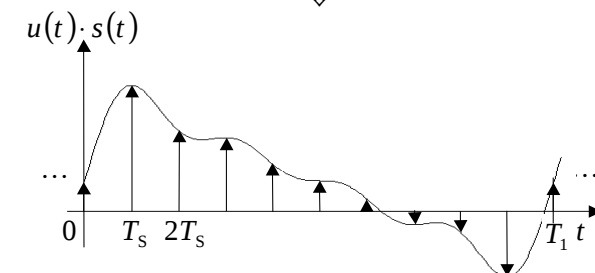
- vrednost signala znana le v določenih trenutkih (ponavadi **enakomerno razmaknjeni**),



× – produkt



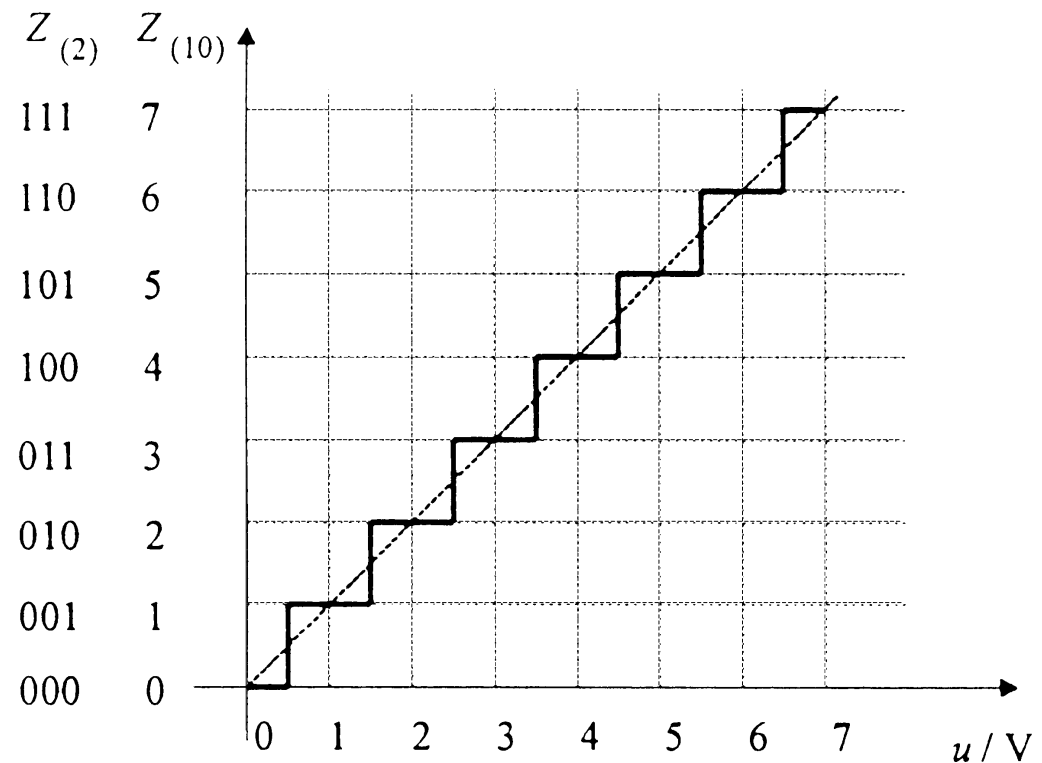
⇓





b. **kvantizacija** analogne vrednosti posameznega vzorca,

- celotno merilno območje razdelimo na končno število podobmočij – **kvant (korak)** kvantizacije;



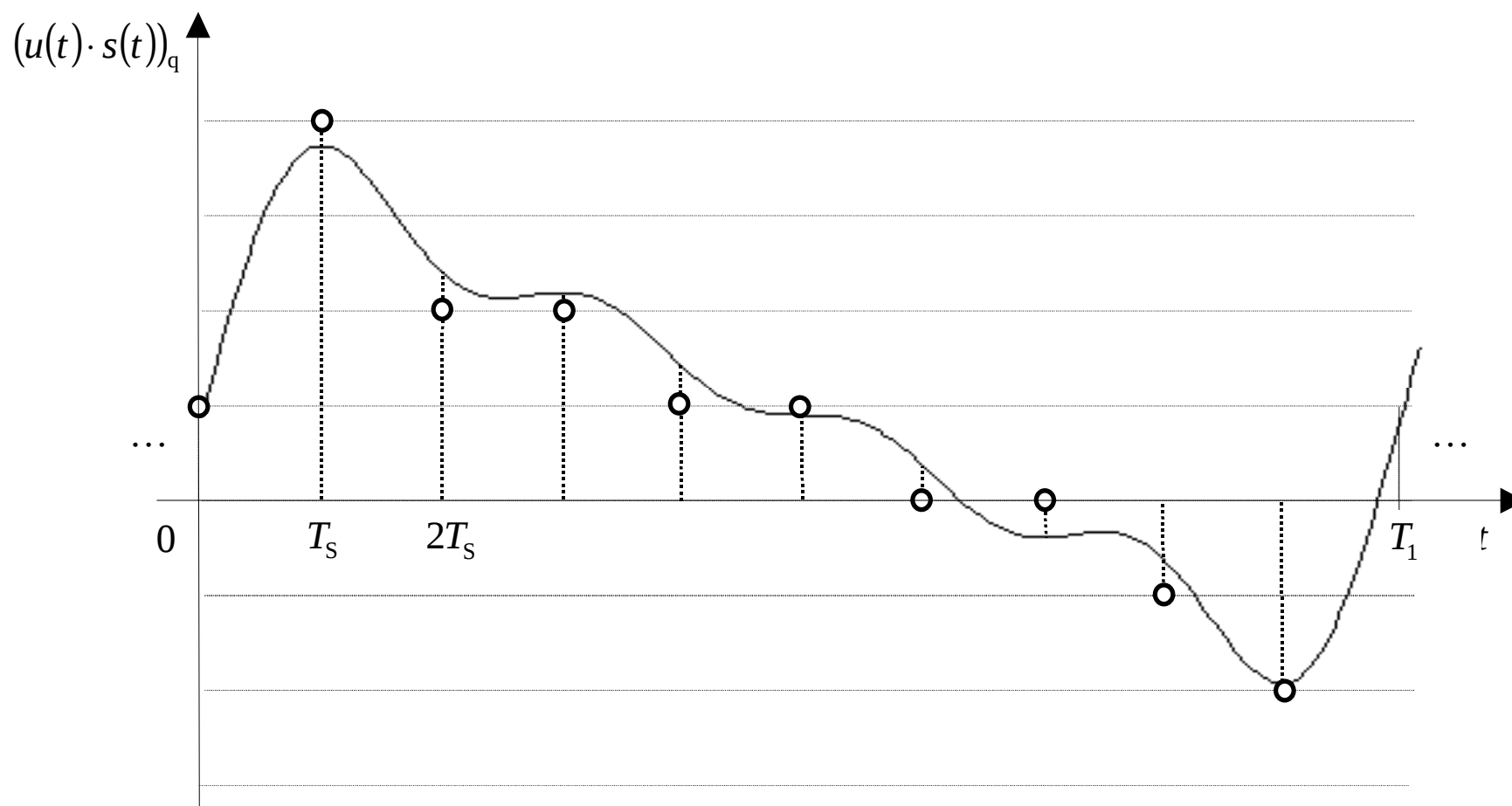
Slika 1.15 Kvantizacijska karakteristika 3-bitnega ADP

c. **kodiranje** kvantiziranih analognih vrednosti.

