2.4 Merilna negotovost

Merilna negotovost je **parameter**, ki **pripada merilnemu rezultatu**.

- Označuje **razpršenost** vrednosti, ki jih je mogoče **z določeno verjetnostjo** pripisati merjeni veličini.
    - Navaja **kakovost** merilnega rezultata: **manjša** kot je, **bolj kakovosten** je merilni rezultat.
- Če izhaja **iz niza neodvisnih opazovanj** (posledično iz **gostote verjetnosti**), govorimo **negotovosti tipa A -** u_A;
- Če **ne izhaja iz niza** neodvisnih opazovanj (npr.: izhaja iz **domnevne gostote verjetnosti** pri eni meritvi), govorimo o **negotovosti tipa B -** u_B

Skupna negotovost je enaka **geometrijski** vsoti:

$$u = \sqrt{u_{\mathrm{A}}^2 + u_{\mathrm{B}}^2}$$

Ker je negotovost določena **s standardnim odklonom**, jo imenujemo tudi **standardna negotovost**.

Če želimo imeti **večjo verjetnost** (večjo stopnjo zaupanja), da leži resnična vrednost **v območju**, ki ga določa negotovost, uporabljamo **razširjeno negotovost** ***U***.

2.4.1 *Standardna negotovost tipa A - u_A*

Če imamo niz izmerkov x_1 , x_2, …, x_n, izmerjenih pod ‘enakimi’ pogoji, je:

- **aritmetična sredina** $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{\mathrm{i},j}$
  - je najbolj verjetna vrednost ali **najbolša ocena** aritmetične sredine μ **celotne populacije**.
- **eksperimentalni standardni odklon** $s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_{\mathrm{i},j} - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$
  - je **najboljša** ocena **standardnega odklona populacije** σ

- **eksperimentalni** standardni odklon **aritmetične sredine**

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_{\mathrm{i},j} - \bar{x}\right)^2}{n(n-1)}}$$

  - je najbolj verjetna vrednost $\sigma(\bar{x})$ **populacije**

Ker imamo **ponovljena neodvisna opazovanja**, je **standardna negotovost tipa A -** eksperimentalni standardni odklon aritmetične sredine:

$$u_{\mathrm{A}}(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = s(\bar{x})$$

Če nam je znan **združeni** eksperimentalni standardni odklon

$$s_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2(x)+(n_2-1)s_2^2(x)+\cdots+(n_r-1)s_r^2(x)}{(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_r-1)}}$$

je **standardno negotovost** bolje oceniti **z**:

$$u_\mathrm{A}(x)=\frac{s_\mathrm{p}(x)}{\sqrt{n}}$$

Vedno je potrebno v rezultatu navesti **število meritev** oz. **število prostostnih stopenj**: $v=\sum_{i=1}^{r}(n_i-1)=\sum_{i=1}^{r}v_i$

2.4.2 Standardna negotovost tipa B - u_B

Kadar merilni rezultat **ne izhaja iz ponovljenih meritev**, se standardna negotovost izračuna na osnovi domneve (znanstveno in z izkušnjami) – **predpostavljene porazdelitve**:

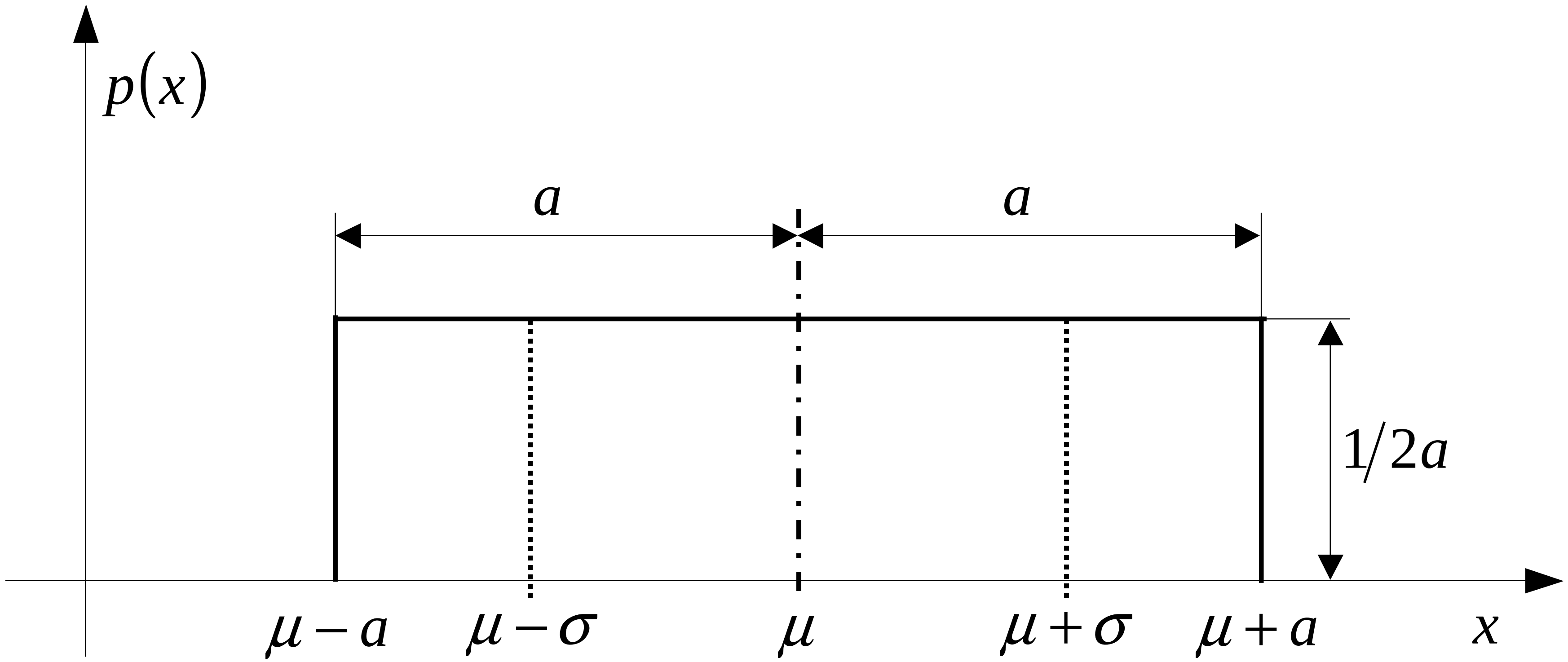
- enakomerna,
- trikotna,
- trapezna,
- Gaussova,
- Studentova, itn.

