Booleova algebra

Booleova algebra

Izjave in Booleove spremenljivke

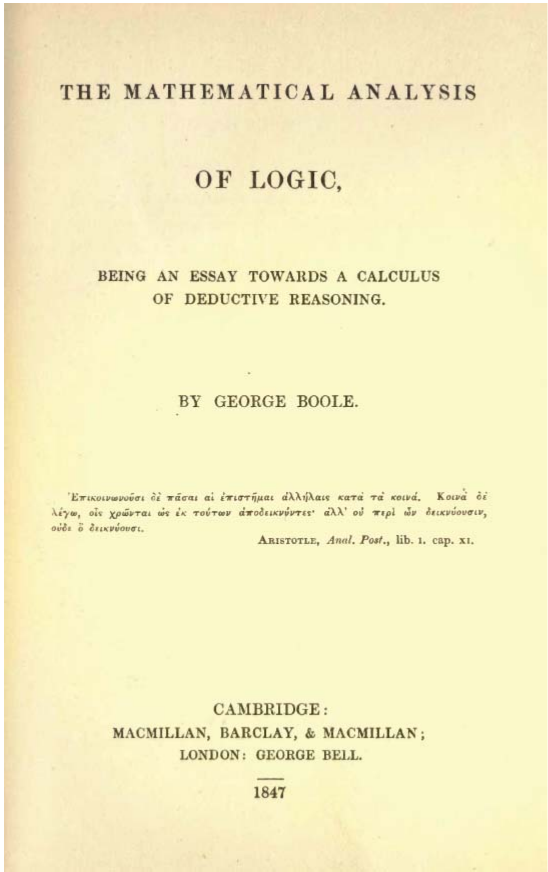
- vsako izjavo obravnavamo kot **spremenljivko**
- če je izjava resnična (pravilna), ima ta spremenljivka vrednost **1**, če je neresnična (nepravilna), pa vrednost **0**
- pravimo, da gre za **Booleovo spremenljivko**

George Boole (1815-1864)

Booleova algebra

Izjave in Booleove spremenljivke

- vsako izjavo obravnavamo kot **spremenljivko**
- če je izjava resnična (pravilna), ima ta spremenljivka vrednost **1**, če je neresnična (nepravilna), pa vrednost **0**
- pravimo, da gre za **Booleovo spremenljivko**



THE MATHEMATICAL ANALYSIS

OF LOGIC,

BEING AN ESSAY TOWARDS A CALCULUS
OF DEDUCTIVE REASONING.

BY GEORGE BOOLE.

Ἐπικοινωνοῦσι δὲ πᾶσαι αἱ ἐπιστῆμαι ἀλλήλαις κατὰ τὰ κοινά. Κοινὰ δὲ λέγω, οἷς χρῶνται ὡς ἐκ τούτων ἀποδεικνύντες· ἀλλ' οὐ περὶ ὧν δεικνύουσιν, οὐδὲ ὃ δεικνύουσι.

ARISTOTLE, *Anal. Post.*, lib. I. cap. XI.

CAMBRIDGE:
MACMILLAN, BARCLAY, & MACMILLAN;
LONDON: GEORGE BELL.

1847

naslovnica Booleove knjige
The Mathematical Analysis of Logic

Booleova algebra

Izjave in Booleove spremenljivke

tip spremenljivke	angleško	zaloga vrednosti
kompleksna	complex	vsa kompleksna števila ($\mathbb{C}$)
realna	real	vsa realna števila ($\mathbb{R}$)
celoštevilska	integer	vsa cela števila ($\mathbb{Z}$)
Booleova	Boolean	števili 0 in 1