- različni številski sistemi (decimalna **koda**, BCDkoda, ..



Rezultat digitalizacije:



Slika 1.16 Vzorčenje in kvantizacija



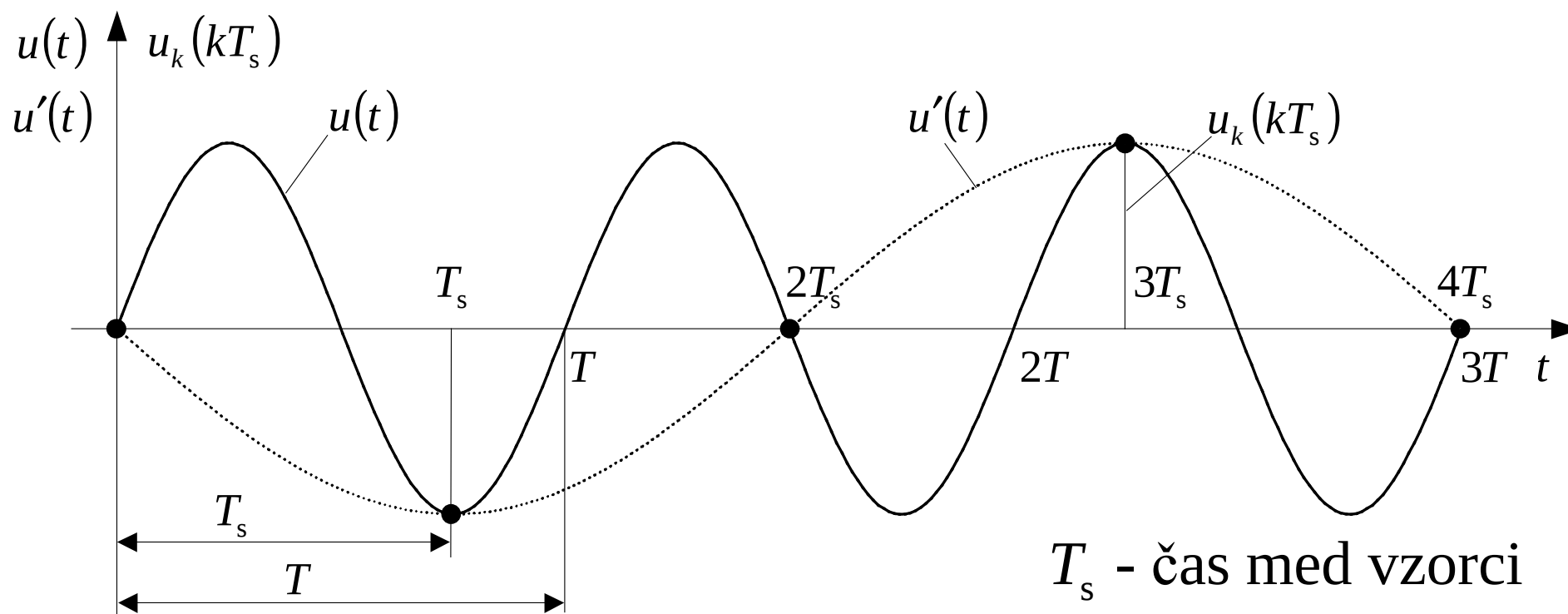
Pri digitalizaciji signala nastopi več pogoškov:

- **navideznost** zaradi prenizke frekvence vzorčenja,
 - pogrešek **prekrivanja**,
- problem **ne-koherentnega** vzorčenja,
 - **čas** merjenja **ni enak mnogokratniku** periode opazovanega signala,
- **ločljivost** v odvisnosti od **časa merjenja**,
- **kvantizacijska ločljivost**
- itd.





Navideznost zaradi prenizke frekvence vzorčenja:



Slika 1.17 Pogrešek zaradi prenizke frekvence vzorčenja

Rekonstruirani signal $u'(t)$ ima drugo frekvenco kot merjeni:

- primer: $T = 333\mu\text{s}$, $f = 3\text{kHz}$; $T_s = 250\mu\text{s}$, $f_s = 4\text{kHz}$
 $f' = 1\text{kHz}$





1.1.7.1 Teorem vzorčenja

(Shannonov, Kotelnikov, Nyquist, ...)

Za pravilno rekonstrukcijo signala mora biti **frekvenca vzorčenja dvakrat večja od najvišje frekvence** merjenega signala:

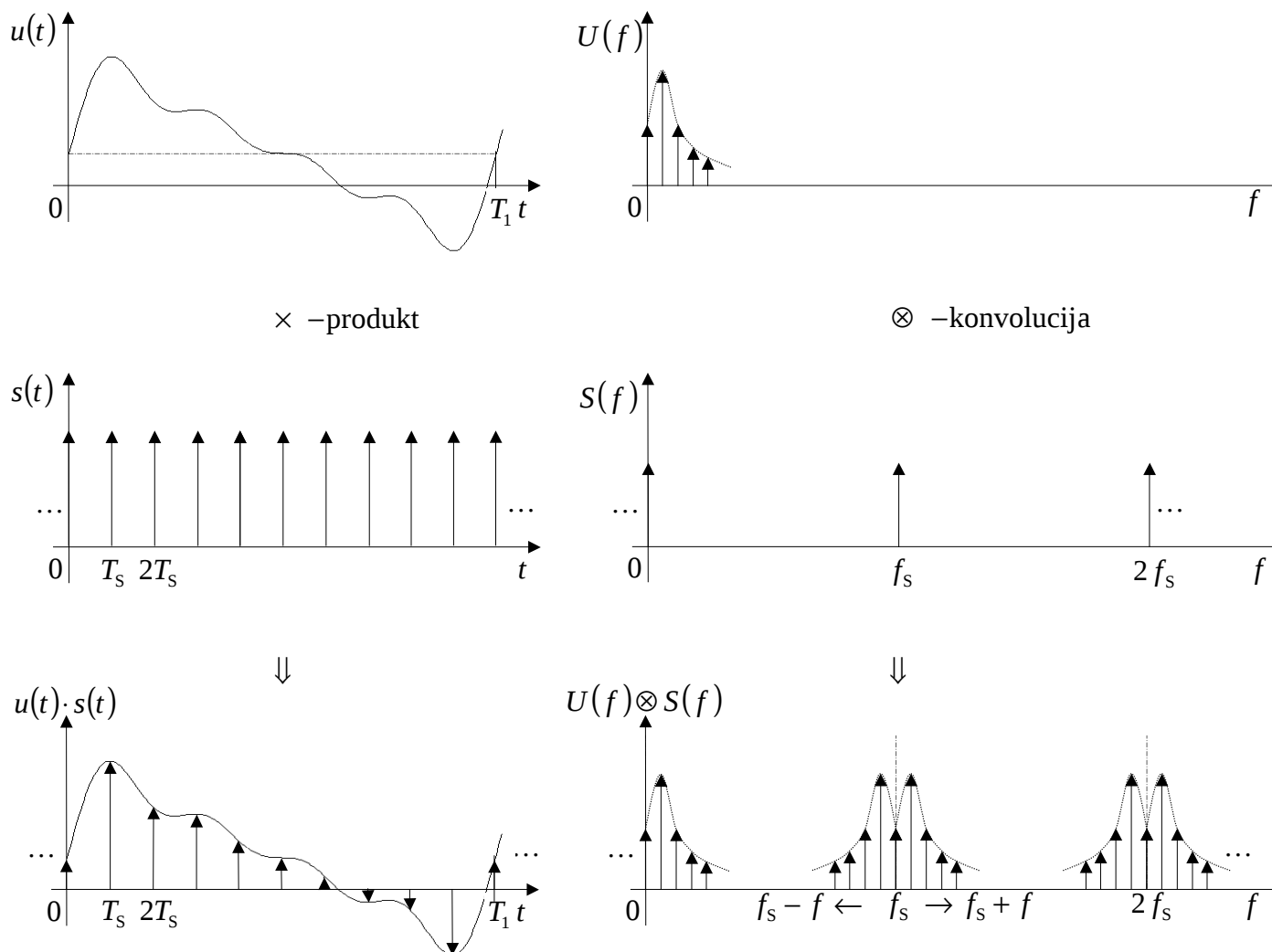
$$f_s > 2 f_{\max}$$

Pogrešku se izognemo z uporabo **predvzorčevalnih filtrov** (filtri proti **navideznosti** – anti-aliasing filters), ki omejijo največjo frekvenco v signalu na polovico vzorčne frekvence – **Nayquist-ovo frekvenco**.





Vzorčenje je množenje merjenega signala $u(t)$ in vzorčevalne funkcije $s(t)$



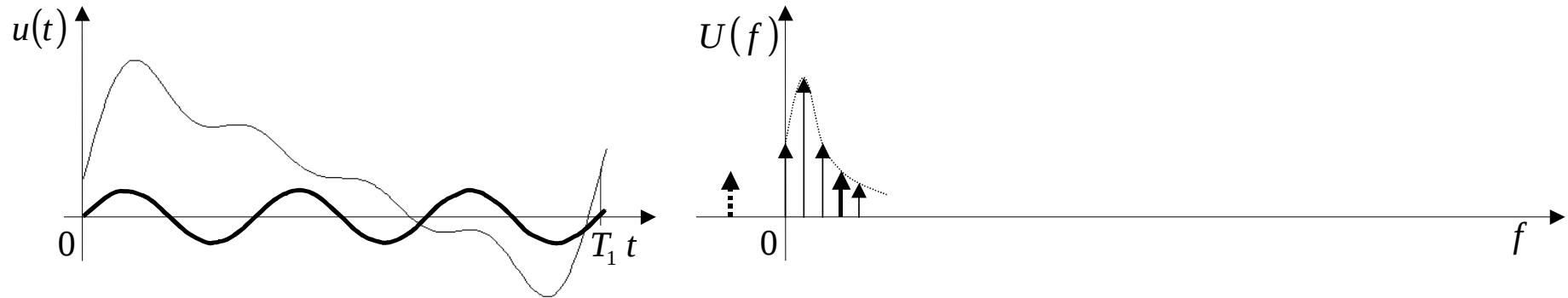
Slika 1.18 Prikaz vzorčenja v časovnem in frekvenčnem prostoru





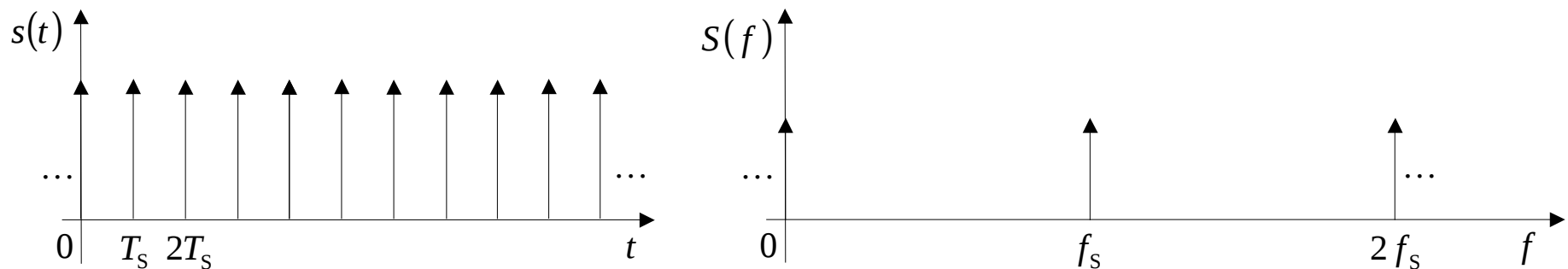
Merjeni signal naj bo omejen ($f_{\max} = Nf_1$):

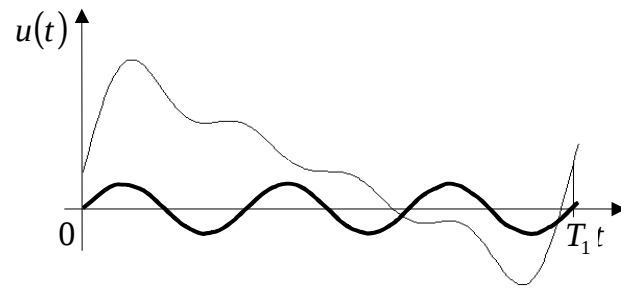
$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^N \hat{u}_n \sin n2\pi f_1 t \quad f_1 = 1/T_1$$



Vzorčevalna funkcija je periodična **Diracova** funkcija:

$$s(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_s) \quad \Leftrightarrow \quad S(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s) \quad f_s = 1/T_s$$

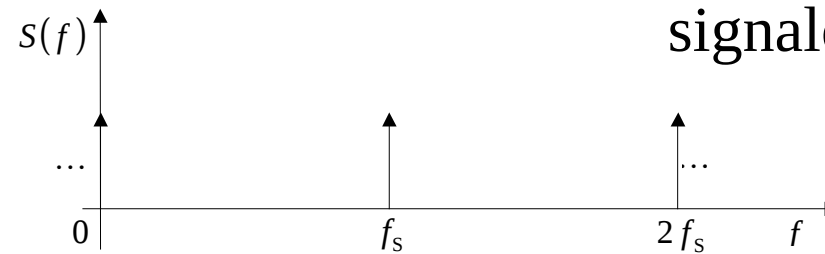
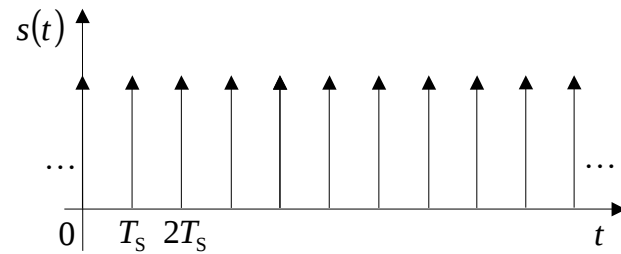