Pri **eni meritvi** se standardna **negotovost tipa B** izračuna na osnovi:

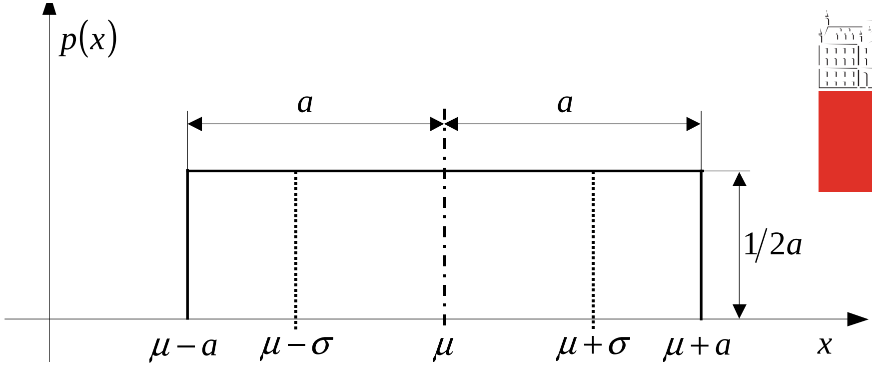
- **specifikacij** merilne opreme,
- podatkih o **umerjanju** meril,
- **toleranc** uporabljenih merilnih sredstev itn.

2.4.3 *Enakomerna (pravokotna) porazdelitev*

- **Vse vrednosti** veličine med spodnjo in zgornjo mejo so **enako verjetne**:



Slika 2.11 Enakomerna (pravokotna) porazdelitev (**gostota verjetnosti** je v mejah **enakomerna** $p(x)=1/2a$)



- **aritmetična sredina** (prvi vztrajnostni moment):

$$\int_{\mu-a}^{\mu+a} p(x)\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\,\frac{x^2\Big|_{\mu-a}^{\mu+a}}{2} = \frac{1}{2a}\,\frac{(\mu+a)^2-(\mu-a)^2}{2} = \mu$$

- **varianca** (drugi vztrajnostni moment):

$$\int_{\mu-a}^{\mu+a} p(x)(x-\mu)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\,\frac{(x-\mu)^3\Big|_{\mu-a}^{\mu+a}}{3} = \frac{1}{2a}\,\frac{(+a)^3-(-a)^3}{3} = \frac{a^2}{3}$$

- **standardna negotovost** (tudi standardni odklon) pri enakomerni porazdelitvi:

$$u(x) = \sigma = \frac{a}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58\,a$$

med $\mu-\sigma$ in $\mu+\sigma$ ca. 58% ($1/\sqrt{3}$) vseh vrednosti

Primer enakomerne porazdelitve je, kadar je podana **mejna vrednost lastnega pogreška** $a = M$.

Zgled:

- Digitalni voltmeter: $M_U = \pm\left(0{,}05\% U_\mathrm{i} + 3\mathrm{dig}\right)$
  - po določenem času kaže $U_\mathrm{i} = 56{,}183\,\mathrm{V}$:
- mejna vrednost pogreška:

$$M_U = \pm\left(5.10^{-4} \cdot 56{,}183\,\mathrm{V} + 3 \cdot 0{,}001\,\mathrm{V}\right) = \pm 31\,\mathrm{mV}$$