Booleova algebra

Operacije z izjavami

- disjunkcija = logično seštevanje = ALI (angl. OR); simboli +, ∨, ||
- konjunkcija = logično množenje = IN (angl. AND); simboli •, ∧, &
- negacija = logično zanikanje = NE (angl. NOT); simbola ¯, ¬

vhodni izjavi

izhodna izjava

ČE *dežuje* ALI *slaba vremenska napoved* POTEM *vzamem dežnik*

operacija med
vhodnima izjavama

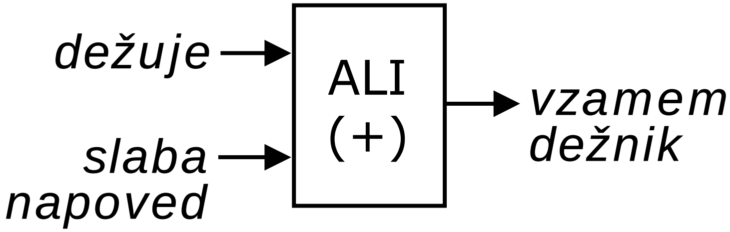
(*dežuje*) + (*slaba vremenska napoved*) = (*vzamem dežnik*)

Booleova algebra

Operacije z izjavami

- disjunkcija = logično seštevanje = ALI (angl. OR); simboli +, ∨, ||
- konjunkcija = logično množenje = IN (angl. AND); simboli •, ∧, &
- negacija = logično zanikanje = NE (angl. NOT); simbola ¯, ¬

(*vzamem dežnik*) = (*dežuje*) + (*slaba vremenska napoved*)



dežuje	slaba napoved	dežnik
NE	NE	NE
NE	DA	DA
DA	NE	DA
DA	DA	DA

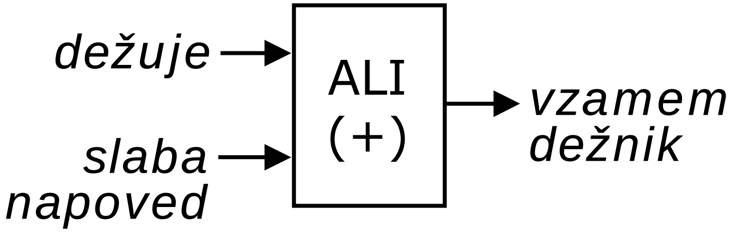
pravilnostna tabela za disjunkcijo

Booleova algebra

Operacije z izjavami

- disjunkcija = logično seštevanje = ALI (angl. OR); simboli +, ∨, ||
- konjunkcija = logično množenje = IN (angl. AND); simboli •, ∧, &
- negacija = logično zanikanje = NE (angl. NOT); simbola ¯, ¬

$$(\textit{vzamem dežnik}) = (\textit{dežuje}) + (\textit{slaba vremenska napoved})$$



x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

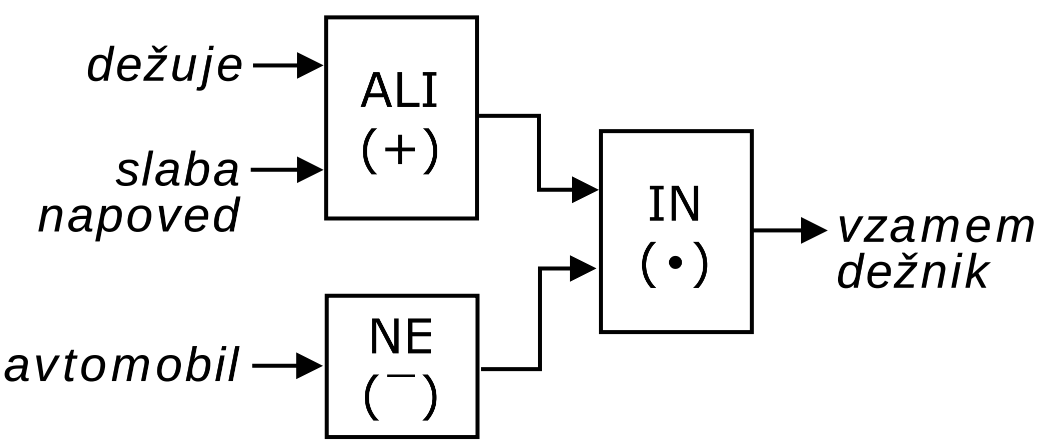
pravilnostna tabela za disjunkcijo

Booleova algebra

Operacije z izjavami

- disjunkcija = logično seštevanje = ALI (angl. OR); simboli +, V, ll
- konjunkcija = logično množenje = IN (angl. AND); simboli •, Λ, &
- negacija = logično zanikanje = NE (angl. NOT); simbola ¯, ¬