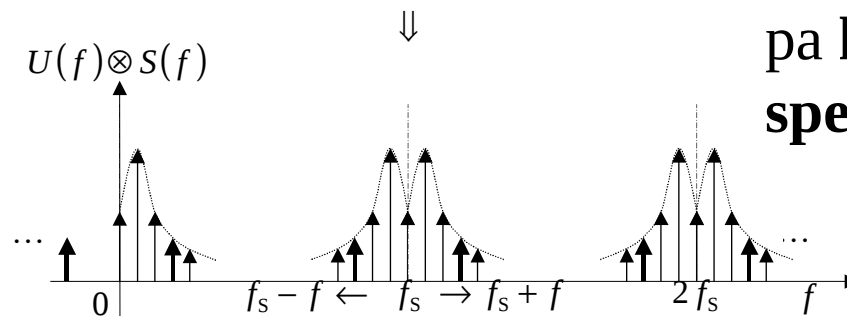
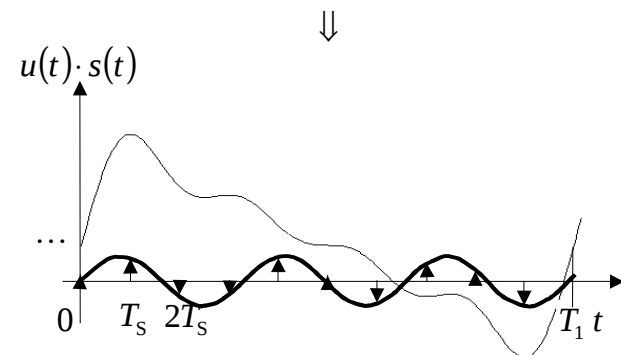
$\times$ –produkt

$\otimes$ –konvolucija

V časovnem prostoru je vzorčenje enako množenju signalov $u(t)$ in $s(t)$.



V frekvenčnem prostoru pa konvoluciji (oplet) spektrov obeh signalov.

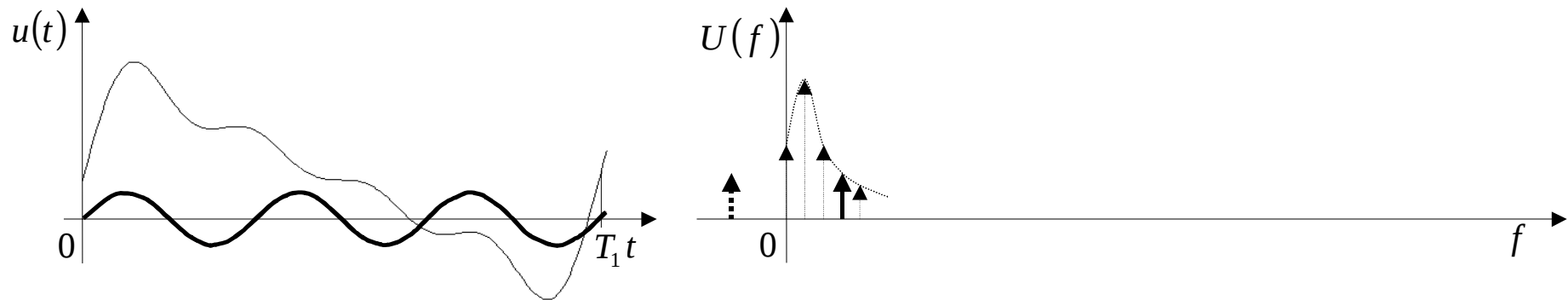


Spekter **vzorčenega - moduiranega** signala je **širši** od merjenega signala, ker se periodično ponavlja **okoli mnogokratnikov** vzorčne frekvence f_s .





- Primer: **n -ta harmonska** komponenta nf_1 (debela črta na sliki: $n = 3 \rightarrow f_3 = 3f_1$; $u(t) = \hat{u}_3 \sin 2\pi f_3 t$)



- Sinus. signal zapišemo z **Eulerjevo** formulo: $\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$
- Fourierjev par za eksp. funkcijo je: $e^{j2\pi f_3 t} \xLeftrightarrow{F} \delta(f - f_3)$
- in od tod **Fourierjev par za sinusno funkcijo**:
 $u_3(t) = \hat{u}_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t) \xLeftrightarrow{F} U_3(f) = \hat{u}_3 \frac{\delta(f - f_3) - \delta(f + f_3)}{2j}$





Imamo **sinusni signal**:

$$u_3(t) = \hat{u}_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t) \quad \xLeftrightarrow{F} \quad U_3(f) = \hat{u}_3 \frac{\delta(f - f_3) - \delta(f + f_3)}{2j}$$

in **vzorčevalno funkcijo**:

$$s(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_s) \quad \xLeftrightarrow{F} \quad S(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s)$$

V **časovnem prostoru** je vzorčenje enako **množenju** signalov $u(t)$ in $s(t)$.

$$[u_3(t)s(t)] = \hat{u}_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t) \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_s)$$



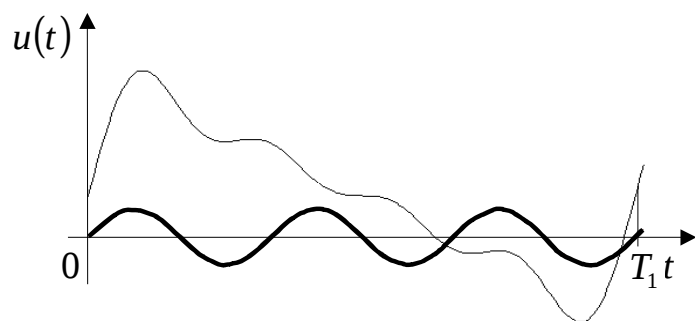


$$[u_3(t)s(t)] = \hat{u}_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t) \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_s)$$

V frekvenčnem prostoru pa konvoluciji (oplet) spektrov obeh signalov.

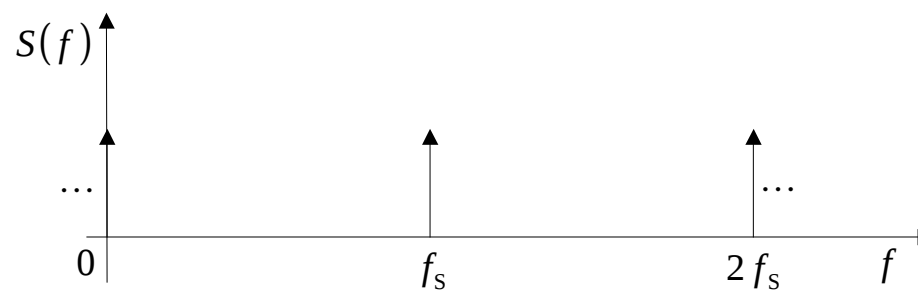
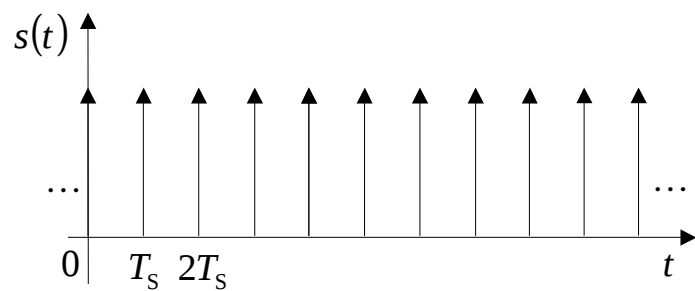
$$\begin{aligned} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} F[u(t)_3 s(t)] &= U_3(f) \otimes S(f) = \\ &= \hat{u}_3 \frac{\delta(f - f_3) - \delta(f + f_3)}{2j} \otimes \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s) \\ &= \frac{\hat{u}_3}{2jT_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(kf_s - f_3) - \delta(kf_s + f_3) \\ &= K \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(kf_s - f_3) - \delta(kf_s + f_3) \end{aligned}$$