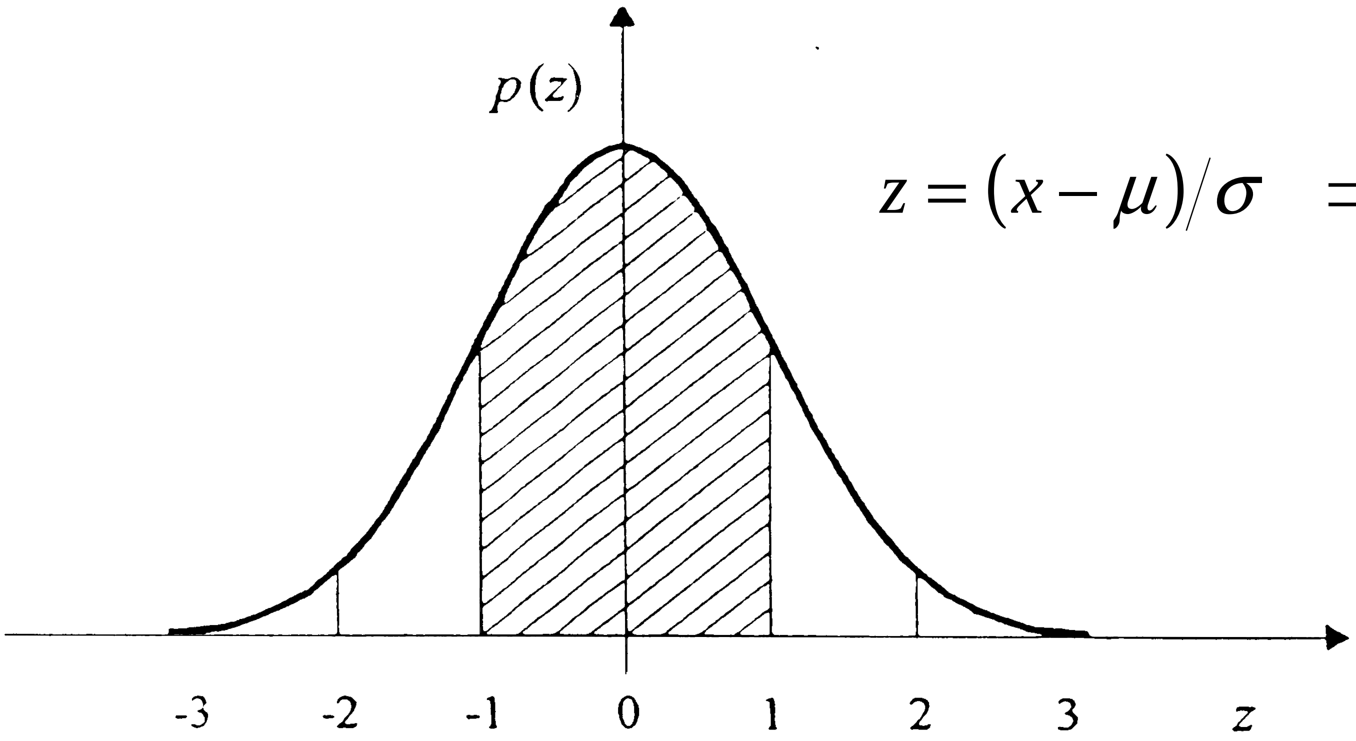
- standardna negotovost:

$$u(U) = \frac{M_U}{\sqrt{3}} = \frac{31\,\mathrm{mV}}{\sqrt{3}} = 18\,\mathrm{mV}$$

- popolni merilni rezultat:

$$U = 56{,}183\,\mathrm{V}, \quad u(U) = 18\,\mathrm{mV}, \quad n = 1 \text{ (ena meritev)}$$

2.4.4 Gaussova ali normalna porazdelitev



$$z = (x - \mu)/\sigma \quad \Rightarrow \quad p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

- interval zaupanja: $\mu - z\sigma/\sqrt{n} \quad \ldots \quad \mu + z\sigma/\sqrt{n}$
- **standardna negotovost**: $u(x) = \sigma/\sqrt{n}$
- $z = ?$ dobimo ga iz stopnje zaupanja p (tabela)

Zgled:

- **Uporovni etalon**:
  - nazivna vrednost: 10Ω
  - iz certifikata za upornost: $10{,}000742\Omega \;\pm 129\mu\Omega$,
  - $U_R = 129\mu\Omega$ - **razširjena negotovost**
  - stopnja zaupanja $p = 99\%$ $\Rightarrow$ $z = 2{,}58$
  - **standardna negotovost**:

$$u(R) = \frac{z\sigma/\sqrt{n}}{z} = \frac{129\mu\Omega}{2{,}58} = 50\mu\Omega$$

2.4.5 Studentova ali t-porazdelitev

- interval zaupanja: $\mu - t\,s(x)/\sqrt{n} \quad \ldots \; \mu + t\,s(x)/\sqrt{n}$
- **standardna negotovost**: $u(x) = s(x)/\sqrt{n}$
- parameter $t = ?$
  - dobimo ga iz stopnje zaupanja p in števila meritev (tabela)