$$(\textit{vzamem dežnik}) = ((\textit{dežuje}) + (\textit{slaba vremenska napoved})) \bullet \overline{((\textit{peljem se z avtomobilom}))}$$



x	y	$x \bullet y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

pravilnostni tabeli za konjunkcijo in negacijo

Booleova algebra

Operacije z izjavami

- disjunkcija = logično seštevanje = ALI (angl. OR); simboli +, ∨, ||
- konjunkcija = logično množenje = IN (angl. AND); simboli •, ∧, &
- negacija = logično zanikanje = NE (angl. NOT); simbola ¯, ¬

vrstni red izvajanja operacij:

- brez oklepajev: najprej negacija, nato konjunkcija, na koncu disjunkcija

$$x \bullet z + \bar{y} \bullet z + \bar{x} \bullet y \bullet \bar{z}$$

- morebitne oklepaje upoštevamo enako kot v običajni aritmetiki

$$x \bullet (z + \bar{y}) \bullet z + \bar{x} \bullet y \bullet \bar{z}$$

- negacija nad izrazom z več spremenljivkami se izvaja, kot da je izraz v oklepajih

$$\overline{x \bullet y} = \overline{(x \bullet y)}$$

$$\overline{x + y} = \overline{(x + y)}$$

- kot pri običajnem množenju tudi tukaj znak • včasih opustimo

$$xy = x \bullet y$$

$$xz + \overline{(yz + \overline{xy})}z + z\bar{x}$$

Booleova algebra

Aksiomi in teoremi

aksiomi (postulati): pravila, ki se med seboj ne izključujejo in jih privzamemo brez preverjanja

teoremi: dodatna pravila, ki jih lahko izpeljemo iz aksiomov

Huntingtonovi postulati: sistem aksiomov (eden od možnih), ki omogoča postavitev pravil za sistem operacij $\{+, \bullet, \overline{}\}$

P1	$x + 0 = x$	nevtralnost	P3	$x + y = y + x$	komutativnost
P1'	$x \bullet 1 = x$		P3'	$x \bullet y = y \bullet x$	
P2	$x + \overline{x} = 1$	komplemen-tarnost	P4	$(x + y) + z = x + (y + z)$	asociativnost
P2'	$x \bullet \overline{x} = 0$		P4'	$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$	
			P5	$x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$	distributivnost
			P5'	$x + y \bullet z = (x + y) \bullet (x + z)$	

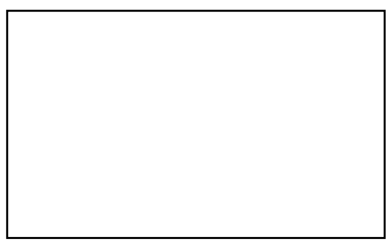
te lastnosti ustrezajo algebrski strukturi (kolobarju), odtod "Booleova *algebra*"

Booleova algebra

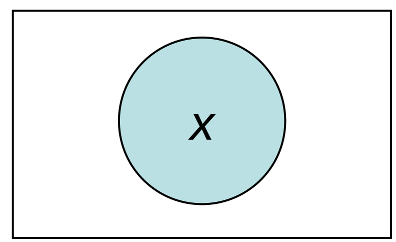
Vennovi diagrami

- z Vennovimi diagrami grafično ponazorimo Booleove spremenljivke in operacije med njimi kot množice
- disjunkcija med Booleovima spremenljivkama je ekvivalentna uniji med množicama, konjunkcija preseku, negacija pa komplementu