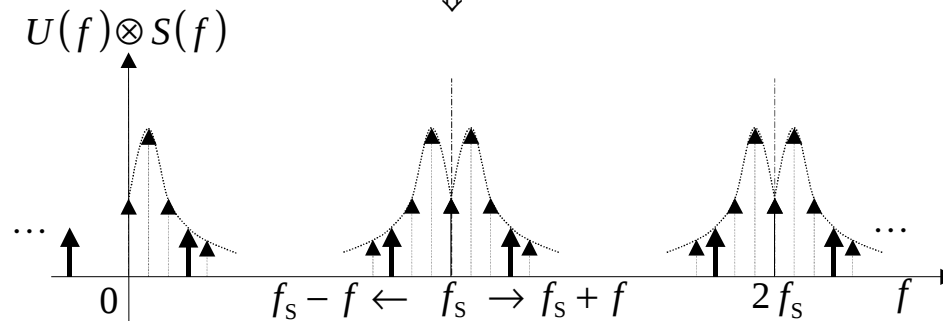
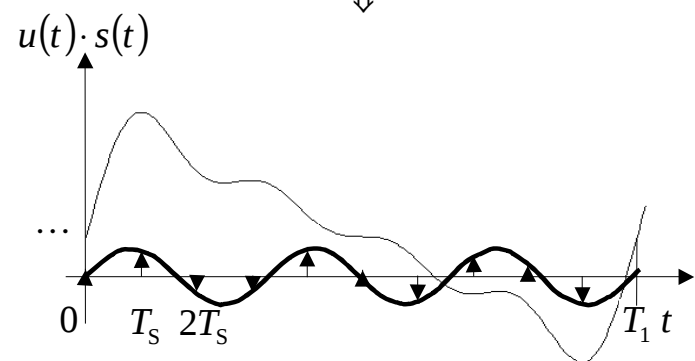
$\times$ –produkt

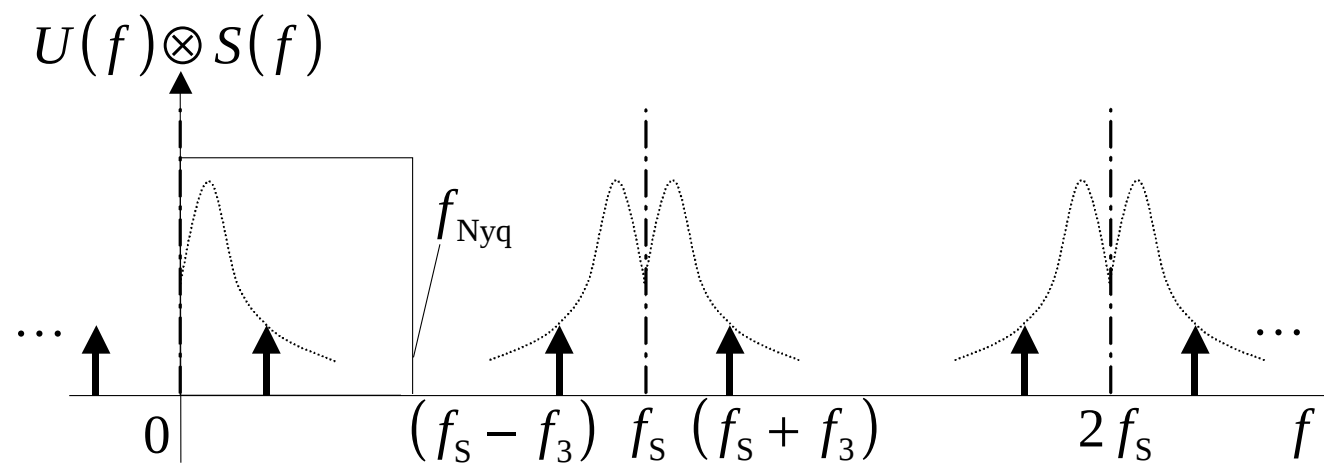
$\otimes$ –konvolucija



$\Downarrow$

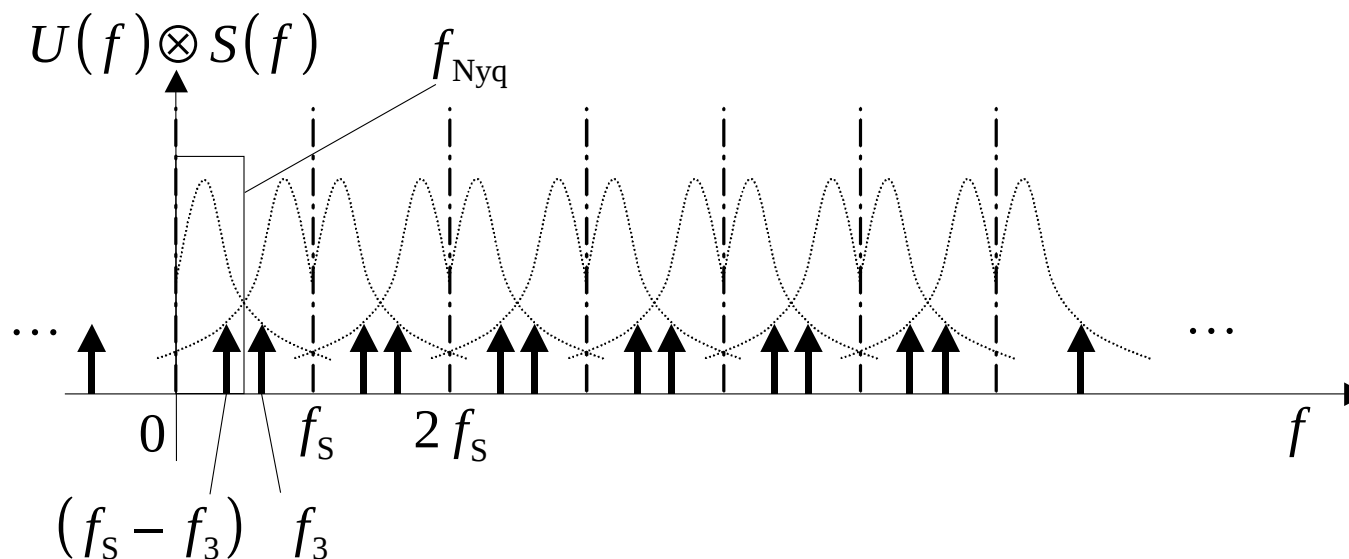
$\Downarrow$





Ker sega **spekter** v neskončnost in **se ponavlja**, je za pravilno rekonstrukcijo uporaben le **začetni del** spektra (do Nyquistove frekvence $f_{\text{Nyq}} = f_s/2$).

- **ne sme se prekrivati** z ostalimi delnimi spektri,
- **pogrešek prekrivanj (aliasing).**





Primer: $f = 3\text{kHz}$, $f_s = 4\text{kHz}$

- spekter vzorčenega signala $K \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(kf_s - nf_1) - \delta(kf_s + nf_1)$:

nf_1		$\rightarrow$	3kHz
$f_s - nf_1$	$\rightarrow$	4kHz - 3kHz	$\rightarrow$ 1kHz
$f_s + nf_1$	$\rightarrow$	4kHz + 3kHz	$\rightarrow$ 7kHz
$2f_s - nf_1$	$\rightarrow$	$2 \cdot 4\text{kHz} - 3\text{kHz}$	$\rightarrow$ 5kHz
$2f_s + nf_1$	$\rightarrow$	8kHz + 3kHz	$\rightarrow$ 11kHz itn.