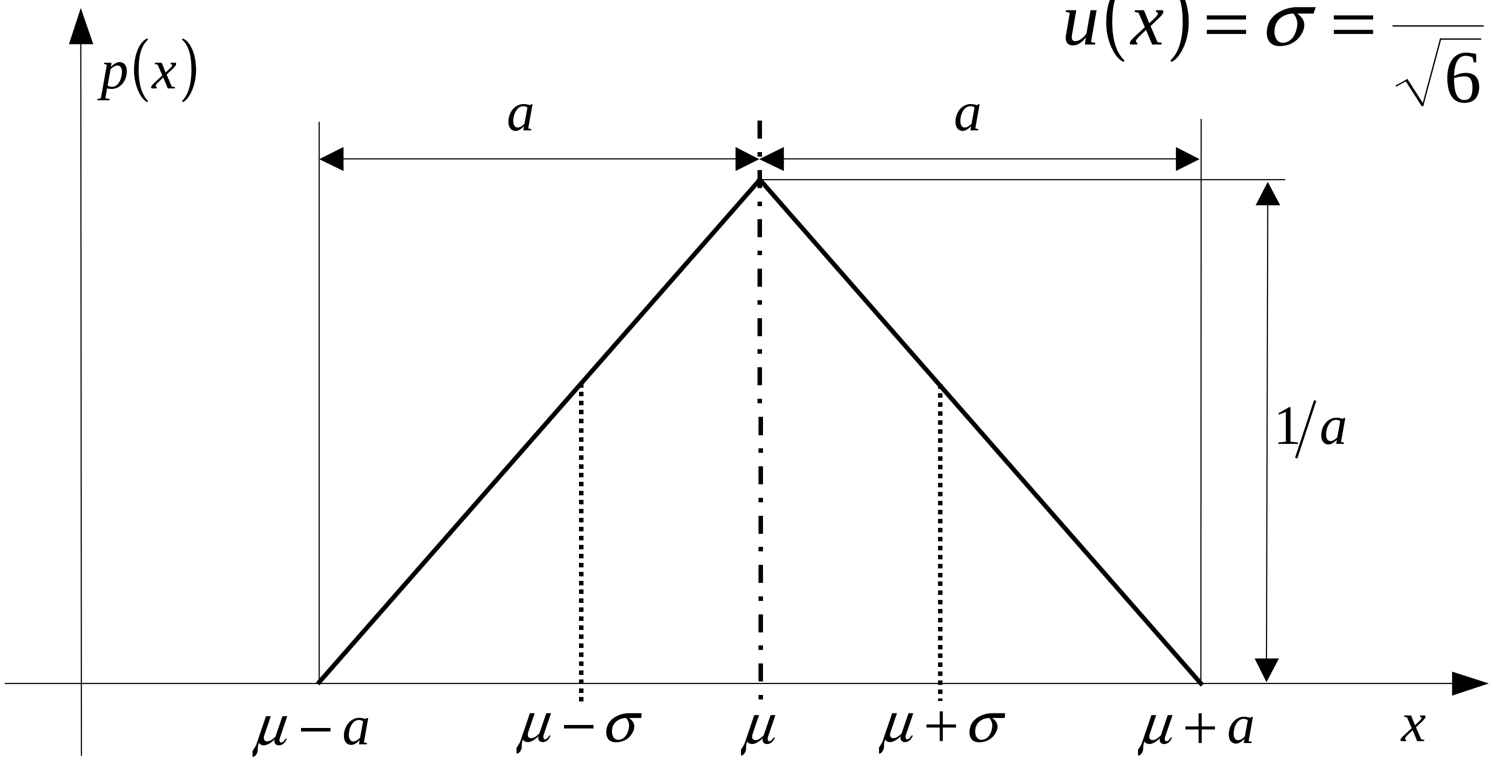
Zgled: Upor za uporovni delilnik:

- 8-krat ponovljena meritev in 95% stopnji zaupanja: $\Rightarrow t = 2{,}36$
- pri 95% stopnji zaupanja je rezultat: $1492\Omega \;\pm 12\Omega$
- standardna negotovost: $u(R) = \dfrac{t\,s(x)/\sqrt{n}}{t} = \dfrac{12\Omega}{2{,}36} = 5\Omega$

2.4.6 Trikotna porazdelitev

- aritmetična sredina: μ
- standardna negotovost:

$$u(x) = \sigma = \frac{a}{\sqrt{6}} \approx 0{,}41a$$

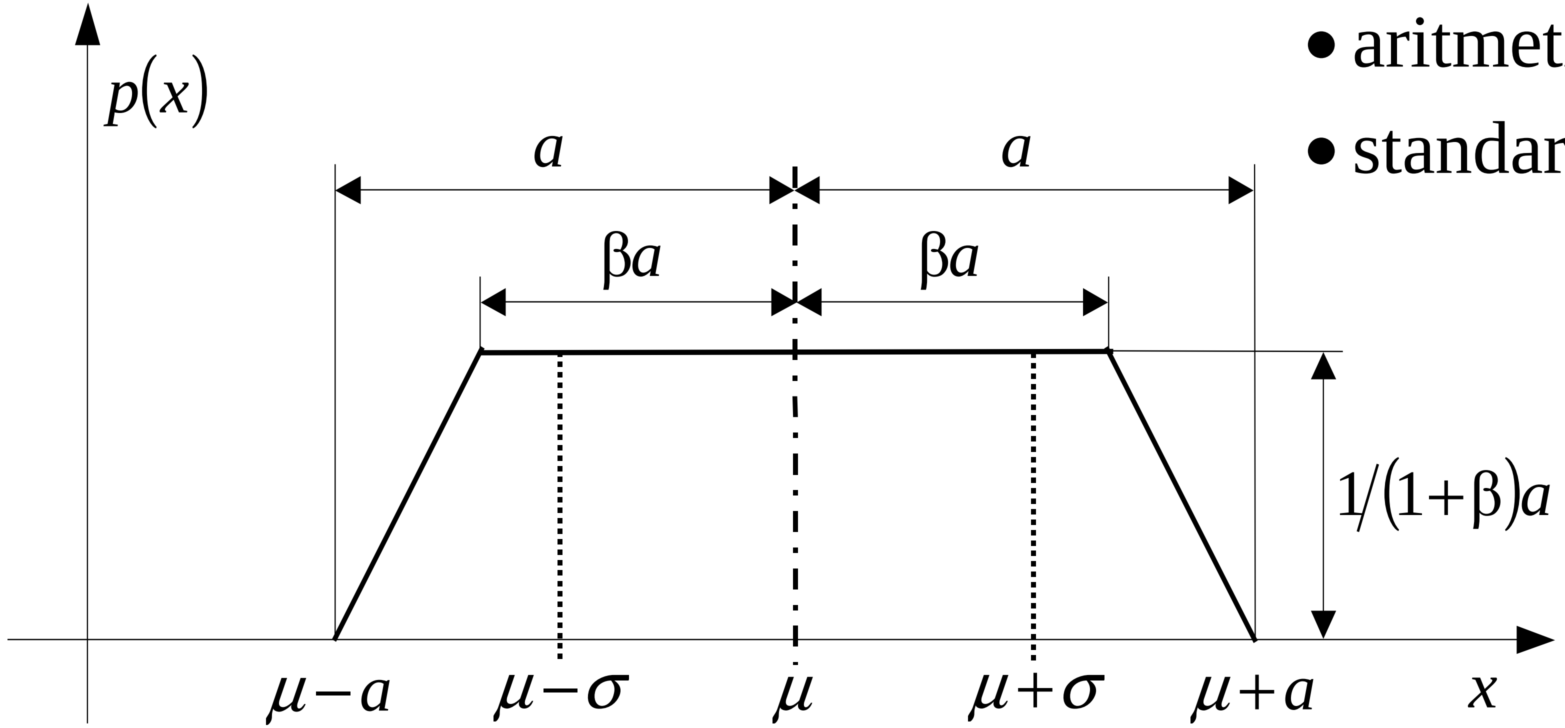


Slika 2.12 Trikotna porazdelitev

- Med $\mu - \sigma$ in $\mu + \sigma$ ca. 65% vseh vrednosti - že blizu normalne porazdelitve (68%).

2.4.7 Trapezna porazdelitev

Trapezna porazdelitev je konvolucija dveh enakomernih porazdelitev z mejama $\pm(1+\beta)a/2$ in $\pm(1-\beta)a/2$



- aritmetična sredina: μ
- standardna negotovost

$$u(x)=\frac{a\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{6}}$$

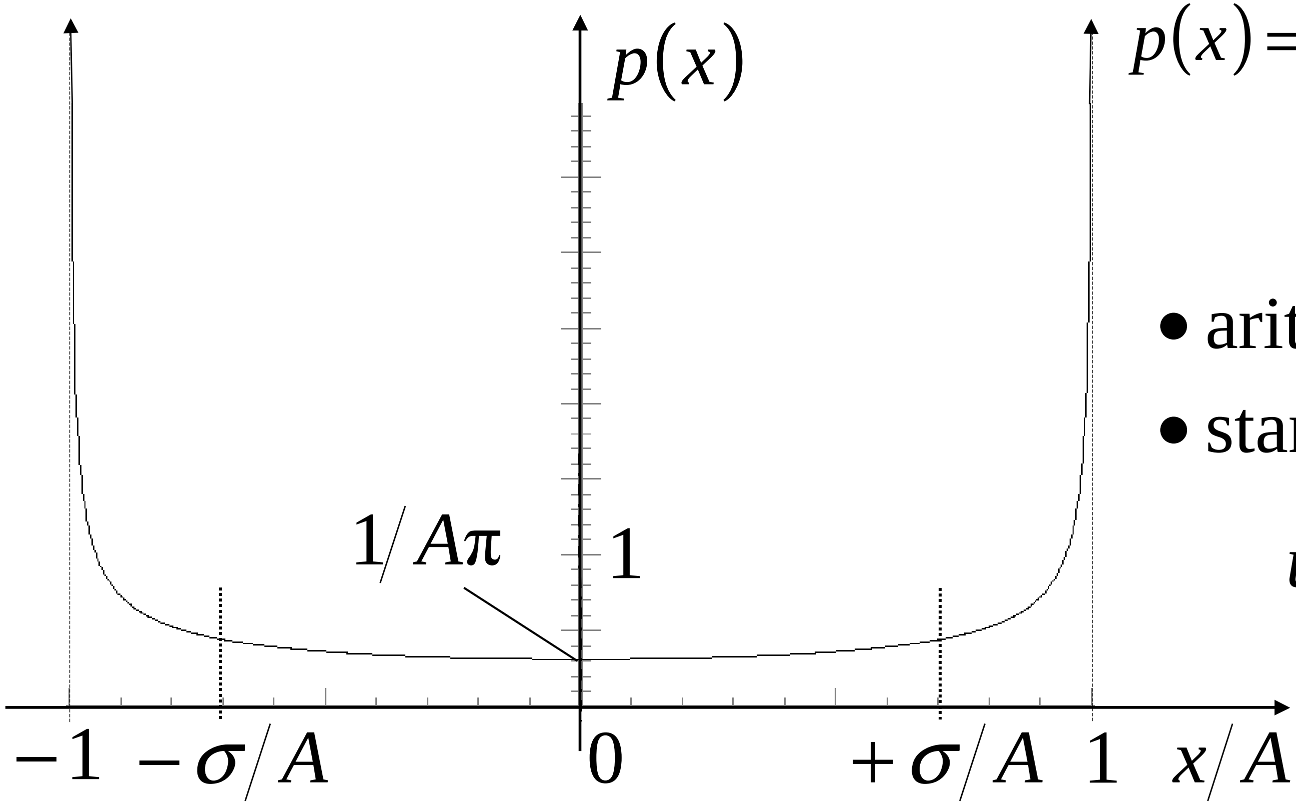
Slika 2.13 Trapezna porazdelitev

$\beta=0 \rightarrow$ trikotna porazdelitev, $\beta=1 \rightarrow$ enakomerna porazdelitev