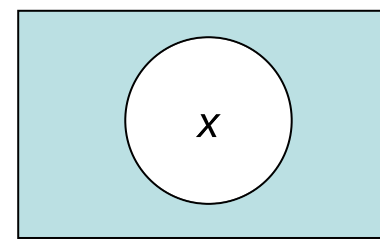
konstanta 1



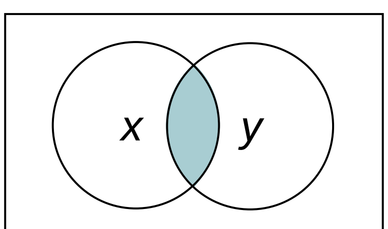
konstanta 0



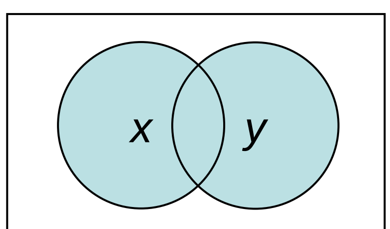
funkcija $f(x) = x$



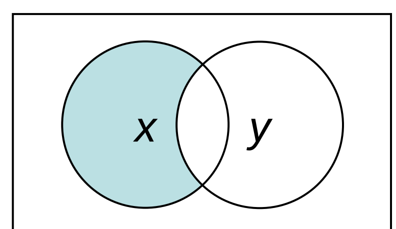
$f(x) = \overline{x}$



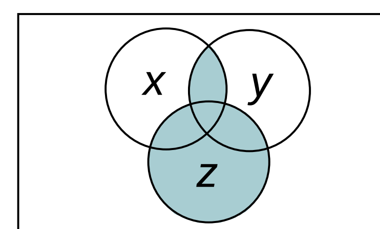
$f(x,y) = xy$



$f(x,y) = x + y$



$f(x,y) = x\overline{y}$



$f(x,y,z) = xy + z$

Booleova algebra

Trije načini dokazovanja teoremov

- iz aksiomov in že dokazanih teoremov
- s pravilnostno tabelo (popolna indukcija)
- z Vennovimi diagrami

Teorem T1: $x + 1 = 1$

Dokaz iz aksiomov:

$x + 1 = (x + 1)\bullet 1$ (uporabili smo P1': $x\bullet 1 = x$)

$= (x + 1)\bullet(x + \overline{x})$ (P2: $x + \overline{x} = 1$)

$= x + 1\bullet\overline{x}$ (P5': $x + y\bullet z = (x + y)\bullet(x + z)$)

$= x + \overline{x}\bullet 1$ (P3': $x\bullet y = y\bullet x$)

$= x + \overline{x}$ (P1': $x\bullet 1 = x$)

$= 1$ (P2: $x + \overline{x} = 1$)

Booleova algebra

Trije načini dokazovanja teoremov

- iz aksiomov in že dokazanih teoremov
- s pravilnostno tabelo (popolna indukcija)
- z Vennovimi diagrami

Teorem T1: $x + 1 = 1$

Dokaz s pravilnostno tabelo:

x	1	$x + 1$
0	1	1
1	1	1

Booleova algebra

Trije načini dokazovanja teoremov

- iz aksiomov in že dokazanih teoremov
- s pravilnostno tabelo (popolna indukcija)
- z Vennovimi diagrami

Teorem T1: $x + 1 = 1$

Dokaz z Vennovimi diagrami:

Booleova algebra

Teoremi z eno in dvema spremenljivkama

T1	$x + 1 = 1$
T2	$x + x = x$
T3	$x \bullet x = x$
T4	$x \bullet 0 = 0$
T5	$\overline{\overline{x}} = x$

T6	$x + x \bullet y = x$
T7	$x \bullet (x + y) = x$
T8	$(x + \overline{y}) \bullet y = x \bullet y$
T9	$x \bullet \overline{y} + y = x + y$
T10	$x + y + \overline{x} = 1$
T11	$\overline{x} \bullet \overline{y} \bullet x = 0$
T12	$\overline{x + y} = \overline{x} \bullet \overline{y}$
T13	$\overline{x \bullet y} = \overline{x} + \overline{y}$