- do $f_s/2 = 2\text{kHz}$ leži le 1kHz.

Splošno lahko zapišemo, da mora spekter rekonstruiranega signala ustrezati pogojem:

$$f' = |kf_s - nf| \quad ; \quad f' \leq f_s/2 \quad \quad l = 1, 2, \dots$$

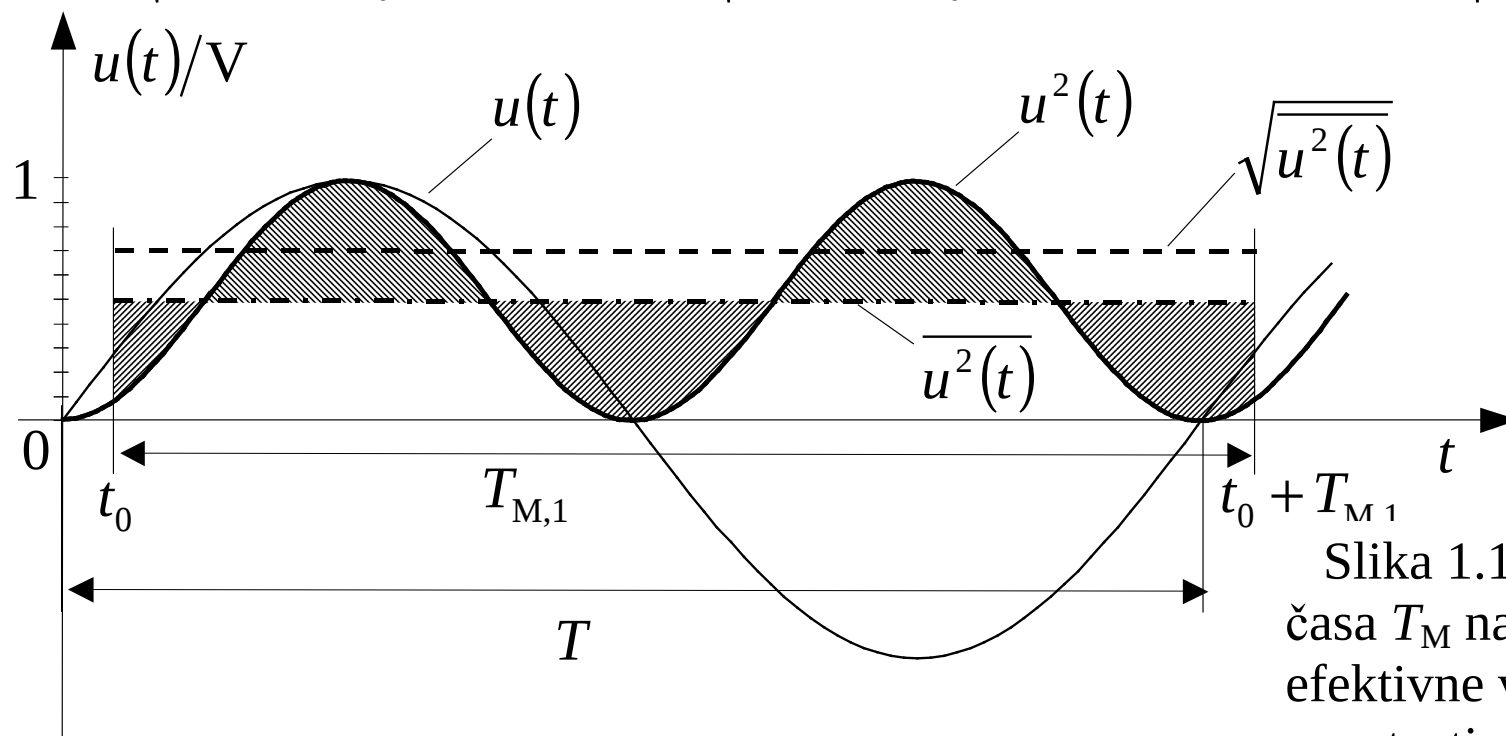




1.1.7.2 Vpliv časa merjenja (T_M) na napako merjenja efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti $u(t) = \hat{u} \sin \omega t$

- Kadar se čas merjenja ujema s periodo $T_{M,1} = T$, zapišemo:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T_{M,1}} \int_{t_0}^{t_0+T_{M,1}} u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T_{M,1}} \int_{t_0}^{t_0+T_{M,1}} \hat{u}^2 \sin^2 \omega t dt} = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{T_{M,1}} \int_{t_0}^{t_0+T_{M,1}} \sin^2 \omega t dt}$$



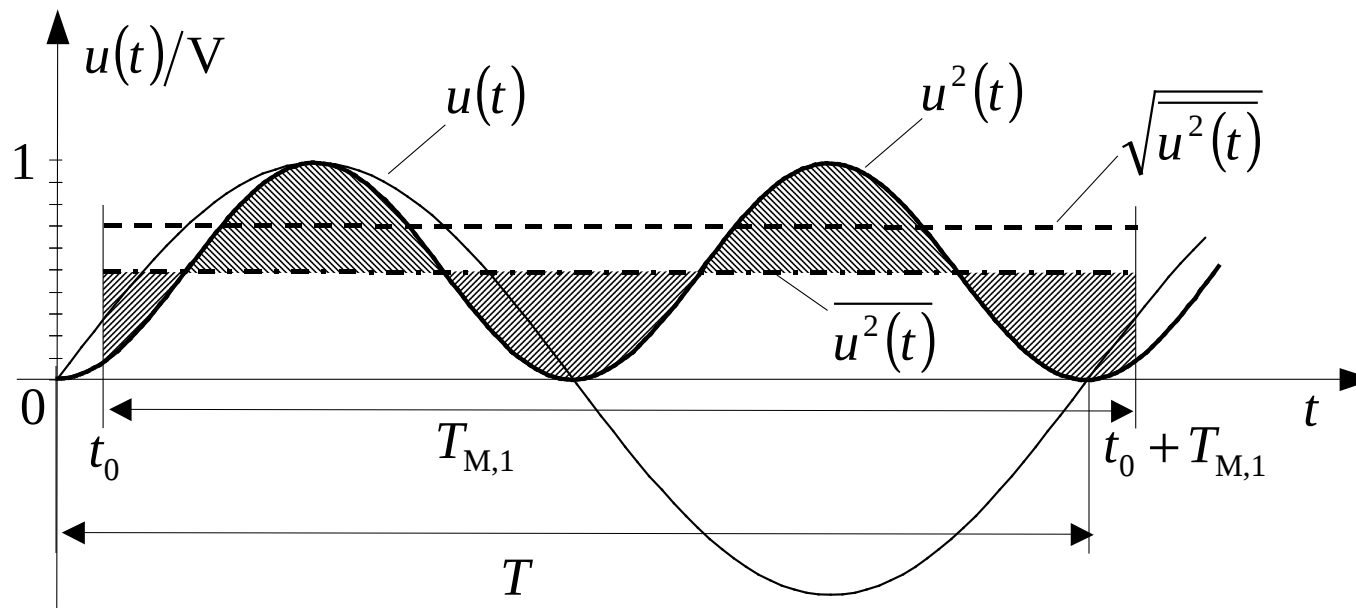
Slika 1.19 Vpliv integracijskega časa T_M na napako pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti: $u(t)/V = 1 \cdot \sin \omega t$; $T_M = T$