2.4.8 U porazdelitev

U obliko dobimo pri porazdelitvi amplitudnih vrednosti sinusnega signala $x = A\sin(\omega t)$ v eni periodi in je oblike:

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{A\pi\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}}$$



- aritmetična sredina: $\mu = 0$
- standardna negotovost:

$$u(x) = \sigma = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Slika 2.14 U porazdelitev ($A = 1$)

2.4.9 Standardna negotovost izhodne veličine - $u_c(y)$

Izhodna (merjena) veličina je funkcija N vhodnih veličin:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

- Za oceno **celotne standardne negotovosti** $u_c(y)$ (combined standard uncertainty) potrebujemo dober matematični model;
- Izmerjena vrednost y je le ocena izhodne veličine Y na podlagi ocen vhodnih veličin in funkcijske povezave:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

  - korekcija sistematičnih pogreškov,
  - pri **eni** meritvi je x_1 kar ocena X_1,
  - pri **ponavljanju** pa je $\bar{x}$ ocena veličine X_1.

Vhodne veličine so lahko:

- medsebojno **neodvisne** (pogosto);
- ali medsebojno **odvisne**.

Vhodne veličine so medsebojno neodvisne

Po razvoju enačbe $y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ v Taylorjevo vrsto in upoštevanju le členov prvega reda, dobimo **celotno negotovost**:

$$u_c(y) = \sqrt{[c_1 u(x_1)]^2 + [c_2 u(x_2)]^2 + ... + [c_N u(x_N)]^2}$$

ali $$u_c(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y) + ... + u_N^2(y)}$$

- pri čemer so: $u_1(y) = |c_1| u(x_1), \ \ldots, \ u_N(y) = |c_N| u(x_N)$ **deleži** zaradi negotovosti vhodnih veličin;
- $c_1 = \dfrac{\partial y}{\partial x_1}, \ \ldots, \ c_N = \dfrac{\partial y}{\partial x_N}$ - koeficienti občutljivosti

Zgled-1: $y = x_1 + x_2$

- Koeficienta občutljivosti: $c_1 = \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = 1, \quad c_2 = \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = 1;$
- Celotna standardna negotovost: $u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$

Zgled-2: $y = \dfrac{x_1}{x_2}$

- Koeficienta občutljivosti: $c_1 = \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \dfrac{1}{x_2}, \quad c_2 = \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = -\dfrac{x_1}{x_2^2};$
- Prispevka k celotni standardni negotovosti:

$$u_1(y) = |c_1| u(x_1) = \left|\frac{1}{x_2}\right| u(x_1), \qquad u_2(y) = |c_2| u(x_2) = \left|-\frac{x_1}{x_2^2}\right| u(x_2)$$

- Celotna standardna negotovost:

$$u_c(y) = \sqrt{\left(\frac{1}{x_2}u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2^2}u(x_2)\right)^2}$$

- Relativna oblika celotne standardne negotovosti:

$$\frac{u_c(y)}{y} = w_c(y) = \sqrt{w^2(x_1) + w^2(x_2)}$$

Vhodne veličine so medsebojno odvisne - korelirane

Odvisnost se nanaša na **naključne** spremenljivke.

Merilo za medsebojno odvisnost dveh naključnih spremenljivk je (ocenjena) kovarianca.

- Pri n neodvisnih parih sočasnih izmerkov vhodnih veličin x_1 in x_2 je **kovarianca**:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(x_{1,i} - \bar{x}_1\right)\left(x_{2,i} - \bar{x}_2\right)$$

- relativna medsebojna odvisnost je podana s **koeficientom korelacije *r***:

$$r = \frac{u(x_1, x_2)}{u(x_1)u(x_2)}$$

Celotna standardna negotovost je:

$$u_c(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}[c_i\,u(x_i)]^2+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c_i\,c_j\,r(x_i,x_j)u(x_i)u(x_j)}$$

$r(x_i,x_j)$ - koeficient korelacije med -1 in $+1$

Zgled-1: $y=x_1-x_2$

- Koeficienta občutljivosti: $c_1=\dfrac{\partial y}{\partial x_1}=1,\quad c_2=\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=-1;$
- Celotna standardna negotovost:

$$u_c(y)=\sqrt{u^2(x_1)+u^2(x_2)+2(1)(-1)r(x_1,x_2)u(x_1)u(x_2)}$$

$$u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) + 2(1)(-1)r(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)}$$

- če $r(x_1, x_2) = +1$: $\quad u_c(y) = u(x_1) - u(x_2)$
- če $r(x_1, x_2) = -1$: $\quad u_c(y) = u(x_1) + u(x_2)$
- če $r(x_1, x_2) = 0$: $\quad u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$

2.4.10 Razširjena negotovost - U

Če želimo podati interval z večjo stopnjo zaupanja ($p = 95\,\%$ ali $p = 99\,\%$) uporabljamo **razširjeno negotovost**:

$$U = k\, u_c(y)$$

- s **faktorjem razširitve *k*** pomnožena (celotna) standardna negotovost,
- popolni merilni rezultat je sedaj: $Y = y \pm U$

Povezava med faktorjem razširitve k in stopnjo zaupanja p **ni enoznačna**.

- Odvisna **od porazdelitve** izhodne veličine.

Kot **prvi približek** se uporablja kar **normalna porazdelitev** $(k = z)$.