- Uporabimo izraz $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$ in dobimo:

$$\begin{aligned}
 U &= \hat{u} \sqrt{\frac{1}{T_{M,1}} \int_{t_0}^{t_0+T_{M,1}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) dt} = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{2T_{M,1}} \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_{t_0}^{t_0+T_{M,1}}} \\
 &= \hat{u} \sqrt{\frac{1}{2T_{M,1}} \left(T_{M,1} - \frac{1}{2\omega} \underbrace{(\sin 2\omega(t_0 + T_{M,1}) - \sin 2\omega(t_0))}_{0 \text{ (} T_{M,1}=T \text{)}} \right)} = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{2T_{M,1}} T_{M,1}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

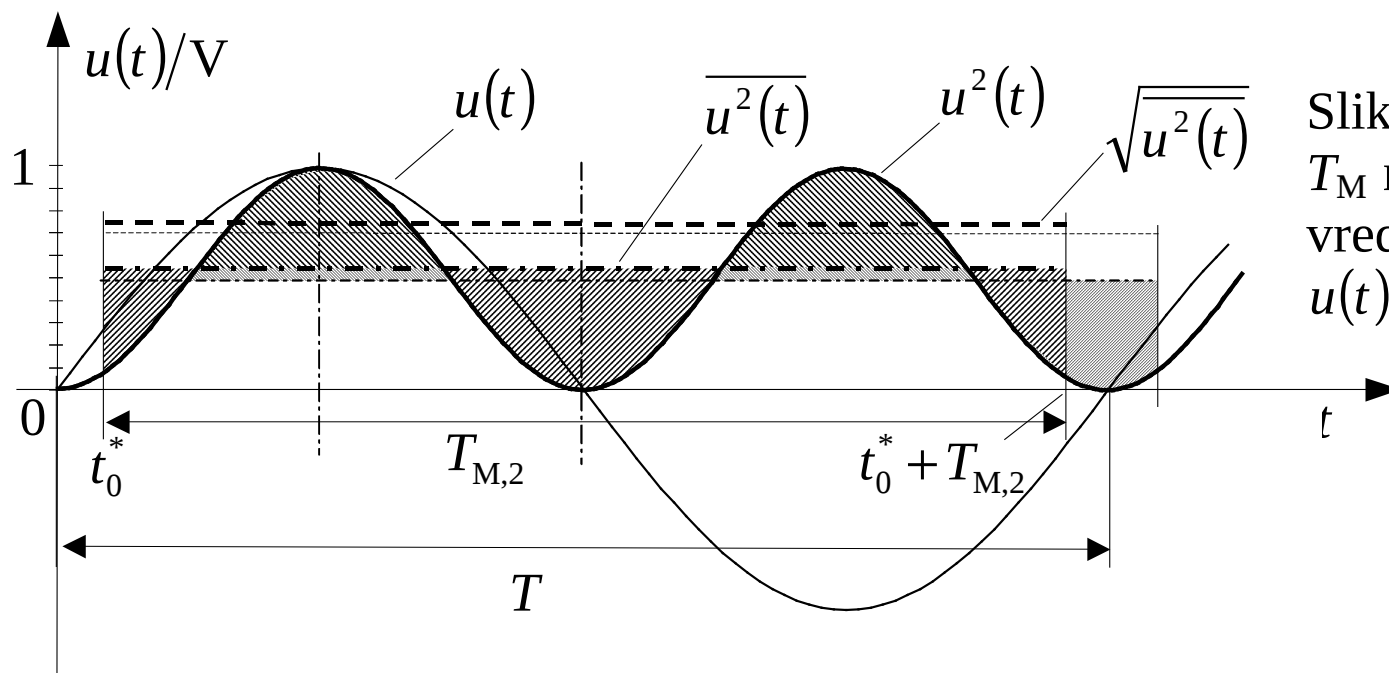




Če se **meji** integrala **ne ujemata** s periodo T in je čas merjenja različen od periode $T_{M,2} \neq T$, zapišemo:

$$U' = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{T_{M,2}} \int_{t_0}^{t_0+T_{M,2}} \sin^2 \omega t dt} = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{2T_{M,2}} \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_{t_0}^{t_0+T_{M,2}}} =$$

$$= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{T_{M,2}} \left(T_{M,2} - \frac{1}{2\omega} \underbrace{(\sin 2\omega(t_0 + T_{M,2}) - \sin 2\omega(t_0))}_{\neq 0 (T_{M,2} \neq T)} \right)}$$



Slika 1.20 Vpliv integracijskega časa T_M na napako pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti $u(t)/V = 1 \cdot \sin \omega t$; $T_M < T$





$$U' = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega T_{M,2}} \left(\sin(2\omega t_0 + 2\omega T_{M,2}) - \sin(2\omega t_0) \right)} =$$
$$= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega T_{M,2}} \left(\underbrace{\sin(2\omega t_0 + 2\omega T_{M,2})}_{\alpha} - \underbrace{\sin(2\omega t_0)}_{\beta} \right)}$$

- Uporabimo izraz $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ in dobimo:

$$U' = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega T_{M,2}} \left(2 \cos(2\omega t_0 + \omega T_{M,2}) \cdot \sin(\omega T_{M,2}) \right)}$$



Če torej $T_{M,2} \neq T$, napišemo:

$$U' = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\omega T_{M,2}} \cos(2\omega t_0 + \omega T_{M,2}) \cdot \sin(\omega T_{M,2})}$$

Napaka pri merjenju je:

$$E = U' - U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\omega T_{M,2}} \cos(2\omega t_0 + \omega T_{M,2}) \cdot \sin(\omega T_{M,2})} - 1 \right)$$

(oz. $\lambda = \pm(\pi, 2\pi, 3\pi, \dots)$)

- Ta je **največja** pri $2\omega t_0^* + \omega T_{M,2} = \lambda = 0$

$$\cos \lambda = 1 \quad \text{in} \quad E_{\max} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 - \frac{\sin(\omega T_{M,2})}{\omega T_{M,2}}} - 1 \right)$$