Pri **manjšem številu** meritev je bolje uporabiti ***t*-porazdelitev**, ki ima ν_{eff} **efektivnih stopenj prostosti**:

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u_{\mathrm{c}}^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} u_{\mathrm{i}}^4(y)/\nu_{\mathrm{i}}}$$ (zaokrožimo navzdol) $\rightarrow$ t dobimo iz tabele

- velja $\nu_{\mathrm{eff}} \leq \sum_{i=1}^{N} \nu_i$

Kadar želimo poudariti stopnjo zaupanja p, napišemo:

$$U_p = k_p u_{\mathrm{c}}(y) = t_p(v_{\mathrm{eff}}) u_{\mathrm{c}}(y)$$

- U_{95} pomeni razširjeno negotovost s stopnjo zaupanja 95%

Zgled:

- U smo merili 10-krat: $\overline{U} = 120{,}51\,\mathrm{V}$ in $s(U) = 0{,}79\,\mathrm{V}$,
- R smo merili 5-krat: $\overline{R} = 15{,}643\,\mathrm{k\Omega}$ in $s(R) = 0{,}084\,\mathrm{k\Omega}$,
- $u_c(P) = ?,\ U_c(P) = ?$ pri $p = 99\,\%$!

- moč na uporu: $P=\dfrac{U^2}{R}=\dfrac{(120{,}51\,\mathrm{V})^2}{15{,}643\,\mathrm{k}\Omega}=928{,}381\,\mathrm{mW}$

- celotna standardna negotovost:

$$u_\mathrm{c}(P)=\sqrt{u_1^2(P)+u_2^2(P)}$$

- prispevka k celotni negotovosti:

$$u_1(P)=|c_1|u(U)=\frac{2U}{R}\frac{s(U)}{\sqrt{n_1}}=\frac{2\cdot 120{,}51\,\mathrm{V}}{15{,}643\,\mathrm{k}\Omega}\frac{0{,}79\,\mathrm{V}}{\sqrt{10}}=3{,}85\,\mathrm{mW}$$

$$u_2(P)=|c_2|u(R)=\frac{U^2}{R^2}\frac{s(R)}{\sqrt{n_2}}=\frac{(120{,}51\,\mathrm{V})^2}{(15{,}643\,\mathrm{k}\Omega)^2}\frac{0{,}084\,\mathrm{k}\Omega}{\sqrt{5}}=2{,}23\,\mathrm{mW}$$

- celotna standardna negotovost:

$$u_\mathrm{c}(P)=\sqrt{u_1^2(P)+u_2^2(P)}=\sqrt{(3{,}85\,\mathrm{mW})^2+(2{,}23\,\mathrm{mW})^2}=4{,}45\,\mathrm{mW}$$

$$u_c(P) = \sqrt{u_1^2(P) + u_2^2(P)} = \sqrt{(3{,}85\,\mathrm{mW})^2 + (2{,}23\,\mathrm{mW})^2} = 4{,}45\,\mathrm{mW}$$

- število efektivnih stopenj prostosti:

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} u_i^4(y) \big/ \nu_i} = \frac{(4{,}45\,\mathrm{mW})^4}{(3{,}85\,\mathrm{mW})^4 \big/ 9 + (2{,}23\,\mathrm{mW})^4 \big/ 4} = 12{,}8$$

$$\nu_{\mathrm{eff}} = 12{,}8 \quad \rightarrow \quad 12 \quad \rightarrow \quad t_p(\nu) = t_{99}(12) = 3{,}05$$

- razširjena negotovost:

$$U_{99} = k_{99} u_c(P) = t_{99}(12)\, u_c(P) = 3{,}05 \cdot 4{,}45\,\mathrm{mW} = 13{,}6\,\mathrm{mW}$$

- popolni merilni rezultat **s standardno** negotov.:

$$P = 928{,}4\,\text{mW}, \quad u_\text{c}(P) = 4{,}5\,\text{mW}, \quad \nu_\text{eff} = 12$$

  - sama celotna standardna negotovost še ne omogoča sklepanja o stopnji zaupanja!

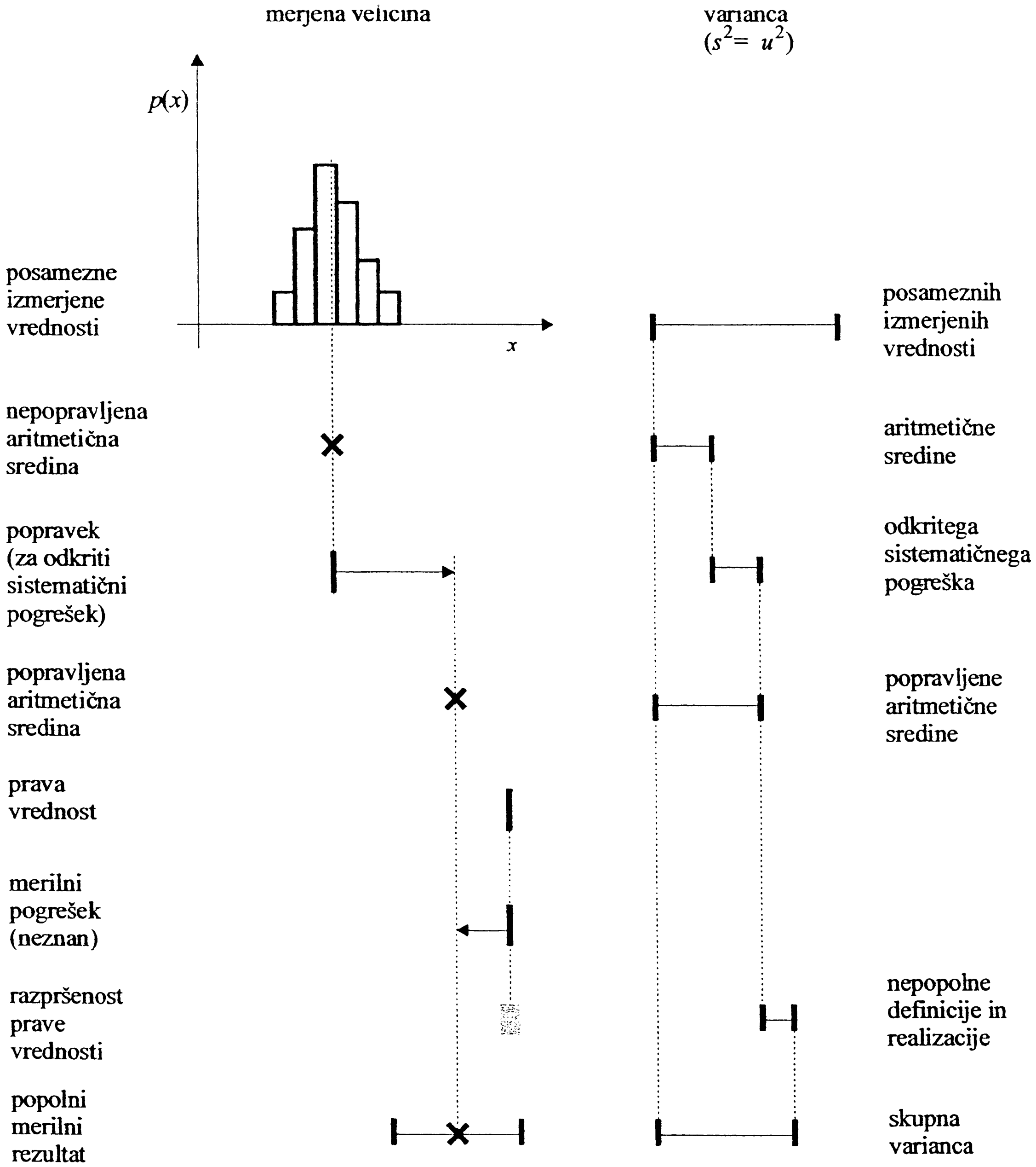
- popolni merilni rezultat **z razširjeno negotovostjo**:

$$P = 928\,\text{mW} \pm 14\,\text{mW}, \quad k = 3{,}05,\ \nu_\text{eff} = 12,\ p = 99\,\%$$

ali

$$P = 928\left(1 \pm 1{,}5 \cdot 10^{-2}\right)\text{mW},$$

$$k = 3{,}05,\ \nu_\text{eff} = 12,\ p = 99\,\%$$



Slika 2.15 Prikaz odnosov med izmerjenimi vrednostmi, pogreški in negotovostmi

2.5 Zaokrožanje številskih vrednosti

Popolni merilni rezultat navajamo **v obliki intervala**:

- z **izmerjeno vrednostjo** in **merilno negotovostjo**.

Pri navajanju popolnega merilnega rezultata **moramo zaokrožiti:**

- **najprej** negotovost,
- **in nato** izmerjeno vrednost.

Negotovost podajamo z **največ dvema veljavnima ciframa**.

- Zaokrožamo jo **navzgor**, pri zaokrožanju pa upoštevamo samo prvo cifro, ki jo že opustimo.

$u = 12{,}1\underline{4} \Rightarrow u = 13$ $\qquad u = 45\underline{6{,}}7 \Rightarrow u = 4{,}6 \cdot 10^2$

$u = 0{,}012\underline{0}3 \Rightarrow u = 0{,}012$ $\qquad u = 4{,}5\underline{0}6 \Rightarrow u = 4{,}5$

Uporabi ene same veljavne **cifre** pri merilni negotovosti **se izogibamo**, zato da ni vpliv zaokrožitve prevelik.

- Primer zaokrožitve na eno cifro $u = 0{,}031$ na $u_z = 0{,}04$:
    - učinek je enak, kot bi dodali negotovost u_d !:

$$\sqrt{u^2 + u_d^2} = u_z \quad \Rightarrow \quad u_d = \sqrt{u_z^2 - u^2} = \sqrt{0{,}04^2 - 0{,}031^2} = 0{,}025$$

Pri **vmesnih računih** merilne negotovosti obdržimo še **eno ali dve dodatni cifri**.

Izmerjeno vrednost zaokrožimo na **decimalnem** mestu, ki **ga določa (zaokrožena) negotovost**.

- Če je desno od mesta zaokrožitve ena od cifer 0 do 4, zaokrožimo navzdol:

  $X = 12{,}543\underline{4}\ldots$

  $u = 0{,}012 \quad \Rightarrow \quad X = 12{,}543$

- Če je desno od mesta zaokrožitve ena od cifer 5 do 9, zaokrožimo navzgor:

  $X = 12{,}543\underline{5}\ldots$

  $u = 0{,}012 \quad \Rightarrow \quad X = 12{,}544$

Tudi za izmerjene vrednosti velja, da **uporabljamo več cifer**, kot jih **bomo rabili pri navajanju končnega** rezultata.