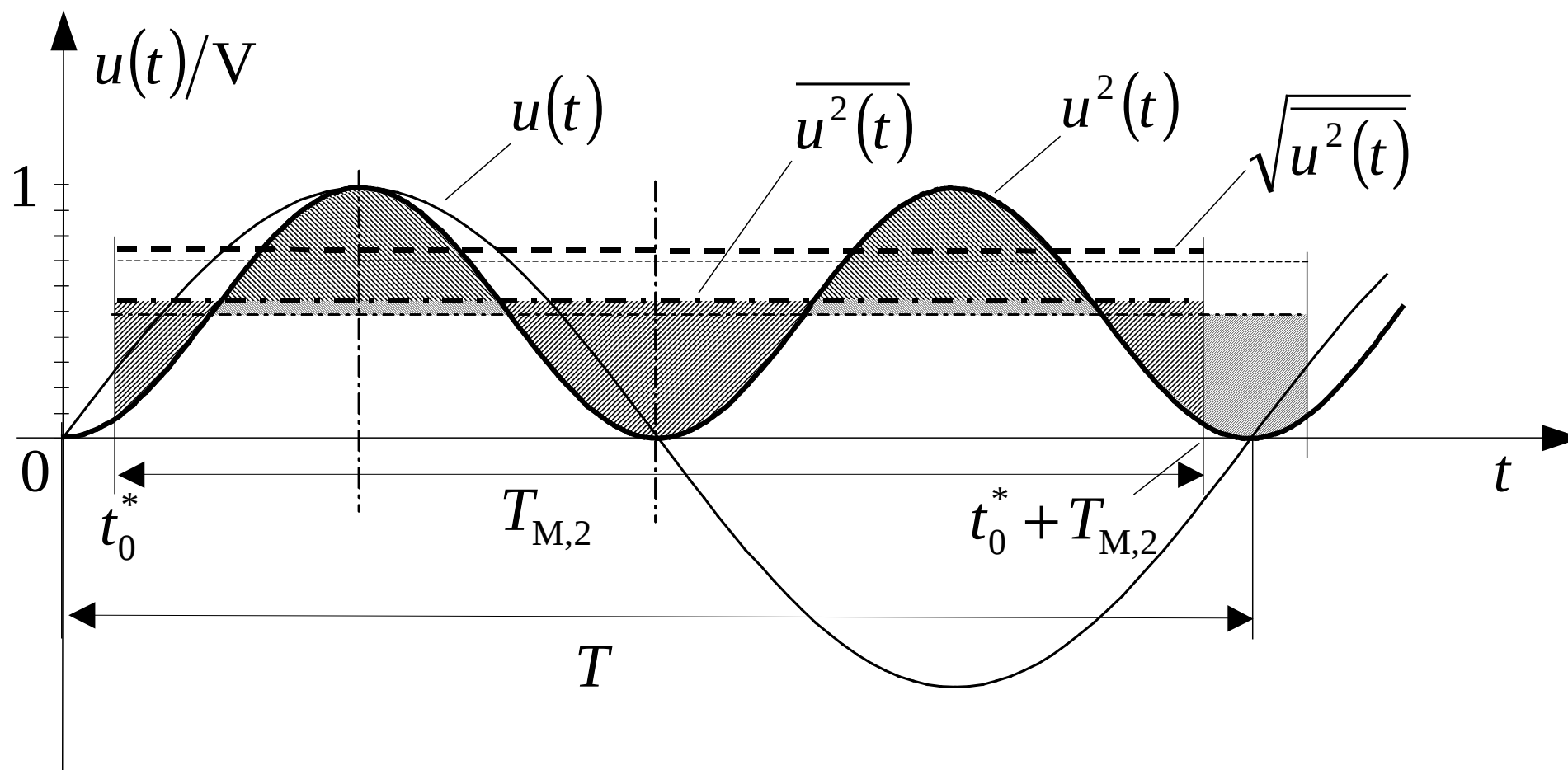
- ko je **spodnja meja integrala**: $t_0^* = \frac{\lambda - \omega T_{M,2}}{2\omega},$

- **zgornja** pa: $t_0^* + T_{M,2} = \frac{\lambda + \omega T_{M,2}}{2\omega}$





Sredina integracijskega **intervala** se ujema z **največjo** (ali **najmanjšo**) **trenutno** vrednostjo **kvadrata napetosti**.



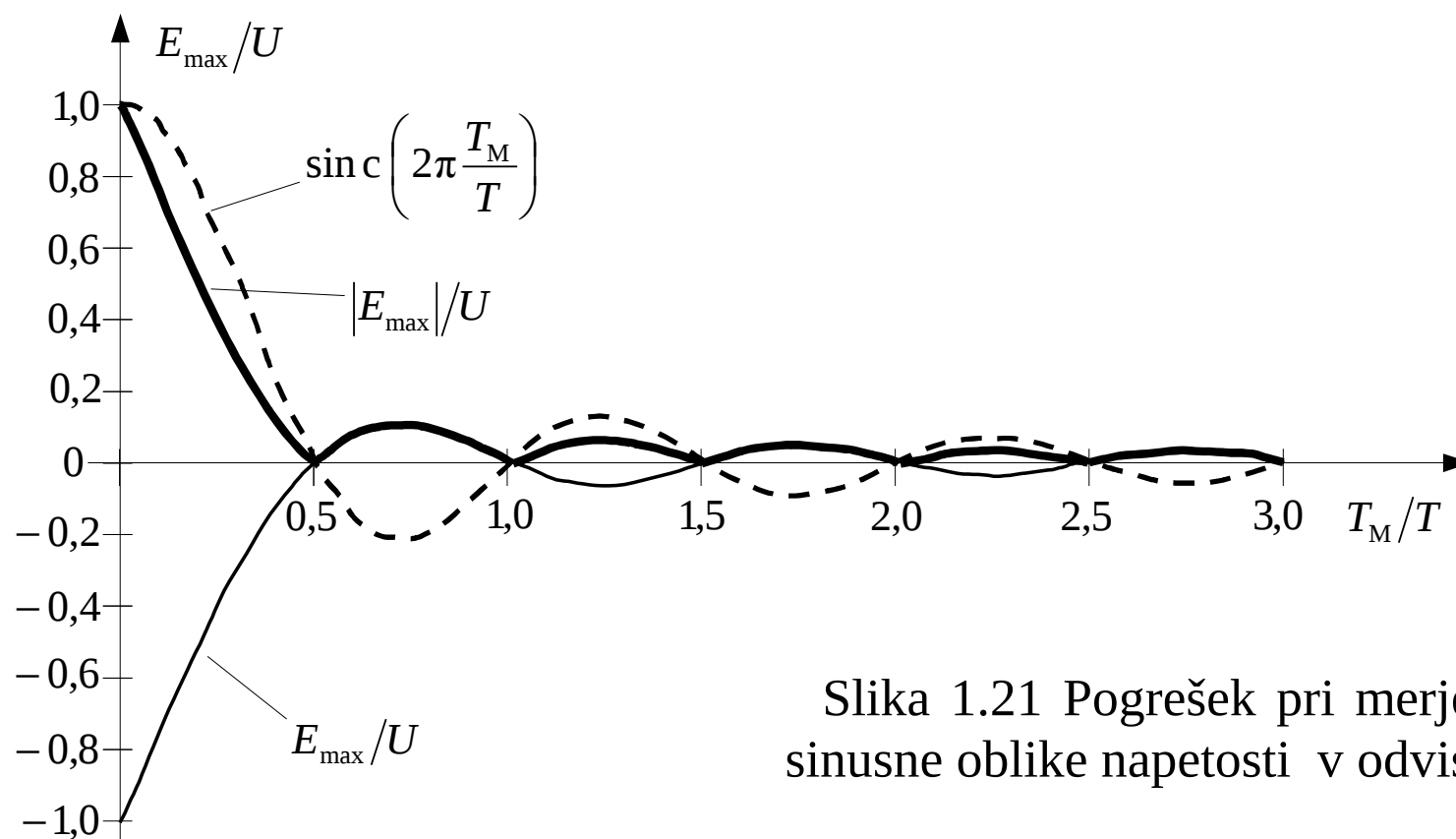
Slika 1.20 Vpliv integracijskega časa T_M na napako pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti $u(t)/V = 1 \cdot \sin \omega t$; $T_M < T$





Pogrešek je:

$$E_{\max} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 - \frac{\sin(\omega T_{M,2})}{\omega T_{M,2}}} - 1 \right) = U \left(\sqrt{1 - \operatorname{sinc} \left(2\pi \frac{T_{M,2}}{T} \right)} - 1 \right)$$



$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Slika 1.21 Pogrešek pri merjenju efektivne vrednosti sinusne oblike napetosti v odvisnosti od razmerja T_M/T

